Raport Badawczy
Research Report

RB/13/2001

Zarys modelu sektora bankowego

Jan Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: doc. dr hab. inż. Michał Inkielman

Warszawa 2001

Zarys modelu sektora bankowego

Jan Gadomski

Instytut Badań Systemowych PAN,
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa,
e-mail: jan.gadomski@ibspan.waw.pl

1. Wstęp.

Celem budowy modelu było stworzenie opisu dynamicznego kształtowania się związków pomiędzy depozytami, popytem na kredyt, kredytami oraz rynkową stopą procentową.

Zasady konstrukcyjne modelu opierają się na propozycji podejścia metodologicznie odmiennego od stosowanych w większości modeli zawierających elementy systemu finansowego. W podejściu tradycyjnym opisywane są zmiany poziomów stanów, rzadziej zaś strumienie. Pozwala to na uproszczenie problemu, gdyż utożsamia zmiany stanu z natężeniem strumienia udzielonego kredytu (rozumianego jako wielkość ujęta w kategoriach netto). Innymi słowy, w opisie zmiany pewnego zasobu (będącego najczęściej pozycją bilansową) stosowane są wielkości będące wypadkową określonych składowych a nie same składowe, które są często nieobserwowalne. Zaletą tradycyjnego podejścia jest to, że w istotny sposób ułatwia uzyskiwanie i przetwarzanie danych i jest zgodne z wykształconą w bankowości tradycją preferencji dla analizy bilansu. Wykorzystywane są dające się obserwować wielkości - stany pozycji bilansowych w poszczególnych chwilach. Bank tradycyjny nie obserwuje, ile w danym okresie udzielił kredytu, ile kredytów zostało spłaconych. Sprawozdawczość bankowa jest dostosowana do tej tradycji, patrz np. W. L. Jaworski, Z. Krzyżkiewicz, B. Kosiński (1997), i w rezultacie NBP (ale nie tylko on - również wiele banków centralnych na świecie) nie ma informacji: ile w określonym okresie wpłacono pieniędzy na rachunki depozytowe i ile z nich podjęto, jak również ile udzielono kredytu oraz ile kredytów zostało spłaconych.

W praktyce błędna interpretacja obserwowanych danych jest mało prawdopodobna dzięki uwzględnianiu w analizie innych wielkości o charakterze jakościowym. Jednak przy budowie modeli przenoszenie tych metod może prowadzić do poważnych błędów, ponieważ zmiany stanów, czyli zmian poziomów zasobów, mogą być efektem różnych, często diametralnie przeciwnych, tendencji kształtujących zmiany natężeń strumieni kształtujących te zasoby.

Na przykład, wzrost stanu kredytu w określonym okresie może być wynikiem:

* przyrostu nowych kredytów i odpowiednio mniejszego przyrostu spłat starych kredytów
* przyrostu nowych kredytów i odpowiednio mniejszego spadku spłat starych kredytów
* spadku nowych kredytów i odpowiednio większego spadku spłat starych kredytów.

Przedstawiony problem można ująć w następujący sposób. Pewien zasób Z jest zasilany przez strumień X kształtowany przez pewną liczbę n zmiennych $(X_1,\dots, X_n)$ oraz jest pomniejszany przez wypływający z niego strumień Y kształtowany przez pewną liczbę m zmiennych $(Y_{1t},\dots,Y_{mt})$. Zatem poziom zasobu Z_t pod koniec określonego okresu t można przedstawić za pomocą następującej zależności:

$$Z_t = Z_{t-1} + X_t - Y_t \text{ lub } \Delta Z_{t-1} = X_t - Y_t,$$

$$\text{gdzie: } X_t = f(X_{1t},\dots, X_{nt}) \text{ i } Y_t = g(Y_{1t},\dots, Y_{nt}).$$

Obie zmienne: X_t i Y_t. mogą zależeć od tych samych czynników, a zatem od tych samych zmiennych. Przykładem mogą być rezerwy, które są powiększane przez wpłaty depozytów oraz pomniejszane przez strumień udzielanego kredytu. Oba te strumienie zależą od tej samej zmiennej: stopy oprocentowania[1].

Ponieważ zmienne X_t i Y_t. są zazwyczaj trudno bądź niebezpośrednio obserwowalne, poszukuje się zazwyczaj funkcji h pozwalającej na określanie zmiany zasobu **Z** na podstawie zależności:

[1] Zależność ta jest w rzeczywistości bardzo złożona.

$$\Delta Z_{t-1} = h(X_{1t},\ldots, X_{nt}, Y_{1t},\ldots, Y_{mt}).$$

Na ogół już samo ustalenie postaci funkcji ***h*** i dobór zmiennych sprawiają istotne trudności. Posługiwanie się jedną funkcją w miejsce dwóch ma wiele zalet, jest jednak przyczyną istotnego zubożenia informacji, co prowadzić może do innego rodzaju błędów. W realnym systemie nie jest obojętne, jakie jest natężenie strumieni przepływających przez dany zasób. Na przykład, dla płynności banku istotną różnicę sprawia, czy dany stan depozytów jest wynikiem szybkiego obrotu na rachunkach krótkoterminowych, czy małego przepływu pieniędzy przez rachunki długoterminowe.

Przedstawione uwagi nie powinny jednak prowadzić do kategorycznego wniosku, że metoda tradycyjna jest wyłącznie źródłem błędów i powinna być zarzucona. Uwagi te wskazują raczej na istotną możliwość wystąpienia błędów, których w pewnych warunkach można i należy unikać.

Przedstawione wyżej podejście jest wykorzystywane w większości modeli makroekonomicznych zawierających podmodele systemu finansowego. Przykładami modeli opracowanych do opisu gospodarki polskiej są: Z. Czerwiński et al. (1996), W. Welfe, A. Welfe et al. (1998), Gutenbaum J. i Inkielman M. (1998), a wśród modeli innych krajów wymienić można m. in. NIESR (1999).

Odmienność proponowanego (w stosunku do tradycyjnego) w tej pracy podejścia można sprowadzić do posługiwania się nie saldami zmian stanów lecz wielkościami strumieni ***X*** i ***Y***, co pociąga za sobą konieczność pełniejszego zinterpretowania tych strumieni.

Proponowaną metodę modelowania zastosowano po raz pierwszy przy konstruowaniu sektora finansowego w modelu J. Gadomskiego i I. Woronieckiej (1996). Jej istota polega na przedstawianiu zmiennych obrazujących stany (takie jak, np.: depozyty, kredyty itp.) w systemie bankowym jako zasoby kształtowane przez strumienie zasilające jak i wyczerpujące te zasoby. Strumienie te są kształtowane przez rożne, częściowo tylko pokrywające się czynniki.

2. Model

2.1 Depozyty

Pomiędzy sektorami finansowym a sektorami niefinansowymi stale dokonuje się przepływ pieniędzy.

Model opiera się na założeniu, że działanie systemu bankowego polega na udzielaniu kredytu ze środków pochodzących z depozytów - oszczędności zdeponowanych na rachunkach bankowych przez podmioty gospodarcze: przedsiębiorstwa, gospodarstwa domowe, szeroko rozumianą sferę budżetową.

W każdym okresie podmioty gospodarcze kierując się różnymi motywami dokonują ogromnej liczby operacji wpłat i wypłat. Niezależnie od tych motywów, przez rachunki bankowe stale przepływa strumień pieniędzy charakteryzujący się dwoma kluczowymi atrybutami: natężeniem oraz długością okresu przebywania na rachunku. Jeżeli w dwóch kolejnych chwilach poziom depozytów nie uległ zmianie, nie znaczy to, że nie dokonywano wpłat i wypłat. Podobnie jak w przykładzie wcześniejszym, nie zmieniony poziom depozytu może być wypadkową trzech różnych konfiguracji wpłat i wypłat.

Zarówno wpłaty jak i wypłaty charakteryzują się zmiennością kształtowaną przez wiele czynników. W tym etapie nie jest konieczne wskazywanie konkretnych czynników kształtujących natężenie strumienia wpłat na depozyty[2].

Deponenci dokonują wpłat na rachunki / depozyty na pewien okres, po którym dokonują wypłaty. Równanie depozytów ma następującą postać:

$$\boldsymbol{DP_t = DP_{t-1} + WP_t - WY_t},$$

gdzie:

$\boldsymbol{DP_t}$ –stan depozytów w chwili $\boldsymbol{t}$,

[2] Ogólnie można założyć, że wpłaty i /lub przeciętny okres depozytu rosną wraz ze stopą oprocentowania depozytów.

WP_t - wpłaty w okresie t,

WY_t - wypłaty w okresie t.

Strumień wypłat j WY_t est opóźniony w stosunku do strumienia wpłat WP_t: Wpłata WP_t jest dokonana przez dużą liczbę deponentów, którzy zamierzają trzymać środki na rachunkach przez określony czas, przy czy jedni podejmują pieniądze po krótszym, inni zaś po dłuższym okresie.

Wypłaty WY_t w okresie **t** można zatem przedstawić za pomocą następującej zależności, z której wynika, że na kwotę wypłat w tym okresie składają się części wpłat dokonanych w okresach wcześniejszych /poprzedzających oraz części wpłaty dokonanej w tym samym okresie:

$$WY_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t,i} \cdot WP_{t-i}, \quad w_{t,i} \geq 0, \quad i=1,\ldots,\infty; \quad \sum_{i=0}^{\infty} w_{t,i} = 1. \tag{1}$$

Założenie to należy rozumieć zgodnie z definicją zależności opóźnionej ze zmiennym rozkładem opóźnienia (lub inaczej ze zmiennymi współczynnikami wagowymi)[3]:

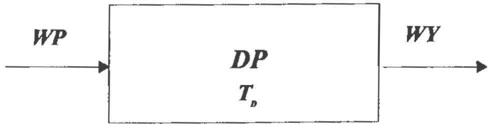
a. współczynniki $w_{t,i}$ mogą ulegać zmianie w czasie; ich zmienność jest ograniczona przez warunki dodatniości i sumowania się do jedności w każdym okresie t

b. na wypłaty w okresie t składają się części wpłat na rachunki we wcześniejszych (poprzedzających) okresach oraz część $w_{t,0}$ wpłaty dokonanej w tym samym okresie.

c. suma wypłat nie może przekraczać sumy wpłat; tj.: $\sum_{j=0}^{\infty} w_{t+j,j} \cdot WP_t \leq WP_t$, co oznacza, że suma wypłacanych w kolejnych okresach części wpłaty WP_t jest nie większa od WP_t, co zarazem zapewnia nieujemność depozytu.

[3] Gadomski J.; Model opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami wagowymi, seria Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk Instytut Badań Systemowych, Warszawa 1986.

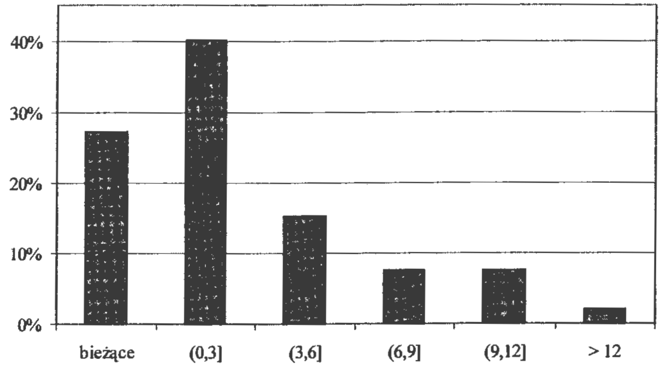
Przy tak poczynionych założeniach depozyt ***DP*** można interpretować jako zasób w opóźnieniu zasilany przez strumień wpłat ***WP*** oraz wyczerpywany przez strumień wypłat ***WY*** będący opóźnionym (w sensie opóźnienia rozłożonego) strumieniem wpłat, rys. 1.



rys. 1. Depozyt jako model opóźnienia z opóźnieniem przeciętnym T^D.

Zasadniczym następstwem przyjętego rozwiązania jest to, że przy ustalonym natężeniu wpłat zmianom może ulegać zarówno natężenie wypłat jak i poziom depozytów. Na przykład, wzrost przeciętnego czasu przebywania środków na rachunku, przy nie zmienionym natężeniu, powodować będzie wzrost depozytów. Zastosowanie zależności opóźnionej o zmiennym rozkładzie pozwala na uwzględnienie faktu, że w określonych okolicznościach deponenci zmieniają strukturę czasu trwania depozytów. Np. można oczekiwać, że niskie stopy oprocentowania depozytów m.in. powodować będą skrócenie przeciętnego okresu trwania depozytów.

O strukturze czasowej depozytów można wnioskować pośrednio na podstawie analizy udziałów depozytów terminowych (w podziale na bieżące, do trzech miesięcy, powyżej trzech do sześciu, powyżej sześciu do dwunastu oraz powyżej dwunastu miesięcy) w depozytach ogółem. Przykład takiej struktury przedstawiono na rys. 1. Struktura to nie podlega, jak zapewniają specjaliści, większym zmianom. Opracowując poniższy rysunek dokonano uproszczenia polegającego na stworzeniu dwóch nie występujących w statystyce terminów, tj. od sześciu do dziewięciu miesięcy (6,9] oraz od dziewięciu do dwunastu miesięcy (9,12]. Uzyskano je w przez podzielenie na dwie równe części kwot zdeponowanych w terminach od sześciu do dwunastu miesięcy.



źródło: NBP

rys.2 Udziały depozytów terminowych w depozytach ogółem. Stan na 1999.12.31

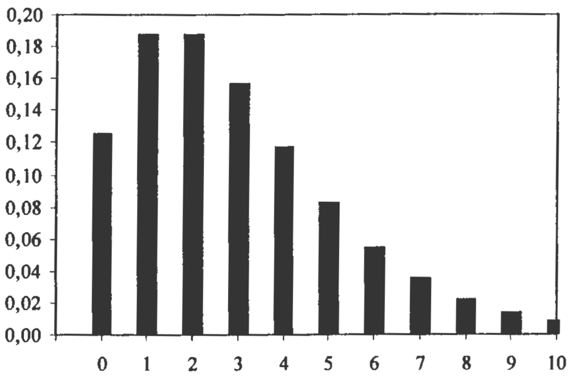
Na ukształtowanie się struktury czasowej depozytów, rys.2, wpływ mają z jednej strony zamierzenia deponentów co do czasu trwania depozytów a z drugiej strony to, jak te zamierzenia są realizowane. Duża część kwot „leży" na rachunkach dłużej niż by to wynikało z terminu rachunków[4]. Zarazem pewna liczba umów terminowych jest zrywana – co oznacza, że pieniądze leżą na tych rachunkach krócej, niż by to wynikało z terminów tych rachunków. W tym sensie przedstawiona na rys.2 struktura określa stany depozytów w poszczególnych terminach a nie rzeczywisty czas przebywania pieniędzy na rachunkach.

Jaki jest zatem „prawdziwy" rozkład czasu pozostawania środków na rachunkach? Określenie takiego rozkładu byłoby możliwe, gdyby znane były natężenia strumieni wpłat i wypłat. Pozwoliłoby to odpowiedzieć na pytanie, jak długo leży przeciętna złotówka na rachunku

[4] Zjawisko to jest znane w bankowości pod nazwą „osad".

bieżącym[5]? Jednak dane takie nie są dostępne. Sposobem wyjścia jest przyjęcie założenia, że rozkład czasu przebywania na rachunku pokrywa się ze struktura terminową depozytów.

Na podstawie analizy rys.2 sformułować można dwie hipotezy. Pierwsza hipoteza, prostsza, opiera się na założeniu, że motyw utrzymywania środków na rachunku bieżącym i rachunkach terminowych jest w gruncie rzeczy ten sam, w związku z czym rozkład czasu przebywania na rachunku jest generowany przez jeden proces opóźnienia. Przykład takiego rozkładu przedstawiono na rys.3. Na osi poziomej odkładane są długości okresów przebywania na rachunkach a na osi pionowej udziały w depozycie ogółem (dla lepszej prezentacji oś poziomą skrócono).



Źródło: opracowanie własne.

rys. 2. Przykład rozkładu opóźnienia.

Hipoteza druga, jak się wydaje bliższa rzeczywistości, opiera się na założeniu, że kształtowanie się depozytów bieżących i terminowych rządzi się odmiennymi prawami. W takim przypadku zachodzi konieczność przedstawienia depozytów jako struktury złożonej z dwóch

[5] Obserwacja osadu nie dostarcza odpowiedzi na to pytanie.

(równoległych[6]) części odrębnie zasilanych i wyczerpywanych przez odrębne dwa strumienie. Strumienie wypłat z rachunków bieżących i terminowych są strumieniami opóźnionymi w stosunku do strumieni odpowiednio wpłat na rachunki bieżące i terminowe a odpowiadające im rozkłady opóźnienia mogą się różnić podstawowymi parametrami rozkładów. Z uwagi jednak na niedostępność odpowiednich danych, które pozwoliłyby na dokonanie wyboru, dalsze rozważania oparte będą na hipotezie pierwszej.

Obecnie przechodzimy do następującej kwestii: w jaki sposób zamodelować depozyty, aby możliwe byłoby przeprowadzanie analizy symulacyjnej, w której zmianie podlegałby przeciętny okres przebywania środków na rachunku. Większość modeli opóźnień o dobrych, z punktu widzenia modelowania, własnościach to modele o rozkładach nieskończonych. Wykorzystanie zależności definicyjnej opóźnienia:

$$WY_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t,i} \cdot WP_{t-i},$$

jest nawet przy szybkiej zbieżności niewygodne, ponieważ w pewnych warunkach może powodować duże błędy. Problem ten można rozwiązać przybliżając interesujący nas rozkład opóźnienia za pomocą układu równań. różnicowych w których zależności między zmiennymi można sprowadzić do postaci (1).

Przykładem takiego układu jest zależność:

$$Y_t = Y_{t-1} + \lambda_t (X_t - Y_{t-1}), \qquad (2)$$

gdzie:

Y_t – zmienna opóźniona,

X_t – zmienna wejściowa

λ_t – zmienny współczynnik, $0 \leq \lambda_t \leq 1$.

[6] analogicznie do połączenia rónoległego w obwodach elektrycznych.

Równanie (2) interpretuje się w następujący sposób. Strumień X_t zasila pewien zasób Z, który jest wyczerpywany przez strumień Y_t. Na strumień Y_t składają się: część $\lambda_t\, X_t$ strumienia X_t oraz część $\lambda_t\ Z_{t-1}$ zasobu Z_{t-1} z początku okresu. Część $\lambda_t\, X_t$ strumienia X_t nie wchodzi w opóźnienie i opuszcza układ w tym samym okresie.

Równanie strumienia Y_t :

$$Y_t = \lambda_t X_t + \lambda_t\ Z_{t-1} \tag{3}$$

oraz równanie zasobu Z_t:

$$Z_t = Z_{t-1} + (1 - \lambda_t)\, X_t\ - \lambda_t Z_t, \tag{4}$$

który jest zasilany przez strumień $(1 - \lambda_t)\, X_t$, tj tę część strumienia X_t, która nie opuściła układu, oraz przez strumień wypływający z zasobu, którego natężenie jest równe $\lambda_t\ Z_{t-1}$.

Równania (3) i (4) można łatwo doprowadzić do postaci (2). Jak łatwo zauważyć, równanie (2) cechuje daleko idące podobieństwo do modelu Koyck'a ze stałym współczynnikiem λ. W związku z tym model (2) można nazwać dynamicznym modelem Koyck'a.

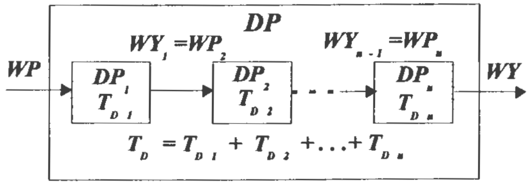
Współczynnik λ_t jest interpretowany jako chwilowa przepustowość: gdy $\lambda_t = 1$, występuje pełna przepustowość i $Y_t = X_t$, cały strumień wchodzący opuszcza układ bez zwłoki – opóźnienie nie występuje. W przypadku przeciwnym, tzn. gdy $\lambda_t = 0$, układu nic nie opuszcza – przepustowość jest zerowa a przeciętny okres opóźnienia staje się nieskończony. Ta własność modelu wskazuje, że jest celowe posługiwanie się dwoma odrębnymi pojęciami dotyczącymi opóźnienia: opóźnieniem chwilowym $T_m(t)$, obliczanym jak dla modelu Koyck'a i równym:

$$T_m(t) = (1 - \lambda_t) / \lambda_t,$$

oraz opóźnieniem przeciętnym $T(t)$, obliczanym ze wzoru[7]:

$$T(t) = \lambda_t \sum_{i=1}^{\infty} i \prod_{j=1}^{i} (1 - \lambda_{t-j}),$$

Opóźnienie rozłożone, generowane za pomocą równania (2), nie ma rozkładu opóźnienia o kształcie przypominającym rozkład przedstawiony na rys. 2. Taki kształt rozkładu można uzyskać przez złożenie (szeregowe połączenie) modeli opóźnień wykorzystując przy tym tę własność złożenia modeli opóźnień, że przeciętne opóźnienie całości jest sumą przeciętnych opóźnień składowych modeli opóźnień, rys. 4:



rys. 4. Złożenie n modeli opóźnień.

Przedstawianie depozytów jako złożenia większej liczby opóźnień[8], rys. 2, wymaga wprowadzenia bardziej złożonej struktury zasobów w opóźnieniu polegającej na tym, że wypływ z pierwszego zasobu jest zasileniem drugiego i tak dalej, aż wreszcie wypływ z ostatniego stanowi ostateczne wypłaty. Złożenie większej liczby modeli opóźnień można interpretować jako obraz pewnego procesu opóźnienia, w którym wyróżnić można większą liczbę faz, przez które przechodzą jednostki będące w opóźnieniu. Warunkiem poprawności omawianej konstrukcji jest ustalenie takich wartości przeciętnego przebywania depozytu w poszczególnych zasobach, aby ich suma była równa przeciętnej wartości okresu depozytu T^D. Zasadnicza różnica pomiędzy pojedynczym modelem opóźnienia a złożeniem wielu modeli opóźnień przejawia się w kształcie rozkładu opóźnienia. W przypadku opóźnienia pojedynczego, funkcja prawdopodobieństwa

[7] Gadomski(1986)

[8] Złożenie n opóźnień Koyck'a daje rozkład opóźnienia odpowiadający rozkładowi prawdopodobieństwa Pascala o współczynnikach wagowych równych (Solow(1960)):

$w_i = \binom{n-i-1}{i}(1-\lambda)^n k^i,\ i=0,1,\cdots,\infty.$

rozkładu opóźnienia odpowiada malejącemu ciągowi geometrycznemu z dodatnim współczynnikiem, podczas gdy opóźnienie złożone ma funkcję prawdopodobieństwa rozkładu mającą maksimum.

Złożenie większej liczby dynamicznych modeli Koyck'a powoduje konieczność przedstawienia równań odpowiedniej liczby kolejnych zasobów w opóźnieniu oraz trzech strumieni wypływających z tych zasobów. W przypadku opóźnienia rzędu trzeciego model składa się z trzech równań zasobów w opóźnieniu:

$$\boldsymbol{DP1_t = DP1_{t-1} + WP_t - WY1_t},$$

$$\boldsymbol{DP2_t = DP2_{t-1} + WY1_t - WY2_t},$$

$$\boldsymbol{DP3_t = DP3_{t-1} + WY2_t - WY3_t},$$

oraz trzech równań strumieni wypływających z tych zasobów:

$$\boldsymbol{WY1_t = (WP_t + DP1_{t-1})\, \lambda^D/3 = (WP_t + DP1_{t-1})\, 3 / T^D},$$

$$\boldsymbol{WY2_t = (WP_t + DP2_{t-1})\, \lambda^D/3 = (WP_t + DP2_{t-1})\, 3 / T^D},$$

$$\boldsymbol{WY3_t = (WP_t + DP3_{t-1})\, \lambda^D/3 = (WP_t + DP3_{t-1})\, 3 / T^D};$$

gdzie:

$\boldsymbol{DP1_t}$, $\boldsymbol{DP2_t}$ i $\boldsymbol{DP3_t}$ – zasoby w opóźnieniu odpowiadające pierwszej, drugiej i trzeciej fazie procesu opóźnienia,

$\boldsymbol{WY1_t}$, $\boldsymbol{WY2_t}$ i $\boldsymbol{WY3_t}$ – strumienie wypływające z zasobów w opóźnieniu odpowiednio w fazie pierwszej, drugiej i trzeciej procesu opóźnienia.

W przedstawionych wyżej układach równań modelu opóźnienia złożonego przeciętny czas trwania depozytu $\boldsymbol{T^D}$ jest sumą przeciętnych czasów przebywania depozytów w kolejnych fazach[9]. Łączna wielkość zasobu w opóźnieniu wynosi:

$$\boldsymbol{DP1_t + DP2_t + DP3_t},$$

[9] Dla uproszczenia przyjęto, że przeciętne czasy przebywania w poszczególnych fazach są sobie równe

a wielkość strumienia wypłat WY_t jest równa wielkości strumienia $WY3_t$ wypływającego z ostatniego zasobu w opóźnieniu.

Oprocentowanie depozytów

Wielkość strumienia wpłat depozytów oraz przeciętny czas trwania depozytu nie są zmiennymi niezależnymi. Bez wątpienia są one istotnie zależne od stóp: oprocentowania depozytów, przeciętnej stopy zysku z inwestycji i ryzyka. W celu uproszczenia problemu można założyć, ze wpłaty rosną wraz ze wzrostem stopy oprocentowania depozytów i maleją wraz ze spadkiem tych stóp a przeciętny czas trwania depozytu jest stały.

Wynagrodzeniem deponentów z tytułu utrzymywania depozytu są odsetki od depozytów obliczane jako iloczyn stopy oprocentowania depozytów r_t w okresie t i wielkości depozytu DP_t na początku okresu t:

$$r_t \, DP_{t-1}, \tag{4}$$

stanowiące zarazem koszt odsetkowy banków.

Reasumując, wejściem modelu depozytów są: strumień wpłat, przeciętny okres depozytu oraz stopa oprocentowania depozytów, a wyjściem są: poziom depozytów i strumień wypłat.

2.2 Zadłużenie

W modelu zadłużenie powstaje w wyniku zaciągania kredytu. Strumień zaciągniętych w danym okresie kredytów K_t powiększa poziom zadłużenia Z, który z kolei jest pomniejszany przez strumień spłaconych kredytów S_t w tym okresie. Kredyty są zaciągane na określony przeciętny okres T^K. Ponieważ model zadłużenia jest zbudowany podobnie do modelu depozytów, równanie zadłużenia Z można zapisać w następujący sposób:

$$Z_t = Z_{t-1} + K_t - S_t \, , \tag{5}$$

gdzie za pomocą Z_t oznaczono poziom zadłużenia pod koniec okresu t.

Stosując pojedyncze opóźnienie Koyck'a, na podstawie:

$$S_t = (K_t + Z_{t-1})/T^K. \tag{6}$$

zależność wysokości spłat kredytu od wysokości kredytów zaciągniętych można przedstawić za pomocą następującego równania:

$$S_{t+1} = \lambda^K K_t + (1 - \lambda^K) S_t = S_t + \lambda^K (K_t - S_t), \tag{7}$$

gdzie:

$$\lambda^K = 1 / (T^K + 1). \tag{8}$$

Podobnie jak w przypadku modelu depozytów, model kredytu może być opisany za pomocą modelu opóźnienia uzyskanego ze złożenia większej liczby dynamicznych modeli Koyck'a. Jest to celowe wtedy, gdy rozkład okresów trwania kredytów wykazuje skupienie wokół określonej wartości.

Złożenie większej liczby modeli Koyck'a powoduje zatem konieczność przedstawienia równań odpowiedniej liczby kolejnych zasobów w opóźnieniu oraz strumieni wypływających z tych zasobów. W przypadku opóźnienia rzędu trzeciego model składa się z trzech równań zasobów w opóźnieniu:

$$Z1_t = Z1_{t-1} + K_t - S1_t,$$

$$Z2_t = Z2_{t-1} + S1_t - S2_t,$$

$$Z3_t = Z3_{t-1} + S2_t - S3_t,$$

oraz trzech równań strumieni wypływających z tych zasobów:

$$S1_t = (Z1_{t-1} + K_t)\, \lambda^K/3 = (Z1_{t-1} + K_t)\, 3 / (T^K + 1),$$

$$S2_t = (Z2_{t-1} + S1_t)\, \lambda^K/3 = (Z2_{t-1} + S1_t)\, 3 / (T^K + 1),$$

$$S3_t = (Z3_{t-1} + S2_t)\, \lambda^K/3 = (Z3_{t-1} + S2_t)\, 3 / (T^K + 1);$$

gdzie:

$Z1_t$, $Z2_t$ i $Z3_t$ – zasoby w opóźnieniu odpowiadające pierwszej, drugiej i trzeciej fazie procesu opóźnienia,

$S1_t$, $S2_t$ i $S3_t$ – strumienie wypływające z zasobów w opóźnieniu odpowiednio w fazach pierwszej, drugiej i trzeciej procesu opóźnienia.

W przedstawionych wyżej układach równań modelu opóźnienia złożonego przeciętny czas trwania depozytu T^K jest sumą przeciętnych czasów przebywania kredytów w kolejnych fazach[10]. Łączna wielkość zasobu w opóźnieniu wynosi:

$$Z1_t + Z2_t + Z3_t,$$

a wielkość strumienia spłat S_t jest równa wielkości strumienia $S3_t$ wypływającego z ostatniego zasobu w opóźnieniu.

Analogicznie jak w modelu depozytów, założenie o stałości T^K nie jest konieczne. Zmienność tego parametru jest, jak się wydaje, wynikiem polityki prowadzonej przez banki oraz sytuacji kredytobiorców. Polityka banków jest podyktowana m.in. postulatem dostosowania struktury czasowej kredytów do struktury depozytów oraz płynnością. Przy zmniejszonej płynności banki nie tylko zmniejszają ilość udzielanego kredytu ale dążą również do skrócenia przeciętnego czasu trwania kredytu. Jeśli chodzi o kredytobiorców, to w warunkach pogorszenia ich sytuacji finansowej dochodzi do wydłużenia okresu spłat kredytu. Kredyty są wówczas restrukturyzowane, co niekoniecznie pociąga za sobą pogorszenie stosunków bank-klient.

Popyt na kredyt i przeciętny okres kredytu są, podobnie jak w przypadku depozytów, zmiennymi zależnymi. O popycie na kredyt można założyć, że jest ujemnie skorelowany z wysokością stopy oprocentowania kredytu; wzrost stopy oprocentowania zniechęca do zaciągania kredytów. W okresach, gdy stopy oprocentowania są wysokie klienci banków są mniej zainteresowani kredytami długoterminowymi, co wpływa na skracanie przeciętnego okresu kredytu. Wydaje się, że pierwsze analizy powinny być przeprowadzane wychodząc od najprostszej hipotezy o stałości przeciętnego okresu kredytu.

---

[10] Dla uproszczenia przyjęto, że przeciętne czasy przebywania w poszczególnych fazach są sobie równe

Wejściami modelu zadłużenia są: popyt na kredyt oraz przeciętny okres, na jaki zaciągane są kredyty w okresie t. Ze względu na działanie licznych czynników działających na rzecz zwiększenia, w stosunku do umownych, rzeczywistych długości okresów kredytu, przeciętny okres kredytu powinien być interpretowany nie jako nominalna lecz efektywna wielkość.

Przychodem banków z tytułu udzielonych kredytów są odsetki od kredytów obliczane jako iloczyn stopy oprocentowania kredytów R_t w okresie t i wielkości zadłużenia Z_{t-1} na początku okresu t:

$$R_t\, Z_{t-1}. \qquad (9)$$

2.2 Rezerwy, rezerwy obowiązkowe i podaż kredytu

Rezerwy Q systemu bankowego są kształtowane przez zasilające je strumienie oszczędności oraz spłacanych kredytów oraz pomniejszane przez wycofywane oszczędności oraz kredyty udzielone:

$$Q_t = Q_{t-1} + WP_t + S_t - WY_t - K_t, \qquad (10)$$

lub

$$\begin{aligned} Q_t &= Q_{t-1} + (WP_t - WY_t) + (S_t - K_t). \\ &= Q_{t-1} + (D_t - D_{t-1}) + (Z_t - Z_{t-1}), \end{aligned}$$

gdzie przez D_t oznaczono łączny poziom depozytów.

Łączny poziom depozytów D_t jest definiowany jako suma depozytów pierwotnych DP_t oraz depozytów inwestycyjnych DI_t:

$$D_t = DP_t + DI_t \qquad (11)$$

Depozyty inwestycyjne DI_t są efektem kreacji pieniądza w systemie bankowym. Mechanizm tego zjawiska polega na tym, że udzieleniu kredytu towarzyszy otwarcie rachunków inwestycyjnych traktowanych jak depozyty[11]. Powoduje to „wirtualny" wzrost poziomu depozytów, w konsekwencji poziomu rezerw i podaży kredytu. Depozyty inwestycyjne można opisać w sposób podobny jak w przypadku depozytów pierwotnych. Strumieniem zasilającym są przyznane w danym okresie kredyty, natomiast strumieniem wyczerpującym zasób zadłużenia jest strumień wykorzystania kredytu.

Można założyć, że strumień wykorzystania kredytu U^K jest opóźniony w stosunku do strumienia udzielonego kredytu K, przy czym przeciętna długość „przebywania" kredytu na rachunku inwestycyjnym T^U nie może przekraczać wartości T^K, $T^U \leq T^K$. Równanie depozytów inwestycyjnych ma postać:

$$DI_t = DI_{t-1} + K_t - U^K_t. \tag{11}$$

Bank centralny wyznacza stopę rezerw obowiązkowych ρ_t określającą poziom rezerw obowiązkowych Q^*_t będący minimalnym dopuszczalnym poziomem tych rezerw. Poziom rezerw obowiązkowych w okresie t jest ustalany w relacji do poziomu łącznych depozytów i jest opisany przez następującą zależność:

$$Q^*_t = \rho_t D_{t-1}. \tag{12}$$

Banki mogą w okresie t udzielić kredyty w wysokości:

$$Q_t - Q^*_t,$$

jeśli $Q_t - Q^*_t \geq 0$, nazywanej nadwyżkową rezerwą. W przypadku przeciwnym rezerwy są niższe od rezerw obowiązkowych. W uproszczonej wersji modelu, w przypadku $Q_t - Q^*_t \leq 0$ dostosowanie systemu bankowego jest bierne i polega na nieudzielaniu kredytu.

Podaż kredytu C w okresie t jest określona przez funkcję:

$$C_t = \begin{cases} Q_{t-1} - Q^*_t, & gdy \quad Q_t - Q^*_t \geq 0, \\ 0, & gdy \quad Q_t - Q^*_t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

[11] Zjawisko to jest ciekawe, i nieco inaczej, opisywane u różnych autorów, np. przez: P.A. Sauelsona (1961), D. Begga, S. Fishera, R. Dornbuscha (1992) oraz R. E. Halla i J. B.Taylora (1991)

Oznaczając przez P_t popyt na kredyt zgłaszany w okresie t, warunek określający wielkość przyznanego kredytu K_t można zapisać jako mniejszą z podaży (13) i popytu:

$$K^t = min \{ P_t , C_t \} . \quad (14)$$

Warunek (14) wskazuje, że nie wprowadza się założenia o równowadze rynku kredytowego; odpowiada to realiom rynku kredytowego.

2.3 Rynkowa stopa procentowa, oprocentowanie depozytów i kredytów.

Rynkowa stopa procentowa rośnie wraz ze wzrostem nadwyżki popytu na podażą kredytu oraz wraz ze spadkiem poziomu rezerw. W warunkach równowagi popyt na kredyt równy jest podaży oraz poziom rezerw nie ulega zmianie – również stopa procentowa nie ulega zmianie.

Postulaty te znajdują wyraz w proponowanej formule kształtowania się rynkowej stopy procentowej depozytów:

$$r_t = r_{t-1} + \alpha_1 (P_t - C_t) + \alpha_2 (Q_{t-2} - Q_{t-1}), \quad (14)$$

gdzie α_1 i α_2 dodatnie współczynniki.

Relację między stopami oprocentowania depozytów i kredytów określa się na podstawie przychodów i kosztów odsetkowych oraz kosztów nieodsetkowych M. Przychód odsetkowy musi pokryć koszty odsetkowe i nieodsetkowe. Zakładając, że przy minimum konkurencji przeciętny zysk w sektorze bankowym jest bliski zeru, zależność pomiędzy przychodami a kosztami w sektorze bankowym można przedstawić w postaci następującego równania:

$$R_t Z_{t-1} = r_t DP_t + M_t ,$$

i ostatecznie:

$$R_t = (r_t DP_t + M_t) / Z_{t-1} . \quad (15)$$

Zależność (15) pozwala na ustalenie różnicy wysokości oprocentowania kredytów i depozytów.

3. Podsumowanie

Przeprowadzone na danych abstrakcyjnych eksperymenty symulacyjne potwierdziły formalną poprawność modelu. Wskazuje to na celowość podjęcia próby skalibrowania tego modelu na danych polskich.

Sam eksperyment symulacyjny wymagał odpowiedniego opracowania wejść, a w szczególności określenia funkcji podaży oszczędności oraz funkcji popytu na kredyt. Obie funkcje oparte zostały na założeniu, że istotnymi zmiennymi określającymi podaż i popyt na kredyt są stopy oprocentowania odpowiednio depozytów i kredytów. Ponadto, popyt maleje a podaż rośnie wraz ze wzrostem odpowiednich stóp oprocentowania. Założenie to, wprowadzające homeostazę, było konieczne dla zapewnienia stabilności modelu.

Badanie wpływu polityki pieniężnej na system bankowy można przeprowadzać w następujący sposób. Najprostsze jest badanie wpływu zmian stopy rezerw obowiązkowych. Bardziej złożony scenariusz jest związany z operacjami otwartego rynku; wymaga to z jednej strony dołączenia modelu sektorów produkcyjnych dla uchwycenia wpływu stóp procentowych na inflację oraz modelu banku centralnego w celu badania związku pomiędzy stopami procentowymi banku centralnego a emisją pieniądza w krótkim i długim okresie.

Podczas prób dostosowania modelu do warunków polskich należy oczekiwać pojawienia się wielu trudności. Do najistotniejszych problemów należy niebezpośrednia dostępność danych potrzebnych dla przeprowadzenia analizy zgodnej z przedstawiona propozycją. Dotyczy to zwłaszcza strumieni kształtujących depozyty i rezerwy. Jednakże istnieją dane pozwalające na oszacowanie przeciętnego okresu depozytów i kredytów. To powinno umożliwić oszacowanie natężenia odpowiednich strumieni i kalibrację modelu.

LITERATURA

1. Begg D., Fisher S., Dornbusch R., *Ekonomia*, tom 2, PWE, Warszawa, 1992.

2. Czerwiński Z.,Kiedrowski R., Konopczyński M., Panek E.; *KEMPO Model as a Tool for Generating Growth Scenarios of the Polish Economy by Institutional Sectors*, The Third Conference of the International Association AMFET Modelling Economies in Transition, W. Welfe (red.), Volume 1, December 3-5, 1998, Jurata – Poland, Łódź Poland, ABSOLWENT, Łódź, 1998.

3. Gadomski J., Woroniecka I., *Dynamic Model of the Polish Economy During the Transition Period*, Proceedings of the Conference MACROMODELS '96 on Integration and Development, W. Welfe i P. Wdowiński (red), , 1996, Łódź Poland, ABSOLWENT, Łódź, 1996.

4. Gadomski J.; *Model opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi współczynnikami wagowymi*, seria Prace IBS PAN, Polska Akademia Nauk Instytut Badań Systemowych, Warszawa(1986)

5. Gutenbaum J., Inkielman M. (red.), *Symulacyjny model gospodarki Polski*, , seria: Badania systemowe, tom 20, Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, Warszawa, 1998.

6. Hall R. E., Taylor J. B., *Macroeconomics, Theory, Performance and Policy*, wyd. trzecie, W W Norton & Company, New York, London 1991.

7. Jaworski W. L., Krzyżkiewicz Z., Kosiński B.; *Banki, rynek, operacje, polityka*, POLTEXT, Warszawa, wyd. szóste rozszerzone i zaktualizowane (1997).

8. Kenkel J. L., *Dynamic Linear Economic Models*, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1974).

9. NiDEM MODEL MANUAL, National Institute of Economic and Social Research, April 1999.

10. Samuelson P. A., *Economics. An Introductory Analysis*, wyd. piąte. McGraw-Hill Book Company, INC, New York, Toronto, London 1961.

11. Solow, R. M.; „On a Family of Lag Distribution", Econometrica, Vol. 28, 1960.

12. Welfe W., Florczak W., Welfe A.; *The Annual Macroeconomic Model of the Polish Economy (Model version W8-98)*, Proceedings of the Twenty Sixth International Conference MACROMODELS '99, December 1-4 , 1999, Rydzyna – Poland, ABSOLWENT, Łódź, 2000.