

A4/2

172/2001

**Raport Badawczy**

**RB/29/2001**

**Research Report**

**Symulacyjna wycena  
instrumentów  
stałochodowych z  
zabezpieczeniem hipotecznym**

**L. Słomiński**

**Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute  
Polish Academy of Sciences**



**POLSKA AKADEMIA NAUK**

**Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: dr inż. Leon Słomiński

Warszawa 2001

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH PAN

PWDwWR/ 29 /2001

LEON SŁOMIŃSKI

**SYMULACYJNA WYCENA INSTRUMENTÓW  
STAŁODOCHODOWYCH Z ZABEZPIECZENIEM  
HIPOTECZNYM**

**PRACOWNIA WSPOMAGANIA DECYZJI w WARUNKACH RYZYKA**

Kierownik zadania: Profesor Roman Kulikowski

Nazwa zadania: *Wspomaganie decyzji i zarządzanie ryzykiem*

Nazwa podzadania: Analiza rynku obligacji w warunkach ryzyka

Kierownik zadania: Doc. dr hab. L. Zaremba

Wykonawca podzadania: Dr inż. Leon Słomiński

Warszawa, grudzień 2001



# SYMULACYJNA WYCENA INSTRUMENTÓW STAŁODOCHODOWYCH ZABEZPIECZONYCH HIPOTEKĄ

## Streszczenie

Analizujemy problemy zastosowania symulacji Monte Carlo do wyceny instrumentów dłużnych z zabezpieczeniem hipotecznym przyjmując wieloczynnikowy model HJM (skrót od nazwisk autorów: Heath, Jarrow i Morton) do opisu dynamiki stóp procentowych, przyjmując trzy różne równania stochastyczne (Itô,  $\alpha$ -stabilny Levyego i Gaussa-Poissona). Użycie wieloczynnikowego modelu HJM pozwala uwzględnić strukturę czasową stóp procentowych, która dopuszcza szeroki wachlarz zachowań dla zmienności (mamy strukturę czasową zmienności). Instrumenty dłużne zabezpieczone hipotecznie, ze względu na zmienność strumienia płatności spowodowaną przedpłatami (typowy przykład ściętkowo zależnego) stawia wysokie wymagania analitykowi dochodowości i ryzyka inwestowania w te papiery.

W raporcie przedstawiamy:

- charakterystykę rynku instrumentów dłużnych zabezpieczanych hipotecznie,
- parametry nominalnego i realnego strumienia wypłat, który jest ściętkowo zależnym procesem losowym,
- zalety i ograniczenia wieloczynnikowego modelu HJM dla potrzeb wyceny HPD,
- schemat blokowy modelu symulacyjnego, który zapewnia bezarbitrażową wycenę instrumentów hipotecznych, w warunkach dużej swobody w wyborze struktury terminowej zmienności,
- charakterystykę poszczególnych modułów schematu blokowego.

## 1. Hipoteczne papiery dłużne

Hipoteczne papiery dłużne (HPD) są instrumentami stało dochodowymi, emisja których jest zabezpieczona hipoteką na nieruchomościach i które mają następujące cechy [6]:

- kapitał emisyjny tworzy, agregowane w pulę, strumień spłat pożyczek zaciągniętych na zakup nieruchomości zabezpieczonych hipoteką na niej;
- nominał i kupony odsetkowe są wypłacane inwestorowi w regularnych odstępach czasu – z reguły co miesiąc – przy czym inwestor ma do wyboru szeroki wachlarz produktów podstawowych i pochodnych różniących się spodziewanymi dochodami i stopniem ryzykowności;
- pożyczkobiorca (aktor rynku pierwotnego) ma prawo do wcześniejszej spłaty całości lub części pożyczki hipotecznej;
- prawo do przedpłat sprawia, że inwestujący (aktor rynku wtórnego) w papiery bazowe lub pochodne (obligacje) nabywa instrument, który ma wmontowaną serię opcji amerykańskich i jest narażony na specyficzne ryzyko - **ryzyko przedpłat**;
- wielkość wypłat miesięcznych dla inwestora i okres do zapadalności zmieniają się losowo (kwota należności nie zmienia się).

Najbardziej popularnym papierem dłużnym zabezpieczonym hipotecznie, dostępnym w szerokim zakresie na rynkach rozwiniętych, rynkach rozwiniętych, są listy zastawne (LZ). Inne papiery z tej dziedziny, to hipoteczne obligacje transzowe (Collateralized Mortgage Obligations) i obligacje rozwarstwione (Strips).

Regularny list zastawny (równe raty, stały kupon) oferuje inwestorowi w okresie do zapadalności nominalnie stałą wypłatę miesięczną, na którą składa się część kapitałowa i odsetki (kupon odsetkowy). Realny harmonogram wypłat (wysokość raty miesięcznej i okres do zapadalności) różni się od harmonogramu nominalnego wskutek oddziaływania przedpłat.

Przedpłaty traktujemy jak proces losowy zależny od wielu czynników, wśród których wyróżniamy rynkowe stopy procentowe. Wypłaty dla inwestora są zatem procesem losowym zależnym i od procesu przedpłat od losowej dynamiki stóp procentowych, którymi strumień wypłat jest dyskontowany.

Strumień płatności przedstawimy na przykładzie regularnego listu zastawnego.

Przyjmijmy oznaczenia:

- $K$  – wartość początkowa kapitału puli (zagregowanego długu pożyczkobiorców),
- $S_n$  – saldo kapitału puli na początku miesiąca  $n = 1, \dots, N$ ,  $S_0 = K$ ,
- $R_m$  – nominalna wypłata miesięczna dla inwestora (stała),
- $P_n$  – rata kapitałowa w miesiącu  $n$  (składowa  $R_m$ ),
- $c$  – stopa odsetkowa (kupon) dla inwestora,
- $N$  – nominalny okres do zapadalności (w miesiącach),
- $n$  – bieżący miesiąc,
- $\tau = N - n$ ,
- $d = 1/(1+c)$ .

Dla **zerowych przedpłat** mamy następujące wzory dla miesięcznych rat i dla salda puli:

Stała rata miesięczna dla inwestora, obejmuje ratę kapitałową i kupon odsetkowy:

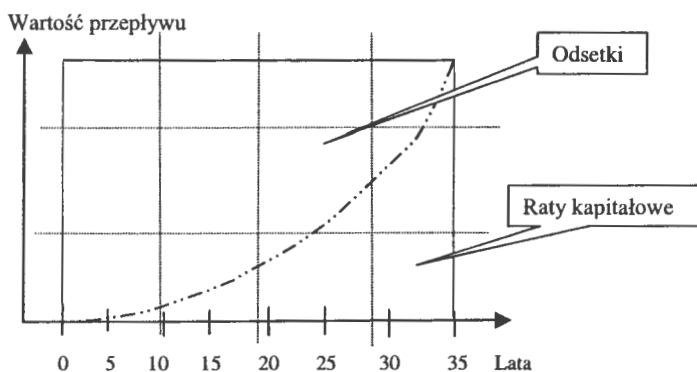
$$R_m = K \frac{\left[ c(1+c)^N \right]}{\left[ (1+c)^N - 1 \right]}.$$

Saldo kapitału puli na początek miesiąca  $n$  i w kolejnych miesiącach:

$$S_n = S_0 \frac{1-d^t}{1-d^N},$$

$$S_{n+1} = S_n \left[ (1+c) - \frac{c}{1-d^t} \right]$$

Rysunek 1 pokazuje strumień pieniężny listu zastawnego dla nominalnego (bez przedpłat) harmonogramu wypłat. Linie przerywane pokazują możliwy poziomy i pionowy podział strumienia, który służy emisji obligacji transzowych (podział pionowy) i serii obligacji transzowych (podział poziomy), [5,6].



Rysunek 1.

### Strumień dla niezerowych przedpłat

Losowa zmienność przedpłat sprawia, że zamiast harmonogramu nominalnego mamy harmonogram realny, w którym wysokość raty miesięcznej i okres do zapadalności stają się losowe. Powyższy harmonogram ulega zasadniczej deformacji. Zmienność harmonogramu płatności jest jednym z ważniejszych źródeł ryzyka inwestowania w instrumenty dłużne gwarantowane hipotecznie.

Niech  $\pi_n$  oznacza współczynnik przedpłaty dla miesiąca  $n$ , zdefiniowany jako stosunek kwoty przedpłaty (spodziewanej, w danym miesiącu) do pozostającej wartości kapitału. Współczynnik ten zależy od stopy terminowej oraz od innych parametrów modelu przedpłat i obliczamy go na początek każdego miesiąca.

Jeżeli przez  $z_n$  oznaczmy:

$$z_n = S_0 \frac{\left\{ \prod_{s < n} [1 - \pi_s] \right\}}{(1 - d^N)},$$

to otrzymamy:

$$R_m = z \left[ \pi_n (1 - d^{\tau-1}) + c (1 - d^\tau) \right],$$

$$S_n = z_n (1 - d^n),$$

i

$$S_{n+1} = S_n (1 - \pi_n) \left[ (1 + c) - \frac{c}{1 - d^\tau} \right].$$

Strumień płatności realnych ma charakter losowy, zależny od historii przedpłat, a dla obligacji transzowych także od reguł wypłat obowiązujących dla transz i ich serii (strumień ściśle zależny). Model symulacyjny generuje scenariusze strumienia wypłat i czynniki dyskonta, które pozwalają obliczać wartości oczekiwane dla różnych scenariuszy.

## 2. Problemy wyceny papierów gwarantowanych hipoteką

Wycena instrumentów dłużnych z zabezpieczeniem hipotecznym jest zadaniem wyjątkowo złożonym. Jest tak dlatego, że należy wziąć pod uwagę dwa procesy losowe, które mają wpływ na wycenę.

Pierwszym procesem jest zachowanie się stóp procentowych w całym długim (np. do 30 lat) okresie inwestycji w te instrumenty. Znając stopy procentowe, np. stopy terminowe dla każdego miesiąca możemy obliczyć oczekiwany dochód z inwestycji przez właściwe dyskontowanie poszczególnych składowych strumienia wypłat.

Drugi proces losowy to proces przedpłat (realizacja opcji kupna) wynikający z prawa pożyczkobiorcy pożyczki hipotecznej do wcześniejszych spłat części lub całości długu. Intensywność przedpłat zależy w dużej mierze, od historii stóp procentowych i od ich aktualnych wartości, ale także od wielu innych czynników (rodzinnych, sezonowych, nieprzewidywanych katastrof itp.). Właśnie przedpłaty są źródłem specyficznego ryzyka inwestującego (ale także emitenta) nazywanego ryzykiem przedpłat.



Dla pewnych instrumentów stałodochodowych i ich pochodnych wartości strumienia wypłat w danej chwili, zależą od historii wypłat (od ścieżki, filtracji). Oznacza to, że harmonogram dalszych wypłat zależy nie tylko od aktualnej stopy procentowej, lecz także od trajektorii jaką stopa procentowa przebyła do rozpatrywanego momentu czasu.

W przypadku instrumentów gwarantowanych hipoteką (np. listy zastawne, obligacje hipoteczne) wartość przedpłat dokonywanych przez dłużników hipotecznych w najbliższym okresie jest zależna od i wcześniejszych przedpłat, ponieważ stopa przedpłaty w aktualnym miesiącu zależy od tego jakie były wcześniejsze uwarunkowania rynkowe dla podejmowania przedpłat przez dłużników. Jest to sytuacja różna zasadniczo od tej, przed którą stoi emitent instytucjonalny, który rozważa czy wykupić swój dług z uwagi na to, że bieżąca stopa procentowa jest niższa od stopy kuponu emisji. Jego decyzja nie zależy od wcześniejszych zachowań stopy procentowej.

Co więcej, dla listów zastawnych ze zmiennym oprocentowaniem, to ostatnie zależy nie tylko od ścieżki stóp procentowych, ale także od trajektorii stopy referencyjnej, która ma wpływ na bieżącą wartość kuponu odsetkowego.

Pule utworzone przez agregację strumienia spłat DH (z zastosowaniem, na przykład kryterium geograficznego) tworzą kapitał, który gwarantuje wypłaty takich instrumentów jak obligacje z gwarancją hipoteczną. Wskutek tego mamy tutaj do czynienia z podwójną zależnością od historii wypłat zobowiązań dla posiadaczy tego typu obligacji. Po pierwsze, przedpłaty dłużników z tytułu pożyczek hipotecznych kreują zależność wypłaty dla inwestora od ścieżki, którą przeszły te przedpłaty. Po drugie, wypłata w danym miesiącu, dla posiadacza obligacji z gwarancją hipoteczną, która należy do określonej serii zależy od pozostających do wypłaty zobowiązań emitenta, uwzględniających zobowiązania pozostałych serii rozpatrywanej struktury emisji.

### **3. Wycena symulacyjna**

Wymagania w stosunku do modelu symulacyjnego, (postulaty):

- Referencyjna funkcja stóp procentowych – wejście dla generatora.
- Uwzględnienie zmienności w czasie dyspersji stóp procentowych w – struktura zmienności stóp procentowych.
- Normalizacja – średnia ceny obligacji bezkuponowej otrzymana z symulacji powinna być równa cenie aktualnej.

- Generowane serie stóp procentowych muszą zapewniać bezarbitrażowość wyceny, co oznacza, że funkcja stóp procentowych otrzymana z modelu powtarza dzisiejszą funkcję (użyta jako wejście) i wyklucza arbitraż dla wszystkich późniejszych momentów czasu.
- Generowane są stopy procentowe terminowe – dla każdego miesiąca jest potrzebna roczna stopa terminowa.
- Szczegóły modelu przedpłat (np. [3]) nie są przedmiotem naszych obecnych rozważań. Przyjmujemy, że do modelu tego są wprowadzane, wygenerowane losowo stopy procentowe i inne istotne parametry, zaś na wyjściu otrzymujemy comiesięczne stopy przedpłat, które pozwalają obliczyć oczekiwaną, dla danego miesiąca wypłatę.

### **Schemat blokowy i opis modelu symulacyjnego**

Wejściem do modelu jest referencyjna struktura stóp procentowych, która dla każdego miesiąca przedstawia roczne stopy natychmiastowe, odpowiadające dochodowości wolnych od ryzyka, bezopcyjnych papierów skarbowych (najlepiej obligacji zerokuponowych), [ S1].

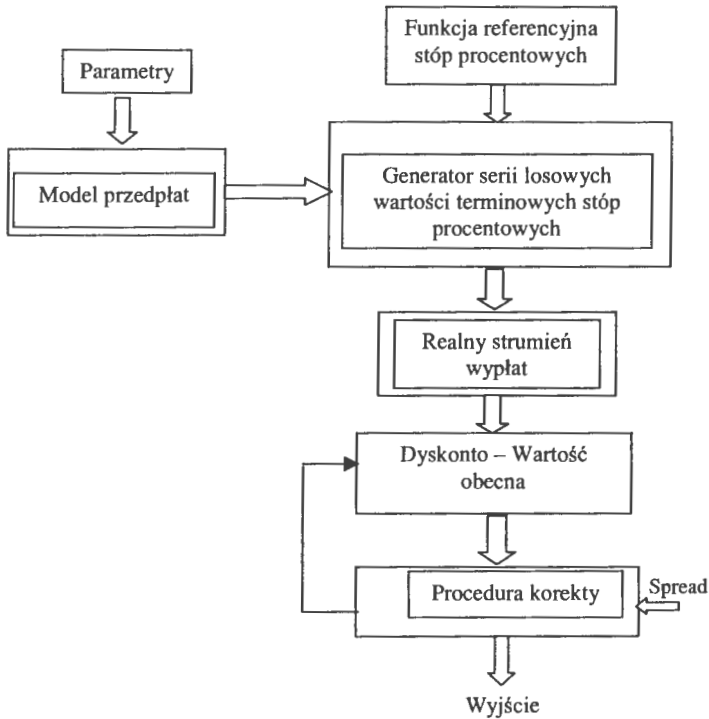
Wycena symulacyjna sprowadza się do wygenerowania pewnej liczby (rzędu 1000) trajektorii (trajektoria obejmuje cały okres do zapadalności, np. 30 lat) wartości miesięcznych terminowych stóp procentowych, które są normalizowane tak aby obliczona wartość obecna instrumentu była zgodna z rynkową wartością obecną, oraz aby spełnione były inne warunki właściwe dla papierów dłużnych (zerowa wartość zmienności w terminie zapadalności, zmierzanie dryfu do wieloletniej wartości przeciętnej itp.).

Każda trajektoria przedstawia roczne stopy terminowe w miesięcznych odstępach, dla całego okresu inwestycji. Stopy te, wraz z innymi parametrami, są wejściem do modelu przedpłat, z którego otrzymujemy realny strumień płatności, ważny dla danej trajektorii.

Wartość obecna instrumentu jest średnią z wartości dla poszczególnych trajektorii. Wartość obecną dla poszczególnych trajektorii otrzymujemy dyskontując płatności miesięczne miesięcznymi stopami terminowymi, które otrzymujemy w wyniku symulacji.

W razie potrzeby, wycena może być rozszerzona przez uwzględnienie dla potrzeb dyskonta stopy procentowej skorygowanej o tzw. spread, reprezentujący wartość, o którą inwestor chce zwiększyć swój oczekiwany dochód w stosunku do dochodu wolnego od ryzyka.

Uwzględnienie spreadu zwiększa nakład obliczeń, gdyż niezbędna jest wtedy nieliniowa procedura numeryczna dla rozwiązania nieliniowego zadania wyceny [8].



Rysunek 2.

Model może być użyty tak przy założeniu, że spread jest zadanym parametrem (model wyceny) jak i przy założeniu, że teoretyczna cena instrumentu jest znana (równa aktualnej cenie rynkowej), a naszym celem jest znalezienie wartości spreadu, która spełnia stosowne równości cen.

Model opiszemy w dwóch aspektach: ogólnym, który porządkuje pojęcia dotyczące stóp procentowych i modelu ich losowej dynamiki (procesy dyfuzyjne) i w aspekcie bardziej praktycznym, który uwypukla problemy realizacji procedury symulacyjnej Monte Carlo.

### **Funkcja referencyjna stóp procentowych (struktura terminowa)**

Stopa dochodu (zwrotu)  $y$  w terminu do zapadalności  $T$  jest dla obligacji kuponowej rozwiązaniem równania:

$$P(t, T) = \sum_{i=1}^T c_i (1+y)^{-t} + V (1+y)^{-T}$$

gdzie:

$c_t$  – kupon (wartość pieniężna) płacony i kapitalizowany  $m$  razy w roku,  
 $V$  – wartość nominalna obligacji,  
 $T$  – okres do zapadalności.

Dla obligacji zerokuponowej, cena i krzywa dochodowości, w funkcji  $T$ , mają zatem postać:

$$P(t, T) = \frac{V}{(1+y)^T} \quad \text{i} \quad y = \left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Dla kapitalizacji ciągłej, krzywą dochodowości w chwili  $t$  przedstawia wzór:

$$y(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$$

Chwilową stopę natychmiastową będziemy oznaczać zwykle przez  $r$  i jest to stopa, która obowiązuje obowiązuje od chwili bieżącej przez bardzo krótki czas  $dt$ . To samo oznaczenie będzie używane dla chwilowej stopy wolnej od ryzyka.

Pożyczka podjęta w chwili  $t$  i trwająca dowolnie krótki czas  $dt$  nie powinna umożliwiać arbitrażu, stąd:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right).$$

Stopa terminowa, zwykle oznaczana  $f(t, T)$  – obowiązuje od przyszłej chwili  $t$  do czasu  $T$ , ( $T \geq t$ ):

$$f(t, T) = \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}.$$

Oczywiście,  $r(t) = f(t, t)$ .

Cenę obligacji zerokuponowej i funkcję dochodowości można zatem wyrazić jak niżej:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right).$$

$$y(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds.$$

### Miesięczne terminowe stopy procentowe

Strumień wypłat jest dyskontowany stopami natychmiastowymi. Dla każdego terminu płatności obliczamy odpowiadającą mu stopę natychmiastową wykorzystując miesięczne stopy terminowe otrzymane w procesie symulacji losowej.

## Losowa dynamika stóp procentowych

W znanych modelach dynamiki stóp procentowych najczęściej zakłada się, że dyfuzja procesu  $f(t, T)$  jest procesem Itô względem  $n$ -wymiarowego ruchu Browna (w praktyce  $n = 2$  lub  $3$ , [4]). W naszym modelu dopuszczamy także inne klasy procesów losowych dla  $f(t, T)$ , ( $\alpha$ -stabilny proces Levy'ego, proces Poissona i ich kombinacje).

- Równanie stochastyczne Itô:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dB(s), \quad t \geq 0,$$

jego rozwiązaniem jest proces stochastyczny  $X = \{X(t) : t \in (0, \infty)\}$ , a  $a(t, x)$  i  $b(t, x)$  są funkcjami o odpowiednich własnościach, dla  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , nazywanymi dryfem (współczynnikiem unoszenia) i zmiennością (współczynnikiem rozproszenia).

- Równanie stochastyczne z miarą  $\alpha$ -stabilną ( $\alpha$ -stabilny proces Levy'ego):

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s-))dL_{\alpha, \beta}(s), \quad t \geq 0,$$

gdzie:  $\{L_{\alpha, \beta}(t) : t \in [0, \infty)\}$  oznacz tzw.  $\alpha$ -stabilny ruch Levy'ego z parametrami  $\alpha$  i  $\beta$ , a zapis  $X(s-)$  oznacza funkcję lewostronnie ciągłą, prawostronnie zbieżną. Rozkłady  $\alpha$ -stabilne należą do klasy rozkładów o „grubych ogonach” i wydają się rozkładami interesującymi dla naszych potrzeb. Równanie Itô jest przypadkiem szczególnym procesu Levy'ego.

Uwagi.

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład  $\alpha$ -stabilny (stabilny), tzn.  $X \square S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ , wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg  $Y_1, Y_2, \dots$  niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz istnieją dwa ciągi  $\{a_n\}$  i  $\{a_n\}$ , takie że  $\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + a_n}{a_n} \rightarrow X$ , przy czym zbieżność ma miejsce zgodnie z rozkładem ciągu zmiennych

losowych. Mamy tutaj zatem, do czynienia z ogólniejszą postacią centralnego twierdzenia granicznego. Zapis  $X \square S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$  oznacza, że zmienna losowa  $X$  pochodzi z rozkładu  $\alpha$ -stabilnego z parametrami:  $\alpha$  – parametr stabilności,  $\beta$  – parametr skośności,  $\mu$  – parametr przesunięcia i  $\sigma$  – parametr rozrzutu.

Procesem  $\alpha$ -stabilnym nazywany jest proces  $X = \{X(t) : t \in [0, T]\}$ , którego wszystkie rozkłady są wektorami  $\alpha$ -stabilnymi z ustaloną wartością parametru  $\alpha \in (0, 2]$  Proces Levy'ego jest bezpośrednim uogólnieniem procesu Browna. Skalarny proces stochastyczny  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  nazywany jest  $\alpha$ -stabilnym procesem Levy'ego, gdy:

$$X(0) = 0 \text{ z prawdopodobieństwem } 1, \\ \{X(t) : t \geq 0\} \text{ ma niezależne przyrosty,}$$

$$X(t) - X(s) \square S_{\alpha}((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0) \text{ dla dowolnych } 0 \leq s < t < \infty.$$

Ruch Browna jest szczególnym przypadkiem  $\alpha$ -stabilnego procesem Levy'ego.

- Stochastyczne równanie z miarami Gaussa i Poissona:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dB(s) \\ + \int_0^t c(s, X(s-))d\tilde{N}_{\lambda}(s), t \geq 0,$$

gdzie:  $\{\tilde{N}_\lambda(t) : t \in [0, \infty)\}$  oznacza skompensowany proces Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$ .

Niech,  $\pi = \{\pi(t) : t \in [0, \infty)\}$  oznacza punktowy proces poissonowski. Jeżeli  $N(t, U) = \{s < t : \pi(s) \in U\}$  oznacza losową miarę Poissona, to skompensowany proces Poissona zapisujemy:  $\tilde{N}_\lambda(t) = N_\lambda(t) - \lambda t$

Wymienione równania stochastyczne<sup>4</sup> można aproksymować i znajdować zadowalające rozwiązania przybliżone. Zwracamy szczególnie uwagę Czytelnika na pracę [2].

### Dyskretyzacja procesów

**Schemat dyskretyzacji EULERA [2,11]:**

$$S_{r,\sigma}^{(i)}(t_k), \text{ dla } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T; \quad \tau = T/M$$

$$S_{r,\sigma}^{(i)}(t_k) = S_{r,\sigma}^{(i)}(t_{k-1}) \times \left[ r(t_k - t_{k-1}) + \sigma \varepsilon_k^{(i)} \sqrt{t_k - t_{k-1}} \right], \text{ dla } k = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie:  $S_{r,\sigma}^{(i)}(t_0) = S_0$  - znana wartość początkowa, a  $\varepsilon_k^{(i)}$  są niezależnymi wartościami ze standardowego rozkładu normalnego  $N(0,1)$ .

Dyskretyzacja dla procesu Itô. Miarą losową dla przedziałów  $[t_{i-1}, t_i]$  jest:

$\Delta B_\tau^t = B(t_i) - B(t_{i-1}) = \sqrt{\tau} \zeta_i, \quad \zeta_i \sim N(0,1)$ . Ciąg aproksymacji dyskretnej przyjmie postać:

$$X_0^\tau = X_0$$

$$X_i^\tau = X_{i-1}^\tau + a(t_{i-1}, X_{i-1}^\tau) \tau + b(t_{i-1}, X_{i-1}^\tau) \sqrt{\tau} \zeta_i \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Dyskretyzacji dla procesu Levy'ego i Poissona dokonuje się podobnie [2].

## 4. Model HJM

Wieloczynnikowy model HJM (Heath, Jarrow, Morton, [1]) uważany jest za stosunkowo ogólny model opisu dynamiki stóp procentowych, który pozwala uwzględnić strukturę terminową dla zmienności. Zastosowanie tego modelu napotyka na trudności znajdowania rozwiązań analitycznych, gdy liczba czynników w modelu jest większa od dwóch i gdy proces stochastyczny nie jest procesem Gaussa. Zastosowanie symulacji losowej, np. symulacji Monte Carlo wydaje się nader uzasadnione.

Przyjmijmy podstawowe oznaczenia, które są wygodniejsze w przypadku wielowymiarowości:

$P(t, T)$ : Cena w chwili  $t$  obligacji zerokuponowej, która zapada w terminie  $T$  i która ma wartość nominalną 1.

- $W_t$ : Wektor przeszłych i bieżących wartości stóp procentowych i cen obligacji w chwili  $t$ , które mają wpływ na zmienność ceny obligacji w danej chwili  $t$ .
- $\sigma(t, T, W_t)$ : Zmienność ceny obligacji  $P(t, T)$ .
- $f(t, T_1, T_2)$ : Stopa terminowa w chwili  $t$ , dla przedziału czasu  $[T_1, T_2]$ .
- $f(t, T)$ : Chwilowa stopa terminowa w chwili  $t$ , dla kontraktu o terminie  $T$ .
- $r(t)$ : Wolna od ryzyka, chwilowa stopa procentowa w momencie  $t$ .
- $dB(t)$ : Proces losowy Itô, który opisuje dynamikę struktury stóp procentowych.

Uwagami na temat procesów losowych innych niż proces Itô zajmiemy się w dalszej części pracy.

### Wieloczynnikowy model HJM

Potraktujmy  $B(t) = (B_t^1, \dots, B_t^k)$  jako  $k$ -wymiarowy ( $k \geq 1$ ) ruch Browna,  $0 \leq t \leq T \leq \tau$ .

Jeżeli chwilowa stopa terminowa  $f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$  jest procesem Itô, to:

$$f(t, T) - f(0, T) = \int_0^t \alpha(v, T) dv + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, T) dB_v^i$$

gdzie: chwilowa stopa terminowa –  $\{f(0, T) : T \in [0, \tau]\}$ ,

$\alpha : \{(t, s) : 0 \leq t \leq s \leq T - \text{dryf} - \text{unoszenie}$ ,

$\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_k(t, T)) - \text{zmienność} - \text{rozproszenie}$ .

Zatem, chwilowa stopa procentowa  $r(t)$  przyjmuje postać:

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(v, t) dv + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, t) dB_v^i,$$

dla wszystkich  $t \in [0, \tau]$ .

Zasadnicze spostrzeżenie Autorów (HJM), który wiąże dryf ze zmiennościami (jeżeli wycena bezarbitrażowa, to nie występują ceny ryzyka rynkowego) zapiszemy w postaci (np. [7]):

$$\int_0^t \alpha(v, t) dv = -\sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, t) \gamma_i(v) dv + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, t) \int_v^t \sigma_i(v, y) dy dv,$$

gdzie:  $\gamma_i(t) = \gamma_i(t, S_1, \dots, S_k)$ , dla  $S_1, \dots, S_k \in (t, \tau]$  oraz  $t \in [0, S_1]$ .

W konkluzji, wzór na chwilową stopę terminową przyjmie postać:

$$f(t, T) = f(0, T) + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, T) \int_v^T \sigma_i(v, y) dy dv + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, T) d\bar{B}_v^i,$$

$$\bar{B}_v^i = B_v^i - \int_0^v \gamma_i(v, S_1, \dots, S_k) dv.$$

Chwilowa stopa procentowa przyjmie postać:

$$r(t) = f(0, t) + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, t) \int_v^T \sigma_i(v, y) dy dv + \sum_{i=1}^k \int_0^t \sigma_i(v, t) d\tilde{B}_v^i$$

Przyjmijmy, że rozważany proces losowy  $F(t, T)$  zależy od wielu niezależnych czynników.

$$df(t, T) = m(t, T, W_t) + \sum_{k=1}^K s_k(t, T, W_k) dw_k(t),$$

gdzie:  $m(t, T, W_t)$  jest chwilowym dryfem, a  $s_k(t, T, W_k)$  – chwilowym odchyleniem standardowym  $k$ -tego czynnika dla  $F(t, T)$ . Seria przekształceń podobnych do przywołanych w [10] dla przypadku jednoczynnikowego, prowadzi do wzoru dla dryfu:

$$m(t, T, W_t) = \sum_{k=1}^K s_k(t, T, W_t) \int_t^T s_k(t, \tau, W_t) d\tau.$$

Heath, Jarrow i Morton rozpatrywali dwuczynnikowy model dla logarytmiczno-normalnego rozkładu stopy terminowej:

$$df(t, T) = m(t, T, W_t) dt + \sigma_1(t, T) f(t, T) dw_1 + \sigma_2(t, T) f(t, T) dw_2.$$

Przy tej okazji warto zauważyć, że składnik  $\sigma_1(t, T) f(t, T) dw_1$  odpowiada najważniejszemu czynnikowi i jest odpowiedzialny, z grubsza, za równoległe przesunięcie krzywej. Składnik  $\sigma_2(t, T) f(t, T) dw_2$  odpowiada drugiemu najważniejszemu czynnikowi i pozwala uwzględnić przebiegię funkcji odpowiadające ruchowi stóp w przeciwnych kierunkach na początku i końcu krzywej.

Miyazaki i Yoshida w [4] zaproponowali trzyczynnikowy model HJM dla wyceny opcji na spread i podali rozwiązanie w postaci analitycznej. Ich stochastyczne równanie różniczkowe dla stopy terminowej ma postać:

$$df(t, T) = m(t, T) dt + \sigma_1 dw_1(t) + \sigma_2 e^{-a(T-t)} dw_2(t) + \sigma_3 e^{-b(T-t-\mu)^2} dw_3(t), 0 \leq t \leq T$$

gdzie:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, a$  i  $b$  są dodatnimi stałymi, a  $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$  są niezależnymi względem siebie procesami Wienera, dryf  $m(t, T), 0 \leq t \leq T$  spełnia określone warunki mierzalności i całkowalności. Parametr  $\mu$  zależy od innych parametrów modelu.

### Dyskretyzacja w modelu HJM

Nas interesować będzie wersja dyskretna (dyskretna oś czasu i dyskretna przestrzeń stanów) wieloczynnikowego modelu HJM. Dla prostoty zapisu przedstawiamy dyskretyzację jednoczynnikowego modelu:



$$df(t, j\Delta t, j\Delta t + \Delta t) = m_{i,j}dt + s_{i,j}dw$$

przy czym  $t = \Delta i$ .

$$m_{i,j} = \frac{W_{i,j+1}^2 - W_{i,j}^2}{2\Delta t},$$

$$s_{i,j} = \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{\Delta t}.$$

Ponieważ  $v_{i,i} = 0$ , to

$$\sum_{j=i}^h m_{i,j} = \frac{1}{2} \Delta t \left( \sum_{j=i}^h s_{i,j} \right)^2.$$

Kładąc  $h = i$  obliczymy  $m_{i,i}$  korzystając z wyrażenia na  $s_{i,i}$ , zaś przyjmując  $h = i + 1$  obliczymy  $m_{i,i+1}$  korzystając z  $m_{i,i}$ ,  $s_{i,i}$ , oraz  $s_{i,i+1}$ ; to postępowanie powtarzamy dla kolejnych wartości indeksów.

### Wartości wypłat

Wartość obecną wypłaty w miesiącu  $n$ , dla trajektorii o numerze  $i$  otrzymamy dyskontując tę wypłatę stopą z symulacji z dodanym do niej spreadem:

$$PV[S_n(i)] = \frac{S_n(i)}{[1 + f_n(i) + K]^{1/n}}$$

gdzie:

- $PV[S_n(i)]$  – wartość obecna wypłaty z miesiąca  $n$  dla trajektorii  $i$ ,
- $S_n(i)$  – wielkość wypłaty w miesiącu  $n$ , dla trajektorii  $i$ ,
- $f_n(i)$  – stopa terminowa z symulacji dla miesiąca  $n$  leżąca na trajektorii  $i$ ,
- $K$  – spread.

Wartość obecna dla trajektorii  $i$  wynosi:

$$PV[i] = \sum_{n=1}^N PV[S_n(i)].$$

Wartość obecna dla trajektorii  $i$  można traktować jak wartość teoretyczną instrumentu (LZ lub CMO), gdy przyjmiemy, że stopy tworzące trajektorię były zaobserwowane w rzeczywistości.

Zatem, cena teoretyczna instrumentu jest średnią po trajektoriach:

$$PV = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M PV(i).$$

## Komentarz

Przedstawiona koncepcja symulacyjnej wyceny instrumentów o przepływach zależnych ścieżkowo, wymaga kilku uwag. Po pierwsze, symulacja MC staje się uzasadniona jeżeli zważymy, że w przypadku modelu jednoczynnikowego, zastosowanie numeryki drzewa binarnego prowadzi do drzewa o  $2^N$  węzłach. Dla modelu dwuczynnikowego ta liczba będziemy mieć  $4^N$  węzłów itd. Potrzeby obliczeniowe dla symulacji MC związane z dyskretyzacją wielowymiarowych procesów stochastycznych mogą być także poważnym ograniczeniem. Odpowiedź na pytanie czy metoda jest przydatna dla praktyki musi dać eksperyment. Jego realizacja wymaga szeregu dodatkowych analiz i założeń dotyczących: dokładności aproksymacji, mechanizmu dopasowywania generowanych stóp, tak aby ceny zdyskontowane, na wyjściu modelu, były zgodne z obserwowanymi na rynku (kalibracja), ustalenia liczby czynników w modelu wielowymiarowym oraz sposobu wyboru wartości współczynników w modelu, które mają bezpośredni związek z kalibracją.

## Literatura:

1. Heath, D., R. Jarrow and A. Morton: Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates; A New Methodology. *Econometrica*, 60, I 1992, 77-105.
2. Janicki A. I A. Izydorczyk: Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym; Modele w finansach, technice i biologii. Algorytmy numeryczne. Symulacja i wizualizacja zjawisk losowych. WNT, Warszawa 2001.
3. Kang, P. and S. A. Zenios: Complete Prepayment models for Mortgage-Backed Securities. *Management Science*, vol. 38, No. 11, 1992, pp. 1665-1685.
4. Miyazaki, K and T. Yoshida: Valuation Model of Yield-Spread Options in the HJM Framework. *The Journal of Financial Engineering*, v. 7, No 2, 89-107.
5. Słomiński L.: Problemy modelowania obligacji hipotecznych. Raport IBS PAN Nr A20-53/98, Warszawa 1998.
6. The handbook of fixed income securities, Fourth Edition, F.J. Fabozzi and T. Dossa Fabozzi eds. Irwin Professional Publishing, 1995.
7. Weron, A. i R. Weron: Inżynieria finansowa. WNT, Warszawa 1998.
8. Zenios S.A.: Parallel Monte Carlo Simulation of Mortgage-Backed Securities. In: Financial Optimization. Cambridge University Press 1993, 325-343.
9. Zipkin P.: Mortgages and Markov Chains: A simplified Evaluation Model. In: Financial Optimization. Cambridge University Press 1993, 309-324.
10. Hull J.C.: Options, Futures and other Derivative Securities. Second Edition. Prentice Hall, New Jersey 2000.
11. Weron A. i Ł. J. Wojakowski: Metody numeryczne w modelowaniu finansowym. *Metoda Monte-Carlo*, Rynki Terminowe, Nr str.114-116.



