

Book Party

225/2002

Raport Badawczy

RB/42/2002

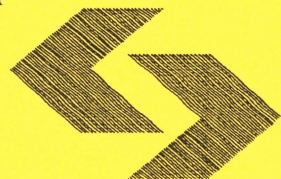
Research Report

**Analiza niezawodności
systemów wielostanowych**

J. Karpiński

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz

Warszawa 2002

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH PAN

Analiza niezawodności systemów wielostanowych

Kierownik zadania i wykonawca: prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński

Warszawa, grudzień 2002

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie	3
2. Podstawowe definicje i oznaczenia	4
2.1. Monotoniczne systemy wielostanowe i ich struktury	4
2.2. Reprezentacja binarna	6
2.3. Wskaźniki niezawodności	10
2.4. Założenia	14
3. Obliczanie wskaźników niezawodności	16
3.1. Wzory ogólne	16
3.2. Zasada substytucji	18
3.3. Suma rozłącznych iloczynów	22
3.4. Dekompozycja liniowa	23
4. Przykłady	25
5. Wnioski	35
6. Literatura	36

1. WPROWADZENIE

Podstawowym problemem w analizie niezawodności jest znalezienie sposobu wyrażenia charakterystyk niezawodnościowych systemu na podstawie znajomości wskaźników niezawodności jego elementów. Do tej pory opracowano wiele algorytmów służących do wyznaczania niezawodności dwustanowych koherentnych systemów [23, 45, 47]. Jednakże w praktyce inżynierskiej bardzo często zdarza się, że zarówno system, jak też jego elementy mogą przebywać w wielu stanach, począwszy od stanu pełnej zdatności aż po stan zupełnej niezdatności (uszkodzenia), na przykład, systemy energetyczne, systemy transportu publicznego, systemy produkcji i przesyłania ropy i gazu, systemy zaopatrzenia w wodę itp. W celu rozpatrywania takich zagadnień opracowano ogólną teorię, tzw. teorię monotonicznych systemów wielostanowych MMS (od angielskiego skrótu: *multistate monotone systems*). Opublikowano wiele prac poświęconych MMS i osiągnięto wiele interesujących rezultatów [1, 2, 5+9, 11+21, 24, 33+38, 40+44, 46].

W celu obliczania wskaźników typu *gotowość* dla MMS stosuje się następujące podejścia: metoda włączeń i wyłączeń [3,18,20,22,33,36,42], rozszerzony algorytm Abrahama [20], dekompozycja metodą Doulliez-Jamouille [3], dekompozycja Shannona [18,42,48] oraz metoda przeglądu stanów [3]. Niestety, bardzo mało uwagi poświęca się opracowywaniu praktycznych metod obliczania wskaźników częstotliwościowych. Metody przedstawione w niektórych publikacjach mają bardzo ogólny charakter i są trudne do zastosowań praktycznych [32, 36, 41]

Celem niniejszego opracowania jest pokazanie sposobów obliczania częstotliwościowych wskaźników dla systemów MMS z wykorzystaniem wymienionych wyżej metod, przy założeniu, że elementy rozpatrywanych systemów są stochastycznie niezależne.

Praca jest skonstruowana następująco. W rozdziale 2 przedstawiono podstawowe pojęcia terminologiczne i oznaczenia. W szczególności, przedstawiono w nim binarną reprezentację MMS oraz definicje wskaźników niezawodności MMS i ich elementów. Rozdział 3 zawiera główne rezultaty opracowania - wzory do obliczania wskaźników niezawodności MMS: ogólny wzór pseudo-wielomianowy (w

kilku szczególnych przypadkach), sumę rozłącznych wielowymiarowych kostek oraz wzór na dekompozycję liniową. Wzory te są uogólnieniem wzorów znanych z teorii monotonicznych systemów Rozdział 4 zawiera dwa przykłady tego, w jaki sposób uzyskane wyniki mogą być zastosowane w praktyce i jak MMS mogą być analizowane przy użyciu binarnych algorytmów. Podsumowanie zawarte jest w rozdziale 5.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE I OZNACZENIA

2.1. Monotoniczne systemy wielostanowe i ich struktury

Niech $\langle C, K_\varphi, K_1, K_2, \dots, K_n, \varphi \rangle$ będzie *systemem wielostanowym* składającym się z wielostanowych elementów $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \equiv \{1, 2, \dots, n\}$, gdzie $K_\varphi = \{0, \dots, M_\varphi\}$ jest *zbiorem stanów systemu*, $K_i = \{0, \dots, M_i\}$ jest *zbiorem stanów elementu c_i* , $i=1, \dots, n$, oraz $\varphi: K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n \rightarrow K_\varphi$ jest *strukturalną funkcją systemu*, $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in K_i, i=1, 2, \dots, n\}$.

Stan systemu (elementu c_i) określa rzeczywisty poziom działania, począwszy od stanu pełnej zdatności M_φ [M_i] aż do stanu zupełnego uszkodzenia oznaczanego liczbą 0. Stan elementu c_i jest reprezentowany zmienną X_i , przyjmującą wartości z K_i . Kombinacja stanów wszystkich elementów jest opisywana przez wektor *stanu elementów* $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\underline{X} \in V = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$, gdzie V oznacza *przestrzeń wektora stanu elementów*. Stan X_φ systemu jest w pełni określony przez stany elementów za pośrednictwem funkcji strukturalnej φ , tzn. $X_\varphi = \varphi(\underline{X})$.

Funkcja strukturalna $\varphi: V \rightarrow K_\varphi$ jest nazywana *monotoniczną*, jeśli φ jest niemalejąca ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego $i \in C$, jeśli $r < s$, $r, s \in K_i$, to $\varphi(r_i, \underline{x}) \leq \varphi(s_i, \underline{x})$ dla każdego $\underline{x} \in V$, lub równoważnie, jeśli $\underline{x} \leq \underline{y}$ implikuje $\varphi(\underline{x}) \leq \varphi(\underline{y})$ dla każdego $\underline{x}, \underline{y} \in V$.

Będziemy używać następujących oznaczeń:

$$(r_i, \underline{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n), r \in K_i,$$

$$(\cdot_i, \underline{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$\underline{x} \leq \underline{y} \text{ iff } x_i \leq y_i \text{ dla wszystkich } i \in C,$$

$$\underline{x} < \underline{y} \text{ iff } \underline{x} \leq \underline{y} \text{ i } x_i < y_i \text{ dla pewnych } i \in C.$$

System nazywamy *monotonicznym systemem wielostanowym* (MMS) [4, 27] jeśli jego funkcja strukturalna φ spełnia następujące warunki, gdzie $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ i $\underline{M} = (M_1, \dots, M_n)$:

- a) φ jest monotoniczna,
 b) $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$ i $\varphi(\underline{M}) = \underline{M}$.
- (2.1.1)

Warunek (a) oznacza, że pogorszenie stanu elementu nie może prowadzić do poprawienia stanu systemu i - odpowiednio - poprawienie stanu elementu nie może pogorszyć stanu systemu. Warunek (b) oznacza, że jeśli pełnemu uszkodzeniu ulegną wszystkie elementy systemu, to system też będzie w pełni uszkodzony i - odpowiedni - jeśli wszystkie elementy są w pełni zdadne, to system też jest w pełni zdalny. Będziemy rozpatrywać tylko systemy typu MMS. Ze względu na to, że znajomość funkcji strukturalnej jest równoważne ze znajomością systemu, często będziemy używać określenia "struktura φ " lub "system φ " zamiast "MMS ma funkcję strukturalną φ ". Będziemy też często pisać "i \in C" zamiast "c \in C".

Wektor \underline{y} nazywamy ścieżką poziomu j systemu MMS iff $\varphi(\underline{y}) \geq j$. Wektor ten jest minimalną ścieżką poziomu j jeśli dodatkowo $\underline{x} < \underline{y}$ implikuje $\varphi(\underline{x}) < j$.

Wektor \underline{z} nazywamy przekrojem poziomu j systemu MMS iff $\varphi(\underline{z}) < j$. Jest on minimalnym przekrojem poziomu j , jeśli dodatkowo $\underline{x} \geq \underline{z}$ implikuje $\varphi(\underline{x}) \geq j$.

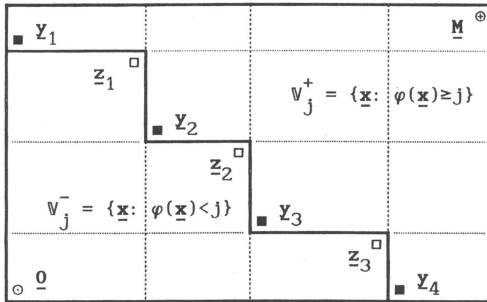
Wektor wszystkich minimalnych ścieżek poziomu j jest oznaczany przez $U_j(\varphi) = U_j$, oraz zbiór wszystkich minimalnych przekrojów poziomu j jest oznaczany przez $L_j(\varphi) = L_j$, gdzie $U_0 = \{\underline{0}\}$, $L_0 = \emptyset$. Z warunku (b) niniejszego punktu wynika, że U_j i L_j są niepuste dla $j=1, 2, \dots, M$.

Niech $V_j^+ = \{\underline{x} \in V: \varphi(\underline{x}) \geq j\}$ będzie zbiorem wszystkich ścieżek poziomu j oraz $V_j^- = \{\underline{x} \in V: \varphi(\underline{x}) < j\}$ niech oznacza zbiór wszystkich przekrojów poziomu j . Wtedy, z definicji U_j i L_j (patrz rys. 1),

$$V_j^+ = \bigcup_{\underline{y} \in U_j} [\underline{y}, \underline{M}], \quad V_j^- = \bigcup_{\underline{z} \in L_j} [\underline{0}, \underline{z}], \quad (2.1.2)$$

gdzie $[\underline{y}, \underline{M}] = \{\underline{x} \in V: \underline{y} \leq \underline{x} \leq \underline{M}\}$, $[\underline{0}, \underline{z}] = \{\underline{x} \in V: \underline{0} \leq \underline{x} \leq \underline{z}\}$.

Należy zauważyć, że zbiór wszystkich minimalnych ścieżek U_j i zbiór wszystkich minimalnych przekrojów L_j , $j=1, 2, \dots, M$, są ściśle wzajemnie powiązane w takim sensie, że U_j mogą być wyznaczone z L_j i odwrotnie.



$U_j = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ - minimalna ścieżka poziomu j

$L_j = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ - minimalny przekrój poziomu j

Rysunek 1. Podział przestrzeni V wektora stanu elementów.

2.2. Reprezentacja binarna

Niech I_r będzie wskaźnikiem poziomu, $I_r(k) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k \geq r \\ 0 & \text{jeśli } k < r \end{cases}$

Zdefiniujmy binarne zmienne $X_{ir} = I_r(X_i)$, $i \in C$, $r \geq 0$:

$$X_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_i \geq r \\ 0 & \text{jeśli } X_i < r \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Ze względu na to, że dla każdego ustalonego i , $1 \equiv X_{i0} \geq X_{i1} \geq \dots \geq X_{iM_i} \geq X_{i, M_i+1} \equiv 0$

i $X_i = \sum_{r=1}^{M_i} X_{ir}$, to binarne zmienne X_{ir} , $r \in K_i$, nie są algebraicznie niezależne.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\underline{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iM_i}),$$

$$\underline{X} = (X_{ir} : i \in C, r \in K_i - \{0\}) = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n).$$

Wektor \underline{X}_i nie przyjmuje wartości ze zbioru $\{0,1\}^{M_i} = \prod_{i=1}^{M_i} \{0,1\}$, lecz ze zbioru $E_i = \{\underline{e}_i(r) : r \in K_i\}$, gdzie

$$\underline{e}_i(r) = (e_{i,a}(r), a \in K_i - \{0\}), r \in K_i, \quad e_{i,a}(r) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a \leq r \\ 0 & \text{jeśli } a > r \end{cases} \quad \text{tzn.}$$

$$\underline{e}_i(0) = (0, 0, \dots, 0), \quad \underline{e}_i(r) = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), r > 0, \\ 1 \quad 2 \quad M_i \quad 1 \quad 2 \quad r \quad r+1 \quad M_i$$

i tym samym, wektor \underline{X} przyjmuje wartości z $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

Oczywiście,

$$X_i = r \quad \text{iff} \quad \underline{X}_i = \underline{e}_i(r) \quad \text{iff} \quad (X_{ir} = 1, X_{i,r+1} = 0) \quad (2.2.2)$$

$$r \leq X_i < s \quad \text{iff} \quad \underline{e}_i(r) \leq \underline{X}_i < \underline{e}_i(s) \quad \text{iff} \quad (X_{ir} = 1, X_{i,s} = 0), r < s, \quad (2.2.3)$$

Zachodzą ponadto następujące zależności, gdzie $\bar{a} = 1-a$, $a \vee b = \max(a,b)$ dla $a, b \in \{0,1\}$:

$$X_{ir} \cdot X_{is} = X_{i, \max(r,s)}, \quad \bar{X}_{ir} \cdot \bar{X}_{is} = \bar{X}_{i, \min(r,s)} \quad (2.2.4)$$

$$X_{ir} \vee X_{is} = X_{i, \min(r,s)}, \quad \bar{X}_{ir} \vee \bar{X}_{is} = \bar{X}_{i, \max(r,s)}, \quad (2.2.5)$$

$$X_{ir} \cdot \bar{X}_{is} = \begin{cases} X_{ir} - X_{is} & \text{dla } r < s \\ 0 & \text{dla } r \geq s \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Pokażemy, że φ może być przedstawiona za pomocą szeregu binarnych monotonicznych funkcji binarnych zmiennych X_{ir} . Zaczniemy od zdefiniowania binarnej funkcji φ_j , $j \in K_\varphi - \{0\}$, wskaźników poziomu systemu

$$\varphi_j(\underline{X}) = \bigvee_{y \in U_j} \prod_{\substack{i \in C \\ y_i > 0}} X_{iy_i} = 1 - \prod_{y \in U_j} \left(1 - \prod_{\substack{i \in C \\ y_i > 0}} X_{iy_i} \right) \quad (2.2.7)$$

Z (2.1.2) wynika, że $\varphi(\underline{X}) \geq j$ iff $\varphi_j(\mathcal{J}(\underline{X})) = 1$, gdzie $\mathcal{J}: W \rightarrow E$ jest bisekcją, $\mathcal{J}(\underline{X}) = (I_r(X_i): i \in C, r \in K_i - \{0\}) = \underline{X}$, tzn.

$$\varphi_j(\underline{X}) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \varphi(\underline{X}) \geq j \\ 0 & \text{jeśli } \varphi(\underline{X}) < j \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Wskaźniki poziomu systemu spełniają zależności $1 \geq \varphi_1 \geq \dots \geq \varphi_{M_\varphi} \geq 0$,

$\varphi(\underline{X}) = \sum_{j=1}^M \varphi_j(\underline{X}), \underline{X} = \mathcal{J}(\underline{X})$, a tym samym wyznaczają φ . Można ponadto zauważyć, że jeśli ψ jest funkcją $E \rightarrow \{0,1\}$ spełniającą zależność: $\varphi(\underline{X}) \geq j$ iff $\psi_j(\mathcal{J}(\underline{X}))=1$, to $\psi_j \equiv \varphi_j$. Oznacza to, że warunek (2.2.8) wyznacza φ_j jednoznacznie.

Z definicji minimalnej ścieżki poziomu j wynika, że (patrz 2.1.2))

$$\varphi_j(\underline{X}) = \prod_{\underline{z} \in L_j} \bigvee_{\substack{i \in C \\ z_i < M_i}} X_{i, z_i+1} = 1 - \bigvee_{\underline{z} \in L_j} \prod_{\substack{i \in C \\ z_i < M_i}} \bar{X}_{i, z_i+1}. \quad (2.2.9)$$

Zauważmy, że wiele zmiennych binarnych X_{ir} może być nieistotnych, tzn. może nie mieć wpływu na wartość funkcji φ_j . Definicje nieistotności (oraz istotności) zmiennych binarnych X_{ir} dla funkcji φ_j różnią się w szczegółach, w zależności od źródła ich pochodzenia.

Mówimy, że zmienna $X_{ir}, r \in K_i - \{0\}$, is *nieistotna dla funkcji φ_j* , jeśli $\varphi_j(0_{ir}, \underline{x}) = \varphi_j(1_{ir}, \underline{x})$ dla dowolnego $\underline{x} \in E$ takiego, że $(0_{ir}, \underline{x}) \in E$ i $(1_{ir}, \underline{x}) \in E$, gdzie

$$(a_{ir}, \underline{x}) = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{i-1}, (a_r, \underline{x}_i), \underline{x}_{i+1}, \dots, \underline{x}_n) = (X_{ks} : k \in C, 1 \leq s \leq M_k, X_{ir} = a),$$

$$(a_r, \underline{x}_i) = (X_{i1}, \dots, X_{i, r-1}, a, X_{i, r+1}, \dots, X_{iM_i}), a \in \{0,1\}.$$

W przeciwnym przypadku zmienna X_{ir} jest nazywana *istotną dla φ_j* .

Można wykazać, że zmienna $X_{ir}, r \in K_i - \{0\}$, jest istotna dla funkcji φ_j wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje $\underline{x} \in V$ takie, że $\varphi((r-1)_i, \underline{x}) < j \leq \varphi(r_i, \underline{x})$. Innymi słowami, zmienna X_{ir} jest istotna dla funkcji φ_j wtedy i tylko wtedy, kiedy stan r elementu c_i jest istotny dla poziomu j .

Niech $\{\underline{X}\}_{\text{relevant}}$ będzie zbiorem wszystkich zmiennych X_{ir} istotnych dla funkcji φ_j . Wtedy

$$\{\underline{X}\}_{\text{relevant}} = \{X_{iy_i} : i \in C, y_i > 0, y_i \in U_j\} = \{X_{i, z_i+1} : i \in C, z_i < M_i, \underline{z} \in L_j\}.$$

Funkcja φ_j może być zapisana w kilku ekwiwalentnych postaciach. W szczególności, zapisana w postaci korzystającej z minimalnych ścieżek (2.2.7) lub minimalnych przekrojów (2.2.9), może być przekształcona za pomocą prostych reguł algebraicznych, tożsamości boolowskich i wzorów

(2.2.4)+(2.2.6), w postaci liniową

$$\varphi_j(\underline{X}) = \beta_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k G_k(\underline{X}), \quad (2.2.10)$$

gdzie $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ - liczby całkowite,

$G_k(\underline{X})$ - iloczyn boolowski postaci:

$$G_k(\underline{X}) = \prod_{i \in C_k} X_{ir_i^k}, \quad (2.2.11)$$

gdzie $\emptyset \neq C_k \subseteq \mathbb{C}$ i $1 \leq r_i^k \leq M$ dla każdego $i \in C_k$.

Postać liniowa jest szczególnym przypadkiem ogólnej postaci pseudo-wielomianowej:

$$\varphi_j(\underline{X}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k B_k(\underline{X}), \quad (2.2.12)$$

gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ - liczby całkowite,

$B_k(\underline{X})$ - iloczyn boolowski postaci:

$$B_k(\underline{X}) = \prod_{i \in \mathbb{C}} X_{ia_i^k} \bar{X}_{ib_i^k} = \prod_{i \in C_k} X_{ia_i^k} \bar{X}_{ib_i^k}, \quad (2.2.13)$$

gdzie $0 \leq a_i^k < b_i^k \leq M_i + 1$ dla każdego $i \in \mathbb{C}$, $C_k = \{i \in \mathbb{C} : b_i^k - a_i^k \leq M_i\}$, $\prod_{i \in \emptyset} = 1$,

$X_{i0} \equiv 1$, $X_{i, M_i+1} \equiv 0$.

Jeśli $a_i^k = 0$ i $b_i^k = M_i + 1$ dla wszystkich $i \in \mathbb{C}$, to $C_k = \emptyset$ i $B_k(\underline{X}) \equiv 1$.

Wyrażenie (2.2.13) jest zapisane w bardzo skondensowanej formie i dlatego niekiedy pożyteczne jest dysponowanie bardziej bezpośrednią postacią.

Z kolei, zdefiniujemy zbiory indeksowe $C_k^+ = \{i \in \mathbb{C} : 0 < a_i^k < b_i^k = M_i + 1\}$, $C_k^- = \{i \in \mathbb{C} : 0 = a_i^k < b_i^k \leq M_i\}$, $C_k^{+-} = \{i \in \mathbb{C} : 0 < a_i^k < b_i^k \leq M_i\}$, które są parami rozłączne i $C_k^+ \cup C_k^- \cup C_k^{+-} = C_k \subseteq \mathbb{C}$. Możemy wtedy napisać

$$B_k(\underline{X}) = \left(\prod_{i \in C_k^+} X_{ia_k} \right) \left(\prod_{i \in C_k^-} \bar{X}_{ib_k} \right) \left(\prod_{i \in C_k^{+-}} X_{ia_k} \cdot \bar{X}_{ib_k} \right). \quad (2.2.14)$$

Stosując zasadę włączności i wyłączeń do (2.2.7) lub (2.2.9) otrzymujemy postaci *Poincaré* funkcji φ_j , które są szczególnymi przypadkami postaci pseudo-wielomianowej:

$$\varphi_j(\underline{X}) = \sum_{\substack{D \subseteq U_j \\ D \neq \emptyset}} (-1)^{|D|+1} \prod_{\substack{i \in C \\ u_i(D) \neq 0}} X_{i, u_i(D)}, \quad (2.2.15)$$

$$\varphi_j(\underline{X}) = 1 - \sum_{\substack{D \subseteq L_j \\ D \neq \emptyset}} (-1)^{|D|+1} \prod_{\substack{i \in C \\ d_i(D) \neq M_i}} \bar{X}_{i, d_i(D)+1}, \quad (2.2.16)$$

gdzie dla każdego $\emptyset \neq D \subseteq V$

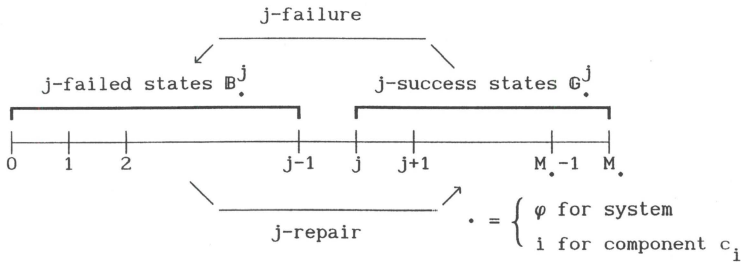
$$u_i(D) = \max\{x_i : \underline{x} \in D\}, \quad d_i(D) = \min\{x_i : \underline{x} \in D\}, \quad i \in C, \quad |D| = \text{card}(D).$$

2.3. Wskaźniki niezawodności

Proces stanu i -tego elementu c_i , $i \in C$, jest procesem stochastycznym $\{X_i(t)\}$, gdzie dla każdego ustalonego $t \geq 0$, $X_i(t)$ jest zmienną losową przyjmującą wartości z K_i i reprezentującą stan elementu c_i w chwili t . $\{\underline{X}(t)\} = \{(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))\}$, łączny proces stanu elementów wyrażony przez odpowiedni wektor. Proces stanu systemu jest procesem stochastycznym $\{X_\varphi(t)\}$, $X_\varphi(t) \in K_\varphi$, reprezentującym stan systemu jako funkcja zależna od czasu. Z definicji funkcji strukturalnej φ , dla każdego ustalonego t , $X_\varphi(t) = \varphi(\underline{X}(t))$ odpowiada stanowi systemu w chwili t przy założeniu, że wektor stanu elementów jest $\underline{X}(t)$.

Rozpatrzmy obiekt wielostanowy (system lub element) w przestrzeni stanów $K_\varphi = \{0, 1, \dots, M_\varphi\}$ i stochastyczny proces stanu $\{X_\varphi(t)\}$. W zapisie tym dowolna wielkość Ω_φ odnosi się do elementu c_i jeśli $\varphi = i$, lub do systemu, jeśli $\varphi = \varphi$.

Niech $j \in K, -\{0\}$ będzie pewnym ustalonym stanem obiektu. Mówimy, że obiekt jest uszkodzony na poziomie j , jeśli stan ten przyjmuje wartości mniejsze niż j ; w przeciwnym przypadku mówimy, że jest on w stanie poprawnego funkcjonowania na poziomie j . Niech $G_j^j = \{j, j+1, \dots, M_j\}$ oznacza podzbiór stanów poprawnego funkcjonowania na poziomie j i $B_j^j = \{0, 1, \dots, j-1\}$, podzbiór stanów uszkodzenia na poziomie j . Dowolne przejście ze stanu j do stanu niższego (tzn. przejście $G_j^j \rightarrow B_j^j$) nazywamy uszkodzeniem na poziomie j (lub krócej, j -uszkodzeniem), i każde przejście ze stanu $j-1$ w górę (tzn. przejście $B_j^j \rightarrow G_j^j$) nazywamy naprawą na poziomie j (lub krócej, j -naprawą) (patrz Rys. 2). W ten sposób wskaźniki niezawodności poziomu j obiektu mogą być zdefiniowane podobnie jak wskaźniki dla binarnego przypadku [23, 45, 47].



Rys. 2. Podział przestrzeni stanów na poziomie j .

Rozpatrzmy następujące wskaźniki niezawodności zależne od czasu (niestacjonarne) dla każdego poziomu $j \geq 1$ obiektu:

$$R_j(j, t) = \Pr\{X_j(t) \geq j\}, \text{ gotowość dla poziomu } j,$$

$$Q_j(j, t) = 1 - R_j(j, t), \text{ niegotowość dla poziomu } j,$$

$$F_j^-(j, t) = \text{Fr}\{G_j^j \xrightarrow{X_j} B_j^j, t\}, \text{ częstotliwość uszkodzeń dla poziomu } j,$$

$$F_j^+(j, t) = \text{Fr}\{B_j^j \xrightarrow{X_j} G_j^j, t\}, \text{ częstotliwość napraw dla poziomu } j.$$

W niniejszym opracowaniu $\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_j} B, t\}$ oznacza częstotliwość lub przejście ze zbioru stanów A do zbioru stanów B , w procesie działania $\{X_j(t)\}$, $A, B \subseteq K_j$,

$A \cap B = \emptyset$, i jest definiowane w następujący sposób. Niech $W_{\cdot}(A \rightarrow B, t)$ będzie oczekiwaną liczbą przejść procesu stanu $\{X_{\cdot}(t)\}$ z A do B w przedziale czasu $(0, t]$. W przypadku gdy $W_{\cdot}(A \rightarrow B, t)$ jest absolutnie ciągłe na $[0, \infty)$, to $\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, t\}$ jest gęstością $W_{\cdot}(A \rightarrow B, t)$, tzn. dla dowolnego $t > 0$:

$$W_{\cdot}(A \rightarrow B, t) = \int_0^t \text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, u\} du. \quad (2.3.1)$$

Z powyższego wynika, że $\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, t\} = \frac{d}{dt} W_{\cdot}(A \rightarrow B, t)$ prawie wszędzie w $[0, \infty)$. Średnią liczbę j -uszkodzeń i j -napraw obiektu będziemy oznaczać odpowiednio przez $W_{\cdot}^{-}(j, t)$ i $W_{\cdot}^{+}(j, t)$:

$$W_{\cdot}^{-}(j, t) = \int_0^t F_{\cdot}^{-}(j, u) du, \quad W_{\cdot}^{+}(j, t) = \int_0^t F_{\cdot}^{+}(j, u) du. \quad (2.3.2)$$

Będziemy także rozpatrywać stacjonarne lub graniczne charakterystyki obiektu:

$$R_{\cdot}(j, \infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Pr}\{X_{\cdot}(t) \geq j\}, \text{ stacjonarna gotowość dla poziomu } j,$$

$$Q_{\cdot}(j, \infty) = 1 - R_{\cdot}(j, \infty), \text{ stacjonarna niegotowość dla poziomu } j,$$

$$F_{\cdot}^{-}(j, \infty) = \text{Fr}\{C_{\cdot}^j \xrightarrow{X_{\cdot}} B_{\cdot}^j, \infty\}, \text{ stacjonarna częstotliwość uszkodzeń dla poziomu } j,$$

$$F_{\cdot}^{+}(j, \infty) = \text{Fr}\{B_{\cdot}^j \xrightarrow{X_{\cdot}} C_{\cdot}^j, \infty\}, \text{ stacjonarna częstotliwość napraw dla poziomu } j$$

Dla dowolnego $A, B \subseteq K_{\cdot}$, $A \cap B = \emptyset$, $\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, \infty\}$ jest definiowana w następujący sposób

$$\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, \infty\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} W_{\cdot}(A \rightarrow B, t) / t \quad (2.3.3)$$

(jeśli istnieje).

Zauważmy, że w stacjonarnym przypadku istnienie $\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, t\}$, $t \geq 0$, nie jest wymagane, tzn. nie jest wymagane, by funkcja $W_{\cdot}(A \rightarrow B, t)$ była absolutnie ciągła. Ale jeśli $\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_{\cdot}} B, t\}$ jest dobrze zdefiniowana i ma granicę przy $t \rightarrow +\infty$, to

$$\text{Fr}\{A \xrightarrow{X} B, \infty\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Fr}\{A \xrightarrow{X} B, t\}. \quad (2.3.4)$$

Odwrotne stwierdzenie nie zawsze jest prawdziwe.

Zuważmy też, że $|W_-(j, t) - W_+(j, t)| \leq 1$ dla każdego $j \in K_-\{0\}$ i $t \geq 0$. Dlatego

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W_-(j, t)/t = \lim_{t \rightarrow +\infty} W_+(j, t)/t, \quad (2.3.5)$$

i

$$F_-(j, \infty) = F_+(j, \infty) = F_+(j, \infty), \quad (2.3.6)$$

tzn. nie ma różnicy między stacjonarnymi częstotliwościami uszkodzeń i napraw dla poziomu j .

Obiekt jest nienaprawiany, jeśli proces stanu $\{X_+(t)\}$ jest nierosnący, $X_+(t) \geq X_+(s)$ dla $t < s$, tzn. nie są przeprowadzane żadne naprawy korekcyjne mogące poprawić stan obiektu.

Niech $\tau_+(j) = \inf\{t \geq 0: X_+(t) < j\}$ będzie (losowym) czasem do pierwszego uszkodzenia na poziomie j nienaprawianego obiektu, gdzie $\inf \emptyset = +\infty$. Zatem $R_+(j, t) = \Pr\{\tau_+(j) > t\}$ jest niezawodnością obiektu na poziomie j i $F_-(j, t) = -\frac{d}{dt} R_+(j, t)$ jest gęstością $\tau_+(j)$, $F_-(j, t)\Delta t \approx \Pr\{\tau_+(j) \in (t, t+\Delta t)\}$. MTF $_+(j)$, średni czas do pierwszego uszkodzenia obiektu na poziomie j , może być obliczony w zwykły sposób:

$$\text{MTFF}_+(j) = \int_0^{\infty} R_+(j, t) dt. \quad (2.3.7)$$

Oczywiście, w tym przypadku $F_-(j, t) \equiv 0$, $F_-(j, \infty) = F_+(j, \infty) = 0$, i jeśli $\Pr\{\tau_+(j) < \infty\} = 1$, to $R_+(j, \infty) = 0$.

System jest nienaprawiany, jeśli wszystkie jego elementy są nienaprawiane.

2.4. Założenia

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia ($i \in \mathbb{C}$, $r, s \in \mathbb{K}_i$, $r \neq s$):

$W_i^{rs}(t) = W_i(\{r\} \rightarrow \{s\}, t)$, oczekiwana liczba przejść elementu c_i ze stanu r do stanu s w przedziale $(0, t]$, $W_i^{rs}(0) = 0$,

$F_i^{rs}(t) = Fr\{\{r\} \xrightarrow{X_i} \{s\}, t\}$, częstotliwość przejść elementu c_i ze stanu r do stanu s w chwili t ,

$F_i^{rs}(\infty) = Fr\{\{r\} \xrightarrow{X_i} \{s\}, \infty\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} W_i^{rs}(t)/t$, stacjonarna częstotliwość przejść elementu c_i ze stanu r do stanu s ,

$p_{ir}(t) = Pr\{X_i(t)=r\}$, prawdopodobieństwo tego, że element c_i jest w stanie r w chwili t ,

$p_{ir}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ir}(t)$, graniczne prawdopodobieństwo tego, że element c_i jest w stanie r .

Oczywiście, dla dowolnego $k \in \mathbb{K}_i$,

$$R_i(k, t) = \sum_{r=k}^{M_i} p_{ir}(t), \quad R_i(0, t) = 1, \quad t \in [0, \infty], \quad (2.4.1)$$

$$Q_i(k, t) = \sum_{r=0}^{k-1} p_{ir}(t) = 1 - R_i(k, t), \quad Q_i(0, t) = 0, \quad t \in [0, \infty], \quad (2.4.2)$$

$$W_i^-(k, t) = \sum_{r=k}^{M_i} \sum_{s=0}^{k-1} W_i^{rs}(t), \quad W_i^+(k, t) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=k}^{M_i} W_i^{rs}(t), \quad t \in [0, \infty], \quad (2.4.3)$$

$$F_i^-(k, t) = \sum_{r=k}^{M_i} \sum_{s=0}^{k-1} F_i^{rs}(t), \quad F_i^+(k, t) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=k}^{M_i} F_i^{rs}(t), \quad t \in [0, \infty], \quad (2.4.4)$$

$$W_1^-(0, t) = W_1^+(0, t) = F_1^-(0, t) = F_1^+(0, t) = 0, \quad t \in [0, \infty]. \quad (2.4.5)$$

Przyjmijmy następujące ogólne założenia.

1. Procesy stanu $\{X_i(t)\}$, $i \in \mathbb{C}$, elementów są statystycznie niezależne.
2. $W_1^{rs}(t) < \infty$ dla dowolnego $t \in [0, \infty)$, $i \in \mathbb{C}$ i $r, s \in K_i$, $r \neq s$.

Dla przypadku niestacjonarnego założymy, że:

3. Dla dowolnego $i \in \mathbb{C}$ i $r, s \in K_i$, $r \neq s$, funkcje $W_1^{rs}(t)$ są absolutnie ciągłe na $[0, +\infty)$, co oznacza, że istnieją częstotliwości $F_1^{rs}(t)$:

$$W_1^{rs}(t) = \int_0^t F_1^{rs}(u) du. \quad (2.4.6)$$

Dla przypadku stacjonarnego założymy, że:

4. Dla dowolnego $i \in \mathbb{C}$ i $r, s \in K_i$, $r \neq s$, istnieją następujące granice:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W_1^{rs}(t)/t = F_1^{rs}(\infty) < \infty, \quad (2.4.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ir}(t) = p_{ir}(\infty). \quad (2.4.8)$$

Wniosek. Niezależność $\{X_i(t)\}$, $i \in \mathbb{C}$, implkuje niezależność wektora procesów $\{\underline{X}_i(t)\} = \{(X_{i1}(t), X_{i2}(t), \dots, X_{iM_i}(t))\}$, $i \in \mathbb{C}$, $X_{ir}(t) = I_r(X_i(t))$. W szczególności, dla dowolnego $r_i \in K_i$ binarne zmienne losowe $X_{ir_i}(t)$, $i \in \mathbb{C}$, są wzajemnie s-independent. Jednakże dla każdego ustalonego $i \in \mathbb{C}$, $X_{i1}(t)$, $X_{i2}(t)$, ..., $X_{iM_i}(t)$ są zależne, gdyż $X_{ir}(t) \geq X_{i,r+1}(t)$.

Jeśli $\{X_i(t)\}$ jest homogenicznym procesem Markowa z macierzą intensywności przejść $\underline{A}_i = [a_{i;r,s} : r, s \in K_i]$, to

$$F_1^{rs}(t) = p_{ir}(t) \cdot a_{i;r,s}, \quad (2.4.9)$$

$$p_{ir}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ir}(t), \quad F_1^{rs}(\infty) = p_{ir}(\infty) \cdot a_{i;r,s}. \quad (2.4.10)$$

Ponadto, jeśli $\{X_i(t)\}$ jest nieredukowalny, to prawdopodobieństwa $p_{ir}(\omega)$, $r \in K_i$ są jedynymi rozwiązaniami liniowych równań systemu $p_i \cdot \underline{A}_i = \underline{0}$, $p_i \cdot \underline{1} = 1$, gdzie $p_i = (p_{ir}(\omega): r \in K_i)$, $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1)$, $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

3. OBLICZANIE WSKAŹNIKÓW NIEZAWODNOŚCI

3.1. Wzory ogólne

Obecnie wyprowadzimy ogólne wzory dotyczące częstotliwości, zarówno zależnych od czasu, jak też stacjonarnych, $F_\varphi^+(j, t)$, $F_\varphi^-(j, t)$, $F_\varphi^+(j, \omega)$, $F_\varphi^-(j, \omega)$, gdzie $j \geq 1$ jest zadany stanem systemu.

Z założeń 1 - 3 wynika [29, pp.598], że dla dowolnego $t \in [0, \infty)$

$$W_\varphi^-(j, t) = \sum_{i \in C} \sum_{\substack{r, s \in K_i \\ r > s}} \int_0^t P(j, u | i: r, s) W_i^{rs}(du), \quad (3.1.1)$$

$$W_\varphi^+(j, t) = \sum_{i \in C} \sum_{\substack{r, s \in K_i \\ r < s}} \int_0^t P(j, u | i: s, r) W_i^{rs}(du), \quad (3.1.2)$$

gdzie $P(j, t | i: r, s) = \Pr\{\varphi(r_i, \underline{X}(t)) \geq j\} - \Pr\{\varphi(s_i, \underline{X}(t)) \geq j\}$, $r > s$, jest prawdopodobieństwem tego, że system w chwili t jest w takim stanie \underline{x} at, że

(a) przejście elementu c_i ze stanu r do stanu s doprowadzi system do uszkodzenia na poziomie j , lub równoważnie,

(b) Przejście elementu c_i ze stanu s do stanu r , spowoduje naprawę systemu do poziomu j ,

Oznacza to, że na podstawie (2.4.6) mamy

$$F_\varphi^-(j, t) = \sum_{i \in C} \sum_{\substack{r, s \in K_i \\ r > s}} P(j, t | i: r, s) F_i^{rs}(t). \quad (3.1.3)$$

$$F_{\varphi}^{+}(j, t) = \sum_{i \in \mathbb{C}} \sum_{\substack{r, s \in K_i \\ r < s}} P(j, t | i: s, r) F_i^{rs}(t), \quad (3.1.4)$$

Dzieląc (3.1.1) i (3.1.2) przez t i dążąc $t \rightarrow +\infty$, otrzymujemy [33]

$$F_{\varphi}^{-}(j, \omega) = \sum_{i \in \mathbb{C}} \sum_{\substack{r, s \in K_i \\ r > s}} P(j, \omega | i: r, s) F_i^{rs}(\omega), \quad (3.1.5)$$

$$F_{\varphi}^{+}(j, \omega) = \sum_{i \in \mathbb{C}} \sum_{\substack{r, s \in K_i \\ r < s}} P(j, \omega | i: s, r) F_i^{rs}(\omega), \quad (3.1.6)$$

gdzie $P(j, \omega | i: r, s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(j, t | i: r, s)$.

Zauważmy, że ze względu na to, iż $|W_{\varphi}^{+}(j, t) - W_{\varphi}^{-}(j, t)| \leq 1$, mamy $F_{\varphi}^{+}(j, \omega) = F_{\varphi}^{-}(j, \omega)$.

Z kolei, jest oczywistym, że dla $t \in [0, \omega]$

$$R_{\varphi}(j, t) = \sum_{\underline{x} \in V_j^{+}} \prod_{i \in \mathbb{C}} p_{ix_i}(t), \quad Q_{\varphi}(j, t) = \sum_{\underline{x} \in V_j^{-}} \prod_{i \in \mathbb{C}} p_{ix_i}(t), \quad (3.1.7)$$

gdzie $V_j^{+} = \{\underline{x} \in V: \varphi(\underline{x}) \geq j\}$, $V_j^{-} = \{\underline{x} \in V: \varphi(\underline{x}) < j\}$.

Inne miary niezawodności związane z $R_{\varphi}(j, \omega)$ i $F_{\varphi}(j, \omega) = F_{\varphi}^{+}(j, \omega) = F_{\varphi}^{-}(j, \omega)$ są następujące:

$MUT_{\varphi}(j) = R_{\varphi}(j, \omega) / F_{\varphi}(j, \omega)$ - średni czas powyżej poziomu j systemu (*mean up time to the level j of the system*), tzn. średni czas, przez który system przebywa w stanach nie gorszych niż poziom $j \geq 1$,

$MDT_{\varphi}(j) = Q_{\varphi}(j, \omega) / F_{\varphi}(j, \omega)$ - średni czas poniżej poziomu j systemu (*mean down time to the level j of the system*), tzn. średni czas, przez który system przebywa w stanach gorszych niż poziom $j \geq 1$.

Jeśli system jest nienaprawiany, to $R_{\varphi}(j, t) = W_{\varphi}^{-}(j, t)$, $t \in [0, \omega]$, jest niezawodnością systemu na poziomie j , $F_{\varphi}^{-}(j, t) = -\frac{d}{dt} R_{\varphi}(j, t)$ jest gęstością

prawdopodobieństwa czasu do pierwszego uszkodzenia systemu na poziomie j i $F_{\varphi}^{+}(j, t) \equiv 0$.

Wniosek 1. Wzory (3.1.1) i (3.1.2) są szczególnymi przypadkami ogólnych zależności udowodnionych w [32, pp.597, (8)]. Wzory (3.1.3) i (3.1.4) są szczególnymi przypadkami z [32, pp.598, (10)].

W następujących częściach niniejszego opracowania pokażemy, jak wskaźniki niezawodności systemu wielostanowego mogą być wyznaczane za pomocą binarnej reprezentacji struktury φ .

3.2. Zasada substytucji

Niech $j \geq 1$ będzie dowolnym ustalonym poziomem systemu. Ponieważ dla wszystkich $r \in K_1$, na podstawie (2.2.2),

$$\varphi(r, \underline{X}) \geq j \text{ iff } \varphi_j(\underline{e}_1(r), \underline{X}) = 1, \quad (3.2.1)$$

gdzie $(\underline{e}_1(r), \underline{X}) = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_{i-1}, \underline{e}_1(r), \underline{X}_{i+1}, \dots, \underline{X}_n)$,

możemy napisać równości (3.1.3) + (3.1.6) w postaci

$$F_{\varphi}^{-}(j) = \sum_{i \in C} \sum_{\substack{r, s \in K_1 \\ r > s}} E[\varphi_j(\underline{e}_1(r), \underline{X}) - \varphi_j(\underline{e}_1(s), \underline{X})] \cdot F_1^{rS}, \quad (3.2.2)$$

$$F_{\varphi}^{+}(j) = \sum_{i \in C} \sum_{\substack{r, s \in K_1 \\ r < s}} E[\varphi_j(\underline{e}_1(s), \underline{X}) - \varphi_j(\underline{e}_1(r), \underline{X})] \cdot F_1^{rS}. \quad (3.2.3)$$

Ponadto, ze względu na to, że $\varphi(\underline{X}) \geq j$ iff $\varphi_j(\underline{X}) = 1$, i $\varphi(\underline{X}) < j$ iff $\varphi_j(\underline{X}) = 0$, mamy

$$R_{\varphi}(j) = E[\varphi_j(\underline{X})], \quad Q_{\varphi}(j) = 1 - E[\varphi_j(\underline{X})]. \quad (3.2.4)$$

Niech φ_j będzie dana w ogólnej pseudo-wielomianowej postaci (2.1.12), $0 < j \leq M_{\varphi}$.

Wtedy

$$R_{\varphi}(j) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \prod_{i \in \mathbb{C}_k} (R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)), \quad (3.2.5)$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(j) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{r \in \mathbb{C}_k} (F_r^{\pm}(a_r^k) - F_r^{\pm}(b_r^k)) \prod_{\substack{i \in \mathbb{C}_k \\ i \neq r}} (R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)), \quad (3.2.6)$$

gdzie znak '\$\pm\$' stawiany jest zamiast '\$+\$' lub '\$-\$', i \$F_i^{\pm}(0) = F_i^{\pm}(M_i+1) = 0\$, \$R_i(M_i+1) = 0\$, \$R_i(0) = 1\$.

Zauważmy, że dla wszystkich \$r < s\$, \$r, s \in \mathbb{K}_i \cup \{M_i+1\}\$,

$$R_i(r) - R_i(s) = \Pr\{r \leq X_i \leq s-1\}, \quad (3.2.7)$$

$$F_i^-(r) - F_i^-(s) = \text{Fr}\{[r, s-1] \xrightarrow{X_i} [0, r-1]\} - \text{Fr}\{[s, M_i] \xrightarrow{X_i} [r, s-1]\}, \quad (3.2.8)$$

$$F_i^+(r) - F_i^+(s) = \text{Fr}\{[0, r-1] \xrightarrow{X_i} [r, s-1]\} - \text{Fr}\{[r, s-1] \xrightarrow{X_i} [s, M_i]\}, \quad (3.2.9)$$

gdzie \$[0, -1] \equiv [M_i+1, M_i] \equiv \emptyset\$, \$\text{Fr}\{A \xrightarrow{X_i} B\} \equiv 0\$ for \$A = \emptyset\$ or \$B = \emptyset\$.

W takim razie rozsądnie jest założyć (i od tego miejsca tak zrobimy), że

$$\begin{aligned} \text{jeśli } R_i(r) - R_i(s) = 0, \text{ to } F_i^{\pm}(r) - F_i^{\pm}(s) = 0 \quad (3.2.10) \\ \text{dla wszystkich } 0 \leq r < s \leq M_i+1, i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Zatem, kładąc \$a/0 \equiv 0\$ dla dowolnego \$a\$, (3.2.6) możemy napisać w postaci

$$F_{\varphi}^{\pm}(j) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \prod_{i \in \mathbb{C}_k} (R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)) \sum_{i \in \mathbb{C}_k} \frac{F_i^{\pm}(a_i^k) - F_i^{\pm}(b_i^k)}{R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)}, \quad (3.2.11)$$

lub, stosując (2.1.14), w postaci

$$F_{\varphi}^{\pm}(j) = \sum_{k=1}^m \alpha_k B_k(\underline{R}) F^{\pm}(j, B_k), \quad (3.2.12)$$

gdzie $\underline{R} = (R_i(r) : i \in \mathbb{C}, r \in K_i - \{0\})$,

$$B_k(\underline{R}) = \left(\prod_{i \in \mathbb{C}_k^+} R_i(a_i^k) \right) \left(\prod_{i \in \mathbb{C}_k^-} Q_i(b_i^k) \right) \left(\prod_{i \in \mathbb{C}_k^{+-}} (R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)) \right), \quad (3.2.13)$$

$$F^{\pm}(j, B_k) = \sum_{i \in \mathbb{C}_k^+} \frac{F_i^{\pm}(a_i^k)}{R_i(a_i^k)} - \sum_{i \in \mathbb{C}_k^-} \frac{F_i^{\pm}(b_i^k)}{Q_i(b_i^k)} + \sum_{i \in \mathbb{C}_k^{+-}} \frac{F_i^{\pm}(a_i^k) - F_i^{\pm}(b_i^k)}{R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)}. \quad (3.2.14)$$

Zdefiniujmy teraz tak zwane pseudo-intensywności:

$$\lambda_i^{\pm}(r) = \begin{cases} \frac{F_i^{\pm}(r)}{R_i(r)} & \text{jeśli } R_i(r) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } R_i(r) = 0, \end{cases} \quad \mu_i^{\pm}(r) = \begin{cases} \frac{F_i^{\pm}(r)}{Q_i(r)} & \text{jeśli } Q_i(r) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } Q_i(r) = 0. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Zauważmy, że w przypadku stacjonarym $\lambda_i^-(r) = \lambda_i^+(r) = 1/MUT_i(r)$, $\mu_i^-(s) = \mu_i^+(s) = 1/MDT_i(r)$, gdzie $MUT_i(r)$ [$MDT_i(r)$] jest średnim czasem powyżej [poniżej] poziomu r elementu c_i . Przy tych oznaczeniach wzór (3.2.14) może być napisany w postaci

$$F^{\pm}(j, B_k) = \sum_{i \in \mathbb{C}_k^+} \lambda_i^{\pm}(a_i^k) - \sum_{i \in \mathbb{C}_k^-} \mu_i^{\pm}(b_i^k) + \sum_{i \in \mathbb{C}_k^{+-}} \frac{F_i^{\pm}(a_i^k) - F_i^{\pm}(b_i^k)}{R_i(a_i^k) - R_i(b_i^k)}. \quad (3.2.16)$$

Wzory (3.2.6), (3.2.11) i (3.2.12), które wydają się być nowymi, wyrażają tzw. zasadę substytucji i są uogólnieniem zasady substytucji otrzymanej dla binarnych systemów koherentnych [23, 45] (patrz Przykład 4.1). Te wzory, w przeciwieństwie do ogólnych wzorów (3.1.3) i (3.1.4), mają bardzo przyjemną

własność, że na "wejściu" i na "wyjściu" są tego samego typu wielkości: gotowości i częstotliwości dla odpowiednich poziomów. Ta cecha czyni te wzory użytecznymi w ocenie niezawodności złożonych systemów za pomocą techniki dekompozycji modularnej (w [16, 19, 22] zamieszczone są definicje dekompozycji modularnej MMS).

Zwróćmy uwagę na podobieństwo wzoru (3.2.12), z $F^{\pm}(j, B_k)$ wyrażoną przez (3.2.16), do odpowiednich wzorów dla przypadku binarnego, szczególnie gdy $C_k^{+-} = \emptyset$.

Stosując (3.2.5) i (3.2.12) do wzorów Poincaré (2.2.15) i (2.2.16), otrzymamy uogólnienie na przypadek wielowymiarowy wzorów otrzymanych na podstawie metody włączeń i wyłączeń w teorii systemów binarnych [23, 45]:

$$R_{\varphi}(j) = \sum_{\substack{D \subseteq U_j \\ D \neq \emptyset}} (-1)^{|D|+1} \prod_{\substack{i \in C \\ u_i(D) \neq 0}} R_i(u_i(D)), \quad (3.2.17)$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(j) = \sum_{\substack{D \subseteq U_j \\ D \neq \emptyset}} (-1)^{|D|+1} \left(\prod_{\substack{i \in C \\ u_i(D) \neq 0}} R_i(u_i(D)) \right) \left(\sum_{\substack{i \in C \\ u_i(D) \neq 0}} \lambda_i^{\pm}(u_i(D)) \right), \quad (3.2.18)$$

$$Q_{\varphi}(j) = \sum_{\substack{D \subseteq L_j \\ D \neq \emptyset}} (-1)^{|D|+1} \prod_{\substack{i \in C \\ d_i(D) \neq M_i}} Q_i(d_i(D)+1), \quad (3.2.19)$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(j) = \sum_{\substack{D \subseteq L_j \\ D \neq \emptyset}} (-1)^{|D|+1} \left(\prod_{\substack{i \in C \\ d_i(D) \neq M_i}} Q_i(d_i(D)+1) \right) \left(\sum_{\substack{i \in C \\ d_i(D) \neq M_i}} \mu_i^{\pm}(u_i(D)+1) \right). \quad (3.2.20)$$

gdzie dla dowolnego $\emptyset \neq D \subseteq V$

$$u_i(D) = \max\{x_i : \underline{x} \in D\}, \quad d_i(D) = \min\{x_i : \underline{x} \in D\}, \quad i \in C, \quad |D| = \text{card}(D).$$

3.3. Suma rozłącznych iloczynów

Rozpatrzmy obecnie metodę oceny niezawodności bazującą na podziale zbioru $V_j^+ = \{\underline{x} \in V: \varphi(\underline{x}) \geq j\}$ lub jego dopełnienia $V_j^- = \{\underline{x} \in V: \varphi(\underline{x}) < j\}$ na rozłączne wielowymiarowe kostki. Niech $C_1, C_2, \dots, C_m, [D_1, D_2, \dots, D_{m'}]$ będą niepustymi i parami rozłącznymi sześcianami, takimi, że

$$V_j^+ = \bigcup_{k=1}^m C_k, \quad V_j^- = \bigcup_{k=1}^{m'} D_k, \quad (3.3.1)$$

gdzie $C_k = \{\underline{x} \in V: \underline{a}^k \leq \underline{x} \leq \underline{b}^k\}$, $D_k = \{\underline{x} \in V: \underline{c}^k \leq \underline{x} \leq \underline{d}^k\}$, $\underline{a}^k \leq \underline{b}^k$, $\underline{c}^k \leq \underline{d}^k$, $\underline{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$.

Taki podział można uzyskać za pomocą jednego z dwu algorytmów opracowanych przez Avena [3] lub Abrahama, rozszerzonych na przypadek wielostanowy.

Dla dowolnej kostki $P = [\underline{a}, \underline{b}] = \{\underline{x} \in V: \underline{a} \leq \underline{x} \leq \underline{b}\}$, $\underline{a} \leq \underline{b}$, zdefiniujemy iloczyn boolowski:

$$B_P(\underline{X}) = \prod_{i \in C} X_{ia_i} \bar{X}_{i, b_i + 1} = \prod_{i \in C_P} X_{ia_i} \bar{X}_{i, b_i + 1}, \quad (3.3.2)$$

gdzie $C_P = \{i \in C: b_i - a_i < M_i\}$.

Z (3.3.1) i (3.3.2) wynika, że

$$\varphi_j(\underline{X}) = \sum_{k=1}^m B_{C_k}(\underline{X}), \quad \varphi_j(\underline{X}) = 1 - \sum_{k=1}^{m'} B_{D_k}(\underline{X}) \quad (3.3.3)$$

jest inną reprezentacją φ_j , nazywaną *sumą rozłącznych iloczynów*, i jest ona szczególnym przypadkiem postaci pseudowielomianowej. Wyznaczenie $R_\varphi(j)$ oraz $F_\varphi^\pm(j)$ można przeprowadzić przez bezpośrednie zastosowanie zasady substytucji.

3.4. Dekompozycja liniowa

Dekompozycja (faktoryzacja) liniowa jest bardzo efektywnym narzędziem stosowanym do oceny niezawodności systemów binarnych, szczególnie sieci i drzew uszkodzeń [23, 45]. Obecnie zaprezentujemy uogólnienie dekompozycji liniowej na przypadek wielostanowy.

Niech $\varphi^{(i,r)}(\underline{X}) = \varphi(r_i, \underline{X})$ będzie funkcją strukturalną systemu z elementem c_i będącym stale w stanie $r \in K_i$. Chociaż funkcja nie zależy od X_i , traktujemy ją, dla wygody oznaczeń, jako funkcję wszystkich n zmiennych X_1, \dots, X_n .

Niech $\varphi_j^{(i,r)}$ będzie indykátorem poziomu systemu "zredukowanej" struktury $\varphi^{(i,r)}$, tzn.

$$\varphi_j^{(i,r)}(\underline{X}) = \varphi_j(\underline{e}_i(r), \underline{X}), \quad (3.4.1)$$

gdzie $(\underline{e}_i(r), \underline{X}) = (\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_{i-1}, \underline{e}_i(r), \underline{X}_{i+1}, \dots, \underline{X}_n)$, $\underline{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iM_i})$.

Oczywiście, i -te zmienne \underline{X}_i nie wpływają na $\varphi_j^{(i,r)}$.

Zauważmy, że $\varphi^{(i,r)}(\underline{0}) = \varphi(r_i, \underline{0})$ oraz $\varphi^{(i,r)}(\underline{M}) = \varphi(r_i, \underline{M})$, a więc funkcja strukturalna $\varphi^{(i,r)}$, w ogólnym przypadku, nie spełnia warunku (b) w (2.1.1), konkretnie $\varphi^{(i,r)}$ przyjmuje wartości ze zbioru $K_\varphi^{(i,r)} = \{\varphi(r_i, \underline{0}), \dots, \varphi(r_i, \underline{M})\}$. Pomimo tego, wszystkie wzory dotyczące obliczania wskaźników niezawodności są poprawne.

Następujące relacje, zwane dekompozycją liniową funkcji φ i φ_j ze względu na element c_i , są dobrze znane [6, 16, 18]

$$\varphi(\underline{X}) = \sum_{r \in K_i} I_{\{X_i=r\}} \varphi^{(i,r)}(\underline{X}), \quad (3.4.2)$$

$$\varphi_j(\underline{X}) = \sum_{r \in K_i} (X_{ir} - X_{i,r+1}) \cdot \varphi_j^{(i,r)}(\underline{X}), \quad (3.4.3)$$

gdzie $I_{\{X_i=r\}} = 1$ if $X_i=r$, $=0$ if $X_i \neq r$.

Parametry niezawodnościowe struktury $\varphi^{(i,r)}$ będziemy oznaczać przez $R_{\varphi}(j|i,r) = R_{\varphi}^{(i,r)}(j)$ i $F_{\varphi}^{\pm}(j|i,r) = F_{\varphi}^{\pm(i,r)}(j)$. Jeśli $\varphi_j^{(i,r)}$ jest zdegenerowana, tzn. $\varphi_j^{(i,r)} \equiv 1$, lub $\varphi_j^{(i,r)} \equiv 0$, to nie ma przejścia w zredukowanej strukturze $\varphi^{(i,r)}$ między zbiorami $\{0, \dots, j-1\}$ i $\{j, \dots, M_{\varphi}\}$, a zatem $R_{\varphi}(j|i,r) \equiv \varphi_j^{(i,r)}$ and $F_{\varphi}^{\pm}(j|i,r) \equiv 0$.

Analogicznie jak dla systemów binarnych, zachodzą następujące równości dla dowolnych $i \in \mathbb{C}$ i $0 < j \leq M_{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi}(j) &= \sum_{r \in K_i} (R_1(r) - R_1(r+1)) \cdot R_{\varphi}(j|i,r) \\
 &= Q_i(1) \cdot R_{\varphi}(j|i,0) + \sum_{r=1}^{M_i-1} (R_1(r) - R_1(r+1)) \cdot R_{\varphi}(j|i,r) \\
 &\quad + R_1(M_i) \cdot R_{\varphi}(j|i, M_i), \tag{3.4.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\varphi}^{\pm}(j) &= \sum_{r \in K_i} \left([R_{\varphi}(j|i,r) - R_{\varphi}(j|i,r-1)] F_i^{\pm}(r) + [R_1(r) - R_1(r+1)] F_{\varphi}^{\pm}(j|i,r) \right) \\
 &= Q_i(1) F_{\varphi}^{\pm}(j|i,0) \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{M_i-1} \left([R_{\varphi}(j|i,r) - R_{\varphi}(j|i,r-1)] F_i^{\pm}(r) + [R_1(r) - R_1(r+1)] F_{\varphi}^{\pm}(j|i,r) \right) \\
 &\quad + [R_{\varphi}(j|i, M_i) - R_{\varphi}(j|i, M_i-1)] F_i^{\pm}(M_i) + R_1(M_i) F_{\varphi}^{\pm}(j|i, M_i), \tag{3.4.5}
 \end{aligned}$$

gdzie $R_{\varphi}(j|i, -1) \equiv 0$

W przypadku systemów binarnych wzory (3.4.4) oraz (3.4.5) redukują się do dobrze znanych równości [23, 47]

$$R_{\varphi} = Q_i \cdot R_{\varphi}(X_i=0) + R_i \cdot R_{\varphi}(X_i=1),$$

$$F_{\varphi}^{\pm} = Q_i \cdot F_{\varphi}^{\pm}(X_i=0) + (R_{\varphi}(X_i=1) \cdot R_{\varphi}(X_i=0)) \cdot F_i^{\pm} + R_i \cdot F_{\varphi}^{\pm}(X_i=1).$$

4. PRZYKŁADY

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione dwa przykłady zastosowania metod boolowskich do oceny niezawodności monotonicznych systemów wielostanowych (MMS). Ograniczymy się do rozpatrzenia jedynie poziomu systemu $j=1$. Obliczenia dla innych poziomów systemu są podobne.

Przykład 4.1: metoda substytucji i metoda sumy rozłącznych iloczynów

Rozpatrzmy MMS $\langle \mathbb{C}, \mathbb{K}_{\varphi}, \mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \varphi \rangle$: $\mathbb{C} = \{c_1, c_2\}$, $\mathbb{K}_{\varphi} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathbb{K}_1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathbb{K}_2 = \{0, 1, 2\}$, z funkcją strukturalną φ daną przez przez wartości tablicy (Rys. 3).

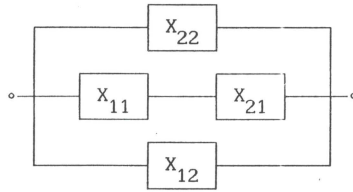
X_2	2	1	2	3	3
	1	0	1	2	2
	0	0	0	1	1
	φ	0	1	2	3
	} X_1				

Rysunek 3. Tablica wartości funkcji φ do Przykładu 4.1.

Z tablicy wynika, że zbiór minimalnych ścieżek dla poziomu 1 jest następujący: $U_1 = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$, a zatem z (2.2.7)

$$\varphi_1 = X_{22} \vee X_{11} X_{21} \vee X_{12} \quad (4.1)$$

(patrz Rys. 4).



Rysunek 4. Schemat blokowy dla φ_1 .

Na podstawie metody włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\varphi_1 = X_{22} + X_{11}X_{21} + X_{12} - X_{22}X_{11}X_{21} - X_{22}X_{12} - X_{11}X_{21}X_{12} + X_{22}X_{11}X_{21}X_{12}$$

(z tego, że $X_{ir} \cdot X_{is} = X_{i, \max(r,s)}$)

$$= X_{22} + X_{11}X_{21} + X_{12} - X_{11}X_{22} - X_{12}X_{22} - X_{12}X_{21} + X_{12}X_{22}$$

$$= X_{22} + X_{11}X_{21} + X_{12} - X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} \quad (4.2)$$

$$= \bar{X}_{11}X_{22} + X_{11}X_{21} + X_{12}\bar{X}_{21} \quad (4.3)$$

$$= X_{22} + X_{11}X_{21}\bar{X}_{22} + X_{12}\bar{X}_{21}. \quad (4.4)$$

Na podstawie metody substytucji (3.2.5) dla $R_\varphi(j)$ mamy

$$R_\varphi(1) = R_2(2) + R_1(1)R_2(1) + R_1(2) - R_1(1)R_2(2) - R_1(2)R_2(1) \quad (4.2a)$$

$$= Q_1(1)R_2(2) + R_1(1)R_2(1) + R_1(2)Q_2(1) \quad (4.3a)$$

$$= R_2(2) + R_1(1)(R_2(1) - R_2(2)) + R_1(2)Q_2(1). \quad (4.4a)$$

Z metody substytucji (3.2.12) dla $F_\varphi^\pm(j)$ otrzymujemy

$$F_\varphi^\pm(1) = F_2^\pm(2) + R_1(1)R_2(1) \left(\frac{F_1^\pm(1)}{R_1(1)} + \frac{F_2^\pm(1)}{R_2(1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + F_1^\pm(2) - R_1(1)R_2(2) \left(\frac{F_1^\pm(1)}{R_1(1)} + \frac{F_2^\pm(2)}{R_2(2)} \right) \\
& - R_1(2)R_2(1) \left(\frac{F_1^\pm(2)}{R_1(2)} + \frac{F_2^\pm(1)}{R_2(1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.2b}$$

$$\begin{aligned}
& = Q_1(1)R_2(2) \left(-\frac{F_1^\pm(1)}{Q_1(1)} + \frac{F_2^\pm(2)}{R_2(2)} \right) + R_1(1)R_2(1) \left(\frac{F_1^\pm(1)}{R_1(1)} + \frac{F_2^\pm(1)}{R_2(1)} \right) \\
& + R_1(2)Q_2(1) \left(\frac{F_1^\pm(2)}{R_1(2)} - \frac{F_2^\pm(1)}{Q_2(1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.3b}$$

$$\begin{aligned}
& = F_2^\pm(2) + R_1(1)(R_2(1)-R_2(2)) \left(\frac{F_1^\pm(1)}{R_1(1)} + \frac{F_2^\pm(1)-F_2^\pm(2)}{R_2(1)-R_2(2)} \right) \\
& + R_1(2)Q_2(1) \left(\frac{F_1^\pm(2)}{R_1(2)} - \frac{F_2^\pm(1)}{Q_2(1)} \right),
\end{aligned} \tag{4.4b}$$

lub równoważnie, z (3.2.16)

$$\begin{aligned}
F_\varphi^\pm(1) & = R_2(2)\lambda_2^\pm(2) + R_1(1)R_2(1)(\lambda_1^\pm(1) + \lambda_2^\pm(1)) \\
& + R_1(2)\lambda_1^\pm(2) - R_1(1)R_2(2)(\lambda_1^\pm(1) + \lambda_2^\pm(2)) \\
& - R_1(2)R_2(1)(\lambda_1^\pm(2) + \lambda_2^\pm(1))
\end{aligned} \tag{4.2c}$$

$$\begin{aligned}
& = Q_1(1)R_2(2)(-\mu_1^\pm(1) + \lambda_2^\pm(2)) \\
& + R_1(1)R_2(1)(\lambda_1^\pm(1) + \lambda_2^\pm(1)) \\
& + R_1(2)Q_2(1)(\lambda_1^\pm(2) - \mu_2^\pm(1))
\end{aligned} \tag{4.3c}$$

$$\begin{aligned}
& = R_2(2)\lambda_2^\pm(2) + R_1(1)(R_2(1)-R_2(2)) \left(\lambda_1^\pm(1) + \frac{F_2^\pm(1)-F_2^\pm(2)}{R_2(1)-R_2(2)} \right) \\
& + R_1(2)Q_2(1)(\lambda_1^\pm(2) - \mu_2^\pm(1)).
\end{aligned} \tag{4.4c}$$

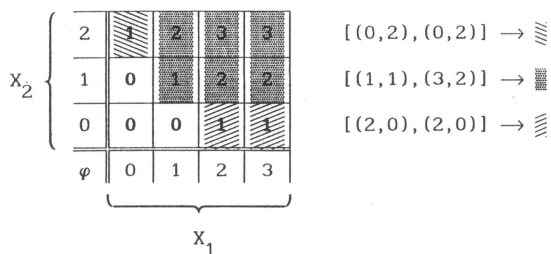
Zbiór $V_1^+ = \{(x_1, x_2): \varphi(x_1, x_2) \geq 1\}$ może być podzielony na rozłączne kostki w różnorodny sposób. Podział \mathcal{P}_1 (patrz Rys. 5):

$$V_1^+ = [(0,2), (0,2)] \cup [(1,1), (3,2)] \cup [(2,0), (2,0)],$$

według (3.3.2) i (3.3.3), prowadzi do postaci SDP

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= X_{10} \bar{X}_{11} X_{22} \bar{X}_{23} + X_{11} \bar{X}_{14} X_{21} \bar{X}_{23} + X_{12} \bar{X}_{14} X_{20} \bar{X}_{21} \\ &\quad (\text{przez } X_{10} = X_{20} = 1, \quad X_{14} = X_{23} = 0) \\ &= \bar{X}_{11} X_{22} + X_{11} X_{21} + X_{12} \bar{X}_{21}, \end{aligned}$$

co daje identyczny rezultat jak (4.3).

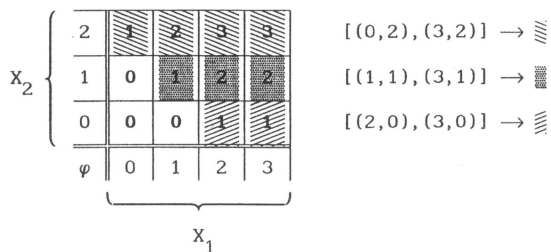


Rysunek 5. Podział $\mathcal{P}_1: V_1^+ = [(0,2), (0,2)] \cup [(1,1), (3,2)] \cup [(2,0), (2,0)]$.

Podobnie, podział \mathcal{P}_2 (patrz Rys. 6):

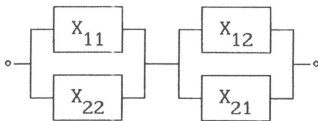
$$V_1^+ = [(0,2), (3,2)] \cup [(1,1), (3,1)] \cup [(2,0), (3,0)]$$

proceedzi do (4.4).



Rysunek 6. Podział $\mathcal{P}_2: V_1^+ = [(0,2), (3,2)] \cup [(1,1), (3,1)] \cup [(2,0), (3,0)]$.

Pokażemy, że korzystając z minimalnych przekrojów L_1 poziomu $j=1$ otrzymamy te same wyniki. Z Rys. 3 otrzymujemy: $L_1 = \{(0,1), (1,0)\}$, a na podstawie (2.1.9) (patrz Rys. 7)



Rysunek 7. Reprezentacja minimalnych wektorów funkcji φ .

$$\bar{\varphi}_1 = 1 - \varphi_1 = \bar{X}_{11}\bar{X}_{22} \vee \bar{X}_{12}\bar{X}_{21} \quad (4.5)$$

(na podstawie metody włączeń i wyłączeń)

$$= \bar{X}_{11}\bar{X}_{22} + \bar{X}_{12}\bar{X}_{21} - \bar{X}_{11}\bar{X}_{22}\bar{X}_{12}\bar{X}_{21}$$

(na podstawie zależności $\bar{X}_{ir} \cdot \bar{X}_{is} = \bar{X}_{i, \min(r,s)}$)

$$= \bar{X}_{11}\bar{X}_{22} + \bar{X}_{12}\bar{X}_{21} - \bar{X}_{11}\bar{X}_{21}, \quad (4.6)$$

a zatem

$$\varphi_1 = 1 - (\bar{X}_{11}\bar{X}_{22} + \bar{X}_{12}\bar{X}_{21} - \bar{X}_{11}\bar{X}_{21}). \quad (4.7)$$

Korzystając z elementarnych zasad algebry można pokazać, że (4.7) i (4.2) są ekwiwalentne, jednakże zastosujemy zwykłą procedurę odracania i minimalizacji:

$$\varphi_1 = \overline{\bar{X}_{11}\bar{X}_{22} \vee \bar{X}_{12}\bar{X}_{21}}$$

(zasada de Morgana)

$$= (\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{22}) \wedge (\bar{X}_{12} \vee \bar{X}_{21}) = X_{11}X_{12} \vee X_{11}X_{21} \vee X_{22}X_{12} \vee X_{22}X_{21}$$

(z zależności $X_{ir} \cdot X_{is} = X_{i, \max(r,s)}$)

$$= X_{12} \vee X_{11}X_{21} \vee X_{12}X_{22} \vee X_{22}$$

(z tego, że $X_{11}X_{21} \geq X_{12}X_{22}$ wynika $X_{11}X_{21} \vee X_{12}X_{22} = X_{11}X_{21}$)

$$= X_{12} \vee X_{11}X_{21} \vee X_{22},$$

tn. odwróciliśmy reprezentację z użyciem minimalnych przekrojów (4.5) do reprezentacji z użyciem minimalnych ścieżek (4.1).

Stosując metodę substytucji do (4.7), otrzymujemy

$$R_{\varphi}(1) = 1 - [Q_1(1)Q_2(2) + Q_1(2)Q_2(1) - Q_1(1)Q_2(1)], \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} F_{\varphi}^{\pm}(1) &= - [Q_1(1)Q_2(2)(-\mu_1^{\pm}(1)-\mu_2^{\pm}(2)) + Q_1(2)Q_2(1)(-\mu_1^{\pm}(2)-\mu_2^{\pm}(1)) \\ &\quad - Q_1(1)Q_2(1)(-\mu_1^{\pm}(1)-\mu_2^{\pm}(1))] \\ &= Q_1(1)Q_2(2)(\mu_1^{\pm}(1)+\mu_2^{\pm}(2)) + Q_1(2)Q_2(1)(\mu_1^{\pm}(2)+\mu_2^{\pm}(1)) \\ &\quad - Q_1(1)Q_2(1)(\mu_1^{\pm}(1)+\mu_2^{\pm}(1)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nie jest trudno sprawdzić, że (4.8) i (4.9) są ekwiwalentne z - odpowiednio - (4.2a) i (4.2c).

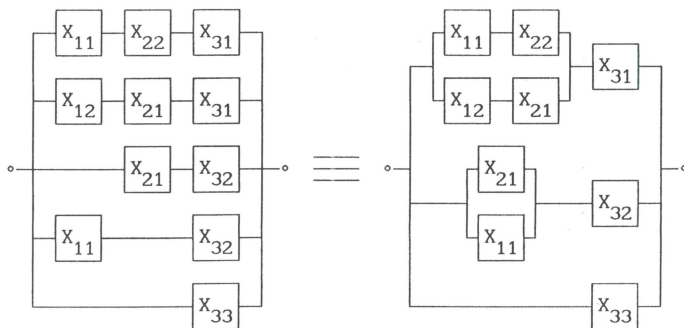
Przykład 4.2: dekompozycja liniowa

Rozpatrzmy MMS postaci: $\langle \mathbb{C}, K_{\varphi}, K_1, K_2, K_3, \varphi \rangle$: $\mathbb{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$, $K_{\varphi} = \{0, 1, 2, 3\}$, $K_1 = K_2 = \{0, 1, 2\}$, $K_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, z funkcją strukturalną φ daną przez minimalne ścieżki:

$$U_1 = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 2), (0, 0, 3)\},$$

$$U_2 = \{(1, 1, 2), (0, 1, 3), (1, 0, 3)\},$$

$$U_3 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\}.$$



Rysunek 8. Dwa równoważne schematy blokowe struktur φ_1 .

Mamy (patrz Rys..8)

$$\varphi_1 = X_{11}X_{22}X_{31} \vee X_{12}X_{21}X_{31} \vee X_{21}X_{32} \vee X_{11}X_{32} \vee X_{33}. \quad (4.10)$$

Stosując zasadę włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & X_{11}X_{22}X_{31} + X_{12}X_{21}X_{31} + X_{21}X_{32} + X_{11}X_{32} + X_{33} \\ & - X_{12}X_{22}X_{31} - X_{11}X_{22}X_{32} - X_{12}X_{21}X_{32} - X_{11}X_{21}X_{32} - X_{11}X_{33} \\ & - X_{21}X_{33} + X_{12}X_{22}X_{32} + X_{11}X_{21}X_{33}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Obliczenie $R_\varphi(1)$ i $F_\varphi^\pm(1)$ jest teraz łatwe i pominiemy je (wyrażenia są raczej długie w zapisie).

Zapiszmy (4.11) w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & (X_{11}X_{22} + X_{12}X_{21} - X_{12}X_{22}) \cdot X_{31} \\ & + (X_{21} + X_{11} - X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} - X_{11}X_{21} + X_{12}X_{22}) \cdot X_{32} \\ & + (1 - X_{11} - X_{21} + X_{11}X_{21}) \cdot X_{33}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zastosujemy teraz metodę dekompozycji liniowej względem elementu c_3 . Warstwy (ze względu na stany elementu c_3) tablicy wartości struktury φ pokazano na Rys. 9.

	$X_3 \equiv 0$																	
X_1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>φ</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	φ	0	1	2	
2	0	0	0															
1	0	0	0															
0	0	0	0															
φ	0	1	2															
	X_2																	

	$X_3 \equiv 1$																	
X_1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>φ</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	2	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	φ	0	1	2	
2	0	1	1															
1	0	0	1															
0	0	0	0															
φ	0	1	2															
	X_2																	

	$X_3 \equiv 2$																	
X_1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>φ</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	2	2	1	1	2	2	0	0	1	1	φ	0	1	2	
2	1	2	2															
1	1	2	2															
0	0	1	1															
φ	0	1	2															
	X_2																	

	$X_3 \equiv 3$																	
X_1	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>φ</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	2	2	3	3	1	2	2	3	0	1	2	2	φ	0	1	2	
2	2	3	3															
1	2	2	3															
0	1	2	2															
φ	0	1	2															
	X_2																	

Rysunek 9. Warstwy tablicy wartości funkcji φ .

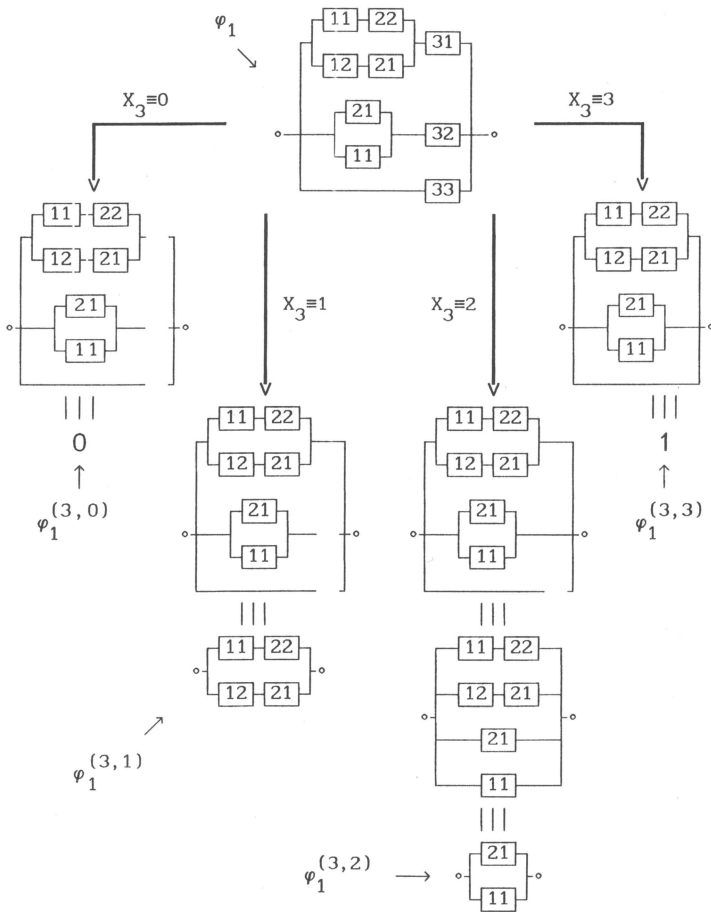
Z powyższej tablicy bezpośrednio wynika, że (patrz Rys. 10)

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_1^{(3,0)} &\equiv 0, \\
 \varphi_1^{(3,1)} &= X_{11}X_{22} \vee X_{12}X_{21} = X_{11}X_{22} + X_{12}X_{21} - X_{12}X_{22}, \\
 \varphi_1^{(3,2)} &= X_{21} \vee X_{11} = X_{21} + X_{11} - X_{11}X_{21}, \\
 \varphi_1^{(3,3)} &\equiv 1,
 \end{aligned} \right\} (4.13)$$

i dalej, na podstawie (3.4.3), dekompozycja liniowa struktury φ_1 ze względu na element c_3 , prowadzi do zależności (patrz Rys. 10)

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= (X_{30} - X_{31})\varphi_1^{(3,0)} + (X_{31} - X_{32})\varphi_1^{(3,1)} + (X_{32} - X_{33})\varphi_1^{(3,2)} + (X_{33} - X_{34})\varphi_1^{(3,3)} \\
 &= (X_{31} - X_{32})(X_{11}X_{22} + X_{12}X_{21} - X_{12}X_{22}) \\
 &\quad + (X_{32} - X_{33})(X_{21} + X_{11} - X_{11}X_{21}) + X_{33},
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

co jest zgodne z (4.12).



Rysunek 10. Dekompozycja liniowa struktury φ_1 ze względu na c_3 .
 ($i_r \equiv X_{i_r}$, e.g. $11 \equiv X_{11}$, $21 \equiv X_{21}$)

Stosując metodę substytucji do (4.13) otrzymujemy

$$R_\varphi(1|3,0) = 0, \quad R_\varphi(1|3,3) = 1,$$

$$R_\varphi(1|3,1) = R_1(1)R_2(2) + R_1(2)R_2(1) - R_1(2)R_2(2),$$

$$R_{\varphi}(1|3,2) = R_2(1) + R_1(1) - R_1(1)R_2(1),$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(1|3,0) = F_{\varphi}^{\pm}(1|3,3) = 0,$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(1|3,1) = R_1(1)R_2(2)(\lambda_1^{\pm}(1)+\lambda_2^{\pm}(2)) + R_1(2)R_2(1)(\lambda_1^{\pm}(2)+\lambda_2^{\pm}(1)) \\ - R_1(2)R_2(2)(\lambda_1^{\pm}(2)+\lambda_2^{\pm}(2))$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(1|3,2) = R_2(1)\lambda_2^{\pm}(1) + R_1(1)\lambda_1^{\pm}(1) - R_1(1)R_2(1)(\lambda_1^{\pm}(1)+\lambda_2^{\pm}(1)).$$

W ten sposób wzory (3.4.4) i (3.4.5) na dekompozycję liniową dają

$$R_{\varphi}(1) = (R_3(1)-R_3(2))R_{\varphi}(1|3,1) + (R_3(2)-R_3(3))R_{\varphi}(1|3,2) + R_3(3),$$

$$F_{\varphi}^{\pm}(1) = \sum_{r=0}^3 \left([R_{\varphi}(1|3,r)-R_{\varphi}(1|3,r-1)]F_3^{\pm}(r) + [R_3(r)-R_3(r+1)]F_{\varphi}^{\pm}(1|3,r) \right) \\ = R_{\varphi}(1|3,1)F_3^{\pm}(1) + (R_3(1)-R_3(2))F_{\varphi}^{\pm}(1|3,1) \\ + (R_{\varphi}(1|3,2)-R_{\varphi}(1|3,1))F_3^{\pm}(2) + (R_3(2)-R_3(3))F_{\varphi}^{\pm}(1|3,2) \\ + (1-R_{\varphi}(1|3,2))F_3^{\pm}(3). \quad (4.15)$$

Z drugiej strony, stosując zasadę substytucji (3.2.12) do (4.14), otrzymujemy

$$F_{\varphi}^{\pm}(1) = (R_3(1)-R_3(2)) \left(R_1(1)R_2(2)(\lambda_1^{\pm}(1)+\lambda_2^{\pm}(2) + \frac{F_3^{\pm}(1)-F_3^{\pm}(2)}{R_3(1)-R_3(2)}) \right. \\ \left. + R_1(2)R_2(1)(\lambda_1^{\pm}(2)+\lambda_2^{\pm}(1) + \frac{F_3^{\pm}(1)-F_3^{\pm}(2)}{R_3(1)-R_3(2)}) \right. \\ \left. - R_1(2)R_2(2)(\lambda_1^{\pm}(2)+\lambda_2^{\pm}(2) + \frac{F_3^{\pm}(1)-F_3^{\pm}(2)}{R_3(1)-R_3(2)}) \right) \\ + (R_3(2)-R_3(3)) \left(R_2(1)(\lambda_2^{\pm}(1) + \frac{F_3^{\pm}(2)-F_3^{\pm}(3)}{R_3(2)-R_3(3)}) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + R_1(1) \left(\lambda_1^\pm(1) + \frac{F_3^\pm(2) - F_3^\pm(3)}{R_3(2) - R_3(3)} \right) \\
& - R_1(1) R_2(1) \left(\lambda_1^\pm(1) + \lambda_2^\pm(1) + \frac{F_3^\pm(2) - F_3^\pm(3)}{R_3(2) - R_3(3)} \right) \\
& + R_3(3) \lambda_3^\pm(3),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

co, jak nietrudno sprawdzić, jest równoważne z (4.15). Zastosowanie zależności (3.2.12) do (4.11) także prowadzi do identycznego wyniku.

5. WNIOSKI

Pokazaliśmy, że szeroko znane metody dotyczące systemów binarnych mogą być z powodzeniem stosowane do analizy monotonicznych systemów wielostanowych. Otrzymaliśmy wiele wzorów służących do obliczania częstotliwości uszkodzeń i napraw systemów MMS: : z wykorzystaniem metody substytucji (3.2.6), (3.2.11) i (3.2.12), z zastosowaniem metody włączeń i wyłączeń (3.2.18) i (3.2.20), i z zastosowaniem dekompozycji liniowej - wzór (3.4.5). Są to prawdopodobnie nowe wzory. Ze względu na to, że wymienione wyżej wzory charakteryzują się tym, że wielkości na "wejściu" i na "wyjściu" mają ten sam charakter, to mogą być one wykorzystywane w sposób rekursywny, co umożliwia analizę złożonych systemów modułami (krok po kroku). Binarne podejście do analizy MMS jest zilustrowane dwoma prostymi przykładami, które pokazują, że istniejące już binarne algorytmy - po pewnych modyfikacjach - mogą być stosowane do monotonicznych systemów wielostanowych.

LITERATURA

- [1] Abouammoh A.M., Al-Kadi M.A.: On measure of importance for components in multistate coherent systems. *Microelectronics and Reliability*, Vol.31, 1991, No.1, pp.109-122.
- [2] Abouammoh A.M., Al-Kadi M.A.: Component relevancy in multistate reliability models. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.40, 1991 Aug, pp.370-374, 379.
- [3] Aven T.: Reliability evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-34, 1985 Dec, pp.463-472.
- [4] Aven T.: Availability evaluation of oil/gas production and transportation systems. *Reliability Engineering*, Vol.18, 1987, pp.35-44.
- [5] Barlow R.E., Wu A.S.: Coherent systems with multistate components. *Mathematics of Operations Research*, Vol.3, 1978, pp.275-281.
- [6] Block H.W, Savits T.H.: A decomposition for multistate monotone systems. *Journal of Applied Probability*, Vol.19, 1982, pp.391-402.
- [7] Borges W.D.S., Rodrigues F.W.: An axiomatic characterization of multistate coherent systems. *Mathematics of Operations Research*, 1983, Vol.8, pp.435-438.
- [8] Bueno V.C.: On the importance of components for multistate monotone systems. *Statistics & Probability Letters*, Vol.7, 1988, pp.51-60.
- [9] Butler D.A.: Bounding the reliability of multistate systems. *Operations Research*, Vol.30, 1982, pp.530-544.
- [10] Ethier S.N., Kurtz T.G. *Markov Processes. Characterization and Convergence*. Wiley: New York, 1986.
- [11] Ebrahimi N.: Multistate reliability models. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.31, 1984, pp.671-680.
- [12] El-Newehi E., Proschan F.: Multistate reliability models: a survey. *Multivariate Analysis V*. Edited by P.R.Krishnaiah. North-Holland: Amsterdam, 1980, pp.523-541.
- [13] El-Newehi E., Proschan F.: Degradable systems: a survey of multistate system theory. *Communication in Statistics. Theory and Methods*. Vol.13, 1984, pp.405-432.
- [14] El-Newehi E., Proschan F.: Components relevancy in multistate systems. *Multivariate Analysis VI*. Edited by P.R.Krishnaiah. North-Holland: Amsterdam, 1985, pp.203-208.
- [15] El-Newehi E., Proschan F., Sethuraman J.: Multi-state coherent systems. *Journal of Applied Probability*, Vol.15, 1978, pp.675-688.

- [16] Funnemark E., Natvig B.: Bounds for the availabilities in a fixed time interval for multistate monotone systems. *Advances in Applied Probability*, Vol.17, 1985, pp.638-655.
- [17] Griffith W.S.: Multistate reliability models. *Journal of Applied Probability*, Vol.17, 1980, pp.735-744.
- [18] Hudson J.C., Kapur K.: Reliability analysis for multistate systems with multistate components. *AIIE Transactions*, Vol.15, 1983, pp.127-135.
- [19] Hudson J.C., Kapur K.: Modules in coherent multistate systems. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-32, 1983 June, pp.183-185.
- [20] Hudson J.C., Kapur K.: Reliability bounds for multistate systems with multistate components. *Operations Research*, Vol.33, 1985, pp.153-160.
- [21] Janan X.: New approach for multistate system analysis. *Reliability Engineering*, Vol.10, 1985, pp.245-256.
- [22] Janan X.: On multistate system analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-34, 1985 Oct, pp.329-337.
- [23] Karpinski J., Korczak E.: *Reliability Evaluation Methods of Binary Systems*. Omnitech Press: Warsaw, 1990. (in Polish)
- [24] Klingner M.: Mehrwertige Modelle zur Beschreibung der Zuverlässigkeit und Leistungsfähigkeit technischer Systeme. *ZKI Informationen*, No.3, August 1986, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Kybernetik und Informationsprozesse, 131 pp.
- [25] Korczak E.: Calculation of stationary reliability characteristics of multistate monotone systems. *XII International Conference on Fault-Tolerant Systems and Diagnostics*, Praha, Czechoslovakia, 1989, September 4.-7., (FTSD-12), pp.126-131.
- [26] Korczak E.: Evaluation of steady state reliability indexes of multistate monotone systems. *Performance Evaluation, Reliability and Exploitation of Computer Systems*. Proceeding of the Fifth Anniversary International Conference RELCOMEX'89, Poland, Książ Castle, 26-29, September 1989. Editors: W.M.Barański, I.J.Jóźwiak, W.Zamojski. Ossolineum, Wrocław 1989, pp.51-57.
- [27] Korczak E.: Availability and frequency evaluation of multistate monotone systems. *RELECTRONIC'91, 8th Symposium on Reliability in Electronics*, Budapest, 26-30. August, 1991, *Proceedings - Vol.I*, pp.472-482.
- [28] Korczak E.: Reliability analysis of multistate monotone systems. In: *Safety and Reliability Assessment - an Integral Approach*. ESREL'93, Proceedings of the European Safety and Reliability Conference, München, Germany, May, 10th-12th 1993. Edited by P.Kafka, J.Wolf. Elsevier: Amsterdam, 1993, pp.671-682.

- [29] Levitin G., Lisnianski A., Ben-Haim H., Elmakis D.: Redundancy optimization for series-parallel multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-47, June 1998, pp. 165-172.
- [30] Levitin G.: Multistate series-parallel system expansion-scheduling subject to availability constraints. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-49, March 2000, pp. 71-79.
- [31] Levitin G.: Incorporating common-cause failures into nonrepairable multistate series-parallel system analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-50, Dec. 2001, pp. 380-388.
- [32] Murchland J.D.: Fundamental concepts and relations for reliability analysis of multistate systems. In: *Reliability and Fault Tree Analysis*. Edited by R.E.Barlow, J.B.Fussell, N.D.Singpurwalla. SIAM, Philadelphia, 1975, pp.581-618.
- [33] Natvig B.: Two suggestions of how to define a multistate coherent system. *Advances in Applied Probability*, Vol.14, 1982, pp.434-455.
- [34] Natvig B.: Recent developments in multistate reliability theory. *Statistical Research Report*, No.4, Institute of Mathematics, University of Oslo, 1984, June 29, 9 pp.
- [35] Natvig B. et al.: Multistate reliability theory - a case study. *Advances in Applied Probability*, Vol.18, 1986, pp.921-932.
- [36] Natvig B., Streller A.: The steady-state behaviour of multistate monotone systems. *Journal of Applied Probability*, Vol.21, 1984, pp.826-835.
- [37] Ohi F., Nishida T.: Multistate systems in reliability theory. *Stochastic Models in Reliability Theory*. Edited by S.Osaki, Y.Hatoyama. Springer Verlag: Berlin, 1984, pp.12-22.
- [38] Ohi F., Nishida T.: On multistate coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-33, 1984 Oct, pp.284-288.
- [39] Pedar A., Sarma V.V.S.: Phased-mission analysis for evaluating the effectiveness of aerospace computing-systems. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-30, 1981 Dec, pp.429-437.
- [40] Proschan F., Tsaturyan G. Zh.: Multistate monotone systems I. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva (Reliability and Quality Control)*, 1990, No.1, pp.6-16. (in Russian)
- [41] Proschan F., Tsaturyan G. Zh.: Multistate monotone systems II. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva (Reliability and Quality Control)*, 1990, No.2, pp.3-11. (in Russian)
- [42] Reinschke K.: Ermittlung von Zuverlässigkeitskengrößen für monotone mehrwertige Systeme. *Zeitschrift für elektrische Informations- und Energietechnik*, Vol.11, 1981, pp.549-562.

- [43] Reinschke K., Klingner M.: Monotone mehrwertige Modelle für Zuverlässigkeitsanalyse komplexer Systeme. *Messen, Steuern, Regeln (msr)*, Vol.8, 1981, pp.442-428.
- [44] Ross S.M.: Multivalued state component systems. *The Annals of Probability*, Vol.7, 1979, pp.379-383.
- [45] Schneeweiss W.G.: *Boolean Functions with Engineering Applications and Computer Programs*. Springer Verlag, Berlin 1989.
- [46] Shinmori S., Ohi F.: Stochastic bounds for generalized systems in reliability theory. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.33, 1990, No.2, pp.103-118.
- [47] Singh C., Billinton R.: *System Reliability Modelling and Evaluation*. Hutchinson: London, 1977.
- [48] Wood A.P.: Multistate block diagrams and fault trees. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol.R-34, 1985 Aug, pp.236-240.



