

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 4.

Avril

1907.

- Sommaire:** 15. M. HUGO ZAPALOWICZ. Revue critique de la flore de la Galicie, IX partie.
16. M. ST. SASKI. Sur les microbes anaérobies dans les tissus normaux.
17. M^{lle} GIZELA GOLDFINGER. Sur le développement des sacs lymphatiques dans les membres postérieurs de la Grenouille.
18. M. L. GRABOWSKI. Sur les erreurs physiologiques dans les mesures astronomiques faites au moyen de micromètres d'occultation.
19. M. E. PIASECKI. Contribution à l'étude des lois du travail musculaire volontaire.
20. M. LADISLAS NATANSON. Sur la théorie électro-magnétique de la dispersion et de l'extinction dans les corps gazeux.

Séance du lundi 8 Avril 1907.

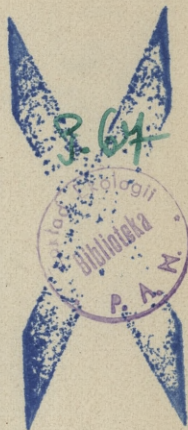
PRÉSIDENCE DE M. K. OLSZEWSKI.

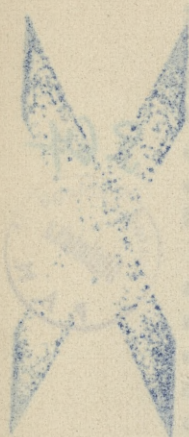
15. M. HUGO ZAPALOWICZ m. c. *Krytyczny przegląd roślinności Galicyi, część IX. (Revue critique de la flore de la Galicie, IX partie).*

L'auteur traite dans cette partie les dernières espèces des Salicaceae, ensuite les familles des Urticaceae, Moraceae, Ulmaceae et à la fin les espèces du genre Rumex. Parmi les nouveautés, signa- lions Rumex carpaticus et la forme hybride bien intéressante: Rumex acetosa \times alpinus.

Rumex carpaticus m. (n. sp.).

Caulis 45—87 cm altus, pro altitudine robustus, ad 6 mm cras- sus, profundius striatus, pro parte distincte angulatus; folia tenuia, mi- nus tamen quam in R. arifolio, omnia exacte cordato ovata, inferiora 5.5—7.5 cm longa 5.1—5.5 cm lata, ad 11 cm longa 6 cm lata, superiora sensim minora, 3.8—7.5 cm longa 3.5—5.3 cm lata, breviter petio- lata suprema sessilia, folia inferiora apice rotundata superiora ob- tusa, lobis rotundato obtusis, nervis prominentibus, folia caulina valde distantia, plerumque 3 tantum; inflorescentia ramosa, plus mi- nus conferta et densiflora, 14—20 cm rarius ad 30 cm longa, rami magis approximati, ascendentes, 3—9 cm tantum longi, semper par-





tim saltem ramosi vel multiramosi et fasciculati, 1--3 rami inferiores foliolo fulti; perigonii fructiferi phylla interna orbicularia, 2.5--3 mm longa, aequilata, basi leviter cordata vel subtruncata aut rotundata, reticulato venosa, venis prominentibus, basi callo parvo deflexo instructa; externa 1.2--1.3 mm longa, subnaviculariformia, evidenter paulo latiora quam in praecedente, refracta; nux ad 2.2--2.3 mm longa, nigra; pedunculi ad 4 mm longi, semper distincte sub medio, paulo inferius quam in *R. arifolio*, articulati; ochreae verosimiliter ab eis *R. arifolii* diversae, in vivo diligenter observandae.

De cetero ut in affini *R. arifolio*, a quo caule crassiore, foliis omnibus cordatis, obtusis, inflorescentia supraramosa densiflora et floribus nucibusque minoribus optime differt. Crescit tantum in Carpatis orientalibus, ubi praecedentis vicem explet.

R. acetosa × *alpinus*. *R. babiogorensis* m. Exemplum feminineum, deflorescens, 34 cm altum, unicaule, caulis crassiusculus, pro parte purpureus; folia compacta, basalia et caulina inferiora longe petiolata, sagittato oblonga, 3.1--5.2 cm longa, 1.9--2.2 cm lata, apice obtusata, lobis latis brevibus partim paulo hastato patentibus, superiora sensim angustiora, hastato lanceolata; inflorescentia brevis, conferta, 9.5 cm longa, densiflora, rami crassiusculi simplices, breves, ad 3.5 cm longi, propter verticillos valde approximatos racemis densis similes, inferiores paucis foliolis anguste lanceolatis vel linearibus fulti, tota inflorescentia diminutam inflorescentiam *R. alpini* praesentans; perigonii deflorati phylla interna subrotunda, 4--4.5 mm longa, 3.5--4 mm lata, basi leviter cordata vel subtruncata, ecallosa; externa circ. 1.2 mm longa, subnaviculariformia, pro parte refracta; nux juvenilis 3 mm longa; pedunculi versus medium articulati, ad 5 mm longi; pedunculi ac flores pro parte purpurei.

Foliis, perigonii phyllis externis, pedunculis et statura humiliore *R. acetosae*, inflorescentia densiflora, perigonii phyllis internis et nucibus *R. alpino* propior.

In prato subalpino montis Babia Góra Carpatorum occidentalium.

16. M. ST. SASKI. O beztlenowcach w tkankach ustroju prawidlowego. (*Über anaerobe Mikroben in normalen Körpergeweben*). (*Sur les microbes anaérobies dans les tissus normaux*). Mémoire présenté par M. M. Siedlecki m. c.

Aus zahlreichen, bisherigen Untersuchungen über den Keimgehalt normaler Körpergewebe ergibt sich, daß die Organe in ihrem Inneren bei sonst normalem Zustande des Organismus nicht selten Mikroben enthalten können. Diese Untersuchungen beziehen sich vorzugsweise auf strikte, bzw. fakultative Aërobien. Das diesbezügliche Verhalten der Anaëroben wurde aber bei solchen Untersuchungen nur in recht geringem Maße berücksichtigt. Da also diese Frage noch ziemlich offen stand, hat der Verfasser eine Reihe von Versuchen zu ihrer Klärung angestellt, um zu ermitteln, ob normale Körpergewebe auch lebensfähige, streng anaerobe Mikroben beherbergen können. Die Versuche des Verfassers wurden an gesunden Meerschweinchen und Mäusen gemacht, in deren Organen keine makroskopischen, pathologischen Veränderungen bestanden.

Die Anordnung der streng aseptisch ausgeführten Versuche war folgende: das Versuchstier wurde auf ein Brett gespannt, die Hare von Thorax und Bauch abgeschoren und der ganze Rumpf mit Wasser und Seife und später mit Sublimatlösung abgespült.

Nachdem das Tier mit einer Mischung von Chloroform, Äther und Alkohol narkotisiert war, wurde ihm die Haut vom Halse bis zu der Symphyse aufgeschnitten und abpräpariert, die Bauchmuskeln gründlich abgesengt und die Bauchhöhle geöffnet. Alsdann wurden Organstücke entnommen, deren Oberfläche der Wirkung der Flamme eines Bunsen-Brenners kurze Zeit ausgesetzt und unmittelbar in Röhrechen mit Peptonbouillon gebracht. Es wurden die Stücke gewöhnlich nicht zerkleinert, nur größere Organstücke, resp. ganze Organe, z. B. Mäusenieren, wurden im oberen Teile des Röhrechens mit einer Schere in zwei Hälften zerschnitten.

Die Entnahme der Organstücke, bzw. der Organe der Bauchhöhle, geschah in nachstehender Reihenfolge: Mesenterialdrüsen (nur bei Meerschweinchen), Milz, Nieren, Leber; darnach wurde die Galle und der Urin mittels steriler Pipetten entnommen, welche nach Thermokauterisierung der Oberfläche der betreffenden Organe eingestochen wurden. Alsdann wurde der Thorax nach genauer

Kauterisierung der Schnittfläche geöffnet. Es wurden aus der Brusthöhle bei Meerschweinchen Bronchialdrüsen, kleine Stückchen von beiden Lungen und das Herzblut, bei Mäusen ebensolche Lungenstücke und das ganze mit Blut gefüllte Herz zur Verimpfung entnommen. In einigen Versuchen wurden außerdem Stücke von tiefliegenden Hüftenmuskeln nach Abbrennung der oberflächlichen Partien ausgeschnitten.

Schließlich wurde der Femur reseziert, von Muskeln und Periostium befreit, mit absolutem Alkohol benetzt, der Alkohol verbrannt, die Epiphysen mit einer scharfer Schere abgeschnitten, um das Knochenmark mit dem Nährboden in Kontakt zu bringen, der Knochen danach noch mehrmals durch eine Bunsenflamme gezogen und schließlich in Bouillon gebracht.

Die Größe der entnommenen Organstücke betrug ungefähr 0.5 ccm bis 1 ccm. Im ganzen wurden 20 Tierexperimente und zwar 10 an Meerschweinchen und 10 an Mäusen angestellt.

Zur Kultivierung der in den untersuchten Geweben eventuell enthaltenen Anaëroben hat sich Verfasser hauptsächlich der sich aus den Untersuchungen von Tarozzi und Wrzosek ergebenden Methoden bedient. Beide haben nämlich nachgewiesen, daß sich strenge Anaëroben bei freiem Luftzutritt in flüssigen Nährböden in Gegenwart von sterilen Tiergeweben entwickeln können. Die genannte Eigenschaft der strengen Anaëroben erleichtert außerordentlich deren Kultur aus Geweben. Es sind namentlich dazu keine speziellen Kulturmittel nötig, da sich die anaëroben Mikroorganismen gleich den aëroben in gewöhnlicher Bouillon mit dem versenkten Organstücke genügend entwickeln. In vier Versuchen wurde ausschließlich diese Methode angewendet. In den übrigen wurden außer ihr noch andere für Züchtung der Anaëroben übliche Methoden angewendet. Es wurden nämlich in fünf Versuchen Bouillonröhrchen, bezw. Petrische Schalen mit Organstücken in einen Botkin'schen Apparat in Wasserstoffatmosphäre gebracht. In elf Versuchen wurden die Organstücke in Bouillon mit Paraffin überschichtet verimpft. Blut, Galle und Harn wurden stets auf diese Weise verimpft.

Nach der Impfung wurden die Bouillonröhrchen im Brutschranke bei 37° C 10 bis 14 Tage lang beobachtet. Falls in einem Röhrchen Bakterienwachstum eingetreten war, wurden die Keime mikroskopisch und kulturell auf Aërobiose, resp. Anaërobiose unter-

sucht. Es sei erwähnt, daß das Wachstum der Mikroben aus den Organstücken nicht immer durch Trübung des Nährbodens sich kundgab. In einigen Fällen, nämlich bei Anaëroben, konnte dies nur durch mikroskopische Untersuchung des Bodensatzes, der sich üppig aus den Gewebeflocken bildete, und durch nachträgliche Kultur festgestellt werden.

Für die ganze Dauer eines jeden Versuches wurde in der Nähe des Operationsfeldes eine Agarplatte aufgestellt, um den Keimgehalt der Luft während des Versuches zu kontrollieren und Anhaltspunkte zu gewinnen, ob nicht etwa Verunreinigungen aus der Luft ausgeschlossen werden sollten. Die Ergebnisse dieser Versuche waren folgende: Wie bereits erwähnt wurden im ganzen 20 Tierexperimente angestellt und von diesen 40 Stück Leber, 33 Stück Milz, 38 Stück Nieren, 26 Stück Knochen mit Mark, 30 Stück Lunge, 12 Mesenterialdrüsen, 10 Bronchialdrüsen, 4 Stück Muskeln, 12 Stück Herz, 11 Portionen Blut, 9 Portionen Harn und 8 Portionen Galle bakteriologisch untersucht. Von drei Tieren erwiesen sich alle Organe vollkommen keimfrei. Als nicht steril erwiesen sich Leber von 5 Tieren, Milz von 2 Tieren, Nieren von 5 Tieren, Mesenterialdrüsen von 4 Tieren, Lungen von 8 Tieren, Bronchialdrüsen von 2 Tieren, Knochen von 7 Tieren, Muskeln von 1 Tiere. Herz, Blut, Galle und Harn blieben stets steril.

Die Zahl der aus einzelnen Organen gezüchteten Bakterienstämme und deren Aërobie, resp. Anaërobie ist in nachstehender Tabelle dargestellt:

	Total.	streng aërob.	fakult. anaërob.	streng anaërob.
Leber	7	1	3	3
Milz	2	1	1	—
Nieren	6	—	4	2
Mesenterialdrüsen	5	1	2	2
Lunge	8 u. 1 Schimmelpilz	2	5	1
Bronchialdrüsen	1 u. 1 Schimmelpilz	1	—	—
Knochen	9	1	6	2
Muskeln	1	1	—	—
	39 u. 2 Schimmelpilze	8	21	10

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, daß im ganzen aus den Organen 39 Bakterienstämme und 2 Schimmelpilze gezüchtet worden sind. Diese Bakterien zerfallen auf grund ihres Verhaltens

zum Sauerstoff in drei Gruppen: die zahlreichste Gruppe bilden fakultative Anaerobien, nämlich 21 Stämme, also 53·8% der Gesamtzahl der gezüchteten Stämme; die zweite Gruppe bilden streng anaerobe Mikroben: 10 Stämme, d. h. 25·6%; an dritter Stelle stehen strenge Aerobien, deren Anzahl acht, 20·5% der gesamten Zahl der gezüchteten Stämme ausmacht. Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß unter den zehn gezüchteten strengen Anaerobien sich sechs aus Organstücken, die in gewöhnliche Bouillon bei Luftzutritt verimpft worden waren, entwickelten, drei Kulturen entstanden aus Organstücken in Bouillon mit Paraffin überschichtet und eine Kultur stammte aus einem Bouillonröhrchen, das in Wasserstoffatmosphäre gebracht worden war.

Was die Art der gezüchteten Anaerobien anbetrifft, so waren es in einem Falle außerordentlich kleine Streptokokken, in allen übrigen Fällen nicht näher bestimmte, verschiedenartige Stäbchen. Zwei von ihnen (aus Mesenterialdrüsen eines und desselben Tieres gezüchtet) stellten sich als ziemlich große, den Tetanusbazillen ähnliche Stäbchen mit Endsporen dar.

Sämtliche aus den Organstücken gezüchteten Keime erwiesen sich bei näherer Untersuchung als nichtpathogen für Mäuse.

Bezüglich der Herkunft anaerober Mikroben, die in den Geweben gefunden worden sind, spricht der Verfasser die Meinung aus, man könne auf grund bisheriger Untersuchungen auf betreffendem Gebiete annehmen, daß die Anaerobien den Aerobien analog wahrscheinlich meistens aus dem Darmkanal in die inneren Organe eindringen.

Es führen also die Ergebnisse der Untersuchungen des Verfassers zu dem Schlusse, daß in den Geweben normaler Meerschweinchen und Mäuse neben aeroben Mikroben und fakultativen Anaerobien auch strenge Anaerobien vorkommen können.

Wenn man die Tatsache berücksichtigt, daß anaerobe Mikroben nur in sehr geringer Anzahl in der Luft vorkommen, bilden die vorliegenden Untersuchungen eine recht starke Stütze für die aus den bisherigen, aerobe Mikroben betreffenden Untersuchungen sich ergebende Behauptung, daß die Gewebe eines normalen Organismus nicht immer keimfrei sind.

Aus dem Institut für allgemeine und experimentelle Pathologie
der Jagellonischen Universität in Krakau.

17. M-lle GIZELA GOLDFINGER. O rozwoju worków limfatycznych w tylnych odnóżach żaby. (*Über die Entwicklung der Lymphsäcke in den hinteren Extremitäten des Frosches*). (*Sur le développement des sacs lymphatiques dans les membres postérieurs de la Grenouille*). Mémoire présenté par M. H. Hoyer m. c.

(Planche X).

Über die Entstehung und Entwicklung des Lymphgefäßsystems sind in der Literatur nur wenige Angaben zu finden. Verhältnismäßig am meisten ist das Lymphgefäßsystem der Amphibien bearbeitet worden, indessen fehlen auch hier genauere Angaben über die Entwicklung der subkutanen Lymphsäcke, die beim erwachsenen Frosche einen so außergewöhnlichen und in keiner anderen Tiergruppe beobachteten Entwicklungsgrad erreichten. An diese Aufgabe machte ich mich auf Veranlassung des Herrn Prof. Hoyer iun. in seinem Laboratorium und unter seiner Leitung, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen wärmsten Dank ausspreche.

In der vorliegenden Arbeit suchte ich vor allem die Frage zu entscheiden, auf welche Weise die subkutanen Lymphsäcke in den sich entwickelnden Gliedmaßen des Frosches entstehen. Sind diese Säcke nur eigenartig veränderte und in diesem Fall mit Klappen versehene Lymphgefäße, oder sind es Gebilde *sui generis*? Da die vorderen Gliedmaßen der Froschlarven wegen ihrer versteckten Lage zu einer derartigen Untersuchung wenig geeignet sind, beschränkte ich mich auf die Verhältnisse in den hinteren Gliedmaßen der Froschlarve der *Rana temporaria*, in der Voraussetzung, daß das Entwicklungsprinzip sich in allen Körperteilen auf eine und dieselbe Weise äußere. Zur Untersuchung des Lymphgefäßsystems bediente ich mich der Injektionsmethode mit wasserlöslichem Berlinerblau. Es wurden Froschlarven auf verschiedenen Entwicklungsstufen untersucht, mit den Stadien angefangen, wo die hinteren Gliedmaßen der Froschlarve in Gestalt von kleinen Höckern zu beiden Seiten der Schwanzwurzel heraustreten, bis zu ihrer Umbildung in Extremitäten. Ich ging dabei in folgender Weise vor: Mit Benutzung des binokulären Mikroskopes stach ich mittels einer zarten, in ein haarfeines Ende ausgezogenen Glaskantüle, welche mit Lösung von Berlinerblau gefüllt war, den Flossensaum an, führte die Kantüle in ein entsprechendes Lymphgefäß ein und injizierte

die Lymphgefäße unter dem Drucke der ausgeatmeten Luft. Es füllten sich die Lymphgefäße an der Schwanzwurzel, und von hier aus gelangte die Injektionsmasse in die Extremitäten. Das richtige Maß des angewandten Druckes wurde mit der Zeit durch Übung gewonnen: war der Druck zu gering, so gelangte die Masse nicht in die Extremitäten, oder füllte die Gefäße nur unvollständig, bei zu starkem Drucke beobachtete ich mehrmals Extravasate von unregelmäßiger Gestalt an den Enden der Gefäße. Bei derartiger Anordnung des Injektionsverfahrens ist ein übermäßig starker Druck überhaupt nicht möglich, da man mit Mund nicht imstande ist, einen großen Druck auszuüben und da ferner die Masse dem geringeren Widerstande folgend in die größeren Gefäße des Rumpfes abfließt. Um von vornherein alle Zweifel auszuschließen, daß es sich bei meinen Injektionen um Blutgefäße handle, füge ich zur Veranschaulichung des Blutgefäßsystems in der hinteren Extremität Fig. 1 bei, welche die Unterschiede zwischen Blut- und Lymphgefäßen ohne weiteres erkennen läßt.

Abgesehen davon, daß die Topographie dieser beiden Systeme eine grundverschiedene ist, kann man die Gestalt der Blutgefäße aus ihren geradlinigen Konturen sofort erkennen, welche in den Lymphgefäßen ganz unregelmäßig und wie von einer unsicheren Hand gezeichnet sind. Daß es sich bei meinen Lymphgefäßinjektionen um keine Extravasate handelt, beweist uns die Stätigkeit und Regelmäßigkeit der durch Injektion erhaltenen Bilder, sowie die Kontrolle derselben an histologischen Querschnitten. Im ersten Stadium, wo die hinteren Extremitäten am Schwanzansatz als kleine Höcker sichtbar werden, ließen sich darin noch keine Lymphgefäße nachweisen. Wenn die hinteren Extremitäten in Form von am freien Ende abgeplatteten Stümpfen hervorgewachsen sind, lassen sich im Schwanze der Froschlarven Lymphherzen- und Gefäße injizieren; auch werden bereits in der Bauchwand einzelne Lymphgefäße sichtbar. In die Gliedmaßen dringt jedoch die Injektionsmasse noch nicht ein. Auch fand ich keine Spur von Lymphgefäßen in den Schnitten, welche ich von den in dem oben erwähnten Entwicklungsstadium begriffenen Gliedmaßen anfertigte. Erst in einem etwas späteren Stadium, wenn die Extremität nur unbedeutend größer geworden ist und am freien Ende sich zu verbreitern und abzuplatten beginnt, d. h. also dann, wenn aus dem bisher noch undifferenzierten Embryonalgewebe sich die Zehen zu bilden an-

fangen, füllt die Injektionsmasse ein zartes Gefäß. Dieses zweigt sich von einem dickeren Lymphgefäß in der Bauchwand ab und erstreckt sich bis zum Ansatz der Extremität an ihrer Außenseite, wie man es auf Fig. 2 sieht. Sobald die Entwicklung der Extremität soweit fortgeschritten ist, daß an ihrem freien Rande eine wellige Linie die Zehen anzudeuten beginnt, sieht man an der Außenseite der Extremitätenbasis ein oder zwei Gefäße, die sich von dem schon oben erwähnten Bauchlymphgefäß abzweigen; Fig. 3. Die feinen Gefäßchen bilden laterale Ausbuchtungen, gleichsam Knospen. Diese Gefäßchen besitzen an ihren proximalen Enden ein größeres Kaliber als an ihren distalen. Die nächste Fig. 4 stellt eine etwas vorgerücktere Entwicklungsstufe dar, hier sehen wir jene Lymphgefäße bereits verzweigt und untereinander durch laterale Sprossen zu einem zarten Netze verbunden. In dem folgenden, von mir untersuchten Stadium Fig. 5 ist das Netz im Oberschenkel schon bedeutend größer geworden; von da erstrecken sich einige Gefäße in den Unterschenkel, wo sie ebenfalls ein Netz von nur spärlichen Maschen bilden; von diesem Netz aus hat sich noch ein Gefäß injiziert, welches die Strecke durchläuft, an der wir beim erwachsenen Frosche das Ligamentum annulare calcanei finden. Dasselbe beginnt, sich an der Außenseite, respektive der späteren Dorsalseite des Fußes zu verzweigen und seine Abzweigungen verlängern sich in der Richtung der sich ausbildenden Zehen. Vergleichen wir dieses letzte Stadium mit dem nächstfolgenden, in Fig. 6 abgebildeten, so fällt uns sofort der große Fortschritt in der Entwicklung des subkutanen Lymphgefäßsystems auf. Jenes zarte Netz im Oberschenkel hat sich bedeutend ausgedehnt, seine Gefäße sind breiter und die Maschen dicker geworden. An einzelnen Stellen berühren sich die Gefäße, ja verschmelzen sogar, indem die Wände zwischen den einzelnen Gefäßen schwinden, wie dies Ranvier bereits beschrieben hat. Auf diese Weise ist nun ein dichtes Netz mit verhältnismäßig kleinen Maschen entstanden.

Gleichzeitig vergrößert sich auch bedeutend das Netz im Unterschenkel und seine Maschen werden ebenfalls kleiner. Dieses Netz steht nun durch ein oder mehrere Gefäße mit den Gefäßen des Fußes in Verbindung, welche sich auf dessen Dorsalseite verzweigen und anfänglich ein zartes, nachher immer größer und dichter werdendes Netz bilden, das bis in die Zehen reicht. Zwischen dem injizierten Netze des Ober- und Unterschenkels, d. h. in der Knie-

gend, sowie zwischen demjenigen des Unterschenkels und des Fußes findet man anfangs eine Unterbrechung in Form eines breiten, sich nicht injizierenden Bandes, durch welches die oben beschriebenen Gefäße auf der Seite der 1. Zehe gewissermaßen sich hindurchzwängen und so eine Kommunikation zwischen den Netzen der entsprechenden Fußabschnitte bilden. Fig. 7 a stellt eine weitere Entwicklungsstufe dar; hier ist das Lymphgefäßnetz des Oberschenkels bereits zu einem einheitlichen Sacke zusammengeschmolzen. Zu gleicher Zeit hat sich auch ein fast vollständiger Verschmelzungsprozeß der Lymphgefäße im Unterschenkel vollzogen, so daß nur an drei bis vier Stellen uninjizierte Felder übrig blieben. Auf der Zeichnung sehen wir eine Unterbrechung in der Kommunikation zwischen den Ober- und Unterschenkelsäcken der Außenseite. Eine Verbindung besteht nur an der Innenseite in Gestalt eines verhältnismäßig breiten Gefäßes, welches vom Oberschenkel durch die Fossa poplitea in den Unterschenkel verläuft, wie dies in Fig. 7 b zu sehen ist. Obwohl der Verschmelzungsprozeß am Fuße inzwischen bedeutend vorgerückt ist, kommt es dort doch noch nicht zur Ausbildung eines einheitlichen Sackes; das in die Zehen sich erstreckende Netz stellt sich in jeder derselben als ein breites, gleichsam einheitliches Gefäß dar. Es gelang mir nicht, die in der Schwimmhaut verlaufenden Gefäße zu injizieren, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil der Injektionsdruck zu gering war. Bei einer anderen Froschlarve, welche sich auf einer ähnlichen Entwicklungsstufe befand, injizierten sich in der Spitze der dreieckigen Schwimmhaut breite Gefäße, die beim reifen Tier gegen den Rand der Schwimmhaut in ein zartes Lymphgefäßnetz übergehen. Mittels dieser breiten Gefäße kommuniziert also das Lymphgefäßnetz der Schwimmhaut direkt mit den Säcken, beziehungsweise mit den Gefäßen in den Zehen und durch diese mit dem dorsalen Metatarsalsacke. Dieses Stadium veranschaulicht Fig. 8. Injizierte ich weiter entwickelte Extremitäten, so erhielt ich vollständig einheitliche, mit Farbstoff gefüllte Säcke und betrachtete daher die Entwicklung der subkutanen Lymphsäcke als beendet. Es sei noch bemerkt, daß jene Lymphgefäßnetze keine regulären, in sich geschlossenen Netze sind, da von den Gefäßen des Netzes seitliche, wahrscheinlich blind endigende Fortsätze sich abzweigen, wie dies Langer und andere an sich entwickelnden Lymphgefäßen in ande-

ren Körperteilen bereits beobachtet haben. Wie ich vermute, stellen diese Fortsätze knospende Lymphgefäße dar.

Jene Bänder, welche an der Grenze des Ober- und des Unterschenkels wie auch zwischen dem Unterschenkel und dem Fuße erwähnt wurden, reduzieren sich im Laufe der Entwicklung der Lymphsäcke zu schmalen Septen und bilden im definitiven Stadium das Septum annulare genus und Septum an. calcanei.

Die oben beschriebene Entwicklung betrifft die Außenseite, resp. nach beendigter Biegung und Drehung des Knie- und Fußgelenkes, die Dorsalseite der hinteren Extremität. An der Innen- und der Plantarseite vollzieht sich die Entwicklung der Säcke im Prinzip in derselben Weise. Von dem unteren Lymphgefäß des Schwanzes, d. s. Vas lymphaticum caudale inferius der Froschlarve, geht nämlich nach der Innenseite des Oberschenkels ein Zweig ab, der nachher in der Extremität denselben Umwandlungen unterliegt wie das Gefäß an der Außen-, resp. an der Dorsalseite der Extremität. Der Unterschied zwischen der Entwicklung der subkutanen Säcke auf der einen und der anderen Seite beruht lediglich darauf, daß die Lymphgefäße der Innenseite etwas später im Oberschenkel erscheinen als an der Außenseite, und ferner, daß zwischen dem Unterschenkelsacke Saccus cruralis und dem plantaren Saccus metatarsalis keine direkte Verbindung besteht; der letztere scheint sich aus einem Lymphgefäß zu entwickeln, welches vom Dorsalsacke des Metatarsus verlaufend über der ersten Zehe auf die Plantarseite einbiegt und hier in einen Sack übergeht.

Die Entwicklung des subkutanen Lymphgefäßsystems wiederholte sich, wie ich dies oben dargestellt habe, in allen von mir untersuchten Fällen mit derselben Regelmäßigkeit. An der Basis der Extremität erscheint anfangs ein einzelnes Gefäß. Dasselbe verzweigt sich, bildet ein anfangs großmaschiges, später immer engmaschiger werdendes Netz, aus dem sich durch Schwund der Maschen schließlich ein einheitlicher, subkutaner Sack entwickelt. Der Prozeß der Einschmelzung der Wandungen und der bindegewebigen Septen in den Lymphgefäßnetzen hört an manchen Stellen auf und hier finden wir bei erwachsenen Fröschen die s. g. Septa intersaccularia, Septen, welche die einzelnen Säcke voneinander trennen. Zur Kontrolle der obigen Befunde untersuchte ich injizierte und nicht injizierte Froschlarven, welche entsprechend fixiert, in Paraffin eingebettet und in Serienschnitte zerlegt worden waren. In

der Schnittserie einer hinteren Extremität, die in bezug auf die Entwicklung der Fig. 2 entspricht, sind außer Ektodermzellen und den sich bildenden Blutgefäßen noch keine Gewebe differenziert; auch finden wir darin keine Spur von Lymphgefäßen, die in Gestalt von Lücken oder Spalten in dem Gewebe erscheinen würden. An Querschnitten injizierter und etwas weiter entwickelter Extremitäten, welche annähernd den in Fig. 3, 4, 5 abgebildeten Stadien entsprechen, sieht man anfangs zwischen der Haut und den tieferen Geweben des Oberschenkels und später auch in weiteren Abschnitten der Gliedmaßen Lymphgefäße mit Injektionsmasse gefüllt; Fig. 9. Je höher die Entwicklungsstadien und je dichter infolgedessen die Lymphgefäßnetze sind, desto zahlreicher sind auch die mit blauer Farbe gefüllten Gefäße; Fig. 10. Man sieht zugleich, daß der Verschmelzungsprozeß der Netze in dem Oberschenkel beginnt, Fig. 11, und sich dann sukzessive auf den Unterschenkel und den Fuß fortsetzt. An nicht injizierten Präparaten befinden sich unter der Haut an den gleichen Stellen wie vorher, regelmäßige Öffnungen mit scharf vom umgebenden Gewebe sich abhebenden Konturen, welche das Lumen der querdurchschnittenen Gefäße darstellen; doch war es mir nicht möglich, die Struktur der Gefäßwände an mittels Hämatoxylin gefärbten Präparaten deutlich zu erkennen. Mit der Entwicklung der Säcke vermindert sich die Zahl der einzelnen Gefäße, wogegen ihr Lumen infolge der Verschmelzung sich vergrößerte, so daß man schließlich an Stelle früherer Gefäße umfangreiche, einheitliche Räume — die Lymphsäcke findet.

Es drängen sich nun folgende Fragen auf: Sind jene Lymphgefäße, aus denen die subkutanen Lymphsäcke entstehen, etwa nur interstitielle Lymphkanäle? Sind sie mit eigenen Wandungen versehen? Und, wenn dem so ist, wie sind die Wandungen beschaffen? Welchen Ursprung haben schließlich diese Gefäße? Die erste der obigen Fragen wurde von verschiedenen Seiten in verschiedener Weise beantwortet; die andere wurde auch öfters aber nur gelegentlich und ziemlich oberflächlich behandelt. Schon im J. 1833 finden wir bei Panizza die Bemerkung, daß die subkutanen Säcke in den Gliedmaßen der Amphibien Lymphsäcke seien, da sie Lymphe enthalten, eine eigene Membran besitzen, welche sie von großen Körperhöhlen trennt, da sie in die Vena cava und subclavia münden und immer auf eine und dieselbe Weise entstehen, näm-

lich aus zarten, mit Ausbuchtungen versehenen Netzen, welche Pannizza an injizierten Exemplaren beobachtet hat. Diese Anschauungsweise hatte Veranlassung zu einem heftigen Streite zwischen den Forschern gegeben, unter denen Leydig eine vermittelnde Stellung einzunehmen suchte, indem er annahm, daß bei niederen Wirbeltieren freie Räume im Bindegewebe ohne Begrenzung durch eine differenzierte Membran und vielleicht auch ohne Auskleidung mit Endothel das Lymphgefäßsystem bilden. v. Recklinghausen kommt auf grund eingehender Untersuchungen zu dem Schluß, daß zwischen dem Lymphgefäßsystem der Amphibien und dem der höheren Wirbeltiere kein wesentlicher Unterschied bestehe, da die Eigenschaften der kleineren Gefäße bei den einen und den anderen dieselben seien; eigentliche Unterschiede bestehen erst zwischen den größeren Stämmen höherer Wirbeltiere und den Lymphherzen und -Säcken der Amphibien. Im Jahre 1862 wies v. Recklinghausen nach, daß das ganze Lymphgefäßsystem mit Ausnahme der s. g. Saftkanälchen von Endothel ausgekleidet ist. Fast gleichzeitig mit v. Recklinghausen befaßte sich His mit dem Problem des Lymphgefäßsystems und gelangte zu Resultaten, die sich mit denjenigen v. Recklinghausens decken. Nach His entbehren nämlich die s. g. Lymphgefäßwurzeln eigener Wandungen und sind gewissermaßen in die umgebenden Gewebe eingelassen; nur den die Lymphe abführenden Kanälen erkennt er eine eigene Membran zu. In der Polemik mit v. Kölliker, nach welchem die Lymphgefäße im Froschlarvenschwanz mit eigenen, aus Bindegewebszellen bestehenden Wandungen versehen sind, äußert His die Meinung, dieselben wären nur Parazellular- und nicht Intrazellulargänge. Einige Jahre nachher wies Langer nach, daß sowohl die Lymphgefäße, wie auch die Lymphkapillaren im Froschlarvenschwanz eigene Wandungen besitzen. Doch vermochte Langer nicht nachzuweisen, daß die dem Gefäßlumen zugekehrte Wand mit Epithel bedeckt ist. Dieser Nachweis gelang ihm nur für die Röhrechen des subkutanen Lymphgefäßnetzes in der Bauchwand. Er setzt jedoch voraus, daß auch die Schwanzgefäße ein solches Epithel besitzen. Jourdain behauptet, daß gleichzeitig mit dem Auftreten der vorderen und der hinteren Extremitäten bei Froschlarven in denselben auch die subkutanen Lymphsäcke erscheinen. Sehr wichtig sind die Arbeiten Ranvier's über Lymphgefäße niederer und höherer Wirbeltiere wie auch über die Entwicklung der subkutanen Lymph-

säcke des Frosches. Indem Ranvier die subkutanen Lymphsäcke in den hinteren Froschextremitäten mit Berlinerblau injizierte, bemerkte er, daß die Injektionsflüssigkeit in die Haut zwischen den Zehen eindringt und darin ein feines Netz ausfüllt, was schon vor ihm sein Schüler Tarchanoff bemerkt hatte. Vor Ranvier und Tarchanoff hatten bereits v. Recklinghausen und Langer diese Netze gekannt. Ranvier und Tarchanoff hielten anfangs jenes Netz für ein Netz von Hautlymphgefäßen. Erst einige Zeit darauf überzeugte sich Ranvier, daß man mit einem subkutanen Netz zu tun hat. Er faßt es daher als eines der Stadien auf, in denen die Entwicklung der subkutanen Lymphsäcke innegehalten hat. Die Entwicklung der Lymphsäcke findet nach Ranvier in folgender Weise statt. Die Lymphkanäle, die unter der Haut verlaufen, verzweigen sich hier durch Knospenbildung. Durch Vereinigung der Zweige entsteht ein dem in der Schwimmhaut vorhandenen ähnliches Netz. In dem Maße, wie die Kanälchen sich ausbreiten, erfolgt deren Verschmelzung und zwar in der Weise, daß sich die Kanälchen an den Berührungsstellen miteinander vereinigen. Meine Befunde bezüglich der Entwicklung der Lymphsäcke aus Gefäßnetzen bestätigen vollständig diese Ansicht Ranviers. Leider gibt dieser Forscher keine Zeichnungen als Belege für seine Befunde, welche zum Vergleiche herangezogen werden könnten. Über den Ursprung der Lymphgefäße in den Gliedmaßen teilt uns Ranvier jedoch nichts mit. In dieser Hinsicht geben die Arbeiten von Fräulein Sabin einen gewissen Aufschluß. Durch Injektion des Lymphgefäßsystems bei sehr jungen Schweineembryonen überzeugte sie sich, daß dieses System vom Venensystem seinen Ausgang nimmt, indem jederseits aus dem Epithel der Halsvenen, nämlich an der Vereinigungsstelle der Vena subclavia und cardinalis ein blind endigender, epithelialer Kanal hervorsproßt; an der Mündung dieser Kanäle in die Venen befinden sich Klappen. Aus diesen zwei Gefäßknospen, nachher auch aus zwei anderen ähnlichen in der Inguinalgegend sprossen gegen die Haut Kanäle hervor, welche sich alsbald zu vier den Lymphherzen ähnlichen Säcken erweitern; aus diesen wachsen dann zahlreiche Lymphgänge in die Haut hinein. Nach der Behauptung der Verfasserin entspricht das Lymphgefäßsystem der Schweineembryonen auf dieser Entwicklungsstufe ungefähr dem Lymphgefäßsystem eines reifen Frosches, dem die Lymphdrüsen fehlen und dessen Lymphgefäße keine Klappen mit Ausnahme ihrer Mündung in die

Venen besitzen. Demnach würde sich das genannte Lymphgefäßsystem durch Sprossung aus dem Venensystem entwickeln und ein vollständig geschlossenes Gefäßsystem darstellen, dessen Endzweige sich baumförmig ausbreiten und blind endigen würden.

Um noch weitere Belege für die Richtigkeit des von mir beschriebenen Entwicklungsganges zu liefern, verfolgte ich die Entwicklung des Lymphgefäßsystems in sich regenerierenden Extremitäten. An Froschlarven von *Rana temp.*, deren hintere Extremitäten in verschiedenem Grade ausgebildet waren, maß ich zunächst die Länge der Extremitäten von ihrer Basis bis ans Ende des Fußes, resp. bis ans Ende der längsten, d. h. der vierten Zehe. Nachdem ich annähernd gleiche Stadien isoliert und in gesonderte Gefäße verteilt hatte, schnitt ich mit einer Schere den Froschlarven je eine hintere Extremität möglichst nahe an ihrer Basis ab, während ich die andere unbeschnitten ließ, um sie mit der operierten vergleichen zukönnen. Diese Operationsmethode erwies sich trotz des oft starken Blutverlustes als die günstigste. Auch versuchte ich mehrmals mittels eines Haares oder eines Fadens die Gliedmaßen abzuschneiden oder mittels des elektrischen Stromes abzubrennen, doch erwiesen sich diese Methoden weniger vorteilhaft, da die Froschlarven dann meistens zu grunde gingen. Nach einiger Zeit fingen die Froschlarven an, die fehlenden Teile zu regenerieren. Ich injizierte sie dann in der gleichen Weise wie vorher. Die Erfolge waren schwankend. In dem Maße, wie die Regeneration der ganzen Extremität vonstatten ging, entwickelten sich auch die Lymphgefäße. Verließ die Regeneration der ganzen Extremität nicht normal, so waren auch Störungen in der Regelmäßigkeit der sich entwickelnden Lymphgefäße bemerkbar. Meine diesbezüglichen Versuche sind in der folgenden Tafel zusammengestellt:

(Siehe Seite 268—271).

Wie wir aus der oben angeführten Tabelle und aus den Zeichnungen ersehen, vollzieht sich auch in den sich regenerierenden, hinteren Gliedmaßen die Entwicklung der Lymphsäcke auf die nämliche Art, wie in den normalen, d. h. aus Lymphgefäßchen, die immer weiter in die nächstgelegenen Teile der Extremität in der Richtung von der Basis gegen die Peripherie sich erstrecken und sukzessive den Prozeß der Netzbildung und Verschmelzung zu einheitlichen Räumen durchmachen, wie dies auf den Fig. 9, 10, 11 dargestellt.

Länge der zu operierenden Extremitäten	Regenerationsdauer	Ergebnisse	Anmerkungen
1½ mm	7 Tage		Die Wunden haben sich nur mit Haut bedeckt, ohne daß sich der Fuß regeneriert hätte.
2½ "	7 "	In das Regenerat verlängern sich einige kleine Gefäßchen, welche sich zu verzweigen beginnen. In dem oberen, normalen Abschnitte des Oberschenkels wurde ein dichtes Netz lymphatischer Gefäße injiziert.	Das Regenerat in Gestalt einer kleinen, kegelförmigen, noch nicht abgeplatteten Beinanlage illustriert Fig. 12.
4¼—4½ mm	10 "	Im normalen Abschnitt der Extremität wurde ein einheitlicher, subkutaner Sack injiziert; von diesem breiten sich Lymphgefäßchen in das Regenerat aus, wo sie ein Netz zu bilden anfangen.	Dieses Stadium illustriert Fig. 13.
3 mm	14 "	Aus dem normalen Oberschenkelabschnitte, in welchem sich ein einheitlicher Sack füllte, erstrecken sich zahlreiche Gefäßchen in den regenerierten Abschnitt des Oberschenkels und von da in der Richtung des Unterschenkels.	Das Regenerat ist ein sich abplattender Stumpf mit einer deutlichen Zehe.

Länge der zu operierenden Extremitäten	Regenerationsdauer	Ergebnisse	Anmerkungen
5 mm	15 Tage	Im normalen Abschnitt des Oberschenkels ist wahrscheinlich infolge mißlungener Injektion nur ein Gefäß injiziert, welches im regenerierten Teile des Oberschenkels sich in ein kleines Netz ausbreitet; dieses Netz wird durch zwei Gefäße mit einem dickmaschigen Netz am Unterschenkel verbunden und von diesem geht, wie in einer normalen Extremität, ein Gefäß aus, welches im Metatarsus ein ziemlich dichtes Lymphgefäßnetz bildet.	Es wurde eine ziemlich große Extremität mit 5 deutlichen Zehen regeneriert. Dieselbe illustriert Fig. 15.
2 "	16 "	Im normalen Abschnitt des Oberschenkels sieht man ein dichtes, in Verschmelzung begriffenes Netz; aus diesem erstrecken sich zarte Gefäßchen in den regenerierten Abschnitt des Oberschenkels, überdies ein dickeres Gefäß in den Unterschenkel; dieses bildet hier ein zartes Netz, mit welchem ein ähnliches im Metatarsus mittels eines Lymphgefäßes in Verbindung steht.	Die regenerierte Extremität mit 5 deutlichen, vollständig ausgebildeten Zehen stellt Fig. 16 dar.
1½ mm	18 "	Im normalen Abschnitt des Oberschenkels wurde ein dichtes, teilweise ver-	Dies Stadium illustriert Fig. 14.

Länge der zu operierenden Extremitäten	Regenerationsdauer	Ergebnisse	Anmerkungen
1½—1¾ mm	28 Tage	<p>schmolzenes Lymphgefäßnetz injiziert, aus dem sich zwei verästelnde Gefäße in den Unterschenkel erstrecken.</p> <p>Im normalen Abschnitt des Oberschenkels sind fast vollständig einheitliche Säcke injiziert; von diesen erstrecken sich Lymphgefäße in den Unterschenkel, hier ein zartes Netz bildend, dessen Endzweige bis zum Fuß reichen.</p>	<p>Die regenerierte Extremität hat drei deutliche Zehen; die übrigen deutet nur eine Wellenlinie an. Diesem Stadium entspricht annähernd Fig. 17.</p>
2 mm	28 „	<p>Im normalen, wie im regenerierten Teil des Oberschenkels und auch im Unterschenkel wurden einheitliche Säcke mit zwei unbedeutenden Unterbrechungen injiziert. Aus dem Unterschenkel verlaufen zwei große Lymphgefäße in den Fuß und bilden hier ein großes Netz, aus welchem einige Gefäßchen gegen die Zehen sich erstrecken.</p>	<p>Das Regenerat ist eine Extremität mit drei deutlichen und zwei sich erst entwickelnden Zehen, wie es Fig. 17 darstellt.</p>
3¼ mm	28 „	<p>Von den wenigen Lymphgefäßchen im normalen Abschnitt des Oberschenkels wachsen zwei Gefäße in das Regenerat hinein und reichen bis in den Unterschenkel.</p>	<p>Es wurde eine kleine Extremität regeneriert, deren Zehen durch eine Wellenlinie angedeutet wird.</p>

Länge der zu operierenden Extremitäten	Regenerationsdauer	Ergebnisse	Anmerkungen
4½ mm	29 Tage	In der Extremität wurden einheitliche Säcke injiziert, welche sich bis in die Zehenspitzen ausbreiten.	Diese Extremität wurde mittels des elektrischen Stromes abgetrennt; an ihrer Stelle entwickelte sich eine große, im Kniegelenk gegen die Innenseite gebogene Extremität.
2 "	30 "	Es wurden fast völlig einheitliche Säcke injiziert, aus denen Lymphgefäße in den Fuß reichen.	Es regenerierte sich eine große, im Vergleich zur normalen jedoch bedeutend kleinere Extremität.
2 "	30 "	In der ganzen Extremität sind einheitliche Säcke injiziert.	Die regenerierte große, deformierte Extremität ist nur mit drei Zehen versehen.
3 "	31 "	Im normalen Abschnitt ist ein dichtes Lymphgefäßnetz injiziert, aus welchem sich Lymphgefäßchen in das Regenerat ausbreiten.	Es wurde ein kegelförmiger Stumpf regeneriert.
2½ mm	33 "	Die Injektionsflüssigkeit füllte einheitliche Säcke nur bis zum Fersengelenke.	Das Regenerat stellt sich als ein anormal dünner, gebogener Unterschenkel und ein dünner, in ein zehenähnliches Gebilde ausgehender Fuß dar.
1½--1¾ mm	36 "	Im Ober- und Unterschenkel wurden einheitliche Säcke injiziert; in den Fuß ist die Injektionsflüssigkeit nicht eingedrungen.	Das Regenerat ist eine große, im Vergleich zur normalen bedeutend kleinere und im Fersengelenk gebogene Extremität.

ist. Zur Kontrolle der durch Injektion erhaltenen Resultate untersuchte ich die regenerierten Extremitäten ebenfalls an Serienschnitten. Ich fand hier Verhältnisse, welche mit denjenigen in normal sich entwickelnden Gliedmaßen völlig übereinstimmten. In den ersten Stadien der Regeneration fehlt noch jede Spur der Lymphgefäße. Auch unterscheidet sich anfangs das Regenerat von den normalen Extremitäten durch Fehlen des Pigments oder schwächere Pigmentierung und durch geringere Proportionen. Mit dem Wachstum des Regenerates vermindert sich der Unterschied. Später begegnen wir allen möglichen Übergangsstufen von einzelnen Gefäßen bis zu sehr zahlreichen, Netze bildenden und schließlich in vollständig einheitliche Säcke verschmolzenen Gefäßen. Allerdings zeugen die angeführten Ergebnisse von einer bedeutenden Unregelmäßigkeit im Verlaufe der Regenerationsprozesse der Gliedmaßen und somit auch der subkutanen Lymphsäcke. Die Unterschiede in dem Regenerationsvermögen scheinen in erster Reihe von der Art der Operation abzuhängen und von der Geschicklichkeit, mit der die Operation vollzogen wurde, da von dem letzteren Umstande ein größerer oder minderer Blutverlust und demzufolge eine größere oder geringere Sterblichkeit der Froschlarven abhängt. Von nicht minderm Einflusse ist das Alter der zur Operation verwendeten Froschlarven. So sind z. B. beinahe alle Froschlarven, deren zu operierende Extremitäten mehr denn 6 mm Länge besaßen, schon kurze Zeit nach der Operation umgekommen; die am Leben gebliebenen, wenigen Froschlarven regenerierten außer der Haut entweder keine verloren gegangenen Teile oder anormale Gebilde, was aber auch bei Froschlarven der Fall war, denen kleinere Gliedmaßen abgeschnitten worden waren. Am widerstandsfähigsten erwiesen sich und das größte Regenerationsvermögen zeigten Froschlarven, deren Extremitäten nicht weniger als 2 mm und nicht mehr als 5 mm lang waren, obwohl auch hier, wie sonst überall, bedeutende Schwankungen vorkamen. Durch Zufall hatte ich Gelegenheit mich zu überzeugen, daß Temperatur und Sonnenlicht nicht ohne Einfluß sind auf das Regenerationsvermögen und die Zeit, in welcher sich die Regeneration vollzieht, denn wenn man die operierten Froschlarven täglich nur einer zweistündigen Wirkung der Junisonne aussetzte, so bemerkte man von einem Tage zum anderen einen bedeutenden Zuwachs des Regenerates.

Auch suchte ich mir die Frage zu beantworten, ob zwischen den einzelnen subkutanen Lymphsäcken des reifen Frosches Klappen sich befinden? Die Anschauungen betreffs dieser Frage sind nämlich sehr verschieden. v. Recklinghausen setzt voraus, daß solche Klappen zwischen den subkutanen Säcken und Lymphgefäßen bestehen, die vom Fuß in die Schwimmbaut eindringen und hier das oben erwähnte Netz bilden. Auch Jourdain nimmt die Anwesenheit der Klappen an Stellen an, wo einzelne Lymphsäcke miteinander kommunizieren. Nach Ranvier bestehen Klappen nur an der Mündung der Lymphherzen in die Venen. Prof. Hoyer jun. und später auch seine Schülerin, Frl. Radwańska haben Klappen an der Einmündung der Lymphsäcke in die Lymphherzen und ferner zwischen den Säcken in der Umgebung der Lymphherzen gefunden. Auf grund dessen vermutet Prof. Hoyer, daß auch zwischen den einzelnen Säcken Klappen vorhanden sind. Auch spricht Gaupp in seiner Anatomie des Lymphsystems der *Rana esculenta* von Klappen, welche manche Ostien in den Septen zwischen den Säcken schließen.

Um mir über diese Verhältnisse wenigstens an den hinteren Extremitäten Klarheit zu verschaffen, injizierte ich die subkutanen Säcke bei *Rana temp.* mit farbigen Massen, z. B. mit farbiger Gelatine, Berlinerblau und einer alkoholischen Lösung von Schellack, indem ich an entsprechenden Stellen die Kanüle in einen subkutanen Sack einführte und die flüssige Substanz unter geringem Drucke injizierte, so daß von einer künstlich gemachten Kommunikation keine Rede sein konnte. Bei dieser Gelegenheit überzeugte ich mich, daß unabhängig davon, ob die Injektion in zentripetaler oder zentrifugaler Richtung stattfand, die Masse in benachbarte Säcke eindrang, woraus man schließen sollte, daß hier solche Vorrichtungen, wie Klappen, gänzlich fehlen müssen. Um jedoch ganz sicher zu sein, präparierte ich die Septen, welche die Säcke voneinander trennen und in situ mit Alkohol fixiert waren, heraus und suchte darin die Klappen mit Hilfe der binokulären Lupe oder nach entsprechender Färbung der Septen an Schnittserien. In beiden Fällen gelangte ich jedoch zu negativen Resultaten. Ich konnte in den Septen nur feststellen, daß mikroskopisch kleine, klappenlose Öffnungen vorhanden sind. Das positive Resultat dieser Untersuchungen war die Feststellung, daß die subkutanen Lymphsäcke in den hinteren Extremitäten der *Rana temp.* ihrer Zahl und

Verteilung nach den Verhältnissen entsprechen, die Gaupp bei *Rana escul.* beschreibt.

Sind die Lymphsäcke des Frosches nun als Lymphgefäße oder als Lymphkapillaren aufzufassen? Ranvier teilt die Lymphgefäße in größere Stämme und in Kapillaren ein. Der Unterschied zwischen den ersteren und den letzteren würde nach Ranvier in der Anwesenheit der Klappen in den Stämmen und im Fehlen derselben in den Kapillaren bestehen. Da die subkutanen Lymphsäcke des Frosches durch Verschmelzung von Lymphkapillaren entstehen, also aus Gefäßen, welche von Natur aus klappenlos sind, entsprechen meiner Meinung nach auch die Lymphsäcke der reifen Frösche Lymphkapillaren.

Nur die Lymphsäcke in der unmittelbaren Umgebung der Lymphherzen würden den größeren Lymphgefäßen der höheren Wirbeltiere entsprechen, da sie an ihrer Mündung Klappen besitzen. Eine strikte Homologie läßt sich natürlicherweise nicht durchführen, weil die Unterschiede im Bau des Lymphgefäßsystems der Frösche und des der höheren Wirbeltiere zu groß sind.

Durch die Untersuchung der Entwicklung des Lymphgefäßsystems in normalen und regenerierten Extremitäten der Froschlarven findet die Behauptung Ranviers, daß die Lymphsäcke aus Gefäßnetzen durch Schwund der Gefäßwände entstünden, ihre Bestätigung. Beweisend hiefür sind außer den durch Injektion erhaltenen Bildern die Durchschnitte durch nicht injizierte Extremitäten, in denen man die stufenweise Annäherung der Gefäße aneinander bis zu ihrer völligen Verschmelzung deutlich verfolgen kann.

Bezüglich der weiter gehenden Frage, wie die ersten Lymphgefäße in der Extremität entstehen, vermag ich außer den durch Injektion gewonnenen Bildern zur Zeit keine weiteren Aufschlüsse beizubringen. Nähmen wir die Befunde von Frl. Sabin als bewiesen an, daß das Lymphgefäßsystem sich aus dem Venensystem durch Sprossung des Endothels entwickelt, so würden unsere Befunde keiner weiteren Aufklärung bedürfen. Die Lymphgefäße der Extremität würden nämlich ebenfalls durch Sprossung aus schon bestehenden Lymphgefäßen der Bauchwand, resp. der Schwanzwurzel, entstehen und dann weiter in die Extremität hineinwachsen.

Obwohl ich und auch jeder, der die beigegefügtten Bilder betrachtet, sich der Möglichkeit, ja sogar der Wahrscheinlichkeit eines solchen Entwicklungsganges nicht verschließen kann, darf doch der-

selbe nicht als bewiesen gelten. Denn erstens könnte man einwenden, daß die Injektionen, wie sie hier vorliegen, nicht vollkommen sind, d. h. daß die Masse nicht bis zu den letzten Enden der Gefäße vorgedrungen ist, und zweitens fehlen histologische Beweise dafür, daß tatsächlich ein Auswachsen der Gefäße durch Sprossung vorliegt. Es ist wohl anzunehmen, daß die Lymphgefäße sich in gleicher Weise entwickeln, wie die Blutgefäße. Dargetan hat dies jedoch noch niemand. Zu derartigen Beweisen sind die Extremitäten keine geeigneten Objekte. Es müssen erst histologische Untersuchungen an durchsichtigen Objekten, wie am Schwanzflossensaum oder der Cornea abgewartet werden, ehe über die Art und Weise der Entwicklung der Lymphgefäße und ihren Bau etwas sicheres gesagt werden kann.

Institut für vergleichende Anatomie in Krakau.

Literaturverzeichnis.

- 1) W. His: Über die Wurzeln der Lymphgefäße in den Häuten des Körpers und über die Theorien der Lymphbildung. Zeitschrift für wissensch. Zoologie, herausg. von v. Siebold u. Kölliker. 1863.
- 2) Jourdain: Système lymphatique de la Rana temporaria. Extrait de la Revue des Sciences Naturelles. 1881.
- 3) Langer: Über das Lymphgefäßsystem des Frosches. Aus dem LV. Bde d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, I. Abt. 1867 und aus dem
- 4) — LVIII. Bde d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, I. Abt. 1868.
- 5) Ranvier: Développement des vaisseaux lymphatiques. Compt. Rend. Tome 121. 1895.
- 6) — La théorie de la confluence des lymphatiques et la morphologie du système lymphatique de la Grenouille. Compt. Rend. Tome 123. 1896.
- 7) — La théorie de la confluence des lymphatiques et le développement des ganglions lymphatiques. Compt. Rend. Tome 123. 1896.
- 8) v. Recklinghausen: Die Lymphgefäße und ihre Beziehung zum Bindegewebe. 1862.
- 9) — Das Lymphgefäßsystem. Handbuch der Lehre von den Geweben des Menschen und der Tiere; herausgeg. von S. Stricker. 1868.
- 10) Fl. Sabin: On the origin of the lymphatic system from the veins and development of the lymph hearts and thoracic duct in the Pig. In Amer. Journ. Anat. Vol. 1. 1902.
- 11) — On the development of the superficial lymphatics in the skin of the Pig. In Amer. Journ. Anat. 1904.
- 12) — The development of the lymphatic nodes in the pig and their relation to the lymphheart. In Amer. Journ. Anat. 1905.

Tafel-Erklärung.

Die Figuren 1—8 und 12—17 wurden von ganzen, mittels Berlinerblau injizierten Extremitäten unter der binokulären Lupe von Zeiss unter Benutzung des Abbé'schen Zeichenapparats entworfen. Die Figuren 9—11 sind nach gefärbten Schnittpräparaten gleichfalls mittels des Abbé'schen Zeichenapparats gezeichnet worden.

Zeichenerklärung.

V. l. a. = Vas lymphaticum abdominale.

V. = Vas (Blutgefäß).

R. l. f. = Rete lymphaticum femorale.

R. l. c. = Rete lymphaticum crurale.

R. l. met. = Rete lymphaticum metatarsale.

R. l. d. = Rete lymphaticum digitale.

Pigm. = Pigment.

S. f. = Saccus femoralis.

S. c. = Saccus cruralis.

S. met. = Saccus metatarsalis.

V. l. d. = Vas lymphaticum digitale.

V. l. m. = Vas lymphaticum membranae.

V. l. = Vas lymphaticum.

M = Musculus.

Cart. = Cartilago.

S. l. = Saccus lymphaticus.

Fig. 1. Hintere Extremität einer Froschlarve mit injiziertem Blutgefäßsystem. 32 mal vergrößert.

Fig. 2. Hintere Extremität einer Froschlarve auf einem sehr frühen Entwicklungsstadium. In der Bauchwand wurde ein größeres Lymphgefäß injiziert (*V. l. a.*), von dem sich ein zartes Gefäß gegen die Extremitätenbasis fortsetzt. 32 mal vergrößert.

Fig. 3. Ein weiteres Entwicklungsstadium; von einem Lymphgefäß der Bauchwand verlaufen zwei mit lateralen Seitenzweigen versehene Lymphgefäße in die Extremitätenbasis. 32 mal vergrößert.

Fig. 4. Die vom Bauchwandlymphgefäß sich abzweigenden Lymphgefäße bilden in der Oberschenkelgegend ein zartes Gefäßnetz. 32 mal vergrößert.

Fig. 5. Im Ober- wie auch im Unterschenkel ist ein Lymphgefäßnetz entwickelt (*R. l. f.* und *R. l. c.*); ein kleines Lymphgefäß erstreckt sich in den Metatarsus. Im Oberschenkel sind die einzelnen Lymphgefäße teilweise verschmolzen. 32 mal vergrößert.

Fig. 6. Im Ober- und Unterschenkel, im Metatarsus und in den Zehen sind stark verbreitete Lymphgefäßnetze (*R. l. met.* und *R. l. d.*) injiziert. Die Lymphgefäßnetze des Ober- und des Unterschenkels sind schon zum großen Teile verschmolzen. 32 mal vergrößert.

Fig. 7 a. Im Oberschenkel ist ein einheitlicher Lymphsack (*S. f.*) gebildet. Auch im Unterschenkel ist aus dem Gefäßnetz beinahe ein vollständiger Lymph-





G. Goldfinger.

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie



sack (S. c.) entstanden, den ein starkes Lymphgefäß mit einem in Verschmelzung begriffenen Lymphnetz des Metatarsus (S. met.) verbindet. Aus diesem erstrecken sich einheitliche, breite Gefäße (V. l. d.). 32 mal vergrößert.

Fig. 7 b. Das nämliche Entwicklungsstadium, wie Fig. 7 a. Die Extremität von der Seite gesehen. Im Oberschenkel ist der Saccus femoralis ersichtlich; an der nicht injizierten Stelle befinden sich in der Extremität des erwachsenen Frosches zwei Lymphsäcke: Saccus interfemoralis und S. subfemoralis. Ein starkes Lymphgefäß verbindet den S. f. mit dem in Verschmelzung begriffenen Sacke des Unterschenkels (S. c.). Im Metatarsus der Dorsalseite befindet sich ein Lymphsack (s. met.), der gegen die Zehe ein starkes Gefäß entsendet. 32 mal vergrößert.

Fig. 8. Im unteren Abschnitt des Unterschenkels und im Metatarsus sind einheitliche Lymphsäcke vorhanden, welche durch das spätere Ligamentum annulare calcanei getrennt sind. Aus dem Metatarsalsack verbreiten sich sackähnliche Gefäße in die Zehen (V. l. d.) und Lymphgefäße in die Schwimmhaut (V. l. m.). 32 mal vergrößert.

Fig. 9. Querschnitt durch den unteren Teil des Unterschenkels; im subkutanen Bindegewebe sind zwei Öffnungen, welche das Lumen der Lymphgefäße (V. l.) darstellen. 60 mal vergrößert.

Fig. 10. Querschnitt durch den Oberschenkel derselben Extremität, wie in Fig. 9, nahe der Extremitätenbasis. Im subkutanen Bindegewebe sind zahlreiche, zum Teil schon verschmolzene Lymphgefäße (R. l. f.) sichtbar. 36 mal vergrößert.

Fig. 11. Ein späteres Entwicklungsstadium. Querschnitt durch den Oberschenkel unweit der Extremitätenbasis. Unter der Haut sieht man schon einheitliche Säcke (S. f.). 36 mal vergrößert.

Fig. 12. Im oberen, normalen Abschnitt der Extremität ist ein dichtes, breitmaschiges, zusammenschmelzendes Lymphgefäßnetz (R. l. f.) sichtbar, aus dem sich verzweigende Gefäße gegen das Regenerat verlaufen. 40 mal vergrößert.

Fig. 13. Im normalen Abschnitt der Extremität befindet sich ein einheitlicher Lymphsack (S. l.), aus welchem sich verzweigende Lymphgefäße in das Regenerat erstrecken. 40 mal vergrößert.

Fig. 14. Im normalen Abschnitt des Oberschenkels sieht man ein dichtes Lymphgefäßnetz. Im regenerierten Teil des Oberschenkels liegen zwei sich verzweigende Lymphgefäße, welche in den Unterschenkel hineinreichen. 32 mal vergrößert.

Fig. 15. Im normalen Abschnitt ist ein einzelnes Lymphgefäß ersichtlich. Im regenerierten Oberschenkelabschnitt befindet sich ein zartes Lymphgefäßnetz. Im Unterschenkel und im Metatarsus ist ein breitmaschiges Netz (R. l. c. und R. l. met.) miteinander verbunden. 32 mal vergrößert.

Fig. 16. Im Oberschenkel finden wir ein verschmelzendes, breitmaschiges Lymphgefäßnetz (R. l. f.). Im Unterschenkel und im Metatarsus sind kleine, zarte Netze (R. l. c. und R. l. met.) injiziert. 32 mal vergrößert.

Fig. 17. Im Ober- und Unterschenkel sind einheitliche Lymphsäcke (S. f. und S. c.). Im Metatarsus sieht man ein in Verschmelzung begriffenes Netz (R. l. met.), welches sich verzweigende Äste in die Zehen und in die Schwimmhaut entsendet. 32 mal vergrößert.

18. M. L. GRABOWSKI. O błędach fizyologicznych przy pomiarach astronomicznych zapomocą mikrometrów okkultacyjnych. (*Über physiologische Fehler bei astronomischen Messungen mit okkultierenden Mikrometern*). (*Sur les erreurs physiologiques dans les mesures astronomiques faites au moyen de micromètres d'occultation*). Mémoire présenté par M. M. P. Rudzki m. c. dans la séance de 9 Avril 1907.

Vorwort. Durch eine im J. 1906 ausgeführte Beobachtungsreihe von kleinen Planeten wurde ich veranlaßt, einige Überlegungen über die Rolle anzustellen, welche bei derartigen Beobachtungen systematische Fehler physiologischer und psychologischer Art spielen; und sowohl die Praxis jener Beobachtungen als auch eine besondere experimentelle Untersuchung haben mir ermöglicht, einige Erfahrungen in dieser Richtung zu gewinnen. Da diese Betrachtungen und Erfahrungen möglicherweise für andere Beobachter von Nutzen sein können, teile ich sie hier mit. Andererseits haben aber die hier erörterten Tatsachen auch Bezug auf einzelne Fragen der Physiologie und Psychologie und dürften daher auch von diesem Gesichtspunkt aus einig Interesse darbieten.

1. Die beiden zu visuellen Messungen relativer Koordinaten nahestehender Gestirne gegenwärtig gebräuchlichsten und als die genauesten geltenden Vorrichtungen, das Fadenmikrometer und das Heliometer, leiden an dem Nachteil, daß sie infolge der Notwendigkeit ziemlich starker künstlicher Feld- oder Fadenbeleuchtung, bezw. infolge der Spaltung des Lichtes des Gestirns in zwei Bilder, nur die Messung solcher Objekte gestatten, die viel heller sind, als die schwächsten mit dem gegebenen Fernrohr überhaupt noch sichtbaren. Infolgedessen muß man zu mikrometrischen Messungen schwacher Gestirne Instrumente mit viel mächtigeren Objektiven besitzen, als diejenigen, die zur bloßen Wahrnehmung dieser Gestirne noch vollkommen hinreichen.

Frei von diesem Nachteil sind dagegen die sog. okkultierenden Mikrometer, bei denen ein undurchsichtiger Gegenstand von passender Gestalt, wie z. B. ein Ring, eine oder mehrere verschieden orientierte Lamellen in der Brennebene des Objectives angebracht sind und bei denen zur Ableitung der gesuchten Koordinatendifferenzen die Momente beobachtet werden, in welchen die verschiedenen Gestirne an den Rändern jener Schirme verschwinden, bezw. wiedererscheinen (die „Eintritte“ und „Austritte“). Eine solche

Beobachtung kann selbst in gänzlich unbeleuchtetem Gesichtsfelde gemacht werden.

Von den mannigfaltigen, im Laufe der Zeit vorgeschlagenen Formen solcher Mikrometer findet sich gegenwärtig eine, nämlich das Ringmikrometer, noch ziemlich häufig in Gebrauch. Man bringt jedoch ziemlich allgemein ein gewisses Mißtrauen solchen Beobachtungen entgegen, die mit okkultierenden Mikrometern angestellt sind, u. zw. wohl aus dem Grunde, weil die damit erhaltenen Resultate sich öfters später als stark von der Wirklichkeit abweichend erwiesen haben. Infolgedessen werden diese Mikrometer trotz ihres erwähnten großen Vorteils fast gar nicht mehr in Aufgaben verwendet, wo es auf größere Genauigkeit ankommt.

Die Erfahrungen, zu welchen ich anlässlich einer mit einem okkultierenden Mikrometer angestellten Beobachtungsreihe geführt wurde, werfen einiges Licht auf die Hauptquelle jener Ungenauigkeiten; sie zeigen, daß bei der Anwendung solcher Mikrometer sehr beträchtliche systematische Fehler von persönlicher, d. h. physiologischer Natur auftreten können, und führen im Zusammenhang damit zu gewissen Folgerungen, deren Berücksichtigung in der Beobachtungspraxis und in der Bearbeitung der Beobachtungen zu einer bedeutenden Steigerung der Genauigkeit der mit okkultierenden Mikrometern zu erlangenden Resultate beitragen dürfte.

2. Der Refraktor der Krakauer Sternwarte, den ich zu der erwähnten Reihe von Positionsbestimmungen kleiner Planeten verwendete, ist zwar mit einem primitiven Fadenmikrometer ausgerüstet, dieses besitzt jedoch keine brauchbare Vorrichtung zur Fadenbeleuchtung, die Beobachtung in erleuchtetem Gesichtsfelde müßte aber bei den meisten Objekten an der Lichtschwäche des Objektivs scheitern. Infolgedessen konnte bei der Aufstellung des Arbeitsplanes nur an die Anwendung von okkultierenden Mikrometern gedacht werden. Daß ich hierbei von der Anwendung eines Ringmikrometers abgesehen habe, beruhte auf den im folgenden dargestellten Bedenken und Überlegungen über die Möglichkeit des Auftretens systematischer persönlicher Fehler und deren Wirkungsweise, Bedenken, die sich dann auch in der Tat durch meine weiter unten mitgeteilten Untersuchungen als durchaus begründet erwiesen.

Es ist gegenwärtig bereits für mehrere verschiedenartige Beobachtungsmethoden die Tatsache bekannt, daß sich dabei systematische Fehler geltend machen, deren Quelle in den physiologischen

und psychologischen Gesetzen liegt, nach welchen die zu der betreffenden Beobachtungstätigkeit gehörenden Handlungen und Urteile entstehen. Der psychophysisch wohl einfachste Fall liegt bei den Ausmessungen astrophotographischer Aufnahmen vor, wo man den beweglichen Faden im Gesichtsfelde des Mikroskops durch Drehung der Mikrometerschraube auf die Mittelpunkte der Scheibchen auf der Platte, die die Bilder der Sterne darstellen, einzustellen hat. Denn in diesem Falle besteht die Aufgabe des Beobachters lediglich in der Beurteilung, ob eine bestimmte Konfiguration, die durch ihn selbst hervorgebracht und ohne seinen Willen nicht veränderlich ist, dem verlangten geometrischen Kriterium (der Bisektion des Sterns durch den Faden) genügt. Dennoch treten aber auch schon bei dieser einfachen Aufgabe, wie ich mich bei meinen photographischen Ausmessungen in Pulkowo (1901 und 1902) überzeugt habe, systematische persönliche Fehler auf; ich stelle z. B., wenn der bewegliche Faden parallel zur Medianebene des Körpers liegt, also nach rechts und links verschoben wird, den Faden stets rechts vom Mittelpunkte des Sternbildchens ein, u. zw. desto weiter, je heller der Stern, also je größer das Scheibchen ist; analog gesetzmäßige Fehler, jedoch von anderem numerischen Betrage, treten bei senkrecht zur Medianebene liegendem Faden, der also die Platte hinauf und hinab verschiebbar ist, auf. Ähnliche Erfahrungen haben auch einige andere Astromen gemacht (Scheiner, Kostinsky).

Offenbar wird der psychophysische Prozeß bedeutend komplizierter und neue Quellen konstanter persönlicher Fehler treten in den Fällen hinzu, wo die Aufgabe des Beobachters in der Erfassung des Zeitpunktes besteht, in welchem eine bestimmte Phase im Verlauf einer veränderlichen Konfiguration eintritt. Es kann daher nicht überraschen, daß die in diesen Fällen auftretenden persönlichen Fehler viel größere Beträge erreichen, und daß die Existenz persönlicher Fehler überhaupt zuerst gerade bei Beobachtungen dieser Art erkannt worden ist. In dem einfachsten dieser Fälle (Beobachtung der Durchgänge der Sterne durch die Fäden in ungebrochenen Meridianfernrohren nach der „Aug- und Ohr-Methode“) verfolgt man das sich im Gesichtsfelde horizontal bewegende Sternbildchen, das als leuchtendes Scheibchen auf schwächer beleuchtetem Hintergrunde erscheint, erfaßt den Zeitpunkt, in welchem der Mittelpunkt des Scheibchens mit einem jeden der

vertikalen Fäden zusammenfällt und hat diesen Zeitpunkt auf die durch gehörte Sekundenschläge der Uhr gegebene Zeitskala zu beziehen. Wir haben hier also mit einer Koordination heterogener Sinneseindrücke zu tun; ferner gelangt hier, außer den rein geometrisch wirkenden Faktoren noch die Tatsache zur Wirkung, daß die physiologischen und psychischen Vorgänge sich in einer endlichen Zeit abspielen, die von den Umständen der Erscheinung und von der Person des Beobachters systematisch abhängig sein kann (Leitungszeit in den sensibeln Nerven und im Gehirn, Perzeptions-, Apperzeptionszeit). Die bei derartigen Beobachtungen gesammelten Erfahrungen haben bekanntlich meistens gezeigt, daß die Durchgänge der Sterne mit um so größerer Verspätung beobachtet werden, je heller die beobachteten Sterne sind. Dagegen sind jene Beobachtungen bis jetzt meist in einer Weise durchgeführt, die eine sichere Entscheidung über die Frage, ob und wie der persönliche Fehler von der Geschwindigkeit der Bewegung des Sternes im Gesichtsfelde abhängt, noch nicht ermöglicht, obwohl eine solche Abhängigkeit a priori wahrscheinlich ist.

Noch anders liegt die Sache in dem Fall, wenn zu den Durchgangsbeobachtungen anstatt der Aug- und Ohr-Methode die Methode der Handregistrierung (Schließen eines elektrischen Tasters im Moment der beobachteten Bisektion) oder die neueste, in psychophysischer Hinsicht von den beiden früheren grundverschiedene Methode, die automatische Registrierung (Repsold'sches Mikrometer), angewandt wird. Doch ich will hier nicht näher diese Fälle besprechen. Denn bereits nach dem bisher Gesagten ist die apriorische Wahrscheinlichkeit verständlich, daß auch bei Beobachtungen an okkultierenden Mikrometern systematische persönliche Fehler physiologischen und psychologischen Ursprungs auftreten, u. zw. voraussichtlich viel größere als diejenigen, welche bei den Beobachtungen der Durchgänge durch die Fäden vorkommen.

3. In der Tat ist die bei den Beobachtungen an okkultierenden Mikrometern vorliegende psychophysische Aufgabe in mancher Hinsicht von der früher besprochenen verschieden. Bekanntlich pflegt man bei Durchgängen durch Fäden sich die Beziehung des Momentes der Bisektion auf die Zeitskala dadurch zu erleichtern, daß man, statt das Verhältnis abzuschätzen, in welchem das Zeitintervall durch jenen Zeitpunkt geteilt wird, sich bei den beiden umgebenden Sekundenschlägen den Ort merkt, an welchem der

Mittelpunkt des Sternbildchens im Gesichtsfelde steht und dann das Verhältnis abschätzt, in welchem die lineare Entfernung zwischen diesen beiden Punkten durch den Faden geteilt wird. Obwohl der rein geometrische Faktor des persönlichen Fehlers (wie in der polnischen Originalabhandlung näher ausgeführt wird) in beiden Verfahren gleich große Rolle spielt, haben doch die persönlichen Fehler im allgemeinen andere Werte bei jenem „chronologischen“, als bei diesem am meisten gebrauchten, „topologischen“ Verfahren. Nun ist offenbar bei den Durchgangsbeobachtungen durch die Ränder eines okkultierenden Mikrometers ausschließlich das chronologische Verfahren anwendbar; denn der Stern ist nur bei einem der beiden Sekundenschläge, die den Zeitpunkt des Durchganges umgeben, sichtbar.

Ferner ist auch die zu beobachtende Erscheinung selbst, d. h. die Koinzidenz des Mittelpunktes des Sternbildchens mit der gegebenen Linie, hier psychologisch anders bestimmt als bei den Durchgängen durch Fäden. In letzterem Falle dient als Kriterium dieser Koinzidenz die Gleichheit der zu beiden Seiten des Fadens sichtbaren Teile des Bildchens; bei einem okkultierenden Mikrometer ist das Kriterium offenbar ein anderes, da ja im kritischen Augenblick nur ein Teil des Bildchens sichtbar ist und der Beobachter abzuschätzen hat, ob dieser sichtbare Teil wirklich die Hälfte des Scheibchens bildet. Die Kriterien, auf deren Grund in Wirklichkeit diese Abschätzung erfolgt, sind (aus Gründen, die in der polnischen Originalabhandlung näher ausgeführt sind) sicherlich keine geometrischen, und man wird wohl in der Annahme nicht fehlgehen, daß bei der Mehrzahl der Beobachter die Feststellung des Zeitpunktes der Koinzidenz auf die Konstatierung der halben Lichtmenge des vollen Sternbildchens gegründet ist, ein Kriterium, das auch ich bei Ringmikrometer-Beobachtungen in München im J. 1897¹⁾ benutzt habe, das sich jedoch nur ziemlich unsicher beurteilen läßt. Es möge bei dieser Gelegenheit ein Kriterium mitgeteilt werden, dessen ich mich bei den Planetenbeobachtungen in Krakau im J. 1906 bedient habe, da es wohl auch für andere Beobachter sich als nützlich erweisen kann. Es war mir nämlich schon bei den ersten Versuchen die große Schärfe aufgefallen, mit der sich der Zeitpunkt des Durchganges erfassen läßt,

¹⁾ Astron. Nachr., Bd. 146.

wenn man sein Augenmerk auf den Zeitpunkt der schnellsten Lichtabnahme bzw. -zunahme richtet¹⁾. Auf grund dieser Erfahrung benutzte ich dann regelmäßig dieses Kriterium bei allen späteren Beobachtungen. Dieses erweist sich namentlich nach Erlangung einer Übung als leistungsfähig; man empfängt dann bei jedem Durchgange eines Gestirns durch den Rand den Eindruck, als ob in einem bestimmten Momente dieses Durchganges das Gestirn plötzlich erlösche, bzw. plötzlich aufblitze.

Ein weiterer in Betracht kommender Unterschied zwischen der Beobachtung von Durchgängen durch Fäden und der Beobachtung von Durchgängen durch die Ränder eines okkultierenden Mikrometers besteht darin, daß in ersterem Falle der Beobachter unausgesetzt alle sukzessiven Phasen der veränderlichen Konfiguration wahrnimmt und somit auf eine jede im voraus vorbereitet ist, wohingegen bei Anwendung eines okkultierenden Mikrometers entweder

¹⁾ Daß der so definierte Zeitpunkt in der Tat derjenige ist, in dem der Mittelpunkt des Bildchens durch den Rand des Schirmes hindurchgeht, läßt sich leicht folgendermaßen beweisen. Da die Isophoten im Diffraktionsscheibchen Kreise sind, so ist die Flächenhelligkeit eines um ρ vom Mittelpunkte entfernten Elementes des Scheibchens $\varphi(\rho)$. Es sei t die Zeit vom Momente des Durchganges des Bildmittelpunktes durch den Rand des Schirmes an gezählt, so daß die Entfernung des Bildmittelpunktes von der Tangente dieses Randes, positiv gezählt im Sinne der Bewegung, $c \cdot t$ beträgt, wo c eine positive Konstante ist; es sei schließlich f die gesamte Lichtmenge des im Momente t unbedeckten Teiles des Bildes. Dann ist, wenn man mit p die stets (sowohl bei Ein- wie bei Austritten) positiv verstandene Geschwindigkeit der Lichtänderung bezeichnet,

$$p = \mp \frac{df}{dt} = 2c \int_{y=0}^{y = \sqrt{r^2 - c^2 t^2}} \varphi(\sqrt{y^2 + c^2 t^2}) \cdot dy$$

wo r der Radius des vollen Scheibchens ist. Differenziert man nun diesen Ausdruck zweimal und setzt dann $t=0$, so erhält man nach leichten Umformungen

$$\frac{dp}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{2c^3}{r} \varphi(0) + 2c^3 \int_0^r \varphi'(y) \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{r} \right] dy;$$

der letztere Wert ist < 0 , da $\varphi(0) > 0$ und das Integral ausschließlich aus negativen Elementen besteht (φ ist eine abnehmende Funktion). Man sieht also, daß p hier in der Tat durch ein Maximum hindurchgeht.

die Antritte beiderseits oder (bei nicht ganz dunklem Gesichtsfelde) wenigstens die Austritte unvermutet für den Beobachter eintreffen.

4. Von der Erwägung geleitet, daß die systematischen persönlichen Fehler bei Beobachtungen mit okkultierenden Mikrometern andere Werte haben als bei Beobachtungen von Durchgängen durch Fäden, und daß sie selbst einigemal so groß sein können, habe ich bei der Inangriffnahme der erwähnten Reihe von Planetenbeobachtungen zugleich beschlossen, das numerische Gesetz dieser Fehler später durch eine besondere Untersuchung zu ermitteln und die entsprechenden Korrekturen bei der Bearbeitung meiner Planetenbeobachtungen in Rechnung zu bringen.

Betrachten wir nun die Art und Weise, wie die Fehler dieser Art die Resultate der Messungen mit dem gebräuchlichsten der okkultierenden Mikrometer, nämlich mit dem Ringmikrometer, beeinflussen. Nehmen wir zunächst an, daß die physiologischen Fehler bei okkultierenden Mikrometern symmetrisch wirken, d. h. daß der Fehler der Austrittszeit dem der Eintrittszeit entgegengesetzt gleich ist, wenn die übrigen Umstände (Winkel der Bewegungsrichtung mit der Kontur des Schirmes im Schnittpunkte, Geschwindigkeit der Bewegung, Helligkeit des Gestirns) gleich sind. Trifft diese Annahme zu, so wird der Zeitpunkt des Durchganges des Gestirns durch den Stundenkreis des Mittelpunktes des Ringes sich sowohl aus den Antritten am äußeren wie aus denen am inneren Rande richtig ergeben. Trifft aber, wie es offenbar a priori wahrscheinlich ist, eine solche Symmetrie nicht zu, so werden die beiden Werte für die Zeit des Durchganges durch den zentralen Stundenkreis, die aus den vier Antritten an beiden Rändern bei einem und demselben Durchgange durch das Gesichtsfeld hergeleitet werden, mit Fehlern behaftet sein, die zwar ungleich sind (da die Bahn des Gestirns die beiden Ränder unter ungleichem Winkel schneidet), jedoch in gleichem Sinne auftreten und daher sich in dem arithmetischen Mittel der beiden Werte nicht aufheben. Der so entstehende Fehler wird bei dem beobachteten Planeten einen anderen Wert haben als bei dem Vergleichstern; und der resultierende Fehler in der erhaltenen Rektaszensionsdifferenz wird von (mindestens) drei Argumenten, nämlich von der Helligkeitsdifferenz der beiden Gestirne und von den beiden Entfernungen der beschriebenen Sehnen vom Zentrum des Mikrometers abhängig sein. Dabei ist zu bemerken, daß die beiden letzteren dieser Argumente sich bekanntlich oft

schon im Laufe einer an einem Abende angestellten Beobachtungsreihe derselben Gestirne beträchtlich ändern.

Was nun die Länge der Sehne betrifft, aus der bekanntlich die Deklinationsdifferenz zwischen dem Gestirn und dem Mikrometerzentrum gewonnen wird, so ist klar, daß selbst dann, wenn die oben bezeichnete Symmetrie stattfinden sollte, die Sehne der äußeren und die der inneren Kontur mit Fehlern behaftet sein werden, die zwar entgegengesetztes Vorzeichen aber ungleichen absoluten Wert haben. (Dabei ist noch zu bemerken, daß ein Fehler in der Länge der äußeren Sehne auf den berechneten Abstand der scheinbaren Bahn vom Mikrometerzentrum anders einwirkt als ein solcher in der Länge der inneren Sehne). Die beiden für den Abstand der Bahn vom Mikrometerzentrum erhaltenen Werte werden demnach durch Fehler entstellt sein, die sich durch Bildung des arithmetischen Mittels nicht völlig aufheben. Man könnte wohl die Hypothese aufstellen, daß der notierte Zeitpunkt sowohl bei den Eintrittten als bei den Austritten derjenige ist, in welchem in Wirklichkeit ein bestimmter Bruchteil ε des Areals des Bildes unbedeckt ist, wobei ε innerhalb eines und desselben Durchganges durch das Gesichtsfeld konstant ist. Unter dieser Voraussetzung ist es theoretisch möglich, den Einfluß dieser Fehler auf den Abstand der Bahn vom Zentrum dadurch zu eliminieren, daß man die beiden aus den vier Antritten bei demselben Durchgange durch das Gesichtsfeld resultierenden Werte dieses Abstandes, anstatt zum einfachen arithmetischen Mittel, zu einem anders gebildeten Mittelwerte vereinigt ¹⁾. Indessen lassen sich gegen dieses Verfahren zwei Einwände erheben: denn erstens ist die erwähnte Hypothese nicht frei von Willkür; ferner aber ist ein solches Eliminationsverfahren damit äquivalent, einen systematischen Fehler für jeden einzelnen Fall aus einer sehr geringen Anzahl von Beobachtungen zu bestimmen, und ist daher in hohem Grade dem Einfluß der zufälligen Fehler unterworfen.

Der in dem arithmetischen Mittel beider Werte für den Abstand der Sehne vom Zentrum übrigbleibende systematische Fehler wird nun wieder einen anderen Wert bei dem Planeten als bei dem Vergleichstern haben, und der Fehler der resultierenden Deklina-

¹⁾ Siehe meinen Artikel in den Astr. Nachr., Bd. 146.

tionsdifferenz wird wieder von sämtlichen früher genannten Argumenten abhängen.

Man sieht, daß die Fehler physiologischen Ursprungs bei den Durchgangsbeobachtungen am Ringmikrometer von vielen wechselnden Umständen abhängig sind und auf die Messungsergebnisse nach ziemlich verwickelten Gesetzen einwirken. Infolgedessen würde die Berücksichtigung der entsprechenden Korrekturen bei der Reduktion der Beobachtungen eine unbequeme Vermehrung der Reduktionsarbeit darstellen, und andererseits würde die empirische Bestimmung des numerischen Gesetzes dieser Fehler für einen bestimmten Beobachter eine weitläufige Aufgabe sein, die nur durch eine lange Reihe von mannigfach modifizierten Versuchen und auch dann kaum mit erwünschter Sicherheit zu lösen wäre.

Es erscheint aus diesen Gründen wünschenswert, daß an Stelle des Ringmikrometers geradlinig begrenzte, in festen Positionswinkeln gebrauchte Mikrometer benutzt werden, bei denen sich die physiologischen Fehler viel einfacher und sicherer untersuchen lassen. Allerdings pflegt man bisher meistens von einer Untersuchung und Berücksichtigung dieser Fehler bei derartigen Beobachtungen abzusehen, indem man annimmt, daß sie die Grenzen der hier vernachlässigbaren Größen nicht überschreiten; doch ist, wie die im folgenden mitgeteilten großen Beträge zeigen, eine solche apriorische Annahme nicht zulässig.

5. Zu den mehrfach erwähnten Beobachtungen kleiner Planeten habe ich die einfachste Form eines okkultierenden Mikrometers benutzt, nämlich eine einfache Lamelle, die an jedem Beobachtungsabend zuerst nach der Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung orientiert und dann mit Hilfe von Ablesungen an einem Positionskreise sukzessive in die beiden Beobachtungslagen gedreht wurde, die mit jener Richtung den Winkel $+45^\circ$ bzw. -45° einschließen. In jeder dieser beiden Lagen wurden mehrere Durchgänge des Planeten und der Vergleichsterne beobachtet, wobei jedesmal sowohl die Zeitpunkte der Eintritte als die der Austritte notiert wurden. Nähere Details über das benutzte Mikrometer und über die eingehaltenen Beobachtungsregeln sind in der Originalabhandlung angegeben; hier mag nur noch erwähnt werden, daß in Fällen, wo der Himmelsgrund vollständig dunkel erschien, eine ganz schwache Feldbeleuchtung angewandt wurde. Es geschah dies erstens aus dem Grunde, weil die Beobachtung der Antritte, falls

die Kanten der Lamelle und die Begrenzung des Gesichtsfeldes nicht vom Hintergrunde unterschieden werden können, wie ich mich überzeugt habe, viel weniger ruhig und sicher erfolgt, ein gewisser Grad von Beleuchtung also zur Verminderung der zufälligen Fehler beiträgt. Andererseits war dafür auch die Erwägung maßgebend, daß im Falle zu großer Schwankungen in der Erleuchtung des Hintergrundes auch die Annahme einer festen Abhängigkeit des persönlichen Fehlers von der Helligkeit der Gestirns nicht ohne weiteres gerechtfertigt ist.

Aus den in den beiden Lagen beobachteten Antrittszeiten ergeben sich nun die gesuchten Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen durch einfache Beziehungen, die man z. B. in Prof. Beckers Monographie über Mikrometer und Mikrometermessungen (Valentiners Handwörterb. d. Astron., Bd. III. 1., S. 93—101) finden kann. Da bei dem Lamellenmikrometer der Winkel der Bewegungsrichtung mit der Tangente des Antrittspunktes fast genau konstant und für die beiden verglichenen Gestirne gleich ist und da die Geschwindigkeit der scheinbaren Bewegung des Planeten derjenigen des Vergleichsterns fast genau gleich ist (— die scheinbaren Geschwindigkeiten waren übrigens in der ganzen Beobachtungsreihe innerhalb enger Grenzen eingeschlossen —), so gelangt lediglich die Abhängigkeit des persönlichen Fehlers von der Helligkeit des beobachteten Gestirns zur Wirkung, und diese Abhängigkeit oder die „Helligkeitsgleichung“ war nun zu untersuchen.

6. Bereits am Beginn meiner Planetenbeobachtungen war es mir klar geworden, daß eine solche Abhängigkeit tatsächlich, u. zw. in unerwartet hohem Maße, stattfindet. Denn es ging aus diesen Beobachtungen hervor, daß ein Stern z. B., der um 2 Größenklassen schwächer ist als ein anderer, eine um mehr als 1^s längere Zeit durch die Lamelle verdeckt erscheint als dieser. Es müssen also schwache Gestirne entweder bei dem Eintritt früher verschwinden als es bei größerer Helligkeit der Fall sein würde, oder beim Austritt später wiedererscheinen, oder endlich trifft beides zu. Um die Resultate meiner Positionsbestimmungen wegen dieser Fehler korrigieren zu können, war es nun notwendig, das numerische Gesetz dieser Fehler sowohl für die Ein- als für die Austritte kennen zu lernen.

Aus diesem Grunde habe ich nach Abschluß der erwähnten

Planetenbeobachtungen¹⁾ an 16 Abenden eine besondere Beobachtungsreihe zur Untersuchung der Helligkeitsgleichung angestellt. Es wurden zu diesem Zwecke zwei Abblendungsgitter hergestellt (Musselin bezw. Battist), die ein Gehilfe auf gegebenes Signal vor das Objektiv zu halten hatte. Die Absorption dieser Gitter beträgt 1·26 bezw. 3·16 Größenklassen. Nun wurden aus der Bonner Durchmusterung eine größere Anzahl Sternpaare derart ausgewählt, daß der schwächere Stern jedes Paares ungefähr von der 10. Größe, der hellere aber durchschnittlich um 1·26 Größenklassen heller ist, und die beiden Sterne sich in Deklination nur wenig voneinander unterscheiden. Eine andere Kategorie umfaßte Sternpaare, bei denen der eine Stern ungefähr von der 10. Größe, der andere aber durchschnittlich um 3·16 Größenklassen heller ist. Es wurde dann an jedem Abend die Lamelle in den Positionswinkel $+45^{\circ}$ oder -45° eingestellt und darauf jedes Sternpaar einmal ohne Abblendung, dann mit Abblendung der helleren Komponente mittels des zugehörigen Gitters beobachtet. Für die Differenz der Antrittszeiten der beiden Komponenten erhält man auf diese Weise zwei Werte, deren Unterschied also den der Helligkeit der helleren Komponente entsprechenden Auffassungsfehler darstellt, vermindert um den der 10. Größe entsprechenden. Die Mittel aus allen Messungen ergaben also drei Punkte der Kurve der Helligkeitsgleichung, nämlich die beiden relativen Auffassungsfehler für die Größen 6·84 und 8·74, zu denen der relative Auffassungsfehler für die Größe 10·0, der gleich Null ist, hinzukommt. Diese drei Punkte konnten, ohne die Beobachtungen Zwang anzutun, durch eine lineare Beziehung dargestellt werden. Es bleibt natürlich fraglich, ob dieselbe Beziehung auch noch außerhalb des genannten Helligkeitsbereiches gilt; eine Ausdehnung der Untersuchung über diese Grenzen hinaus war jedoch für den Zweck derselben überflüssig.

Das Ergebnis der soeben skizzierten Untersuchung war folgendes. Es hat sich, wie dies auch a priori wahrscheinlich war, herausgestellt, daß die Helligkeitsgleichung praktisch unabhängig davon ist, ob die Lamelle in dem Positionswinkel $+45^{\circ}$ oder -45° steht. Sie wirkt aber an den beiden Rändern nicht symmetrisch:

¹⁾ Die Ergebnisse dieser Beobachtungen gehören nicht zum vorliegenden Thema; sie sind vor kurzem an einer anderen Stelle veröffentlicht worden. (Astr. Nachr., Bd. 174.)

die Korrektion der Antrittszeit, die zu deren Reduktion auf den Fall der 10. Größe dient, hat bei den Eintritten zwar entgegengesetztes Vorzeichen, jedoch einen merklich verschiedenen absoluten Betrag, als bei den Austritten. Sie beträgt, wenn m die Anzahl der Größenklassen bezeichnet, um welche der beobachtete Stern heller als 10. Größe ist,

für die Eintritte — $0^s.24 . m.$

für die Austritte + $0^s.35 . m.$

Daraus folgt, daß es unzulässig ist, zur Ableitung der Koordinatendifferenz eines Planeten gegen einen Vergleichstern aus den Beobachtungen einfach das arithmetische Mittel aus dem Ein- und Austritt jedes Gestirns zu verwenden, selbst wenn man Grund hätte, beiden Passagen dasselbe Gewicht zuzuerkennen. Die so berechnete Rektaszensionsdifferenz würde vielmehr einer von der Helligkeitsdifferenz abhängigen Korrektion bedürfen, während man die Deklinationsdifferenz allerdings, dank der Unabhängigkeit der Helligkeitsgleichung von der speziellen Lage der Lamelle, richtig erhält.

Bereits vor mehreren Jahren hat Herr O. A. L. Pihl in einer interessanten Abhandlung¹⁾ auf die Existenz merklicher physiologischer Fehler bei Durchgangsbeobachtungen an okkultierenden Mikrometern aufmerksam gemacht. In dieser Richtung bringt mein Resultat lediglich eine neue Bestätigung dieser Tatsache, eine Bestätigung, die insofern bemerkenswert sein kann, als die von mir gefundenen Beträge sich auf das Mehrfache der von ihm gefundenen belaufen. Nach anderen Richtungen hin stehen aber meine Resultate in deutlichem Gegensatz zu den von ihm erhaltenen; und dieser Gegensatz ist, wie wir gleich sehen werden, von einer gewissen allgemeineren Bedeutung.

7. Herr Pihl fand, daß bei den Austrittsbeobachtungen eine Verzögerung („detention“) stattfindet, die um so größer ist, je schwächer der beobachtete Stern ist, während dagegen die Eintritte unabhängig von der Helligkeit beobachtet werden. Er hat Sterne zwischen den Helligkeitsgrenzen $5^m.5$ und $11^m.7$ untersucht und gefunden, daß die Verzögerung mit der Sterngröße in beschleunigtem Maße zunimmt; der Zuwachs der Verzögerung pro Größenklasse beträgt bei der Sterngröße 8.5 annähernd $0^s.1$.

¹⁾ „On occulting micrometers and their value...“. Christiania 1893.

Aus den Ergebnissen des genannten Verfassers sind (teils von ihm selbst, teils von anderen) Folgerungen gezogen worden, aus denen erhellt, daß man jenen Ergebnissen, wenn auch nicht in bezug auf die numerischen Details, so doch in bezug auf den qualitativen Inhalt jener, eine allgemeine Gültigkeit zugeschrieben hat, die ihnen nicht zukommt. Diese Folgerungen betreffen einesteils physiologische Fragen, anderenteils Regeln rationellen Verfahrens bei Anstellung und Bearbeitung von Messungen mit okkultierenden Mikrometern.

So liest man z. B. auf S. 10. der zitierten Abhandlung die folgenden Betrachtungen:

„(The above) leaves, it seems, no doubt that while the stars, without respect to their magnitude, vanish to the sight simultaneously with their occultation, they do not reappear simultaneously with their emersion from the occulting body. The eye must therefore require a certain time before the impression of light can be transferred to the brain, and the length of this time is dependent on the intensity of light emitted by the star. . . . It seems reasonable to conclude, that the time which elapses between the entrance of the light into the eye and its perception by the brain is mainly consumed in forming the image on the retina. The process is probably analogous to that which takes place on the sensitive plate in a photographic camera, in which, as we know, the time for the formation of the image depends upon the intensity of the light. Physiologists are also now cognizant of the fact, that the formation of the image on the retina is not momentary. It is true that Prof. H. von Helmholtz says in his *Handbuch der physiologischen Optik*, Leipzig 1892, p. 480, that „It has not hitherto been demonstrated, that the perception takes place later than the light begins to act, but on the other hand it may last after the light has ceased to act“. When Prof. Helmholtz expressed himself thus, he probably alluded to light in general and not to light in such faint quantities, as are here in question. In connection with what has been said about the stars, that without regard to their magnitude, they vanish simultaneously with their passing behind a screen, I must remark, that although a strong light leaves its impression on the eye for a shorter or longer time after the source of the light is removed, I have not been able to perceive anything of this kind in the numerous observations made with my refractor, with great care and with special regard for this phenomenon“.

Solche Folgerungen über die Natur des physiologischen Prozesses, sowie auch die Bemerkung, wonach der von v. Helmholtz ausgesprochene physiologische Satz, soweit schwache Lichtquellen in Frage kommen, durch die astronomischen Beobachtungen nicht bestätigt wird, verlieren ihre Stichhaltigkeit, sobald es sich herausgestellt hat, daß die von Herrn Pihl gefundenen Tatsachen nicht ein

allgemeines physiologisches Gesetz darstellen, sondern daß sie auch in qualitativer Hinsicht lediglich eine individuelle Bedeutung haben. Das physiologische Phänomen, das sich bei ihm nur einseitig äußert (nur bei Austrittsbeobachtungen stattfindet), hat sich bei mir, wie wir gesehen haben, als in sehr ausgesprochener Weise nach beiden Richtungen hin wirksam, wenngleich nicht völlig symmetrisch, erwiesen.

An einer anderen Stelle (S. 31.) empfiehlt der Verfasser den Beobachtern, welche okkultierende Mikrometer verwenden, ihre Helligkeitsgleichung einfach durch Beobachtung der Verdeckungsdauer verschieden heller Sterne durch die Lamelle zu bestimmen. Es soll dann diese Verdeckungsdauer eines jeden Sterns, um die des hellsten der beobachteten Sterne vermindert, die dem betreffenden Stern zukommende relative (auf den hellsten bezogene) Verzögerung des Austrittes darstellen, und durch Ausgleichung der so bestimmten Werte eine Korrekktionstafel für die Durchgangsbeobachtungen erhalten werden. Aus dem oben mitgeteilten Ergebnis meiner Experimente folgt aber offenbar, daß die Korrigierung der Beobachtungen auf solcher Grundlage zu ganz fehlerhaften Resultaten führen kann.

Von mehreren Seiten wurde es ferner empfohlen, falls die Helligkeitsgleichung nicht untersucht worden ist, die beobachteten Austrittszeiten ganz von der Reduktion auszuschließen, d. h. die gesuchten Koordinatendifferenzen aus den Eintrittten allein abzuleiten. Meine oben mitgeteilten Erfahrungen können dazu dienen, vor solchen Verallgemeinerungen zu warnen. Denn bei mir äußert sich nach obigen Ausführungen die Wirkung des physiologischen Phänomens in ausgesprochener Weise nach beiden Richtungen hin, und ich würde, wenn ich die Helligkeitsgleichung nicht untersucht hätte, durch den Ausschluß der Austrittsbeobachtungen nicht nur keine Verbesserung erzielen, sondern im Gegenteil würden die Resultate dann in viel höherem Grade von der Helligkeitsgleichung beeinflußt sein, als die aus den arithmetischen Mitteln der beiderseitigen Durchgänge abgeleiteten.

Es ergibt sich also vielmehr für jeden Beobachter die unumgängliche Notwendigkeit, seine Helligkeitsgleichung durch eine besondere Untersuchung (etwa mittels der Abblendungsmethode) sowohl für die Eintritts- als für die Austrittsbeobachtungen zu ermitteln und die entsprechenden Korrekktionen bei der Reduktion der Durch-

gangsbeobachtungen zu berücksichtigen. Denn solange eine solche Untersuchung nicht gemacht ist, kann der Beobachter nicht wissen, ob die Helligkeitsgleichung bloß bei den Austrittsbeobachtungen wirkt; ist sie aber gemacht und hat sie die Einseitigkeit nachgewiesen, so kostet es doch dann keine Mühe, die Austrittsbeobachtungen wegen der Helligkeitsgleichung zu korrigieren und somit einen großen Teil des Beobachtungsmaterials, der nahezu gleich wertvoll ist wie der übrige Teil¹⁾, für die Ableitung der Resultate nutzbar zu machen.

-
19. M. E. PIASECKI. Przyczynek do wiadomości o prawach pracy mięśniowej. (*Contribution à l'étude des lois du travail musculaire volontaire*). Mémoire présenté par M. N. Cybulski m. t.

(Planches XI—XII).

A. Introduction.

Depuis que Mosso (14) avait inauguré une époque nouvelle en matière d'investigation du travail musculaire volontaire, en inventant l'ergographe, son idée fondamentale est devenue l'objet de nombreuses critiques. La plupart d'auteurs fondaient leurs doutes, en premier lieu, sur le fait qu'à la fin d'un ergogramme le muscle est, en réalité, loin d'un épuisement complet et qu'il serait capable de fournir un travail important. La courbe ergographique ne donne pas, par conséquent, un tableau fidèle de la fatigue de l'appareil neuro-musculaire. Abstraction faite d'autres objections, la susmentionnée faisait un des principaux points de départ des nombreuses modifications, parmi lesquelles on doit distinguer le perfectionnement du principe primitif de l'ergographe à poids, à côté du principe nouveau de l'ergographe à ressort. Dans le premier groupe, c'est surtout Treves (17) à qui nous devons reconnaître le mérite d'avoir enrichi nos connaissances des lois du travail musculaire, en établissant une courbe de travail pratiquement infinie au moyen de l'allègement graduel de la charge. Quant aux ergographes à ressort (Cattell 2, Binet et Vaschide 1, Hough 8, Scripture 16,

¹⁾ Das Gewicht einer Austrittsbeobachtung beträgt bei mir $\frac{2}{3}$ des Gewichtes einer Eintrittsbeobachtung.

Shepherd Ivory Franz 6), ils ont fourni, il est vrai, des séries beaucoup plus longues que celles de Mosso, ou même „infinies“; mais, de l'autre côté, ils ont été l'objet des critiques, en partie peut-être encore mieux fondées, que celles dirigées contre l'invention de Mosso. Leur faute principale consiste (20) dans les changements de la résistance pendant la contraction, qui ont un parcours contraire à ce qui se passe dans le travail musculaire spontané. Somme toute, nous n'avons pas encore une méthode entièrement satisfaisante. Chaque type d'investigations ergographiques ne consiste qu'en introduction de quelques conditions plus ou moins artificielles, et on ne saurait en déduire des conclusions certaines que pour le travail effectué dans les mêmes conditions.

A mon avis, de cette discussion qui est loin d'être achevée découle, après tout, l'indication de poursuivre les études du travail musculaire, en se servant des méthodes les plus variées. Ce n'est que de cette manière qu'on arrivera à établir une ou plusieurs méthodes plus rapprochées de l'idéal, ou, au moins, à faire corriger mutuellement les fautes inhérentes à chacune d'elles. Voilà l'idée qui a servi de point de départ pour l'étude présente.

Dans le mode primitif de fonctionnement de l'ergographe, c'est la hauteur des soulèvements qui varie pendant un ergogramme typique de Mosso, tandis que deux autres facteurs fondamentaux du travail, à savoir le rythme et la charge, sont constants. Les séries de Treves font varier le poids, tout en laissant la hauteur des soulèvements et le rythme à un niveau constant. Pour compléter le tableau, il serait donc indiqué d'étudier encore le troisième cas à une valeur variable, à savoir: rythme graduellement s'abaissant au fur et à mesure de la fatigue, poids et hauteur des soulèvements constants. Cependant ce mode n'a pas encore été l'objet d'investigations. Treves a fait, il est vrai, une série d'ergogrammes (18) où, au cours de la fatigue, le sujet parvenait à prendre un rythme spontané, relativement lent. Mais à en juger du compte rendu un peu laconique, c'étaient alors deux valeurs qui variaient, les expériences s'exécutant à l'ergographe modifié de cet auteur (19) à poids graduellement allégé. En outre, l'étude très intéressante de Treves rentre plutôt au domaine de psycho-physiologie, car le ralentissement nécessaire n'est pas ici évalué par l'expérimentateur d'après des données précises, mais il est pris spontanément par le sujet. De l'autre côté, les résultats de

cet auteur rendent la question posée ci-dessus plus actuelle, en démontrant que c'est la nature même qui cherche à remédier à la fatigue, en ralentissant le rythme.

Il y a, du reste, d'exemples nombreux, dans les genres divers du travail spontané, qui peuvent être classés comme travail à charge et ampleur du mouvement fixes et à rythme variable. Chez le cycliste, l'ampleur des mouvements reste rigoureusement constante; la résistance, à conditions de la route, du vent, etc., égales, ne subit non plus des variations importantes; en ce cas, ce n'est que par le rythme que la fatigue peut se manifester. Un ouvrier, mouvant une manivelle, présente aussi des conditions analogues, ainsi qu'un marcheur montant l'escalier. Même dans les modes du travail où le degré de raccourcissement des muscles n'est pas réglé par les circonstances extérieures, il arrive assez souvent que les oscillations de l'ampleur du mouvement deviennent insignifiantes en comparaison avec les changements de la cadence, la résistance gardant le même niveau. Ainsi, on conçoit facilement qu'un nageur remplit très souvent ces conditions. Pour la marche, Demeny (3) a publié les résultats d'une expérience exécutée sur 227 soldats, élèves de l'école gymnastique militaire de Joinville-le-Pont. Pendant une excursion de 44 kilomètres durant 10 h. environ, on enregistrerait la vitesse, la cadence et la longueur des pas; il s'ensuit que la courbe de la vitesse va presque parallèlement à celle de la cadence, la longueur des pas ne variant que très peu.

Ces quelques remarques suffiront peut-être à démontrer qu'il ne s'agit pas dans notre étude d'investigation des conditions tout à fait artificielles, malgré la lacune vaste entre le travail d'un petit muscle donnant rythmiquement des raccourcissements maxima et très rapides d'un côté et les combinaisons complexes de contractions de l'autre côté qui ont lieu dans les divers genres de locomotion et de travail manuel.

B. Méthode.

Comme appareil, j'ai adopté l'ergographe de Mosso, fourni par Petzold (Leipzig). Au cours des expériences, j'étais obligé de le modifier sur plusieurs points, surtout pour l'adapter mieux aux travaux à longue durée et à charge élevée. Ainsi, pour pouvoir bien régler la position relative du soutien de l'avant-bras et du traîneau,

j'ai fait faire, dans la planche en bois du soutien, deux fissures transverses à travers lesquelles on pouvait fixer la planche à la table, au moyen des écrous, en deux positions diverses, l'une pour la main gauche, l'autre pour la main droite. Sans cela, on ne pouvait obtenir la position de la corde dans l'axe de l'appareil. Il m'est arrivé maintes fois, surtout quand je travaillais avec des poids lourds, que la plaque en fer du soutien de l'avant-bras s'est dégagée dans son ensemble, tirée en haut par un mouvement associé de l'avant-bras. Ce défaut fut corrigé, en ajoutant un écrou à la base des pieds de la plaque. Quant aux supports destinés à fixer l'avant-bras, j'ai trouvé, en accord avec Zoth (21), qu'on peut éloigner ceux de derrière sans aucun inconvénient. En revanche, ceux qui fixent la région du carpe ont une importance capitale. Pendant des séries prolongées, il arrivait que la fixation, solide au début, s'est relâchée peu à peu, pour permettre des mouvements associés modifiant le tracé. On a alors façonné les montants verticaux des supports de telle sorte que leurs mouvements rotatoires autour de leur axe ont été exclus; en outre, on a fait les vis qui fixent les supports, en acier et à tête quadrilatérale, à être réglées au moyen d'une clef. Pour éviter des lésions de la peau, on a dû rembourrer les supports beaucoup plus fortement. Pour la même raison, il s'est montré nécessaire de refaire les tuyaux pour les doigts index et annulaire de façon à pouvoir être ouverts de côté et de rembourrer légèrement leur surface intérieure, ce qui nous mettait à même de les adapter mieux aux doigts. L'anneau de cuir, servant à attacher la corde de l'appareil au doigt médius, ne s'est pas montré assez sûr dans les séries de longue durée; nous l'avons remplacé, à la fin d'épreuves nombreuses, par le petit appareil de Zimmermann qui s'adapte à merveille au doigt à l'aide de deux vis. Cet appareil, destiné pour un autre modèle de l'ergographe où la main travaille en pronation, se heurte, il est vrai, à la plaque du soutien pendant l'extension du médius: mais on remédie très facilement à cet inconvénient, en élargissant un peu la fente médiane de la plaque. Enfin, la corde de l'ergographe a dû être choisie parmi les plus résistantes. Quant aux moyens de prévenir des oscillations trop gênantes, causées par l'inertie de la charge, j'ai adopté ceux de Zoth (l. c.), sans éviter pourtant le fonctionnement du ruban à millimètres si imprécis que j'ai renoncé entièrement à m'en servir.

Toutes les expériences furent exécutées sur moi-même¹⁾. Pour nous mettre à l'abri des interruptions de toute sorte, des bruits etc., qui pourraient influencer les résultats (Féré 4), on a choisi, pour ce travail, une chambre à part, éloignée du reste de l'institut. Le sujet menait, durant la période d'expériences, une vie sensiblement régulière. Presque toujours les séries étaient faites aux mêmes heures de la journée, de 10 h. du matin jusqu'à midi environ. En outre, on a mis en considération les courbes quotidiennes du travail (Maggiora 13, Patrizi 15) et ce n'est qu'en cas d'une modification des résultats, contraire aux données de ces courbes, que nous avons cherché d'autres causes.

La table fut fixée au plancher et on a marqué sur ce dernier les positions de la chaise du sujet, symétriquement, pour le travail des deux mains, pour remédier aux sources d'erreur consistant en changements de position (Zoth l. c., Féré 5). Mais il n'a pas fallu aller plus loin en fixation exacte de l'angle compris entre le bras et l'avant-bras, car une expérience a prouvé que des changements de cet angle, allant de 30° jusqu'à 90°, n'avaient aucune influence marquée sur la hauteur des soulèvements. Le tronc était libre, légèrement penché en avant. Le tuyau de Zimmermann fut adapté au doigt médium de sorte qu'il immobilisait parfaitement la deuxième articulation interphalangienne, tout en laissant libre la première. Sa position était déterminée en état de flexion complète du doigt, sans charge, en l'avancant jusqu'au contact avec la première phalange. On obtenait de sorte une fixation sûre et, à la fois, l'insertion de la corde toujours au même point du doigt. Le mouvement se faisait alors aux deux articulations, ce qui n'introduit pas un mécanisme nouveau, en comparaison avec les expériences faites à l'aide de l'anneau de cuir, car, là aussi, les mouvements dans la deuxième articulation interphalangienne ne jouent pas un rôle important (Zoth l. c.). J'ai essayé aussi de travailler au moyen d'une seule articulation (métacarpo-phalangienne), en fixant le tuyau plus haut. Mais les oscillations singulièrement petites de la hauteur des soulèvements, même en cas du changement de la charge, m'ont

¹⁾ Voici quelques données sur ma personne: âge 34 ans, taille 1.72 m, poids 72 kg, complètement sain, pratiquant journallement la gymnastique médicale et le massage, s'adonnant, en outre, régulièrement aux sports (bicyclette, alpinisme, skis).

averti qu'il s'agit alors d'un mode de mouvement qui atteint trop tôt son maximum, à cause de la structure de l'articulation, et se prête ainsi moins bien pour l'étude de la fatigue.

En matière du maniement de la vis horizontale qui sert de support au traîneau de l'appareil, j'ai suivi les conseils de Z o t h (l. c.). Pour compléter l'énumération des soins que j'ai mis pour rendre les résultats comparables entre eux, j'ajoute que j'ai tâché de donner, en chaque contraction, un effort maximum, et que chaque relâchement suivait immédiatement la contraction, toutes les deux phases s'effectuant le plus rapidement possible.

On a fait 35 expériences, de la moitié du décembre 1906 jusqu'à la fin du février 1907. L'ordre usuel de chaque expérience était suivant. Au début, on déterminait (planche XI, fig. 1, à gauche) la hauteur des soulèvements pour les poids différents, en soulevant chacun d'eux, au rythme très lent, 4 à 6 fois. De là on calculait le „poids maximal initial“ (T r e v e s), c'est-à-dire le poids avec lequel le muscle donne, en un soulèvement, la plus grande valeur du travail. Puis, c'était la pause de réparation complète (E r h o l u n g s p a u s e, Z o t h l. c.) qu'on évaluait à la manière indiquée par l'auteur cité (planche XI, fig. 1, à droite). On traçait alors, sur le cylindre noirci, au moyen de la plume de l'appareil, une ligne horizontale au niveau du soulèvement maximum pour le poids donné, puis deux autres lignes, une à 2.5 et l'autre à 5 mm au-dessous d'elle. (Plus tard, j'ai procédé à la manière de T r e v e s: la deuxième ligne à la distance de $\frac{1}{10} h$ de la première, [h = soulèvement maximum], la troisième à $\frac{1}{20} h$ au-dessous de la deuxième). On commence l'expérience par un rythme un peu plus lent que celui qui suffirait à peine à permettre une réparation complète du muscle, à en juger des expériences précédentes. On exécute quelques dizaines (20 à 30) de contractions à ce rythme, puis à un rythme un peu plus rapide, jusqu'à ce qu'on obtienne un abaissement manifeste. Le rythme voisin, qui n'a pas encore donné d'abaissement — voilà le rythme à réparation complète (6 sec. à la fig. 1, pl. XI). Nous verrons plus loin que cette méthode n'a donné, dans notre étude, que des résultats approximatifs. Néanmoins, elle nous a fourni les données les plus précieuses sur l'état de la réparabilité du muscle.

Suivait, enfin, une série de contractions à charge et à hauteur du soulèvement constantes et à rythme graduellement ralenti, dont

la fig. 1, pl. XII, nous donne un fragment. (NB. Le tracé de cette fig. se lit de droite à gauche, contrairement à la fig. 1, pl. XI). On y voit qu'en matière du contrôle du niveau des soulèvements j'ai suivi la méthode de Treves (l. c.). C'est encore sur le point d'évaluation du moment auquel on procédait au changement du rythme, que j'ai adopté l'abaissement des soulèvements de $\frac{1}{10}$ pour indice, tout comme l'auteur cité l'a fait pour l'allègement de la charge.

Le rythme était réglé par un métronome. Le changement du rythme s'effectuait d'une manière bien simple. Le métronome battait une fois par seconde. Prenons le cas où l'on commençait par le rythme 4 sec. = 15 fois par min.; lorsque la hauteur des soulèvements a tombé définitivement au-dessous de la ligne horizontale, tracée à la hauteur de $\frac{9}{10}$ du soulèvement maximum au début, un aide avertissait le sujet, ou bien il le voyait lui même dans un miroir convenablement placé. Le sujet changeait alors le rythme, ne faisant, par exemple, qu'un soulèvement toutes les 5 sec. au lieu de 4 sec., et l'aide marquait ce moment sur le cylindre noirci. Bien que primitive en apparence, cette méthode s'est montrée tout à fait satisfaisante au bout d'un court temps d'exercice, des erreurs n'arrivant que très rarement. L'unique inconvénient sérieux consistait dans l'impossibilité d'une gradation plus précise, jusqu'aux fractions d'une seconde, ce qui se laissait sentir surtout aux rythmes rapides. Mais, eu égard à des phénomènes un peu grossiers dont il s'agit ici, il est bien probable que ce manque de précision n'a pas trop altéré nos résultats. Le mode de gradation du rythme, nécessaire pour rétablir la hauteur primitive des soulèvements après chaque abaissement de $\frac{1}{10}$, faisait l'objet de nombreuses épreuves. J'ai fini par adopter une progression, dans laquelle chaque rythme suivant diffère de $\frac{1}{4}$ environ du précédent. Si le rythme initial = R , voici la progression:

$$R, R\left(1 - \frac{1}{n}\right), R\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \dots R\left(1 - \frac{1}{n}\right)^q,$$

où $n = 4$ environ et q correspond au nombre de changements du rythme. Aux séries à rythme rapide, n assumait, au début, une valeur plus basse, pour la raison mentionnée ci-dessus. Mais il n'est pas invraisemblable que, dans ce cas, l'appareil neuro-musculaire exigeait une gradation du rythme un peu plus brusque, question que nous traiterons encore au chapitre suivant.

Il va sans dire que la méthode décrite laisse encore un terrain assez vaste aux améliorations; j'ai imaginé, pour une étude future, un mécanisme plus exact du changement du rythme et j'en rendrai compte prochainement.

Passons à la mensuration des tracés. A cause de la précision imparfaite de la bande à millimètres annexée à l'ergographe, nous avons dû mesurer chaque soulèvement immédiatement, à l'aide d'un compas. Puis, on a calculé le rendement du travail pour des périodes assez courtes, comptant le plus souvent 24 sec. Mais, vu les changements du rythme, il était impossible de ne pas laisser varier un peu la durée de ces périodes d'un temps à l'autre. Il s'ensuit qu'en prenant pour point de départ le travail total d'une période nous courrions le risque d'obtenir une courbe contenant des oscillations factices provoquées par les différences de durée des périodes. C'est ce qui nous a amené à tracer nos courbes non d'après les valeurs absolues du travail, mais bien d'après le rendement par seconde, calculé pour chaque période, valeur tout à fait indépendante de la durée de ces périodes (planche XII, fig. 2). Quant aux autres courbes, intercalées dans le texte, elles trouveront plus loin leur explication.

C. Résultats.

Nos expériences peuvent être divisées en deux groupes. Le premier comprend 15 séries de contractions à rythme initial considérablement supérieur au rythme à réparation complète. Les séries de l'autre groupe, au contraire, commencent par le rythme à réparation complète même, ou bien par une cadence encore plus lente.

Quant au premier groupe, le premier résultat à noter est que j'ai réussi, dans 10 séries sur 15, à maintenir les hauteurs des soulèvements à un niveau sensiblement constant, en changeant le rythme d'un temps à l'autre, ainsi que j'ai décrit dans le chapitre précédent. En un mot, il y a du „travail constant“, tout comme dans les expériences de Treves (l. c.). Pourquoi n'ai-je pas eu de succès, à cet égard, dans toutes les séries? En examinant de plus près les 5 séries à hauteur de contractions constamment abaissée au cours de l'expérience, nous voyons, 1-0, que ce sont justement les séries de début (du 7-ème au 17-ème jour d'entraînement), 2-0, qu'elles sont exécutées toutes avec le poids maximum (5 à 7 kg), et 3-0, que la première série à travail à peu près constant était faite

le même jour que la dernière à travail inconstant, mais alors avec un poids plus léger (3 kg). Abstraction faite des petites sources d'erreur inévitables, qui peuvent être supposées surtout dans les expériences de début, on doit alors chercher la cause dans le muscle mal entraîné qui avait encore peu de réparabilité en soulevant des poids lourds. Dans la seconde moitié de la période d'entraînement (du 37-ème au 77-ème jour) j'arrivais facilement à maintenir le niveau du travail constant, tout en travaillant avec des charges élevées. Nous traiterons encore plus loin, le degré d'exactitude du terme „travail constant“ et les oscillations de la hauteur des soulèvements.

Passons maintenant aux courbes de rendement du travail, réunies sur la planche XII. On y voit quelques tracés d'après les expériences du premier groupe, pourvus des numéros XVIII, XIX, XX, XXI, XXIV, XXVIII et XXXVI. Abstraction faite de la descente en escalier et des oscillations, ils ont un parcours comparable à des paraboles (voir plus loin), la valeur du rendement décroissant plus rapidement au début et de plus en plus lentement ensuite. Sur ce point, il y a une ressemblance marquée entre nos courbes et celles de Treves (l. c.). De plus, quand on dresse des courbes de rythme pour les mêmes expériences (fig. 1), il est évident qu'elles ont un parcours tout à fait analogue aux courbes de rendement; toutes les valeurs du rythme, multipliées par un facteur constant pour chaque expérience, donnent à peu près la valeur du rendement du point correspondant. Si nous désignons le rendement du travail par seconde — T_s , le rythme — R , la hauteur moyenne du soulèvement — h , et le poids — P , alors:

$$T_s = R \frac{hP}{60} = R \cdot c,$$

la valeur de c restant constante pour la même expérience. Ainsi, par exemple, dans l'expérience XXXVI (27 février), $h = 50.71$, $P = 6$, alors $c = 5.071$. Nous donnons ci-dessous les valeurs du rendement calculées d'après cette formule, à côté des valeurs réalisées dans l'expérience:

Valeurs calculées		Valeurs réalisées du rendement (en kg m. sec.)
$R = 60$,	304.26	300.74
$R = 30$,	152.13	152.77
$R = 20$,	101.42	101.88
$R = 15$,	76.06	75.18

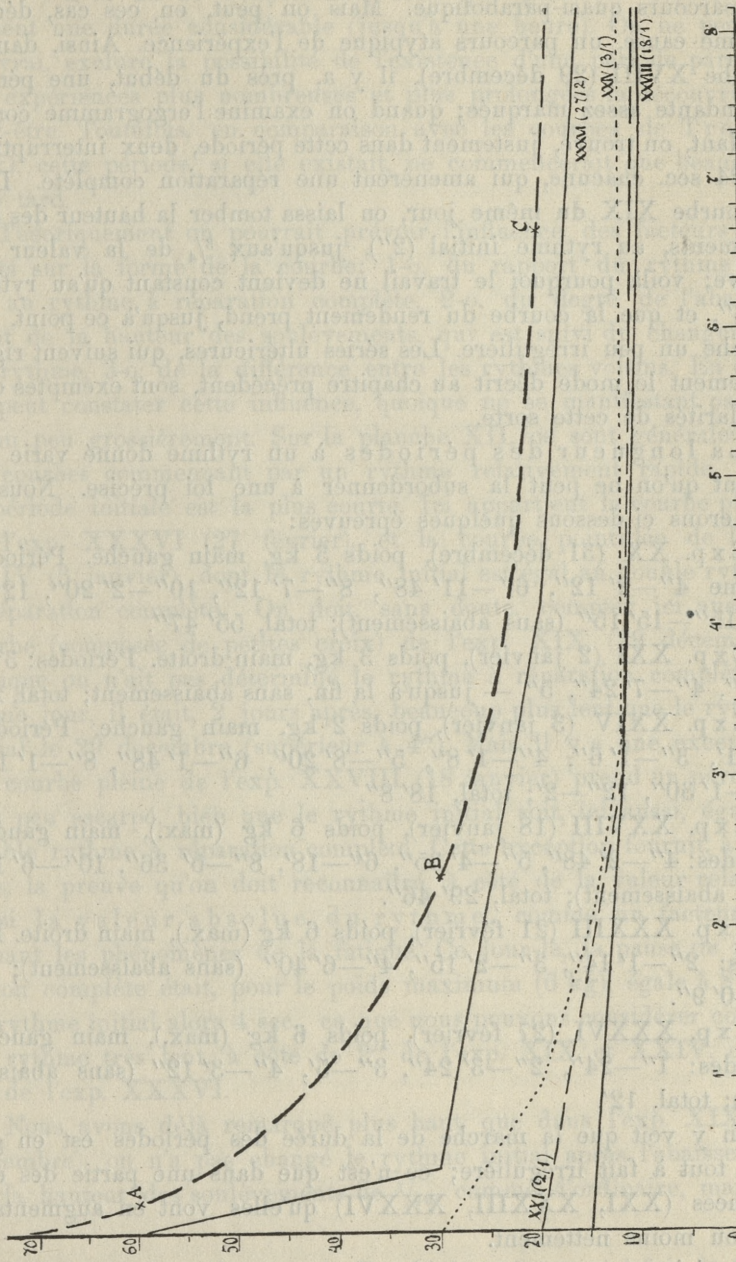


Fig. 1.

Nous trouvons, il est vrai, parfois des exceptions de cette règle du parcours quasi-parabolique. Mais on peut, en ces cas, déceler comme cause, un parcours atypique de l'expérience. Ainsi, dans la courbe XVIII (29 décembre), il y a, près du début, une période ascendante assez marquée; quand on examine l'ergogramme correspondant, on trouve, justement dans cette période, deux interruptions, de 24 sec. chacune, qui amenèrent une réparation complète. Dans la courbe XIX du même jour, on laissa tomber la hauteur des soulèvements, au rythme initial (2''), jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de la valeur primitive; voilà pourquoi le travail ne devient constant qu'au rythme de 8'', et que la courbe du rendement prend, jusqu'à ce point, une marche un peu irrégulière. Les séries ultérieures, qui suivent rigoureusement le mode décrit au chapitre précédent, sont exemptes d'irrégularités de cette sorte.

La longueur des périodes à un rythme donné varie tellement qu'on ne peut la subordonner à une loi précise. Nous en donnerons ci-dessous quelques épreuves:

Exp. XX (31 décembre), poids 3 kg, main gauche. Périodes: rythme 4''—2' 12'', 6''—11' 48'', 8''—7' 12'', 10''—2' 20'', 12''—19', 15''—15' 15'' (sans abaissement); total, 55' 47''.

Exp. XXI (2 janvier), poids 3 kg, main droite. Périodes: 3''—2' 36'', 4''—7' 24'', 5'' — jusqu'à la fin, sans abaissement; total, 29'.

Exp. XXIV (3 janvier), poids 2 kg, main gauche. Périodes: 2''—1', 3''—1' 6'', 4''—1' 8'', 5''—8' 20'', 6''—1' 48'', 8''—1' 16'', 10''—1' 30'', 12''—2'; total, 18' 8''.

Exp. XXVIII (18 janvier), poids 6 kg (max.), main gauche. Périodes: 4''—2' 48'', 5''—4' 35'', 6''—18', 8''—5' 36'', 10''—6' 10'' (sans abaissement); total, 29' 46''.

Exp. XXXIII (21 février), poids 6 kg (max.), main droite. Périodes: 2''—1' 14'', 3''—2' 15'', 4''—6' 40'' (sans abaissement); total, 10' 9''.

Exp. XXXVI (27 février), poids 6 kg (max.), main gauche. Périodes: 1''—24'', 2''—3' 24'', 3''—5', 4''—3' 12'' (sans abaissement): total, 12'.

On y voit que la marche de la durée des périodes est en général tout à fait irrégulière; ce n'est que dans une partie des expériences (XXI, XXXIII, XXXVI) qu'elles vont en augmentant plus ou moins nettement.

Je n'ai pu constater non plus l'existence d'une „période cons-

tante" ¹⁾ à la fin de l'expérience, bien que plusieurs expériences eussent une durée considérable (jusqu'à une heure). On ne peut, il est vrai, exclure la possibilité de l'existence d'une période pareille; des expériences plus nombreuses et plus prolongées la découvriront peut-être. Toutefois, en comparaison avec les courbes de Treves (l. c.), cette période, si elle existait, ne commencerait que beaucoup plus tard.

Théoriquement on pourrait prévoir l'influence des facteurs suivants sur la forme de la courbe: 1-0, du rapport du rythme initial au rythme à réparation complète, 2-0, du degré de l'abaissement de la hauteur des soulèvements, qui est suivi du changement du rythme, 3-0, de la différence entre les rythmes voisins. En effet, on peut constater cette influence, quoique ne se manifestant parfois qu'un peu grossièrement. Sur la planche XII, ce sont généralement les courbes commençant par un rythme relativement rapide, dont la période initiale est la plus courte. Ici appartient la courbe pleine de l'exp. XXXVI (27 février), et la courbe pointillée de l'exp. XXIV (3 janvier), dont le rythme initial est égal au double rythme à réparation complète. On doit, sans doute, compter ici aussi la courbe (composée de petites croix) de l'exp. XIX (29 décembre); quoique on n'ait pas déterminé le rythme à réparation complète le même jour, il était, 2 jours après, beaucoup plus lent que le rythme initial le 29 décembre (supérieur à 4"). Mais il y a une exception. La courbe pleine de l'exp. XXVIII (18 janvier) prend un parcours très peu escarpé, bien que le rythme initial soit, ici aussi, égal au double rythme à réparation complète. Cette exception fournit, à mon avis, la preuve qu'on doit reconnaître, à côté de la valeur relative, aussi la valeur absolue du rythme, comme un facteur dominant les phénomènes de la fatigue. Ce jour-là, la pause de réparation complète était, pour le poids maximum (6 kg), égale à 8 sec., le rythme initial alors 4 sec., ce que nous pouvons considérer comme un rythme très lent, à côté de 2" de l'exp. XIX et XXIV, ou de 1" de l'exp. XXXVI.

Nous avons déjà remarqué plus haut que dans l'exp. XIX (29 décembre), on n'a pas changé le rythme initial après l'abaissement de la hauteur des soulèvements de $\frac{1}{10}$, comme d'ordinaire, mais on

¹⁾ Nous entendons sous ce terme une période pratiquement infinie du travail constant à rythme constant (final), analogue au „poids final“ de Treves.

l'a laissé tomber jusqu'aux $\frac{3}{4}$ de la valeur initiale. Nous y voyons la cause principale de l'abaissement brusque de cette courbe, à la fin de la 1-e période et quelque temps après.

Quant à la gradation des rythmes, j'ai suivi, en général, une progression décrite au chapitre précédent. Mais, à cause de difficultés techniques, il y avait d'exceptions, surtout aux rythmes rapides. Ainsi, les rythmes initiaux: 1'', 2'', 3'', donnent une progression beaucoup plus brusque, ce qui se manifeste aux différences de hauteur plus importantes entre les périodes de début des courbes XIX, XXIV et XXXVI. Du reste, il est bien probable que, dans ces cas, la gradation, choisie ainsi à cause de circonstances extérieures, répond mieux aux besoins de l'appareil neuro-musculaire, qu'une progression uniforme. S'il y avait une réparation plus que suffisante à cause des changements du rythme trop brusques au début, cela se trahirait peut-être par la durée plus longue de la 2-e ou de la 3-e période. Cette supposition semble se vérifier à la courbe XXXVI, où la 2-e période se traîne jusqu'au delà de 3 min., ce qu'on pourrait attribuer au doublement de la pause; mais il n'y a certainement rien de pareil à la courbe XXIV, dont la 2-e période est bien courte. On peut donc supposer que, dans certaines limites, les grandes fréquences au début de l'expérience exigent une gradation plus brusque.

La charge ne semble pas avoir une influence décisive sur la forme de la courbe. Si l'on compare les tracés correspondants aux expériences à poids lourd (XVIII, XXVIII, XXXVI) à ceux à poids léger (XIX, XX, XXI, XXIV), ces deux catégories ne se différencient par aucun signe essentiel. En outre, nous voyons deux courbes jumelles (XXI et XXVIII), qu'on pourrait facilement confondre, quoique l'une d'elles soit exécutée à charge double en comparaison avec l'autre. Ces remarques ont trait non seulement aux valeurs absolues, mais aussi aux valeurs relatives des poids (c'est-à-dire, aux poids comparés au poids maximum du même jour), car, comme nous le verrons plus loin, l'entraînement n'a eu que très peu d'influence sur la valeur du poids maximum.

Parmi les séries du second groupe (rythme initial égal ou plus lent du rythme à réparation complète), le travail reste „constant“ dans 5 exp. sur 10, ce qui veut dire que les hauteurs des soulèvements ne tombent pas au-dessous des $\frac{9}{10}$ de la valeur initiale. Mais, néanmoins, on voit clairement aux courbes XXXIV et

XXXV (27 février, planche XII) que le rendement de travail s'abaisse pendant l'expérience. La fig. 1, pl. XI démontre qu'à l'exp. IX (18 décembre) la pause 5'', déterminée selon la méthode de Zoth (l. c.) devient insuffisante au bout de 5 min. 6 sec. Le même cas se présente dans les exp. XXIII, XXIX, XXXI et XXXII. Nous donnons ci-dessus quelques détails:

Exp. IX (18 décembre), poids 5 kg (max.), main gauche. Rythme à réparation complète = 5''; après 5 min. 6 sec. de travail — 6''.

Exp. XXIII (3 janvier), poids 2 kg, main gauche. Le rythme 4'', déterminé comme r. à r. c., cesse de l'être au bout de 11 min. de travail.

Exp. XXV (17 janvier), poids 2 kg, main droite. 18 min. de travail constant au rythme 3 sec. Le r. à r. c. n'était pas déterminé, mais il devrait être supérieur à 20 soulèvements par min.

Exp. XXVI (17 janvier), main gauche, le reste comme XXV.

Exp. XXVII (18 janvier), poids 2 kg, main gauche. R. à r. c. = 2''. Travail constant au rythme 3'' pendant 20 min.

Exp. XXIX (19 janvier), poids 6 kg, main gauche. R. à r. c. = 3''; mais, après 19 min. 45 sec. de travail, on a dû le changer à 4 sec., qui se montrent suffisantes jusqu'au bout de l'expérience (11 min. 56 sec.).

Exp. XXXI (30 janvier), poids 6 kg, main droite. R. à r. c. = 3'', mais il cesse de l'être après 6' 18'' de travail. On change le rythme pour 4'', qui ne sont suffisantes que pendant 4 min. 56 sec. suivantes. Ensuite, on prend le rythme de 6'' jusqu'à la fin de l'exp. (3 min. 18 sec.).

Exp. XXXII (11 février), poids 8 kg (max.), main gauche. Le même rythme à r. c., qui, après 8' 30'', doit être changé pour 4''.

Exp. XXXIV (27 février), poids 6 kg (max.), main gauche. 11 h. 20 min. du matin. R. à r. c. = 3'', qui fournit un travail „constant“ (voir plus haut) de 8 min. 50 sec.

Exp. XXXV, le même jour, toutes conditions semblables, sauf le r. à r. c., qui, à 12 h. a monté à 2'' (conformément aux courbes quotidiennes de travail de Maggiora et Patrizi).

Mettant de côté les exp. XXV—XXVII, où le rythme était plus lent que le r. à r. c., nous avons alors dans toutes les séries un abaissement manifeste de la hauteur des soulèvements pendant le travail au „rythme à réparation complète“, déterminé d'après Zoth. Cela semble prouver que ce terme, introduit

par ce savant, n'a qu'une signification relative, au moins s'il ne s'agit pas des sujets aussi admirablement entraînés que Zoth lui-même. Pour les conditions dans lesquelles se trouvait mon appareil neuro-musculaire pendant cette série d'expériences, il serait indiqué, en examinant ses relations aux rythmes divers, d'évaluer la durée du travail constant à chaque rythme.

Passons maintenant à la comparaison des deux groupes d'expériences, traités ci-dessus, au point de vue de l'économie de travail. Obtient-on un rendement plus considérable, en commençant avec des rythmes rapides, ou bien avec des rythmes lents, au niveau ou au-dessous du rythme à réparation complète? Pour nous rendre compte de ces relations, il ne suffit pas d'examiner la planche XII. Il faut dessiner des courbes de la somme du travail accompli jusqu'au moment donné, ce que nous avons fait sur la fig. 2. Les ordonnées signifient ici le travail en kgm, les abscisses le temps en minutes. J'ai fait ce calcul pour les exp. XXIII et XXIV (3 janvier) aussi que pour XXXIV—XXXVI (27 février) qui étaient exécutées le même jour et avec le même poids, d'abord au rythme lent, puis au rythme rapide et graduellement ralenti. Or, on voit que les tracés correspondants aux rythmes lents, accusent une marche presque rectiligne, pendant que les exp. XXIV et XXXVI donnent des courbes quasi-paraboliques (le paramètre calculé pour les points divers va en croissant). Le 27 février, c'était le travail à rythme rapide qui l'emportait sur la série de 2'' pendant les premières 3 min. 10 sec. Puis, le travail à rythme plus lent prend le dessus. Le croisement avec le tracé de 3'' a lieu beaucoup plus tard; il faut remarquer, qu'à l'heure de l'exp. XXXVI, le rythme à réparation complète égalait 2''. Plus bas que ces trois courbes de travail avec le poids maximum (6 kg), nous trouvons l'autre couple de tracés, du 3 janvier (poids 2 kg). Malgré la même relation entre les rythmes initiaux (1:2) que le 27 février, le travail à rythme rapide et puis ralenti, montre beaucoup plus longtemps (jusqu'à 7' 5'') sa supériorité.

Il y a quelques remarques à faire. Nous avons déjà constaté plus haut que la gradation du rythme, dans l'expérience XXXVI, est vraisemblablement un peu trop brusque au début. Il s'ensuit que, au moyen d'une progression plus douce, on obtiendrait un éloignement du croisement des courbes, ou, au moins, une convexité plus accentuée du tracé XXXVI au début, ce qui veut dire que les

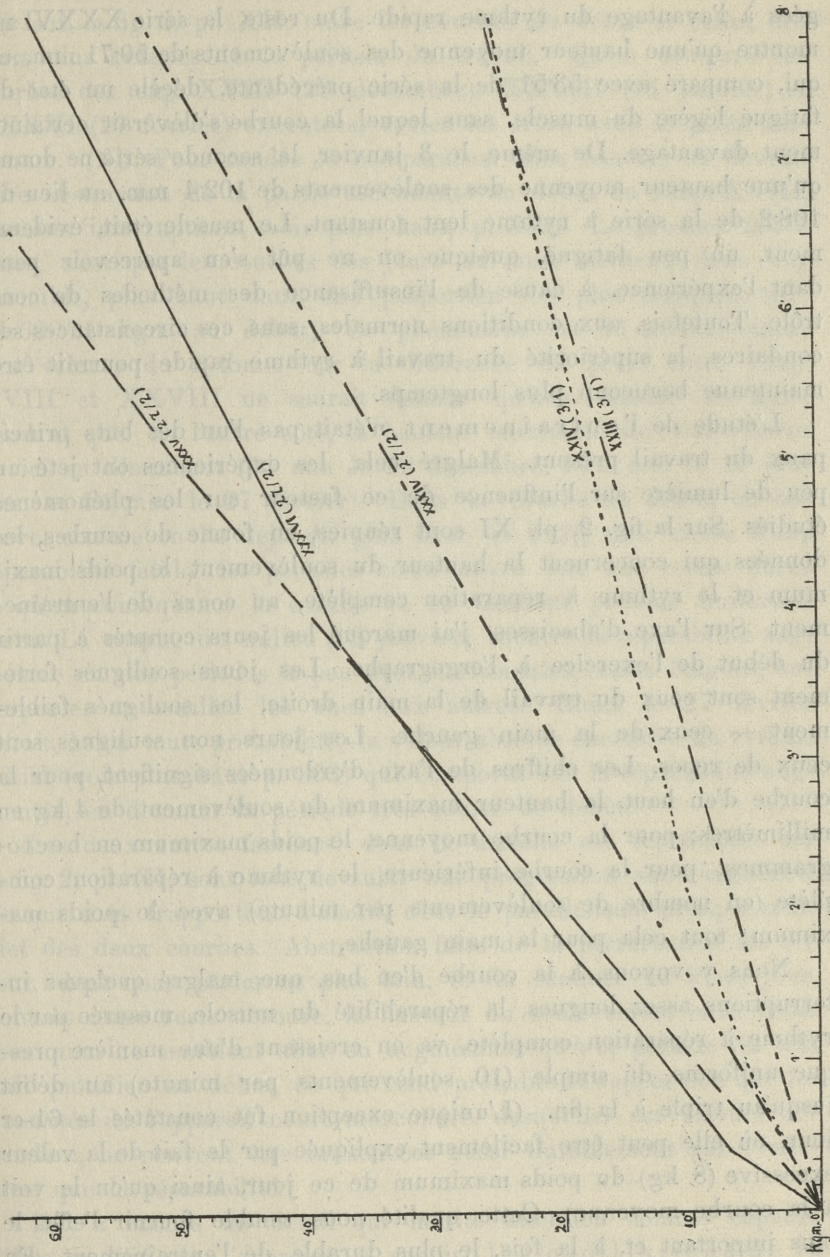


Fig. 2.

relations des deux modes de travail pourraient encore être changées à l'avantage du rythme rapide. Du reste, la série XXXVI ne montre qu'une hauteur moyenne des soulèvements de 50·71 mm, ce qui, comparé avec 53·51 de la série précédente, décelez un état de fatigue légère du muscle, sans lequel la courbe s'élèverait certainement davantage. De même, le 3 janvier, la seconde série ne donne qu'une hauteur moyenne des soulèvements de 102·4 mm, au lieu de 108·2 de la série à rythme lent constant. Le muscle était, évidemment, un peu fatigué, quoique on ne pût s'en apercevoir pendant l'expérience, à cause de l'insuffisance des méthodes de contrôle. Toutefois, aux conditions normales, sans ces circonstances secondaires, la supériorité du travail à rythme rapide pourrait être maintenue beaucoup plus longtemps.

L'étude de l'entraînement n'était pas l'un des buts principaux du travail présent. Malgré cela, les expériences ont jeté un peu de lumière sur l'influence de ce facteur sur les phénomènes étudiés. Sur la fig. 2, pl. XI sont réunies, en forme de courbes, les données qui concernent la hauteur du soulèvement, le poids maximum et le rythme à réparation complète, au cours de l'entraînement. Sur l'axe d'abscisses, j'ai marqué les jours comptés à partir du début de l'exercice à l'ergographe. Les jours soulignés fortement sont ceux du travail de la main droite, les soulignés faiblement — ceux de la main gauche. Les jours non soulignés sont ceux de repos. Les chiffres de l'axe d'ordonnées signifient, pour la courbe d'en haut, la hauteur maximum du soulèvement de 4 kg en millimètres; pour la courbe moyenne, le poids maximum en hectogrammes; pour la courbe inférieure, le rythme à réparation complète (en nombre de soulèvements par minute) avec le poids maximum; tout cela pour la main gauche.

Nous y voyons, à la courbe d'en bas, que, malgré quelques interruptions assez longues, la réparabilité du muscle, mesurée par le rythme à réparation complète, va en croissant d'une manière presque uniforme, du simple (10 soulèvements par minute) au début jusqu'au triple à la fin. (L'unique exception fut constatée le 61^{er} jour, où elle peut être facilement expliquée par le fait de la valeur excessive (8 kg) du poids maximum de ce jour, ainsi qu'on le voit à la courbe moyenne). Cette qualité nous semble fournir l'effet le plus important et, à la fois, le plus durable, de l'entraînement. En

outre, elle nous aide à reconnaître la cause des différences qu'on voit sur la fig. 2, pl. XII, entre les courbes du début et celles des jours plus avancés de la période du travail. Qu'on compare les courbes des exp. XVIII (29 décembre), XXVIII (18 janvier) et XXXVI (27 février) exécutées, toutes les trois, avec le poids maximum. (NB. Pour rendre la comparaison plus exacte, on devrait faire abstraction de la partie ascendante au début de l'exp. XVIII, due aux interruptions, voir plus haut, p. 302). Le premier fait à noter, c'est que les courbes des jours suivants montent, dans leur ensemble, plus haut dans une proportion des plus marquées (51:86:300:71 kgm au début). Ce phénomène est dû exclusivement aux valeurs du rythme, car la différence du poids entre l'exp. XVIII et XXVIII ne saurait donner qu'une dizaine de kgm, pendant que, de l'autre côté, la hauteur maximum du soulèvement va ici en diminuant (64 mm le 29 décembre, 57.5 mm le 18 janvier, et 54 mm le 27 février). Dans la courbe du début, on observe, comme on l'a déjà dit plus haut (p. 012), qu'à cause d'une réparabilité faible, les périodes consécutives ont une courte durée et qu'en conséquence la courbe va en tombant presque uniformément. La courbe du milieu (18 janvier), montre la réparabilité augmentée en des périodes à peu près horizontales, assez longues, superposées en escalier les unes aux autres. Enfin, le 27 février c'était, selon toute probabilité, la valeur absolue excessive du rythme initial (voir plus haut p. 303) qui l'emporta sur la réparabilité augmentée, en donnant la période très courte de début.

Les deux autres facteurs, dont la marche est représentée sur la fig. 2, pl. XI, sont loin de subir une progression aussi régulière. Ce qui nous frappe tout d'abord, c'est le parallélisme presque complet des deux courbes. Abstraction faite de la perturbation du 9-e jour, dont nous parlerons plus loin, et du sommet du 61-er jour, dont la cause reste obscure, la hauteur du soulèvement et le poids maximum ne semblent aller en augmentant qu'à la période du travail quotidien au début, ce qui rend probable la supposition que les quantités de l'appareil neuro-musculaire, desquelles ces valeurs dépendent, ne peuvent être influencées aussi durablement par l'exercice, que la réparabilité.

Il y a encore un détail qui mérite attention comme capable d'être modifié par l'exercice, à savoir, les oscillations de la

hauteur du soulèvement¹⁾. Pour étudier cette question, j'ai déterminé, pour 4 expériences, 1-0, les différences entre deux hauteurs moyennes des soulèvements, calculées pour des groupes de 24 soulèvements chacune; 2-0, les différences entre le plus haut et le plus bas soulèvement de chaque groupe susmentionné. Les chiffres trouvés ainsi, sont réunis au tableau suivant:

Exp.	Hauteur moyenne	Oscillations de la hauteur moyenne	Oscillat. de la hauteur d'un soulèvement séparé
XVIII (29 déc.)	58.7	3.8, 0.7. moy.: 2.25	15.5, 6.5, 9, moy.: 7
XXIV (3 janvier)	102.4	7.01, 0.64, 3.98, 4.74, 1.35, 3.67, moy.: 3.65	9.5, 10, 9, 16, 8, 10.5, 9, 12.5, moy.: 10.5
XXVIII (18 janv.)	53.5	2.63, 1.43, 0.31, 0.27, 2.85, 1.04, 0.32, 0.49, moy.: 1.16	13, 10.5, 8, 8, 7.5, 9.5, 9.5, 12, moy.: 12
XXXVI (27 févr.)	50.7	0.75, 0.4, 0.33, 4.81, 0.34, 4.09, 1.18, 1.31, 3.92, 1.62, 1.62, moy.: 1.92	13.5, 9, 9, 7, 8, 12, 12, 7.5, 12, 11, 8, 9.5, moy.: 9.8.

Or, les oscillations de la hauteur d'un soulèvement séparé, tombèrent à leur minimum le 3 janvier (de la valeur 10.5 mm, on doit retrancher la moitié environ, vu la hauteur moyenne du soulèvement), ce qui est en accord parfait avec les données de la fig. 2, pl. XI, qui nous montrent que c'était à la fin de la deuxième période de l'entraînement continu. Puis, à l'époque du travail en reprises espacées, l'ampleur d'oscillations monte. Quant à l'oscillation de la hauteur moyenne, on ne saurait déduire du tableau quelque chose de précis.

Reste encore à élucider la perturbation des deux courbes d'en haut de la fig. 2, pl. XI, le 9-e jour. Ce jour-là (21 décembre), j'ai fait une petite, mais très fatigante excursion (de 20 min. de durée) au traîneau suédois, nommé *sparkstötting*. C'était 20 min. après (à

¹⁾ Outre les „périodes“ de Lombard (11) il y avait, comme on le voit sur la fig. 1, pl. XI, des oscillations irrégulières.

9 h. 10 min. du matin) que j'ai évalué, pour la première fois, les hauteurs du soulèvement pour les poids divers, en trouvant, pour 3 kg — 95 mm, 4 kg — 87 mm, 5 kg — 77 mm, 6 kg — 59 mm, 7 kg — 54 mm, 8 kg — 44 mm, d'où j'ai calculé le poids maximum = 7 kg. A 12 h. 7 min., j'ai répété l'expérience, ne trouvant que 3 kg — 88 mm, 4 kg — 68, 5 kg — 52, 6 kg — 40, 7 kg — 32, 8 kg — 24,5, poids max. = 4 kg. Entre ces deux mensurations, on n'a fait qu'une série de travail à peu près constant, de 9 h. 45 min. jusqu'à 10 h., avec la même main (gauche), et une expérience analogue, avec la main droite, à 11 h. A midi, on pouvait être certain que la main gauche n'avait pas de trace de fatigue locale. D'où venait cette excitation le matin, suivie d'une dépression à midi, contrairement à la courbe quotidienne du travail (Maggiora, Patrizi l. c.)? Il serait difficile de se soustraire à la supposition que c'est la fatigue générale (très marquée au cours de la première mensuration) qui, par l'intermédiaire de la circulation accélérée, provoqua ce phénomène, comme Guillemet (7) l'a déjà constaté, dynamométriquement, pour la bicyclette, et Kronecker et Cutter (10) pour la marche, à l'aide de l'ergographe.

D. Quelques considérations théoriques.

La première chose à faire, après ce compte rendu des résultats, serait de tracer une parallèle entre nos données et celles de Mosso et de Treves. A ce but, nous allons résumer ci-dessous les points les plus importants

1. Au premier coup d'oeil, nos expériences s'éloignent tout à fait des séries de Mosso (à hauteur du soulèvement variable), en rentrant, de l'autre côté, dans le type à hauteur constante, établi par Treves. Mais, là aussi, il y a une différence marquée. Dans les séries de Treves, il suffit de diminuer le poids dans la même proportion, dans laquelle la hauteur des soulèvements s'est abaissée, pour obtenir le retour à la hauteur primitive. Si nous désignons par E le rendement du travail, par p le poids, h la hauteur du soulèvement, R le rythme, à la première période de l'expérience

$$E = p h R .$$

Lorsque, à la suite de la fatigue, h s'est raccourci de $\frac{h}{m}$, le rendement tombe à :

$$E_1 = p h \left(1 - \frac{1}{m} \right) R.$$

Or, pourvu que la valeur de m ne soit pas trop petite, l'expérience prouve l'équation:

$$E_1 = p \left(1 - \frac{1}{m} \right) h R.$$

Dans nos expériences, nous avons la même équation:

$$E_1 = p h \left(1 - \frac{1}{m} \right) R,$$

qui semble permettre la transformation en:

$$E_1 = p h R \left(1 - \frac{1}{m} \right),$$

ce qui veut dire le rétablissement du niveau initial des soulèvements, sans changement de la charge, par le ralentissement du rythme de la même fraction, dont les soulèvements se sont raccourcis. Mais les faits expérimentaux nient la possibilité d'une telle transformation. Pour rétablir h , il faut que E_1 tombe à la valeur:

$$E_2 = p h R \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

où $n < m$ (dans nos expériences, $m = 10$, $n = 4$ environ, ou moins encore).

D'où vient cette divergence? On doit exclure, en première ligne, des erreurs de méthode¹⁾. Or, je dois insister sur le fait qu'au début des expériences, $n = 4$ était encore évidemment trop grand pour le maintien du travail constant et qu'aux expériences ultérieures on voyait très souvent que cette gradation du rythme suffisait à peine pour ce but. Notre mode de gradation, bien qu'un peu arbitraire, ne devrait donc pas être trop loin du minimum exigé par l'appareil neuro-musculaire même. Mais, de l'autre côté, en examinant de plus près les conditions des deux séries d'expériences, nous y voyons une différence qui pourrait, à mon avis, suffire à élucider la question posée. Dans les séries de Treves, on rétablit la

¹⁾ Toutefois il est impossible à présent d'apprécier la part que pourrait jouer, à cet égard, la différence de l'angle sous lequel agit la résistance dans l'ergographe de Mosso et celui de Treves.

hauteur du soulèvement, sans changer une valeur des plus importantes à point de vue de l'énergétique musculaire, à savoir, le travail d'une contraction ph , qui est maintenu sur le niveau obtenu sous l'influence de la fatigue, ne changeant que la relation de ses facteurs p et h . Dans nos expériences, au contraire, le travail de soulèvement doit remonter à sa valeur primitive au moyen d'un ralentissement du rythme¹).

2. La deuxième différence concerne la forme de la courbe de rendement du travail. Les courbes à poids constant et à rythme constant (Mosso), qu'on peut étudier immédiatement aux ergogrammes ordinaires, vont, le plus souvent, en tombant brusquement au début, puis de plus en plus doucement, pour finir par un abaissement rapidement croissant jusqu'à zéro (parcours „en *S* italique“). Nos courbes, nous l'avons déjà dit, ont une vague ressemblance avec les paraboles. Nous avons tâché, d'après le tracé simplifié de l'expérience XXXVI à la fig. 1, de dresser la courbe idéale, dépourvue de perturbations (A B C). Elle n'est pas pourtant une parabole. On pourrait la considérer comme composée de fractions de paraboles, à paramètre décroissant plus ou moins rapidement (les paramètres calculés pour les points A, B et C sont en relation de 3:2:1 environ).

Le même cas a lieu dans les courbes de Treves, à un degré plus grand encore; puis, une ligne horizontale s'attache (période constante). De là on peut facilement déduire que notre méthode fournit une courbe de travail, intermédiaire entre celles de Mosso et de Treves.

3. Enfin, il y a encore une qualité, dans laquelle les trois modes de travail ne vont pas parallèlement. Dans les séries à poids et à rythme constants, à partir d'une certaine valeur de ces deux facteurs, le travail tombe à zéro dans un temps limité, il ne peut donc montrer une supériorité sur le travail constant (obtenu soit par diminution du poids, soit par augmentation des intervalles) qu'en une très courte période de début. Dans les séries à poids graduellement diminué, le poids final égale ce poids, avec lequel, au même rythme, le muscle peut donner, dès le début, un travail constant pratique-

¹ Un phénomène dérivant, peut-être ensemble avec ce fait, d'une loi commune, a été, du reste, signalé déjà par Maggiora (l. c.) qui, pour fournir la même quantité du travail avec le poids double, a dû tripler les intervalles.

ment infini. Autrement dit, dans ce mode de travail, le commencement avec le poids maximum est absolument supérieur, au point de vue du rendement, aux séries à poids léger. Cependant, dans nos tracés, nous avons constaté que la courbe du travail à rythme graduellement ralenti, descend relativement tôt sous le niveau du travail à rythme à réparation complète. Conséquemment, le rythme rapide ne se montre supérieur qu'aux travaux d'une durée comparative courte¹⁾. Là encore, le travail à rythme graduellement ralenti, assume une position intermédiaire entre les deux autres types pris en considération.

Laquelle de ces trois courbes mérite le plus le nom de „véritable“ courbe de travail musculaire? Cette question, il me semble, ne peut être résolue aujourd'hui. Mais, au point de vue du rendement, on devrait classer la courbe de Treves comme *optimum*, notre mode serait placé au milieu, et celui de Mosso présenterait le cas le moins prospère. Le travail volontaire spontané de l'homme et des animaux, se rapproche tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ces trois types artificiels, ne s'en identifiant presque jamais complètement. C'est pourquoi chacun d'eux a sa raison d'être.

Une étude plus approfondie des causes qui provoquent ladite divergence des résultats, doit être réservée aux investigations futures. En premier lieu, il serait important de faire connaître le rôle du muscle et des éléments nerveux dans ces phénomènes-là. Jusqu'alors, ce problème n'est pas résolu d'une façon satisfaisante, car on ne détermine la part du système nerveux dans les phénomènes de la fatigue, qu'au moyen d'exclusion (Mosso l. c., Treves l. c., Joteyko 9), ce qui laisse toujours un champ assez vaste aux objections (20). J'ai tâché d'aborder cette question au moyen d'expériences sur les animaux à sang froid et à sang chaud, dont je rendrai compte prochainement.

L'étude présente a été exécutée au laboratoire de physiologie de l'Université de Lwów (Léopol). Je dois au directeur de cet institut, M. le professeur A. Beck, la plus vive reconnaissance pour ses précieux conseils. En outre, je remercie M. le docteur Klarfeld pour avoir bien voulu m'aider dans une partie de mon travail.

¹⁾ Du reste, ce n'est qu'une corroboration scientifique d'un axiome bien connu au monde sportif.

E. Conclusions.

1-o. Au cours du travail ergographique, on peut maintenir la hauteur des soulèvements indéfiniment au niveau à peu près constant, sans changer la charge, en ralentissant le rythme chaque fois, lorsque la hauteur s'est abaissée d'une certaine fraction.

2-o. Ce ralentissement doit s'effectuer dans une proportion plus grande que l'abaissement de la hauteur des soulèvements, qui en doit être supprimé.

3-o. La courbe de travail tracée d'après des séries obtenues de cette façon descend brusquement au début, puis de plus en plus doucement. Elle tient le milieu entre la courbe de Mosso, à poids et à rythme constants, et celle de Treves, à poids graduellement diminué.

4-o. Cette position intermédiaire se montre aussi au point de vue du rendement total du travail. Le travail constant à rythme rapide, puis ralenti, se montre supérieur aux séries à rythme lent constant, dans une plus ou moins longue période de début; dans les séries de longue durée, le travail à rythme lent finit par prendre le dessus.

Travaux cités.

1. Binet et Vasshede. Un nouvel ergographe. Année psychol., IV, 1898.
2. Cattell et Fullerton. On the perception of small differences. Philadelphia, 1892.
3. Demeny. Mécanisme et éducation des mouvements. Paris, 1904.
4. Féré. Note sur la fatigue par les sons, etc. C. R. Soc. Biol., 1903.
5. — Note sur le rôle des attitudes et des mouvements associés dans le travail à l'ergographe. C. R. Soc. Biol., 1904.
6. Franz S. I. On the methods of estimating the force of voluntary muscular contractions and on fatigue. Am. Journ. of Physiol., IV, 1900.
7. Guillemet. La bicyclette, ses effets psycho-physiol. Paris, 1897.
8. Hough. Ergographic studies in neuromuscular fatigue. Amer. Journ. of Physiol. V, 1901.
9. Joteyko. L'effort nerveux et la fatigue. Liège, Archives de Biologie, t. XVI, 1899.
10. Kronecker et Cutter. Effets du travail etc. C. R. Ac. Sc. t. 131, 1900.
11. Lombard. Effets de la fatigue sur la contraction musc. volont. Arch. it. de Biol. XIII, 1890.
12. Maggiora. Les lois de la fatigue étudiées dans les muscles de l'homme. Ibidem.
13. Idem. Influence de l'âge sur quelques phénomènes de la fatigue. Ibid. XXIX, 1898.

14. Mosso. Les lois de la fatigue étudiées dans les muscles de l'homme. Ibid. XIII, 1890.
15. Patrizi. Oscillations quotidiennes du travail musculaire etc. Ibid. XVII, 1892.
16. Scripture. Researches on voluntary effort. Stud. from Yale Psych. Lab., IV, 1896.
17. Treves. Sur les lois du travail musculaire. Ar. it. de Biologie, XXIX (1898), XXX (1898), XXXIII (1900).
18. Idem, Sur les conditions qui déterminent le rythme spontané etc. Comptes rendus du V-e Congrès intern. de Physiol., ibid. XXXVI (1901)
19. Idem. Modifications à l'ergographe. Ibid.
20. Idem. Ueber den gegenwärtigen Stand unseres Wissens, die Ergographie betreffend. Pflüg. Ar., t. 88, 1901.
21. Zoth. Ergographische Versuche über die Erholung des Muskels. Ibid., t. 111. 1906.

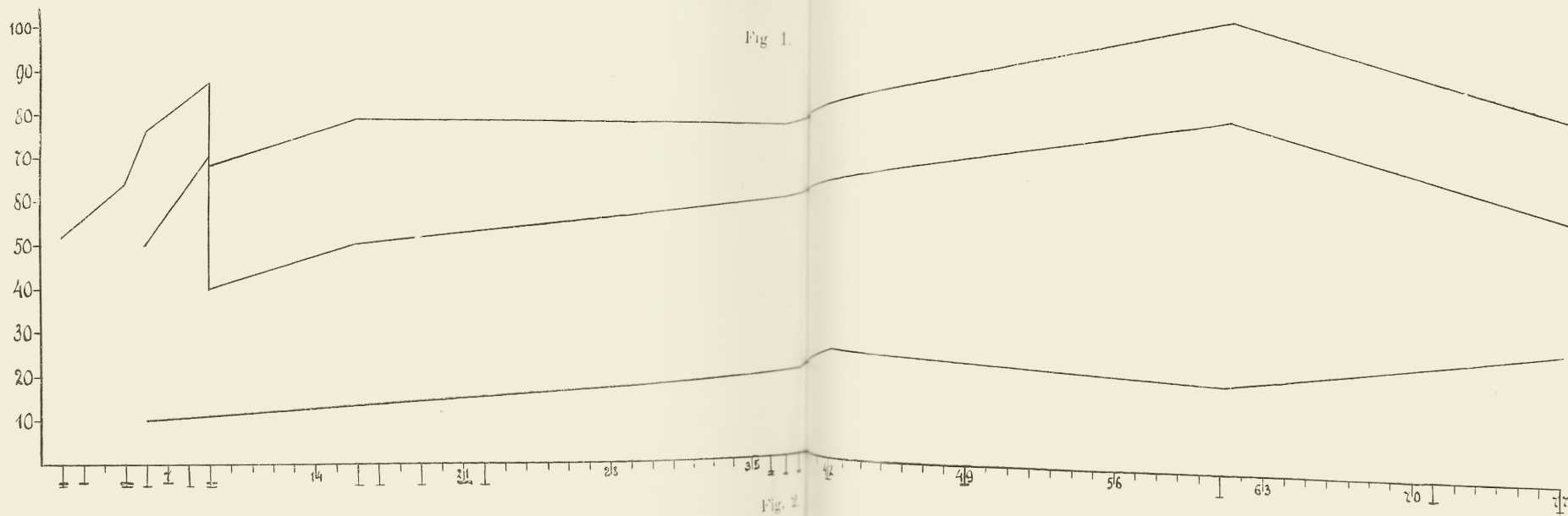
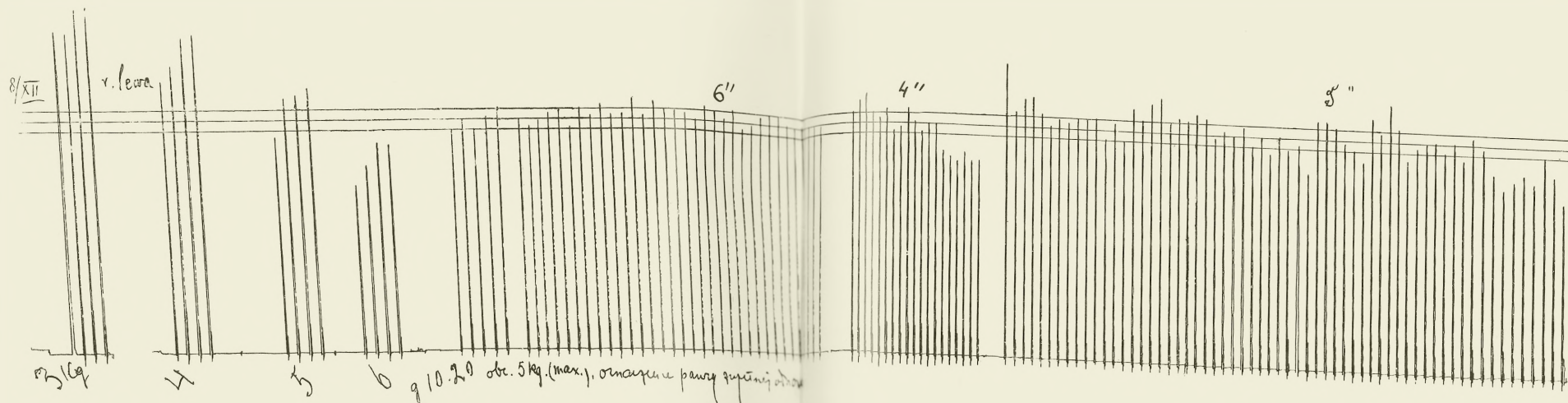
-
20. M. LADISLAS NATANSON m. t. *Studia nad teorią elektromagnetyczną dyspersyi i extynkcyi w ciałach gazowych. (On the Electromagnetic Theory of Dispersion and Extinction in Gaseous Bodies). (Sur la théorie électro-magnétique de la dispersion et de l'extinction dans les corps gazeux).*

It is now generally accepted that molecules of material bodies contain "electrons" or small corpuscles having definite electric charges. The vibrations of such corpuscles about their positions of equilibrium must be modified when subjected to periodically varying electromagnetic forces; we shall therefore be enabled to explain the phenomena of dispersion and extinction on the basis of the electronic hypothesis; and from a detailed study of dispersion and extinction we can expect to derive a considerable amount of guidance as to the properties which are to be attributed to electrons, and to forces acting on electrons.

§ 1. In what follows we shall consider a homogeneous isotropic body composed of a very large number of molecules. We suppose that every molecule can be treated as an independent system; we adopt, however, the usual fundamental assumption generally admitted in Molecular Theories according to which independent molecular quantities when averaged over finite portions of the medium lead to values which are perfectly definite and regular.

Let us write l for the mean distance between neighbouring molecules which we define thus:

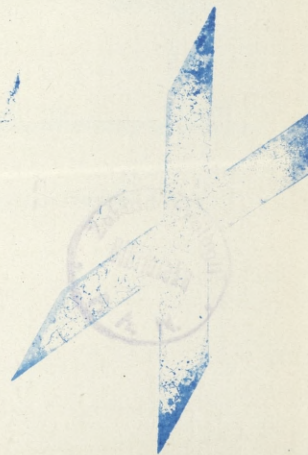


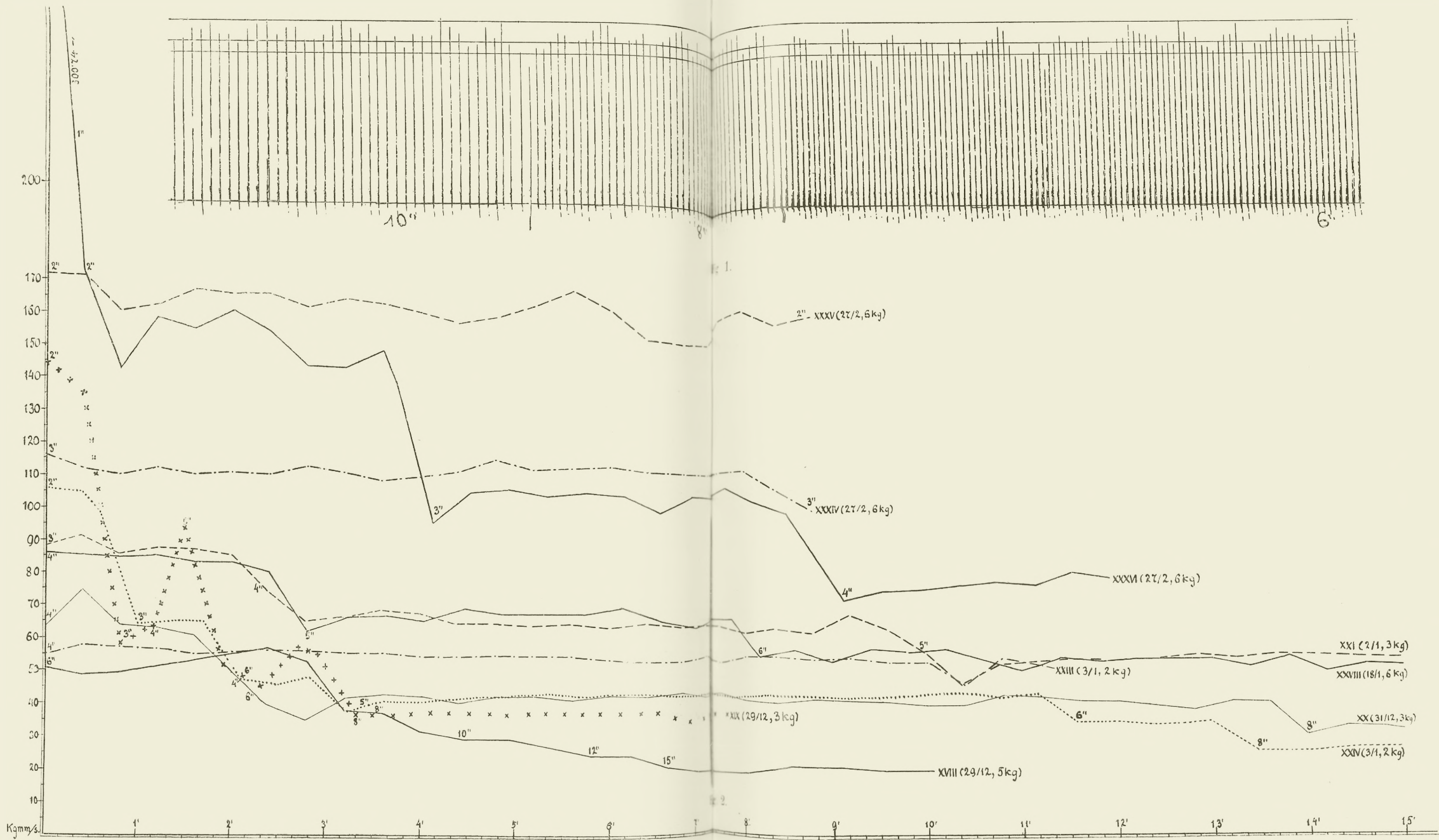


E. Piasecki.

Drakarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie







E. Piasecki.

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie.



$$Ml^3 = 1, \quad (1)$$

M being the number of molecules per unit volume. In order to account for the fact that at least apparently regular light waves can be propagated through the medium, we have to assume that the ratio of l to the wave-length λ is a small quantity, say $= \beta$. Hence

$$\beta = \lambda^{-1} M^{-1/3}. \quad (2)$$

In the case of gaseous bodies (with which we shall be chiefly concerned) β can be evaluated. If we put, for a cubic centimetre of gas at 0°C . and 760 millims.,

$$M = 4 \cdot 10^{19}$$

(see J. H. Jeans, *The Dynamical Theory of Gases*, Cambridge 1904, § 8) we find:

$$\text{for } \lambda = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \dots \beta = 0,0081$$

$$\text{for } \lambda = 8,1 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \dots \beta = 0,0036.$$

The effect of molecular motion in dispersion and extinction being very small under ordinary circumstances, will be omitted.

§ 2. Consider a point (x, y, z) of the medium. Let H be the magnetic vector at this point, E the electric vector, P the electric polarization and i the conduction current. We have the Maxwell-Lorentz fundamental equations

$$\text{curl } H = 4\pi a \left(i + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (I)$$

$$\text{curl } E = -a \frac{\partial H}{\partial t} \quad (II)$$

here a is a constant coefficient which by an appropriate choice of units can be replaced by $1/c$, c being the velocity of propagation of waves in pure ether.

Consider an electromagnetic disturbance propagated in the direction of the axis of z . Let

$$\begin{array}{llll} E_x = E(z, t) & P_x = P(z, t) & i_x = i(z, t) & H_x = 0 \\ E_y = 0 & P_y = 0 & i_y = 0 & H_y = H(z, t) \\ E_z = 0 & P_z = 0 & i_z = 0 & H_z = 0; \end{array} \quad (VI)$$

this represents evidently a plane, transverse, linearly-polarized wave. Formulae (I) and (II) assume then the particular form

$$(III) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x + 4\pi P_x) + 4\pi \frac{\partial i_x}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 0.$$

This, the generalized equation of wave propagation, reduces of course to the well-known telegraphic equation as soon as the usual Maxwellian assumptions respecting P_x and i_x are admitted.

§ 3. In what follows we shall suppose that the components E_x , H_y , P_x , i_x all contain the factor

$$(1) \quad e^{i n (t - bz)},$$

here b is a complex constant and n represents the frequency of vibrations in the incident beam of light. It is well known of course that no natural vibration is a perfect train of waves of the simple type we are considering here; we must therefore bear in mind that the assumption we have admitted is probably no more than a first step towards a solution. Adopting (1) as the variable part of the expression of E_x , H_y , P_x and i_x we find from (III), § 2,

$$(2) \quad b^2 c^2 - 1 = \frac{4\pi}{E_x} \left(P_x - \frac{t}{n} i_x \right).$$

Let us next assume that

$$(3) \quad bc = \nu - i\kappa;$$

then E_x will depend upon

$$(4) \quad \exp \left\{ -\frac{2\pi\kappa z}{\lambda} + i n \left(t - \frac{\nu z}{c} \right) \right\}$$

and will not explicitly involve t or z in any other way; λ denotes here the wave-length (in vacuo) to which n applies. From formula (4) it appears that the quantity κ may be called the "coefficient of extinction" of the medium¹⁾ and that the quantity ν corresponds to the refractive index in (perfectly) transparent bodies.

From (2) and (3) we obtain

$$(IV) \quad (\nu - i\kappa)^2 - 1 = \frac{4\pi}{E_x} \left(P_x - \frac{t}{n} i_x \right).$$

The equation just found is the fundamental equation in the Theory of Dispersion and Extinction. Further progress, however,

¹⁾ Cf. Kayser, Handbuch der Spectroscopie, Band III, Leipzig 1905, §§ 5 and 6.

is only possible by calculating the value of P_x/E_x and of i_x/E_x ; and this cannot be done unless some special assumptions as to the motion of the electrons contained in the body are adopted.

§ 4. In the present paper the conduction current (due to free electrons) will be left out of account; consequently, all we have to do is to find the value of the ratio P_x/E_x . This we now proceed to calculate. We shall begin by writing down the equations of motion of an electron vibrating in a molecule under the action of external and internal forces.

Let e be the electric charge of an electron belonging to a definite class or category and let N represent the number of electrons of the class contemplated, per unit volume of the medium. We have, writing ξ , η , ζ for the components of the displacement of the electron (reckoned from its position of equilibrium):

$$P_x = \Sigma e \xi N \quad P_y = \Sigma e \eta N \quad P_z = \Sigma e \zeta N; \quad (1)$$

the summation is extended to unit volume of the medium and has to include all classes of electrons present.

Let us write as the equation of motion in the direction of x :

$$\ddot{\xi} + 2k\dot{\xi} + n_0^2\xi = \frac{e}{m}(E_x + \tilde{\omega}P_x). \quad (2)$$

Here m represents the effective mass of the electron, n_0 the frequency of the free or "natural" vibration, k is a constant coefficient and $\tilde{\omega}$ a numerical factor whose value has been discussed by H. A. Lorentz. He finds¹⁾ that $\tilde{\omega}$ has the value $\frac{4}{3}\pi$ in some simple cases and considers that in general it will not differ much from $\frac{4}{3}\pi$. Consequently, if we write

$$\tilde{\omega} = \frac{4}{3}\pi(1 + \sigma) \quad (3)$$

σ will be small in comparison to unity. On the other hand, it must not be forgotten that the quantity σ will depend on the density of the body and also on the nature of the restitutive force acting on the electron *i. e.* on the value of n_0^2 .

It is doubtful how far we are at liberty to consider equation

¹⁾ La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants, Leiden, 1892, §§ 105 et 106.

²⁾ La théorie, § 106.

(2) as representing (to a certain degree of approximation) the law of electric vibration in a molecule. The difficulty of explaining intrinsic frictional forces acting on a vibrating electron has been pointed out by various writers. H. A. Lorentz however has shown in two important memoirs¹⁾ that something akin to damping may result from molecular impacts disturbing the regular succession of (really) undamped vibrations. This theory will be further considered in § 10. and it will be seen that (as shown by Lorentz) the general form of the equation of motion can on this view be maintained, although the constants k and even n_0 will have to be differently interpreted.

There is another damping action on the electron which may be expected to take place, namely that arising from the loss of energy due to radiation. This view of the subject has been carefully investigated by M. Planck²⁾. For our present purpose it will be sufficient to note that owing to radiation a term of the form

$$(4) \quad -\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \ddot{u}$$

will appear in the equation of motion; and since by assumption the effect of radiation is small we shall on this view be justified in considering equation (2) as still valid if only we take

$$(5) \quad k = \frac{e^2 n_0^2}{3mc^3}$$

§ 5. Another obvious criticism of the equation of motion of the accepted type is that mutual interaction between electrons belonging to one molecule is ignored. Generally speaking, a material molecule (even in the simplest cases) must probably be regarded as a connected electrical system of high degree of complexity; as yet, however, we are practically ignorant of the exact nature of the laws governing the structure of such systems.

Leaving aside this, probably the chief outstanding difficulty of

¹⁾ Kon. Akademie v. Wet. te Amsterdam, Verslagen d. W. e. Nat. Afd., Deel VI, Amsterdam 1898, pag. 506 en 555. — Kon. Akademie te Amsterdam, Proceedings, Meeting of Dec. 30, 1905, p. 591.

²⁾ Sitzungsberichte d. Kgl. Pr. Akademie d. Wiss. zu Berlin; J. 1902, p. 470 (1 Mai 1902); J. 1903, p. 480 (30 April 1903); J. 1904, p. 740 (21 April 1904); J. 1905, p. 382 (6 April 1905).

our subject we return to equation (2) of § 4. and (ignoring altogether the natural vibration of the electron) we assume as a solution

$$\xi = \xi_0 \varepsilon^{i n t}. \quad (1)$$

From (1) and (2), § 4., we find now

$$P_x = \frac{E_x U}{1 - \tilde{\omega} U}, \quad (2)$$

where

$$U = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{1}{n_0^2 - n^2 + 2 k n i}. \quad (3)$$

Writing

$$\mathcal{A} = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4 k^2 n^2} \quad (4)$$

$$\mathfrak{B} = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{2 k n}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4 k^2 n^2} \quad (5)$$

$$\mathfrak{N} = 1 - 2 \tilde{\omega} \mathcal{A} + \tilde{\omega}^2 (\mathcal{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \quad (6)$$

we obtain

$$U = \mathcal{A} - i \mathfrak{B} \quad (7)$$

and from (2) we have:

$$\frac{P_x}{E_x} = \frac{1}{\mathfrak{N}} \left\{ \mathcal{A} - \tilde{\omega} (\mathcal{A}^2 + \mathfrak{B}^2) - i \mathfrak{B} \right\}. \quad (8)$$

Hence equation (IV), § 3., gives

$$v^2 - \varkappa^2 - 1 = \frac{4 \pi}{\mathfrak{N}} \left\{ \mathcal{A} - \tilde{\omega} (\mathcal{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \right\} \quad (\text{Va})$$

$$2 v \varkappa = \frac{4 \pi}{\mathfrak{N}} \mathfrak{B}. \quad (\text{Vb})$$

To these equations we shall have frequently recourse in the following pages.

§ 6. We shall now consider some particular cases. Let us suppose $\sigma = 0$; we have then to replace $\tilde{\omega}$ by $\frac{4}{3} \pi$ in (V) and in (6), § 5. Our formulae become

$$\frac{1}{3} (v^2 - \varkappa^2 + 2) = \frac{1}{\mathfrak{N}} (1 - \frac{4}{3} \pi \mathcal{A}) \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} v \varkappa = \frac{1}{\mathfrak{N}} \cdot \frac{4}{3} \pi \mathfrak{B} \quad (2)$$

and

$$(3) \quad \mathcal{N} = (1 - \frac{4}{3}\pi\mathcal{A})^2 + (\frac{4}{3}\pi\mathcal{B})^2$$

from which $(1 - \frac{4}{3}\pi\mathcal{A})$ and $\frac{4}{3}\pi\mathcal{B}$ can be found. We obtain

$$(4) \quad \frac{(\nu^2 - \kappa^2 + 2)(\nu^2 - \kappa^2 - 1) + 4\nu^2\kappa^2}{(\nu^2 - \kappa^2 + 2)^2 + 4\nu^2\kappa^2} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{A}$$

$$(5) \quad \frac{2\nu\kappa}{(\nu^2 - \kappa^2 + 2)^2 + 4\nu^2\kappa^2} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{B}.$$

Formula (4) will be seen immediately to belong to a class of equations of which the best known is that discovered by H. A. Lorentz in 1879. In order to verify this let us admit $k=0$ for all classes of electrons present; then $\mathcal{B}=0$, $\kappa=0$ and formula (4) reduces to

$$(6) \quad \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{A}$$

where \mathcal{A} is given by (see (4), § 5)

$$(7) \quad \mathcal{A} = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{1}{n_0^2 - n^2}.$$

Equations (6) and (7) constitute Lorentz' celebrated theorem. They can of course be supposed to hold approximately in the case when k is very small for all classes of electrons and $n_0^2 - n^2$ is comparatively large.

§ 7. As another example let us suppose that σ is different from zero and that $k=0$. Reverting to the general equations (V) and (6) of § 5. we conclude that in this case

$$(1) \quad \nu^2 - 1 = \frac{4\pi\mathcal{A}}{1 - \tilde{\omega}\mathcal{A}}.$$

Substituting for $\tilde{\omega}$ its value from (3), § 4., we obtain

$$(2) \quad \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2 + \sigma(\nu^2 - 1)} = \frac{4}{3}\pi\mathcal{A}.$$

Here \mathcal{A} must be taken from (7), § 6. This again, in the case when $\sigma=0$, reduces to Lorentz' theorem.

§ 8. The assumption that

$$(1) \quad \tilde{\omega} = 0$$

has been implicitly adopted in many papers on Dispersion. From the stand-point of pure theory, the assumption of course is simply erroneous. Nevertheless, there are undoubtedly cases where we shall not be going far wrong if we admit it; this will be seen clearly from §§ 11. and 27. below. From (6), § 5., we see that in this case

$$\partial \mathcal{N} = 1; \quad (2)$$

formulae (V) thus reduce to

$$v^2 - x^2 - 1 = 4\pi \mathcal{A}; \quad 2vx = 4\pi \mathcal{B}; \quad (3)$$

here \mathcal{A} and \mathcal{B} are given by (4) and (5), § 5., as before¹⁾. These quantities can also be written

$$\mathcal{A} = \sum \frac{D\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_0^2)}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + \Gamma^2\lambda^2} \quad (4)$$

$$\mathcal{B} = \sum \frac{D\Gamma\lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + \Gamma^2\lambda^2}; \quad (5)$$

the constants D , Γ are defined as follows:

$$D = \frac{e^2 N}{m} \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 c^2}; \quad \Gamma = \frac{k\lambda_0^2}{\pi c}. \quad (6)$$

Formulae (4), (5) and (6) are of some importance since much of the work accomplished on Dispersion (*e. g.* by Ketteler, by Pfüger, and by other physicists) depends on these or closely allied equations.

§ 9. We now proceed to consider the behaviour of a body which contains only *one* category of electrons. Most of the results we shall obtain on this hypothesis may not apply to actual complex physical bodies; nevertheless this case is of paramount interest and even if it were not it would still be difficult to avoid its discussion.

We have in this case

$$\mathcal{A} = \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2} \quad (1)$$

$$\mathcal{B} = \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{2kn}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2} \quad (2)$$

$$\partial \mathcal{N} = \frac{[n_0^2 - n^2 - (\tilde{\omega} e^2 N/m)]^2 + 4k^2 n^2}{(n_0^2 - n^2)^2 + 4k^2 n^2}. \quad (3)$$

¹⁾ See for instance equation (18) pag. 368 of the *Lehrbuch der Optik* by P. Drude (second edition, Leipzig 1906); allowing for changes of notation it will be seen to agree with the above equations (3).

By these relations we can now write equations (V), § 5., in the form

$$(4) \quad v^2 - \alpha^2 - 1 = 4\pi \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{[n_0^2 - n^2 - (\tilde{\omega} e^2 N/m)]}{[n_0^2 - n^2 - (\tilde{\omega} e^2 N/m)]^2 + 4k^2 n^2}$$

$$(5) \quad 2\nu\alpha = 4\pi \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{2kn}{[n_0^2 - n^2 - (\tilde{\omega} e^2 N/m)]^2 + 4k^2 n^2}$$

Let

$$(6) \quad g = \frac{4}{3}\pi \frac{e^2 N}{m n_0^2} (1 + \sigma);$$

then the term in square brackets which appears in (4) and (5) can be written

$$(7) \quad n_0^2(1 - g) - n^2.$$

This substitution being effected, equations (4) and (5) will be seen to agree with what can easily be derived¹⁾ from Planck's theory, provided that we put $\sigma = 0$ and $k = e^2 n_0^2 / 3 m c^3$ (cf. § 4).

In this connection an interesting remark can be made. In the equations (4) and (5), replace frequencies by their values in terms of wave-lengths, as in § 8.; we have

$$(8) \quad v^2 - \alpha^2 - 1 = \frac{4\pi D \lambda^2 [\lambda^2(1 - g) - \lambda_0^2]}{[\lambda^2(1 - g) - \lambda_0^2]^2 + I^2 \lambda^2}$$

$$(9) \quad 2\nu\alpha = \frac{4\pi D I \lambda^3}{[\lambda^2(1 - g) - \lambda_0^2]^2 + I^2 \lambda^2}$$

D and I being defined as before by equations (6), § 8. Now write for k in the second formula (6), § 8, the particular value this constant assumes on Planck's Theory viz. $e^2 n_0^2 / 3 m c^3$; I becomes

$$(10) \quad I = \frac{4}{3}\pi \frac{e^2}{m c^2},$$

a result in which everything depending on the nature of the substance has disappeared. Hence, on Planck's Theory, I is a universal constant. For the sake of illustration let us take the case of a slowly moving corpuscle with a charge e of electricity; let its shape be that

¹⁾ To do this we have only to calculate $v^2 - \alpha^2$ and $2\nu\alpha$ in terms of Planck's α and β (see *Sitzungsberichte J. 1902*, § 9, p. 488) and in the equations thus found to substitute the values of α and β which follow from Planck's relations (24) p. 488 and (17) p. 486.

of a sphere of radius a ; suppose the charge e to be uniformly distributed over the surface of the sphere. Then m , if purely electromagnetic in its origin, is

$$= 2e^2/3ac^2 \quad (11)$$

and Γ takes the simple form

$$\Gamma = 2\pi a. \quad (12)$$

If we suppose the charge e to be uniformly distributed over the volume of the sphere we find

$$\Gamma = \frac{5}{3}\pi a. \quad (13)$$

It follows that Γ ought to be of order 10^{-12} cm. and to have the same value for all substances to which Planck's Theory can be supposed to apply.

§ 10. In his Theory of Extinction, Lorentz supposes that a vibrating electron is not at all subject to forces tending to damp its vibration; accordingly, in writing down the solution of the equation of motion he does not confine himself to the forced vibration; he considers the general solution which includes of course the natural vibration. Now the effect of the encounters between the molecules, say of a gaseous body, will be that the vibration of the electron will (many times in a second) be profoundly disturbed and will be transformed into a motion of a wholly different kind. Let t_0 represent the moment of the last impact which an electron has undergone; the arbitrary constants of the natural vibration are then determined from the condition that $\Sigma \dot{\xi}_0$ and $\Sigma \xi_0$ are zero; and if $\vartheta = t - t_0$ represents the period of time which has elapsed since the last impact, ξ for a given ϑ can be evaluated.

From Maxwell's law of distribution of molecular velocities it appears that the number of molecules (in unit volume) for which the time ϑ lies between given limits, say ϑ and $\vartheta + d\vartheta$, is expressed (at any instant) by

$$\frac{4d\vartheta}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv v^2 B(v) \varepsilon^{-v^2/\alpha^2} \varepsilon^{-B(v)\cdot\vartheta}, \quad (1)$$

α being the modulus of velocity (that is, the most probable speed) and

$$d\vartheta B(v)$$

being the number of impacts which a molecule (moving at speed v) performs in time $d\vartheta$. This quantity is known to be of the form

$$(2) \quad vB(v) = \sqrt{\pi} MR^2 \alpha^2 \left\{ x \varepsilon^{-x^2} + (2x^2 + 1) \int_0^x dz \varepsilon^{-z^2} \right\}$$

where M represents the number of molecules per unit volume (cf. § 1.), R the radius of the molecular "sphere of action" and

$$(3) \quad x = v/\alpha.$$

Now expression (1) as it stands seems to be intractable. If instead of $B(v)$ we put its mean value C

$$(4) \quad C = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv v^2 \varepsilon^{-v^2/\alpha^2} B(v) \\ = 2\sqrt{2\pi} MR^2 \alpha$$

expression (1) reduces to

$$(5) \quad d\vartheta C \varepsilon^{-C\vartheta}$$

which agrees very approximately with that used by Lorentz.

With these assumptions it follows that for the mean value of the displacement ξ of an electron (belonging to a definite class) we can write

$$(6) \quad \bar{\xi} = \frac{e(E_x + \tilde{\omega} P_x)}{m(n_0^2 - n^2)} (\mathfrak{A} + \iota \mathfrak{B})$$

where

$$(7) \quad \mathfrak{A} = 1 - \frac{C^2}{2n_0} \left\{ \frac{n_0 + n}{C^2 + (n_0 - n)^2} + \frac{n_0 - n}{C^2 + (n_0 + n)^2} \right\}$$

$$(8) \quad \mathfrak{B} = -\frac{C(n_0^2 - n^2)}{2n_0} \left\{ \frac{1}{C^2 + (n_0 - n)^2} - \frac{1}{C^2 + (n_0 + n)^2} \right\}.$$

Now if we put

$$(9) \quad C^2 + n_0^2 - n^2 = R; \quad 2Cn = S$$

we have

$$(10) \quad (C^2 + (n_0 + n)^2)(C^2 + (n_0 - n)^2) = R^2 + S^2;$$

hence (7) and (8) become

$$(11) \quad (R^2 + S^2) \mathfrak{A} = (n_0^2 - n^2) R$$

$$(12) \quad (R^2 + S^2) \mathfrak{B} = -(n_0^2 - n^2) S.$$

Referring to § 5., it will be seen that, on Lorentz' Theory, the equation (2) of that section continues to hold provided that we take

$$U = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{R - iS}{R^2 + S^2}. \quad (13)$$

In other words: if instead of (4) and (5), § 5., we regard the following formulae

$$\mathcal{A} = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{C^2 + n_0^2 - n^2}{(C^2 + n_0^2 - n^2)^2 + 4C^2 n^2} \quad (14)$$

$$\mathcal{B} = \sum \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{2 C n}{(C^2 + n_0^2 - n^2)^2 + 4 C^2 n^2} \quad (15)$$

as those by which the meaning of the symbols \mathcal{A} and \mathcal{B} is defined, equations (V) and (6) of § 5. can still, on Lorentz' Theory, be considered to be true. The same conclusion applies of course to every result derived from equations (V) and (6), § 5.: *e. g.* to the relations (4) and (5), § 6.

§ 11. Reverting now to the case, already examined in § 9., of a mono-electronic substance and collecting our results, we conclude that, in this case,

$$\nu^2 - \kappa^2 - 1 = 4\pi \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{F}{F^2 + 4k^2 n^2} \quad (1)$$

$$2\nu\kappa = 4\pi \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{2kn}{F^2 + 4k^2 n^2} \quad (2)$$

where

$$F = n_0^2 - n^2, \text{ on Drude's Theory} \quad (3)$$

$$= n_0^2 - n^2 - \frac{4}{3}\pi e^2 N/m, \text{ on Planck's Theory} \quad (4)$$

$$= n_0^2 - n^2 + C^2 - \frac{4}{3}\pi(1 + \sigma)e^2 N/m, \text{ on Lorentz' Theory} \quad (5)$$

where

$$k = \text{an unknown constant, on Drude's Theory} \quad (6)$$

$$= e^2 n_0^2 / 3 m c^3, \text{ on Planck's Theory} \quad (7)$$

$$= C, \text{ on Lorentz' Theory.} \quad (8)$$

The equations given in § 9. may also be included into the scheme; we have to put:

$$(9) \quad F = n_0^2 - n^2 - \frac{4}{3}\pi(1 + \sigma)e^2 N/m$$

$$(10) \quad k = \text{an unknown constant.}$$

From (1) and (2) F and $2kn$ can be found. Writing for brevity

$$(11) \quad \frac{\nu^2 - \kappa^2 - 1}{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2} = f(\nu, \kappa)$$

$$(12) \quad \frac{2\nu\kappa}{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2} = g(\nu, \kappa)$$

we obtain:

$$(13) \quad F = 4\pi \frac{e^2 N}{m} f(\nu, \kappa)$$

$$(14) \quad 2kn = 4\pi \frac{e^2 N}{m} g(\nu, \kappa).$$

§ 12. As an example of the application of formula (13), § 11., let us assume that the term F is of the form (4), § 11. We have then

$$(1) \quad n_0^2 - n^2 = \frac{4}{3}\pi \frac{e^2 N}{m} \{1 + 3f(\nu, \kappa)\}$$

whence, substituting from (11), § 11., we obtain

$$(2) \quad \frac{(\nu^2 - \kappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\kappa^2}{(\nu^2 - \kappa^2 + 2)(\nu^2 - \kappa^2 - 1) + 4\nu^2\kappa^2} = \frac{4}{3}\pi \frac{e^2 N}{m} \cdot \frac{1}{n_0^2 - n^2}.$$

Like equation (4), § 6., this formula includes Lorentz' theorem as a particular case; but resting as it does on the assumption of a mono-electronic substance it is less general than the cited equation.

§ 13. Let us suppose we are dealing with a mono-electronic substance in a part of the spectrum far removed from the absorption band of the body. We shall then have by formula (13), § 11,

$$(1) \quad (\nu^2 - 1)F = 4\pi e^2 N/m.$$

If this be applied on the opposite sides of the absorption band it appears that

$$(2) \quad \text{in the region of small } n : F > 0, \nu^2 > 1$$

$$(3) \quad \text{in the region of large } n : F < 0, \nu^2 < 1.$$

For $\lambda = 0$, $\nu = 1$; and for $\lambda = \infty$ we deduce

$$K = \frac{1 + 2g + \sigma(1 - g)}{(1 + \sigma)(1 - g)} \quad (4)$$

where g is given by (6), § 9., and K denotes the dielectric constant.

In the case where κ cannot be neglected, formula (2) of the preceding section may be used. Let us consider a place in the spectrum such that

$$\lambda < \lambda_0. \quad (5)$$

It follows from (2), § 12., that in this case

$$(\nu^2 - \kappa^2 + 2)(\nu^2 - \kappa^2 - 1) + 4\nu^2\kappa^2 < 0; \quad (6)$$

hence

$$(\nu^2 - 1 + \kappa^2)^2 + \kappa^2 + 3(\nu^2 - 1) < 0; \quad (7)$$

from this it appears that for $\lambda < \lambda_0$ we must have $\nu < 1$.

That the general properties of any real substance will be found to agree exactly with those of the mono-electronic model is an assumption which *a priori* seems of course very improbable. In subsequent articles we shall find, however, that within certain limits in the spectrum the dispersion of some gases seems to conform to the laws which can be deduced from this simplifying hypothesis. The behaviour of such bodies can be accounted for by taking into consideration the structure of the two quantities \mathcal{A} , \mathcal{B} (§§ 5. and 10.) on the first of which the dispersion chiefly depends; the second, \mathcal{B} , is practically responsible for the extent of absorption. The explanation afforded will be improved if we suppose that, in a given volume of the substance, electrons of various classes occur in very different proportion.

§ 14. Professor R. W. Wood has supplied Optical Theory with a beautiful series of data¹⁾ respecting the dispersion of sodium-vapour, at the temperature of 644° C. The refractive indices are given for wave-lengths ranging from 2,26. to 5,8896 (10^{-5} cm.) and again for wave-lengths ranging from 5,916. to 7,50 (10^{-5} cm.). The density of the vapour is not known; this is unfortunate in con-

¹⁾ Philosophical Magazine, Ser. (6), Vol. VIII., p. 293. 1904. — Physical Optics. New-York 1905. p. 344.

nection with another calculation of which more will be said in subsequent sections but for our present purpose it will be seen to be immaterial.

Let us try to represent the dispersion of sodium-vapour by means of a *di*-electronic formula, no account being taken of extinction. According to the well-known measurements due to Rowland and Bell we assume

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_{01} = 5,89618 \cdot 10^{-5} \text{ cm.} \\ \lambda_{02} = 5,89022 \cdot 10^{-5} \text{ cm.} \end{cases}$$

Let

$$(2) \quad \alpha_1 = e_1^2 N_1 / 3 \pi c^2 m_1; \quad \alpha_2 = e_2^2 N_2 / 3 \pi c^2 m_2.$$

We have then, by § 6.,

$$(3) \quad R = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2.$$

Here R , L_1 , L_2 have the following meaning: 1) for values of $\lambda < \lambda_{02}$

$$(4) \quad R = \frac{1 - \nu^2}{2 + \nu^2}; \quad L_1 = \frac{\lambda_{01}^2 \lambda^2}{\lambda_{01}^2 - \lambda^2}; \quad L_2 = \frac{\lambda_{02}^2 \lambda^2}{\lambda_{02}^2 - \lambda^2}$$

2) for values of $\lambda > \lambda_{01}$

$$(5) \quad R = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2}; \quad L_1 = \frac{\lambda_{01}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{01}^2}; \quad L_2 = \frac{\lambda_{02}^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{02}^2}.$$

If we put

$$(6) \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \beta; \quad \frac{R}{L_1 + L_2} = Y; \quad \frac{L_2}{L_1 + L_2} = X$$

equation (3) may be written

$$Y = \alpha_1 + \beta X.$$

In the following table the wave-lengths (in 10^{-5} cm.) are given in the first column, the observed indices in the second column, in the third and in the fourth the corresponding values of X and Y . Wave-lengths smaller than 5,75 have not been included for two reasons. In the first place, we should probably not be justified in assuming that the pair of the *D*-lines controls exclusively the dispersion of sodium-vapour beyond a certain distance in the spectrum; besides, as has been explained by Professor Wood himself, the observed

values of the refractive indices cannot be relied upon in the violet and ultra-violet region.

λ	ν	X	Y
5,75	0,999505	0,510	2395
5,807	999093	517	2603
5,827	998862	522	2491
5,843	998492	529	2489
5,850	998172	534	2589
5,858	997711	542	2629
5,867	996929	556	2604
5,875	995410	581	2663
5,882	9908	633	3126
5,885	9860	681	3254
5,8866	9770	726	3955
5,916	1,002972	0,434	2156
5,942	1532	469	2396
5,960	1164	477	2485
5,977	0934	482	2626
6,013	0658	487	2492
6,055	0523	490	2649
6,137	0335	493	2500
6,200	0291	495	2696

If the values of Y are plotted against those of X as rectangular coordinates, the points so defined will not lie on a straight line. The discrepancies are large and (from a detailed study of the data) I find it impossible to deduce any further conclusion except that probably $\beta > 0$, *i. e.* that $a_2 > a_1$. If this be confirmed it would seem safe to infer that $N_2 > N_1$. The matter is thus seen to be of considerable interest; but to settle the question further experimental data are required.

§ 15. In what precedes we have frequently alluded to the difficulties which occur when we attempt to treat bodies of probably intricate atomic structure as containing only one class of movable electrons. No further apology, therefore, is needed for giving here some further considerations which rest entirely on the basis of this simplifying hypothesis. The results to which we shall arrive may

appear not wholly unwarranted if we continually bear in mind that they are at best only approximations, to be given up as soon as further progress will be made.

Let

$$(1) \quad 3\pi c^2 \frac{m}{e^2 N} = \Delta$$

Lorentz' equation [(6) and (7), § 6.] may then be written in the case of a mono-electronic substance:

$$(2) \quad \frac{\nu^2 + 2}{\nu^2 - 1} = \Delta \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

In many cases $\nu - 1$ is small so that (2) becomes approximately

$$(3) \quad \frac{3}{2(\nu - 1)} = D - \frac{\Delta}{\lambda^2}$$

where

$$(4) \quad D = \Delta/\lambda_0^2.$$

If λ_1, λ_2 are two wave-lengths and ν_1, ν_2 the corresponding indices

$$(5) \quad \Delta = \frac{3(\nu_1 - \nu_2)\lambda_1^2\lambda_2^2}{2(\nu_1 - 1)(\nu_2 - 1)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}.$$

In what follows, *all* wave-lengths are expressed in terms of the unit

$$(6) \quad 10^{-5} \text{ cm.}$$

throughout; *all* values of the constant Δ are expressed in terms of the unit

$$(7) \quad 10^{-7} \text{ cm}^2$$

throughout; these factors will be omitted. The values of D are pure numbers.

All values of ν and of K given below are understood to refer to gases considered at 0° C. and 760 millims.

§ 16. Hydrogen. Equation (3) of the preceding section has been applied by H. A. Lorentz to Ketteler's measurements of the indices of hydrogen for Fraunhofer's lines G, D, B . The values of the constants found are as follows¹:

$$(1) \quad D = 10707 \quad \Delta = 7.39.$$

¹) Kon. Akad. v. Wet. te Amsterdam, Verslagen d. W. e. Nat. Afd., Deel VI (1898) p. 513.

The dispersion of hydrogen, however, has been investigated by several observers. L. Lorenz ¹⁾ gives

$$\begin{array}{ll} a) \lambda = 5,893 & \dots \nu = 1,0001387 \\ b) & 6,708 \dots 1380 \end{array}$$

From these it follows

$$D = 10629 \qquad \Delta = 8,35. \qquad (2)$$

F. Perreau's results ²⁾ for hydrogen are given below:

$$\begin{array}{ll} a) \lambda = 4,677 & \dots \nu = 1,0001408 \\ b) & 4,800 \dots 1406 \\ c) & 5,085 \dots 1400 \\ d) & 5,378 \dots 1393 \\ e) & 5,896 \dots 1390 \\ f) & 6,438 \dots 1385 \end{array}$$

We obtain: from a) and f) $\dots \Delta = 8,37$

$\dots b) \text{ and } e) \dots 8,31$

$\dots c) \text{ and } d) \dots 8,58$

If we assume $\Delta = 8,35$ Mr. Perreau's data give for D

$$\begin{array}{lll} a) 11035 & b) 11032 & c) 11034 \\ d) 11035 & e) 11031 & f) 11035 \end{array}$$

The formula is thus seen to agree with observation. If now we put 11033,5 for D , Mr. Perreau's data give for Δ

$$\begin{array}{lll} a) 8,33 & b) 8,38 & c) 8,34 \\ d) 8,30 & e) 8,41 & f) 8,29 \end{array}$$

We shall not prolong this process of successive approximations; we take

$$D = 11033,5 \text{ and } \Delta = 8,343 \qquad (3)$$

as values of the constants agreeing well with Mr. Perreau's experimental results.

¹⁾ Annalen d. Phys. u. Chemie, Bd. 11., p. 93. 1880.

²⁾ Journal de Physique (3) Vol. 4., p. 415. 1895.

Let us apply equation (3), § 15., to a wave-length lying far beyond the limits of the visible spectrum; John Koch has found¹⁾

$$\text{for } \lambda = 86,9 \dots \nu = 1,0001373.$$

For this value of λ , equation (3), § 15., gives

with values (1) of the constants	...	$\nu = 1,0001401$
... .. (2)	1411
... .. (3)	1360

The observed value lies between the calculated ones. Inversely, if we assume

a) $\lambda = 5,893$...	$\nu = 1,0001400$ ²⁾
b) 86,9	...	1373

we find, applying the equation,

$$(4) \quad D = 10924 \quad \Delta = 7,88.$$

The dispersion of hydrogen has been recently investigated by K. Scheel³⁾. With the omission of three results (which on account of their obvious irregularity are useless for our purpose) Scheel's data run as follows

a) $\lambda = 4,358$...	$\nu = 1,0001406$
b) 4,712	...	1398
c) 4,922	...	1396
g) 5,780	...	1389
h) 6,676	...	1376

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{From (a) and (h) we deduce: } \Delta = 7,70 \\ \dots (b) \text{ and (h) } \dots \quad 7,59 \\ \dots (c) \text{ and (h) } \dots \quad 8,29 \\ \dots (a) \text{ and (g) } \dots \quad 5,75 \end{array} \right\} \text{mean } 7,52$$

Scheel has shown that the results of his experiments on the dispersion of hydrogen (and of two other gases, see below) can be represented by expressions of the form

¹⁾ Annalen d. Physik, Bd. 17., p. 665. 1905.

²⁾ This is the average value deduced from observations by Ketteler, Lorenz, Perreau, Mascart and G. W. Walker.

³⁾ Verhandlungen d. d. phys. Gesellschaft, Jahrg. 9, p. 24. 1907.

$$\nu - 1 = a + \frac{b}{\lambda^2}. \quad (6)$$

Now equation (3), § 15., may be written

$$\frac{2}{3}(\nu - 1) = \frac{\lambda_0^2}{\Delta} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \right\}^{-1}; \quad (7)$$

since λ_0/λ in Scheel's experiments ranges from about $\frac{1}{3}$ to about $\frac{1}{5}$ (as will be seen from the value of λ_0 presently to be given) we have, as a first approximation,

$$D = 3/2a; \quad \Delta = 3b/2a^2. \quad (8)$$

For hydrogen, Scheel's values of the constants are, when expressed in the units here adopted:

$$a = 1358,3 \cdot 10^{-7}; \quad b = 9,05 \cdot 10^{-15}.$$

Substituting in (8) we obtain

$$D = 11043 \quad \Delta = 7,36. \quad (9)$$

From Mascart's data¹⁾ we arrive at results which are out of harmony with the foregoing ones; for instance, from

$$\begin{array}{ll} a) \lambda = 5,085 & \dots \quad \nu = 1,0001392 \\ b) & 6,438 \quad \dots \quad 1383 \end{array}$$

we find

$$\Delta = 4,82 \quad (10)$$

We can by the aid of the preceding results easily calculate the value of the dielectric constant of hydrogen. If we take $\sigma = 0$ equations (6), § 9., and (4), § 15., show that

$$gD = 1 \quad (11)$$

so that equation (4), § 13., becomes

$$(K - 1)(D - 1) = 3. \quad (12)$$

The following shows the values of K corresponding to some of the values of D found above:

¹⁾ Taken from H. Dufet, Recueil de Données Numériques, Optique, Paris 1900, p. 75.

$D = 10629$...	$K = 1,000282$
10707	...	280
10924	...	275
11033,5	...	272

The mean of Boltzmann's (1874) and Klemencic's (1885) observed values is

$$K = 1,000264;$$

the agreement is anything but satisfactory; to this, however, importance cannot be attached.

To evaluate λ_0 let us use equation (4), § 15.; taking D and Δ according to (3) (these are probably the most accurate values of the constants), we obtain

$$(14) \quad \lambda_0 = 0,87.$$

From Scheel's a and b we deduce $\lambda_0 = 0,82$.

§ 17. Oxygen. Very few measurements have been made upon the dispersion of this substance. Lorenz gives the following results:

a) $\lambda = 5,893$...	$\nu = 1,00027155$
b) 6,708	...	27034

from which

$$(1) \quad D = 5633; \quad \Delta = 3,76$$

can be deduced. Mascart's results¹⁾ are as follows

a) $\lambda = 5,085$...	$\nu = 1,0002719$
b) 5,378	...	2714
c) 5,896	...	2702
d) 6,438	...	2696

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{From } a) \text{ and } d) \text{ we find } \Delta = 3,24 \\ \dots b) \text{ and } c) \dots \quad 4,22 \end{array} \right.$$

the mean $\Delta = 3,73$ agrees closely with Lorenz' value (1). If we accept the values (1) of the constants, equation (3), § 15., gives

$$\text{for } \lambda = 86,9 \quad \dots \quad \nu = 1,0002663.$$

¹⁾ Dufet, *l. c.*, p. 76.

Now for this wave-length John Koch finds

$$\nu = 1,0002661.$$

If we start from Koch's value of the index for $\lambda = 86,9$ and if we assume the index for sodium-light to be

$$\left. \begin{array}{l} = 1,00027155 \text{ (Lorenz)} \\ = 1,0002702 \text{ (Ramsay and Travers)} \end{array} \right\} \text{ we obtain } \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 3,95 \\ \Delta = 2,98 \end{array} \right.$$

In cases where the refractivities from which Δ is being calculated differ but slightly, the value of Δ , as could indeed be expected, changes considerably with the assumed value of the dispersion.

Accepting (1) we obtain for oxygen

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0,82 \\ K &= 1.000533; \end{aligned}$$

I have not been able to find data for the dielectric constant of oxygen.

§ 18. Atmospheric Air. For the reason that air is a mixture and that its composition is variable¹⁾, it is not a suitable substance for use in our computation. The dispersion of atmospheric air appears, however, to have been well investigated and the measurements extend over a considerable range of wave-lengths; I have thought therefore that the purpose of the present investigation will be best served by including air into the discussion.

Let us try to apply to this case equation (3) of § 14.:

$$R = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2. \quad (1)$$

Let α_1, L_1 refer to oxygen; α_2, L_2 to nitrogen. In § 19. below we shall find that λ_{02} (for nitrogen) probably does not differ much from λ_{01} (for oxygen, see § 17); so that λ_0 being an intermediate value lying between λ_{01} and λ_{02} we can take, as an approximation,

$$L_1 = L_2 = \frac{\lambda_0^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}. \quad (2)$$

Then from (1) we get

$$\frac{2}{3}(\nu - 1) = (\alpha_1 + \alpha_2)L. \quad (3)$$

¹⁾ Lorenz and Perreau deprived air of H₂O and of CO₂; in Scheel's experiments air was dried but its CO₂ was not absorbed; in Kayser and Runge's experiments air was not dried at all.

The values of the refractive indices found for air by Kayser and Runge¹⁾ are given in the second column of the following table. Of the values given in the third column more will be said below.

	Observed by K. and R.	Calculated
a) $\lambda = 2,36$. . .	$\nu = 1,00032159$. . .	—
b) 2,55 . . .	31550 . . .	$\nu = 1,00031610$
c) 2,85 . . .	30911 . . .	30979
d) 2,86 . . .	30845 . . .	30961
e) 3,25 . . .	30325 . . .	30416
f) 4,20 . . .	29637 . . .	29697
g) 4,43 . . .	29521 . . .	29590
h) 5,63 . . .	29238 . . .	—

The following values of the constant Δ have been found (applying (3), § 15)

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{from (a) and (h) . . . } \Delta = 3,15 \\ \text{. . . (b) and (g) . . . } 3,18 \\ \text{. . . (c) and (f) . . . } 3,14 \\ \text{. . . (d) and (e) . . . } 3,02 \end{array} \right.$$

The close approximation to constancy exhibited by these results shows that, at least on the basis of Kayser and Runge's experiments, it would be useless to endeavour to discern between the λ_0 's of oxygen and of nitrogen.

From (a) and (h) the value $D = 5230$ can be deduced; with this value for D and $\Delta = 3,15$ the numbers given in the third column of the above table have been calculated.

The following are the results obtained by Perreau and by Mascart.

	Perreau	Mascart
a) $\lambda = 4,677$. . .	$\nu = 1,0002953$. . .	—
b) 4,800 . . .	2951 . . .	$\nu = 1,0002953$
c) 5,085 . . .	2942 . . .	2944
d) 5,378 . . .	2935 . . .	2938
e) 5,896 . . .	2926 . . .	2927
f) 6,438 . . .	2917 . . .	—

¹⁾ Annalen d. Phys. u. Chemie, Bd. 50., p. 313. 1893.

From (a) and (f) (Perreau) we find $\Delta = 2,83$	} (5)
... (b) and (e) (Perreau) ... 2,92	
... (c) and (d) (Perreau) ... 2,98	
... (b) and (e) (Mascart) ... 3,02	
... (c) and (d) (Mascart) ... 2,54	

If we take $D = 5230$ equation (12), § 16., gives

$$K = 1,000574;$$

the experimental data are

$$K = 1,000590 \text{ (Boltzmann)}$$

$$586 \text{ (Klemencie)}$$

If we were to try to adopt Klemencie's value as the exact one, D would become $= 5120$ and $\Delta < 0$ would be found.

K. Scheel's results are given below; some values (corresponding to $\lambda = 5,016$; to $\lambda = 5,048$; to $\lambda = 5,460$) have again been omitted.

a) $\lambda = 4,358$... $\nu = 1,0002954$
b) 4,712 ... 2946
c) 4,922 ... 2937
g) 5,780 ... 2918
l) 6,152 ... 2912
i) 7,056 ... 2904

From (a) and (i) ... $\Delta = 2,68$	} (6)
... (b) and (l) ... 3,19	
... (c) and (g) ... 2,93	

Scheel's empirical constants (see § 16.) are as follows

$$a = 2870,5 \cdot 10^{-7}; \quad b = 16,23 \cdot 10^{-15}; \quad (7)$$

substituting these values we get from (8), § 16.:

$$D = 5226; \quad \Delta = 2,96. \quad (8)$$

These results and the preceding ones, derived from Kayser and Runge's, Perreau's and Mascart's data, show a close agreement.

§ 19. Nitrogen. It is surprising that so little attention has been paid to the dispersion of this substance. This is particularly unfortunate in view of the fact that the behaviour of nitrogen constitutes a conspicuous exception to a general rule to be considered below (see § 24.).

Mascart has found for nitrogen the following results:

a)	$\lambda = 5,085$...	$\nu = 1,0002994$
b)	5,378	...	2986
c)	5,896	...	2973
d)	6,438	...	2966

From (a) and (d)	...	$\Delta = 4,09$	
...	(b) and (c)	...	3,78

Importance cannot be attached to the following data, given by L. Lorenz, as they are not the outcome of direct experiment:

a)	$\lambda = 5,893$...	$\nu = 1,0002960$
b)	6,708	...	2951

from these we find:

$$\Delta = 2,35.$$

Some of Scheel's measurements are shown in the following table:

a)	$\lambda = 4,358$...	$\nu = 1,0003020$
b)	4,712	...	3014
c)	4,922	...	2999
f)	5,460	...	2982
g)	5,780	...	2976
h)	6,676	...	2961
i)	7,056	...	2945

From (a) and (i)	...	$\Delta = 3,88$	
...	(b) and (h)	...	3,94
...	(c) and (g)	...	3,41

From Scheel's values of the constants a , b

$$a = 2906,1 \cdot 10^{-7}; \quad b = 22,47 \cdot 10^{-15}$$

we obtain

$$D = 5161,6; \quad \Delta = 3,99.$$

Let us adopt this value of D ; then from Scheel's consecutive data we obtain

a)	$\Delta = 3,70$	b)	4,10	c)	3,88	d)	3,92
g)	4,05	h)	4,27	i)	3,40		

the mean is $\Delta = 3,90$. Thus Scheel's results seem to corroborate what has been deduced from Mascart's data.

From Scheel's a and b values we find: $\lambda_0 = 0,88$.

§ 20. Carbon monoxide. For CO, Perreau's and Mascart's data are as follows:

	Perreau	Mascart
$a) \lambda = 4,677 \dots \nu = 1,0003388 \dots$		—
$b) 4,800 \dots$	3382	1,0003384
$c) 5,085 \dots$	3368	3370
$d) 5,378 \dots$	3357	3358
$e) 5,896 \dots$	3342	3345
$f) 6,438 \dots$	3328	3334
From (a) and (f) (Perreau) $\dots \Delta = 3,67$		
$\dots (b)$ and (e) (Perreau) \dots		3,67
$\dots (c)$ and (d) (Perreau) \dots		3,68
From (b) and (e) (Mascart) \dots		3,53
$\dots (c)$ and (d) (Mascart) \dots		3,88

Taking $\Delta = 3,67$ we find from Perreau's numbers $D = 4594$; this gives $K = 1,000653$. The observed values are higher than this:

$$K = 1,000690 \text{ (Boltzmann); } = 1,000695 \text{ (Klemencic).}$$

§ 21. Carbon dioxide. In the following table the measurements due to Perreau and to Mascart are collected. The results, though discordant, lead to approximately equal estimates of the dispersion effect.

	Perreau	Mascart
$a) \lambda = 4,677 \dots \nu = 1,0004550 \dots$		—
$b) 4,800 \dots$	4544	1,0004581
$c) 5,085 \dots$	4530	4557
$d) 5,378 \dots$	4518	4550
$e) 5,896 \dots$	4502	4538
$f) 6,438 \dots$	4487	4526
From (a) and (f) (Perreau) $\dots \Delta = 2,15$		
$\dots (b)$ and (e) (Perreau) \dots		2,12
$\dots (c)$ and (d) (Perreau) \dots		2,17
From (b) and (e) (Mascart) \dots		2,12
$\dots (b)$ and (f) (Mascart) \dots		2,06

If we adopt $\Delta = 2,15$ Mr. Perreau's consecutive results give for D

a) 3395,0	b) 3393,9	c) 3394,3
d) 3394,4	e) 3393,5	f) 3395,0

The mean value is $D = 3394,3$ so that from equation (12), § 16., if we were to apply it, we should get: $K = 1,000884$. Now the dielectric constant of CO_2 is decidedly greater than this:

Boltzmann finds: $K = 1,000945$; Klemencic: $1,000985$.

The divergence can be readily accounted for in view of the well known fact¹⁾ that carbon dioxide exhibits absorption bands of exceptional breadth and intensity in the infra-red region of the spectrum.

§ 22. In connection with the preceding results the question now arises in how far we are justified in substituting equation (3) of § 15. for equation (2) of the same section. Let us call Δ^* the value we should obtain were we to apply formula (2), § 15., to a given pair of numerical data. Then if Δ is (as before) the value of the constant which we find when we make use of the approximate expression (3), the ratio of the approximate and the exact value is seen to be

$$(1) \quad \frac{\Delta}{\Delta^*} = \frac{(\nu_2 + 1)(\nu_1 + 1)}{2(\nu_1 + \nu_2)}$$

therefore

$$(2) \quad \frac{\Delta - \Delta^*}{\Delta^*} = \frac{(\nu_2 - 1)(\nu_1 - 1)}{2(\nu_1 + \nu_2)}$$

To get an idea of the magnitude of this correction let us take the case of carbon dioxide for which the fractional part of the index is greater than for any other gas hitherto considered. Over the range covered by the work of Perreau and of Mascart, $\nu - 1$ for CO_2 has been seen to remain of the order $4,5 \cdot 10^{-4}$; hence

$$(3) \quad (\Delta - \Delta^*)/\Delta^*$$

¹⁾ Angström, *Phys. Revue*, Bd. 1, p. 606. 1892.

Paschen, *Annalen d. Phys. u. Ch.*, Bd. 50, p. 409. 1893; Bd. 51, p. 1. 1894; Bd. 52, p. 209. 1894.

Rubens u. Aschkinass, *Annalen d. Phys. u. Ch.*, Bd. 64, p. 584. 1898.

Rubens u. Ladenburg, *Verhandl. d. d. phys. Ges.*, Jahrg. 7, p. 170. 1905.

in this case is of the order $5 \cdot 10^{-8}$. In the case of hydrogen, for all the values of $\nu - 1$ considered in § 16., we find the ratio (3) to be about $5 \cdot 10^{-9}$.

Let us now consider the effect on the value of the other constant, D , when equation (2), § 15., is made use of instead of (3), § 15. Writing D^* for the exact and D for the approximate value:

$$\frac{D^*}{D} = \frac{2\{(\nu_2^2 + 2)(\nu_1^2 - 1)\lambda_2^2 - (\nu_1^2 + 2)(\nu_2^2 - 1)\lambda_1^2\}}{3(\nu_2 + 1)(\nu_1 + 1)\{(\nu_1 - 1)\lambda_2^2 - (\nu_2 - 1)\lambda_1^2\}} \quad (4)$$

If we suppose that ν_1 and ν_2 are but slightly different and that both $\nu_1 - 1$ and $\nu_2 - 1$ are small, we get from (4) approximately

$$\frac{D^*}{D} = 1 + \frac{1}{6}(\nu - 1) \quad (5)$$

where ν is an intermediate value between ν_1 and ν_2 . As an example, let us take again the comparatively unfavourable case of carbon dioxide; let us consider a definite pair of numerical data *e. g.*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4,677 & \dots & \nu_1 = 1,0004550 \\ \lambda_2 &= 6,438 & \dots & \nu_2 = 1,0004487 \end{aligned}$$

If we calculate D^*/D from equation (4) we find

$$\frac{D^*}{D} = 1,0000737;$$

taking $\nu = 1,000452$ and substituting in (5) we obtain

$$\frac{D^*}{D} = 1,000075.$$

Thus the value $D = 3394,3$ found in § 21. would now become

$$D^* = 3394,6.$$

In other cases the correction is even smaller. These results may be sufficient to show that the corrections with which we have been dealing here may be legitimately omitted.

§ 23. In estimating the significance of the results we have hitherto considered it must be remembered that they depend on the justice of an assumption which, judged *a priori*, may appear precarious (§ 15.) Nevertheless these results seemed to be interesting in connection with a general rule presently to be considered (see § 24.); it was thought accordingly that something might be

learned by extending the inquiry to other gaseous bodies. The results are shown in the following tables.

Ammonia NH_3 ; carbon disulphide CS_2 . From the following data

	NH_3	CS_2
a) $\lambda = 5,893 \dots$	$\nu = 1,0003730 \dots$	$\nu = 1,00148$
b) $6,708 \dots$	$3712 \dots$	146

due to L. Lorenz, we obtain

$\text{NH}_3 \dots$	$\Delta = 2,97$
$\text{CS}_2 \dots$	$\Delta = 2,22$

Sulphurous oxide SO_2 . In Dufet's work quoted above (p. 78) Ketteler is said to have found for SO_2 :

a) $\lambda = 5,350 \dots$	$\nu = 1,000691$
b) $5,893 \dots$	686
c) $6,708 \dots$	682

From (a) and (c) \dots	$\Delta = 2,25$
\dots (b) and (c) \dots	$1,95$

Nitrous oxide N_2O . According to Mascart (Dufet, *l. c.*, p. 77) we have for this gas

a) $\lambda = 4,800 \dots$	$\nu = 1,0005230$
b) $5,085 \dots$	5207
c) $5,378 \dots$	5192
d) $5,896 \dots$	5152
e) $6,438 \dots$	5132

The figure given under wave-length (c) appears to be erroneous. We obtain

from (a) and (e) \dots	$\Delta = 2,84$
\dots (a) and (d) \dots	$2,97$
\dots (b) and (d) \dots	$3,10$
\dots (b) and (e) \dots	$2,89$

Cyanogen C_2N_2 . From Ketteler's data (Dufet, *l. c.*, p. 74)

a) $\lambda = 5,350 \dots$	$\nu = 1,000789$
b) $5,893 \dots$	784
c) $6,708 \dots$	780

we obtain: taking (a) and (c) . . . $\Delta = 1,73$
 . . . (b) and (c) . . . 1,49

In two papers, due to L. Lorenz and K. Prytz¹⁾ further data respecting the dispersive power of some vapours (such as CH_4O , $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$, $\text{C}_2\text{H}_5\text{I}$, C_6H_6 etc.) can be found. This evidence, however, resting as it does on the results in every case of a single pair of experiments (indices are given for $\lambda = 5,893$ and $6,708$ only) is not of a conclusive character; it was thought best not to include it here.

A beautiful series of experiments dealing with the refractivities of several *elements* in the gaseous state has been published recently by Messrs C. Cuthbertson and E. P. Metcalfe²⁾. The research was designed primarily to obtain a single value of the index ν for each substance but in the course of the work it was found that the dispersion would be considerable. To quote the words of the authors: "it was only with the object of satisfying ourselves that the refractivity measured was not affected to an abnormal degree by the existence of an absorption band for a wave-length near to that by which the observations were made that readings were taken with different wave-lengths". The following table shows (in round numbers) the per cent variation of the refractivity $\nu - 1$, for the total range of wave-lengths employed, observed in the experiments of Cuthbertson and Metcalfe:

Gaseous Cadmium: about 4%	Gaseous Selenium: about 2%
. . . Zinc: . . . 7%	. . . Tellurium: . . . 10%
. . . Arsenic: . . . 2%	. . . Mercury ³⁾ : . . . 3%

Considering the degree of accuracy attained in the measurements we see from this that zinc and tellurium are the only elements for which it may be safe to attempt calculations similar to that previously recorded.

¹⁾ Annalen d. Phys. u. Ch., Bd. 11., p. 70; ibidem, p. 104. 1880.

²⁾ Philosophical Trans. Roy. Soc. of L. (A). Vol. 207. p. 135. 1907. Cf. two previous papers: Phil. Trans. R. S. L. (A). Vol. 204, p. 323. 1905 and Proc. R. S. L. (A). Vol. 76., p. 426. 1905.

³⁾ According to a courteous private Communication from Mr. Cuthbertson, of date March 16, 1907, the value of $10^6(\nu_{\text{CM}} - 1)$ for $\lambda = 6,562$ in the case of Mercury, is 1835 (instead of 1799, as stated in the paper).

Let ν_{CM} be the value of the refractive index of a gaseous element in the standard state selected by Cuthbertson and Metcalfe; it is the state in which the number of *atoms* of the element per unit volume is equal to the number of atoms contained in unit volume of hydrogen at 0° C. and 760 millims. In the present paper a different definition of the standard state has been adopted. The standard state to which all values of ν given above are referred is that in which, by Avogadro's Law, the number of *molecules* per unit volume is equal to the number of molecules contained in unit volume of hydrogen at 0° C. and 760 millims. In order to reduce the data given by Cuthbertson and Metcalfe to our scale, let us write p for the number of atoms contained in one molecule of the gaseous element; if we assume that $\nu - 1$ varies directly as the density of the gas we have

$$(1) \quad \nu_{CM} - 1 = \frac{2}{p} (\nu - 1).$$

From this and from (5), § 15., we conclude that

$$(2) \quad \Delta_{CM} = \frac{1}{2} p \Delta.$$

Gaseous Zinc ($p = 1$). From the following data (C. and M., *l. c.*, p. 141)

a)	$\lambda = 5,183$...	$\nu_{CM} = 1,002100$
b)	6,562	...	1960

we obtain

$$\Delta_{CM} = 3,64.$$

It must be added that this figure is probably to small; C. and M's results for zinc graphically smoothed seem to point to Δ_{CM} lying in the proximity of 4.

Gaseous Tellurium ($p = 2$). From the following data (C. and M., *l. c.*, p. 144)

a)	$\lambda = 5,460$...	$\nu_{CM} = 1,002620$
b)	5,893	...	2495
c)	6,562	...	2370

we find: (a) and (c) lead to $\Delta_{CM} = 5,85$

(b) and (c) ... 5,69

These results, however, are rather uncertain.

§ 24. For brevity, let us speak of "dispersion electrons"; by this expression of course those electrons are meant which, in a given region of the spectrum, are chiefly effective in modifying the refractivity of the medium. Suppose for a moment that the number of dispersion electrons in a molecule of a given gaseous body can be estimated. If a is that number and if (as in §§ 1. and 10.) M is the number of molecules contained in unit volume of the gas at 0° C. and 760 millims., then by formula (1), § 15.,

$$a\Delta = \frac{3\pi c^2}{\frac{e}{m} \cdot eM}. \quad (1)$$

The right-hand member does not depend on the particular nature of the gas; so that, according to the simple form of theory from which (1) of § 15. is derived, the product $a\Delta$ ought to be an *universal constant*.

Thus, if the values Δ_1, Δ_2 of the constant for a pair of gases are known, we can calculate from

$$a_1/a_2 = \Delta_2/\Delta_1 \quad (2)$$

the relative numbers of the dispersion electrons contained in their molecules. We should expect therefore two such values Δ_1, Δ_2 to be always in the ratio of two integral numbers. This conclusion is corroborated in a simple manner by the results we have obtained. Thus for hydrogen the probable value of Δ is very nearly 8, for oxygen it is about 3,8 and for carbon dioxide about 2,1; in round numbers: —

$$a_{\text{CO}_2} : a_{\text{O}_2} : a_{\text{H}_2} = 8 : 4 : 2.$$

This example immediately suggests the view discussed at great length by Drude¹⁾, chiefly in connection with the Theory of Dispersion in solid bodies, and only partially adopted by him, namely: that the number of dispersion electrons in a molecule is given by the aggregate number (say ν) of units of valency, or "bonds", by which the atoms contained in the molecule are assumed to be linked. Without laying undue stress on this hypothesis (which has been shown by Drude to be untenable in many cases) we shall

¹⁾ Annalen d. Physik, Bd. 14., p. 677. 1904.

nevertheless tabulate the values of the product $v\Delta$ for all gases we have examined; this procedure after all is extremely serviceable in helping us to understand the correlation of the values of Δ for different substances.

Before stating the result some preliminary remarks may be necessary. It must be remembered that *all* values of the product $v\Delta$ are given (throughout) in terms of the unit: 10^{-7} cm². The next remark called for is that the number v is not wholly determinate in every case; it is a well-known fact (on which it is needless to dwell here) that the number v has never been defined satisfactorily and may perhaps be undefinable, precisely in the case of some of the simplest gaseous molecules known in Chemistry. Thus the value of v adopted for CO, SO₂, N₂O, at least to a certain extent, must be admitted to be arbitrary.

In the case of air the constant Δ is given by

$$(3) \quad \frac{1}{\Delta} = \alpha_1 + \alpha_2$$

(see § 18.); α_1 and α_2 are given by (2), § 14. Let us suppose M_1 molecules of oxygen and M_2 molecules of nitrogen are contained in unit volume of air at standard temperature and pressure; and let

$$(4) \quad M_1 = h_1(M_1 + M_2); \quad M_2 = h_2(M_1 + M_2).$$

If we put:

$$(5) \quad N_1 = a_1 M_1; \quad N_2 = a_2 M_2$$

and if for oxygen and nitrogen electrons we assume

$$(6) \quad e_1/m_1 = e_2/m_2 \quad \text{and} \quad e_1 = e_2$$

we find from (3) and (4)

$$(7) \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{3\pi c^2} (a_1 h_1 + a_2 h_2) \frac{e^2}{m} (M_1 + M_2);$$

thus atmospheric air will behave as a single medium and its a will be

$$(8) \quad a = a_1 h_1 + a_2 h_2.$$

The legitimacy of this conclusion rests on the assumptions explained in § 18. Taking

$$v_1 = 4; \quad v_2 = 6; \quad h_1 = 0,209; \quad h_2 = 0,791$$

and substituting v_1 for a_1 , v_2 for a_2 , we get $v = 5,582$.

To calculate the value of the product $v\Delta$ for an elementary gas for which the value Δ_{CM} is known (see § 23.) we have to remember that in this case

$$v = pw \quad (9)$$

w being the valency of an atom; from formula (2), § 23., we obtain

$$v\Delta = 2w\Delta_{CM}, \quad (10)$$

the (sometimes troublesome) p being eliminated.

We now proceed to give the values of $v\Delta$ in all cases in which (see §§ 16—23.) consistent values of the constant Δ have been obtained.

Hydrogen H_2 ($v = 2$)

$\Delta = 7,39$...	$v\Delta = 14,78$	$\Delta = 7,88$...	$v\Delta = 15,76$
8,35	...	16,70	7,70	...	15,40
8,37	...	16,74	7,59	...	15,18
8,31	...	16,62	7,52	...	15,04
8,58	...	17,16	7,36	...	14,72
8,343	...	16,686	mean value:		15,89

Oxygen O_2 ($v = 4$)

$\Delta = 3,76$...	$v\Delta = 15,04$	$\Delta = 3,95$...	$v\Delta = 15,80$
3,73	...	14,92	2,98	...	11,92
mean $v\Delta$ (last value omitted) = 15,25.					

Atmospheric Air ($v = 5,582$)

$\Delta = 3,15$...	$v\Delta = 17,58$	$\Delta = 3,02$...	$v\Delta = 16,85$
3,18	...	17,74	2,54	...	14,18
3,14	...	17,52	2,68	...	14,98
3,02	...	16,85	3,19	...	17,82
2,83	...	15,79	2,93	...	16,36
2,92	...	16,29	2,96	...	16,48
2,98	...	16,63	mean value:		16,55

Nitrogen N_2 ($v = 6$)

$\Delta = 4,09$...	$v\Delta = 24,54$	$\Delta = 3,94$...	$v\Delta = 23,64$
3,78	...	22,68	3,41	...	20,46
2,35	...	14,10	3,99	...	23,94
3,88	...	23,28	3,90	...	23,40

mean $v\Delta = 23,13$ (third value omitted).

Carbon monoxide CO ($v = 4$)

$\Delta = 3,67$...	$v\Delta = 14,68$	$\Delta = 3,53$...	$v\Delta = 14,12$
3,67	...	14,68	3,88	...	15,52
3,68	...	14,72	mean value:		14,75

Carbon dioxide CO₂ ($v = 8$)

$\Delta = 2,15$...	$v\Delta = 17,20$	$\Delta = 2,12$...	$v\Delta = 16,96$
2,12	...	16,96	2,06	...	16,48
2,17	...	17,36	mean value:		17,00

Ammonia NH₃ ($v = 6$)

$$\Delta = 2,97 \quad \dots \quad v\Delta = 17,82$$

Carbon disulphide CS₂ ($v = 8$)

$$\Delta = 2,22 \quad \dots \quad v\Delta = 17,76$$

Sulphurous oxide SO₂ ($v = 8$)

$\Delta = 2,25$...	$v\Delta = 18,00$
1,95	...	15,60
mean value:		16,80

Nitrous oxide N₂O ($v = 8$ (?))

$\Delta = 2,84$...	$v\Delta = 22,72$	$\Delta = 3,10$...	$v\Delta = 24,80$
2,97	...	23,76	2,89	...	23,12
mean value:					23,60

Cyanogen C₂N₂ ($v = 14$)

$\Delta = 1,73$...	$v\Delta = 24,2$
1,49	...	20,9
mean value:		22,5

Zinc Zn ($w = 2$; $v = 2$)

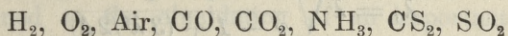
$$\Delta_{CM} = 3,64 \quad v\Delta = 14,56 (?)$$

Tellurium Te₂ ($w = 2$; $v = 4$)

$\Delta_{CM} = 5,85$...	$v\Delta = 23,40 (?)$
5,69	...	22,76 (?)

$$\text{mean value: } 23,1 (?)$$

If we except nitrogen, nitrous oxide and cyanogen, the approach towards constancy seems remarkable. Considering the imperfect nature of the data at our disposal the agreement between the values of the product $v\Delta$ seems as close as could have been expected. If we confine ourselves to the following gases:



we find the mean of the values of $v\Delta$ to be 16,3. It is much to be desired that new experiments be made from which the exact value of this constant could be deduced.

The next remark called for by the inspection of the table is that there are undoubtedly cases in which the rule fails, nitrogen being a conspicuous example; the behaviour of N_2O and of C_2N_2 is perhaps less surprising. We think it would be premature to dwell on the explanation of these anomalies; we cannot but feel that the law enunciated in this § rests upon a foundation of truth although it appears to be subject to restriction when expressed in the rough form which unfortunately was the only one we have been able to verify.

§ 25. In the paper quoted Drude has called attention to the fact that the value of the quantity e/m which can be deduced from the Electromagnetic Theory of Dispersion does not agree very exactly with the accepted value of this constant¹⁾. From (1), § 24., the same result can be obtained. If we assume

$$eM(0^\circ \text{C.}, 760 \text{ mm.}) = 1,29 \cdot 10^{10} \text{ gm}^{1/2} \text{ cm}^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (1)$$

we have (in electromagnetic units)

$$\frac{e}{m} = \frac{21,918 \cdot 10^7}{[a\Delta]} \quad (2)$$

where $[a\Delta]$ is the value of the supposed constant expressed in 10^{-7} cm^2 . Substituting 16,3 for $[a\Delta]$ we find

$$\frac{e}{m} = 1,34 \cdot 10^7. \quad (3)$$

In order to arrive at $1,865 \cdot 10^7$, the value of e/m generally accepted on the authority of Kaufmann, Seitz, Simon and Starke, we would have to assume $[a\Delta] = 11,75$.

¹⁾ cf. J. Koch, *Annalen d. Physik*, Bd. 17., p. 665. 1905.

§ 26. In the case of some gaseous bodies, only *one* value of the refractive index is known (corresponding to one definite wavelength) and the dispersion has not been investigated. Now from (3) and (4), § 15., we have

$$(1) \quad \lambda_0 = \lambda \sqrt{\frac{\nu - 1}{\nu - 1 + (3\lambda^2/2\Delta)}}$$

so that, if we assume that the $\nu\Delta$ -law holds, the value of λ_0 for such gases can be calculated. It is true that the $\nu\Delta$ -law has been found not to hold in some cases; hence it is evident that in general this method of calculating λ_0 *cannot* be relied upon. The equation, however, may perhaps be serviceable in suggesting new lines of research.

The following is given for the sake of illustration. The refractive indices are taken from measurements due to Sir William Ramsay and Dr Morris W. Travers¹⁾ and refer to $\lambda = 5,893$.

Helium . . .	$\nu = 1,0000363$. . .	$\lambda_0 = 0,63$
Neon . . .	1,0000687	. . .	0,86
Argon . . .	1,000284	. . .	1,69
Krypton . . .	1,000425	. . .	2,03
Xenon . . .	1,000689	. . .	2,49

The following indices have been reduced to 0° C. and 760 millims. [see § 23.] from measurements due to Mr Clive Cuthbertson²⁾ and to Messrs C. Cuthbertson and E. P. Metcalfe³⁾; they are for sodium-light throughout.

Phosphorus . . .	$\nu = 1,002394$. . .	$\lambda_0 = 1,44$
Zinc . . .	1,001030	. . .	2,20
Arsenic . . .	1,003104	. . .	1,62
Cadmium . . .	1,001337	. . .	2,46
Tellurium . . .	1,002495	. . .	2,03
Mercury . . .	1,000933	. . .	2,25

It may be well to repeat, by way of caution, that the values of λ_0 are *not* given here as plausible theoretical results. The point which

¹⁾ Phil. Transactions Roy. Soc. L. (A). Vol. 197. p. 47. 1901 (see *ib.* p. 81).

²⁾ Phil. Transactions Roy. Soc. L. (A). Vol. 204. p. 323. 1905.

³⁾ Phil. Transactions Roy. Soc. L. (A). Vol. 207. p. 135. 1907.

we desire to emphasize is that they are suggestive of strong absorption bands, most of them in accessible regions of the spectrum; hence by experimental proof or disproof¹⁾ the validity of the $v\Delta$ -law can *indirectly* be tested²⁾.

§ 27. In the present section we shall apply the results previously obtained to the elucidation of an important point in the general theory. In § 11. we have defined a quantity F and have written down the expression of F according to various theories. We can now compute (in certain definite cases) the individual terms contained in (3), (4), (5) and (9), § 11.; we shall thus get an idea of the comparative importance of these terms. Leaving aside σ we have to calculate four quantities viz.: —

$$n_0^2, n^2, C^2 \text{ and } \frac{4}{3}\pi e^2 N/m. \quad (1)$$

We take the second term to be directly given; the value of the third we borrow from the Kinetic Theory of Gases; the first and the fourth we calculate by means of the formulae

$$n_0^2 = \frac{4\pi^2 c^2 D}{\Delta}; \quad \frac{4}{3}\pi \frac{e^2 N}{m} = \frac{4\pi^2 c^2}{\Delta} \quad (2)$$

(see § 15.). Let us consider *a)* hydrogen *b)* carbon dioxide, both at 0° C., and 760 millims. We assume for them (§§ 16. and 21.)

$$\begin{array}{ll} a) D = 11033,5; & \Delta = 8,343 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2 \\ b) D = 3394,3; & \Delta = 2,145 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2 \end{array}$$

Let us suppose we are dealing with wave-lengths ranging from $3,6 \cdot 10^{-5}$ cm. to $86,9 \cdot 10^{-5}$ cm. We find:

¹⁾ Messrs Cuthbertson and Metcalfe have found that (*e. g.*) the vapour of tellurium exhibits a strong absorption band in the violet; no absorption, however, was observed in the case of zinc. For other observations see Kayser's *Handbuch der Spectroscopie*, Vol. 3., p. 317—336; the evidence is not of a conclusive character.

²⁾ In the case of nitric oxide NO we should expect λ_0 to be about 0,81; this value follows from (1) if we take $\alpha = 5$ and if we accept Mascart's value of the refractive index for sodium-light. Now this value of λ_0 seems to be contradicted by Kreusler's photoelectric measurements of the NO absorption (*Annalen d. Physik*, Bd. 6., p. 412. 1901). Probably then NO is another case in which the $v\Delta$ -law does not hold.

	Hydrogen (0°,760 mm)	Carbon dioxide (0°,760 mm)
n_0^2	$46989 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2}$	$56220 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2}$
n^2	$\left\{ \begin{array}{l} \text{from } 2742 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2} \\ \text{to } 5 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{from } 2742 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2} \\ \text{to } 5 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2} \end{array} \right.$
C^2	$\frac{9}{10^9} \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2}$	$\frac{3}{10^9} \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2}$
$\frac{4}{3} \pi \frac{e^2 N}{m}$	$4 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2}$	$17 \cdot 10^{28} \text{ sec}^{-2}$

It must of course be remembered that the results just found have been calculated for hydrogen and carbon dioxide at 0° C. and 760 millims. In this connection it may be well to remark that the fourth term varies directly as the density of the gas, the third as the square of the density, whereas the first term, in all probability, is approximately (but not exactly) independent of the density.

We hope we will be able to revert to this subject when we will take the phenomena of extinction into closer consideration. It will be seen that some of the results here obtained are susceptible of a somewhat different interpretation.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcją

Sekretarza Wydziału matem.-przyrod. Józefa Rostańskiego.

Kraków. 1907. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

15 Maja 1907.

