

347/2006

Raport Badawczy
Research Report

RB/31/2006

**Zagadnienia immunizacji
portfela obligacji**

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. zw. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2006

Raport Badawczy

RB/31/2006

Research Report

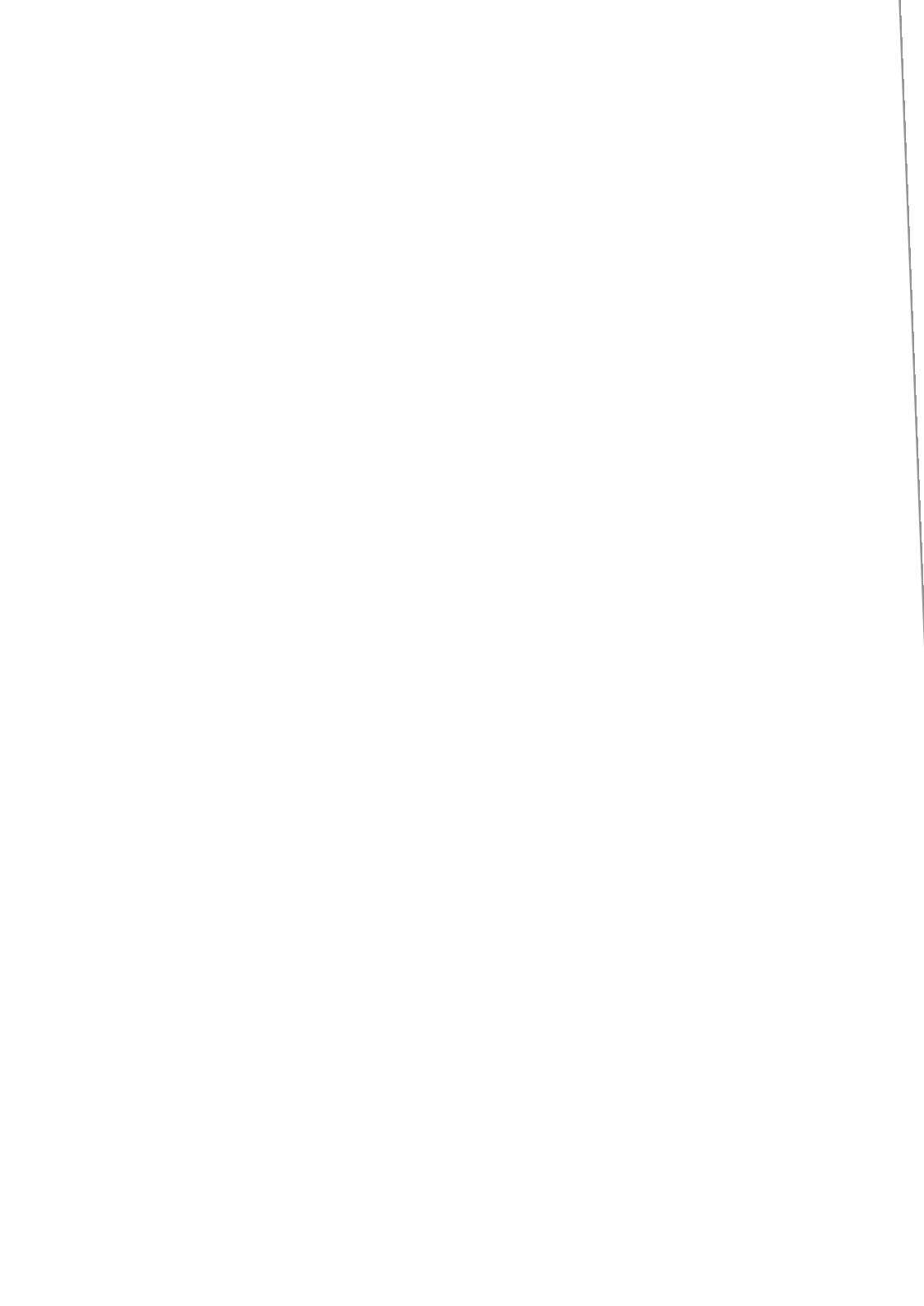
**ZAGADNIENIA IMMUNIZACJI
PORTFELA OBLIGACJI**

Andrzej Jakubowski

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

*Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences*

Warszawa, grudzień 2006



Andrzej Jakubowski

ZAGADNIENIA IMMUNIZACJI PORTFELA OBLIGACJI*

Streszczenie

W pracy przedstawiono szczegółowo zagadnienia dotyczące immunizacji portfela obligacji za względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian poziomu stóp procentowych oraz ryzyko zmian kształtu krzywej dochodowości (*yield curve*). Podano też własny dowód tzw. podstawowego twierdzenia o immunizacji. Szczególną uwagę zwrócono na zagadnienie czynnikowej immunizacji (*factor immunization*), wiążące się z uprzednią identyfikacją czynnika poziomu, czynnika nachylenia oraz czynnika krzywizny krzywej dochodowości, będącej ilustracją graficzną zmieniającej się z upływem czasu bieżącego - struktury terminowej stóp procentowych.

* Praca zostanie zgłoszona do publikacji w czasopiśmie naukowym: *Bank i Kredyt*, NBP.



Spis treści

1. Wprowadzenie	1
2. Struktura terminowa stóp procentowych – zagadnienie wyceny obligacji	2
3. Kwantyfikacja ryzyka stopy procentowej – parametry okresowości i wypukłości obligacji	7
3.1. Okresowość obligacji (<i>duration</i>)	7
3.2. Wypukłość obligacji (<i>convexity</i>)	11
3.3. Parametry okresowości i wypukłości portfela obligacji	17
3.4. Zmodyfikowane parametry okresowości i wypukłości obligacji	20
3.5. Okresowość i wypukłość obligacji w przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek	20
4. Immunizacja oraz optymalizacja portfela obligacji	23
5. Analiza czynnikowa dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych	29
5.1. Model czynnikowy struktury terminowej	30
5.2. Metoda głównego czynnika	39
6. Czynnikowa okresowość oraz czynnikowa wypukłość obligacji	45
7. Czynnikowy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji	51
Literatura	55

1. Wprowadzenie

W pracy, przedstawimy obszernie problematykę immunizacji portfela obligacji ze względu na jedno zobowiązanie finansowe, jakie musi być wypełnione w zadanym horyzoncie czasowym przez inwestora, będącego nabywcą analizowanego portfela. Najpierw omówimy pojęcie struktury terminowej stóp procentowych, przedstawimy zagadnienie wyceny obligacji oraz dokonamy pewnego podsumowania ogólnej problematyki z zakresu immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian rynkowych stóp procentowych. Zagadnienia te są bardziej szczegółowo przedstawione m. in. w innej pracy autora; por. Jakubowski (2006b).

Następnie przedstawimy zagadnienie kwantyfikacji ryzyka stopy procentowej – podając wyprowadzenia podstawowych wzorów definiujących parametry okresowości (*duration*) oraz wypukłości (*convexity*) pojedynczej obligacji oraz portfela obligacji; dokonamy również interpretacji tych parametrów. W dalszej kolejności zaprezentujemy nowy dowód tzw. podstawowego twierdzenia o immunizacji oraz sformułujemy zagadnienie optymalnego wyboru portfela zimmunizowanego.

Natomiast w ostatniej części pracy podamy szczegółowy opis matematyczny analizy czynnikowej dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, przedstawimy definicje czynnikowej okresowości oraz czynnikowej wypukłości obligacji, po czym zaprezentujemy czynnikowy model immunizacji portfela obligacji. Szczególną uwagę zwrócimy w tym przypadku na możliwość identyfikacji tzw. czynnika poziomu, czynnika nachylenia oraz czynnika krzywizny krzywej dochodowości (*yield curve*), będącej ilustracją graficzną zmieniającej się losowo, z upływem czasu bieżącego – struktury terminowej stóp procentowych.

* * *

Ogólnie rzecz biorąc, pod pojęciem immunizacji portfela obligacji rozumiemy takie zaprojektowanie udziałów wartościowych poszczególnych obligacji (o różnych terminach wykupu) wchodzących w skład analizowanego portfela, aby wartość globalna tego portfela była jak najmniej wrażliwa na nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych. Zagadnienie to rozpatruje się przy zadanym horyzoncie inwestycyjnym wynikającym z terminu płatności przyszłych zobowiązań finansowych. W najprostszych modelach immunizacyjnych zakłada się, że w przyszłości występować będzie pojedyncze zobowiązanie. Natomiast w modelach bardziej złożonych, podstawowym problemem jest dopasowanie strumienia przyszłych dochodów wynikających z faktu posiadania określonego portfela obligacji (płatności odsetkowe i wartości nominalne) ze strumieniem przyszłych zobowiązań, rozpatrywanych w dyskretnych chwilach czasowych.

Zadanie immunizacji nie ma na ogół jednoznacznego rozwiązania - istnieje wiele (lub nieskończenie wiele) portfeli umożliwiających dopasowanie przyszłych dochodów (*assets*) do przyszłych zobowiązań (*liabilities*). Umożliwia to dodatkowo sformułowanie pewnej funkcji celu - np. maksymalizacja zysku lub minimalizacja kosztu utworzenia określonego portfela obligacji. Problematyka immunizacji sprowadza się w rozpatrywanym przypadku do zagadnienia optymalizacji, rozwiązywanego za pomocą jednej z wielu technik programowania matematycznego. W zagadnieniu tym problem immunizacji portfela formułuje się w postaci określonego zbioru ograniczeń.

Zagadnienie immunizacji portfela obligacji jest pewnym szczególnym (ale ważnym) przypadkiem bardziej ogólnej problematyki zarządzania portfelem obligacjami w warunkach ryzyka stóp procentowych. Podstawowe etapy rozwoju teorii immunizacji wyznaczają prace Macaulaya (1938) - wprowadzenie pojęcia okresowości (*duration*) obligacji, Redingtona (1952) - pierwsze użycie terminu (i koncepcji) „immunizacja” w odniesieniu do zagadnień inwestycyjnych, Fishera, Weila (1971) - uogólnienie pojęcia okresowości obligacji, Vasiceka (1977) oraz Coxa, Ingersolla, Rossa (1979, 1985) - model stochastyczny dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, Bierwaga (1987) - koncepcja „okna okresowości” (*duration window*), Brennana, Schwartza (1979, 1983) - dwuwskaźnikowe modele dynamiki zmian stóp procentowych - oraz prace Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) i Dahla (1993) - koncepcja czynnikowej okresowości i czynnikowej wypukłości obligacji oraz czynnikowy model zmian struktury terminowej stóp procentowych.

Ostatnie lata to burzliwy rozwój zarówno prac teoretycznych jak i badań empirycznych w zakresie immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko stóp procentowych. Najnowsze wyniki z tego zakresu są publikowane w wielu czasopismach naukowych z teorii finansów; m.in. w *Journal of Finance*, *Finance and Stochastics*, *Journal of Fixed Income*, *Journal of Portfolio Management* i w wielu innych.

2. Struktura terminowa stóp procentowych – zagadnienie wyceny obligacji

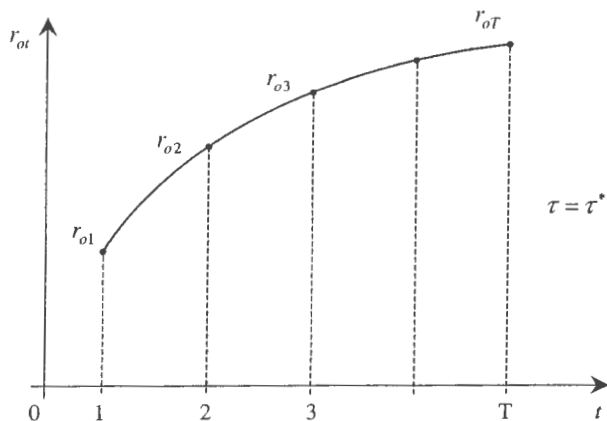
Zagadnienie immunizacji portfela obligacji wiąże się ściśle z pojęciem *struktury terminowej stóp procentowych*. Struktura ta odzwierciedla funkcyjną zależność wysokości poszczególnych stóp procentowych od terminów zapadalności zobowiązań, dla których te stopy się rozpatruje. W analizowanym przypadku przyjmuje się, że rynkowe stopy procentowe *spot* r_{0t} rozpatrywane dla poszczególnych terminów $t=1,2,3,\dots,T$, są określone przez

rentowności do wykupu YTM (*yield to maturity*) obligacji czysto-dyskontowych. Rentowności te stanowią pewien „wzorzec”, według którego dokonuje się wyceny wszystkich innych funkcjonujących w danym sektorze rynku finansowego obligacji wielokuponowych, jak też i innych instrumentów finansowych.

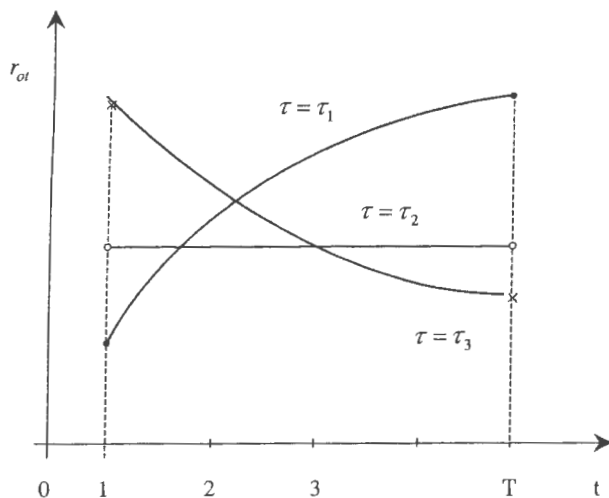
Graficznym zobrazowaniem struktury terminowej stóp procentowych *spot* jest tzw. krzywa dochodowości. Krzywa ta, przedstawiająca zależność rentowności do wykupu $YTM = r_{0t}$ obligacji czysto-dyskontowych od terminów wykupu tych obligacji $t = 1, \dots, T$ - może mieć różny kształt. Może to być krzywa rosnąca, malejąca lub (w przybliżeniu) stała. Kształt krzywej dochodowości zależy od szeregu czynników związanych zarówno z funkcjonowaniem analizowanego rynku finansowego, jak również od bieżącej sytuacji gospodarczej danego kraju. Ponadto, kształt tej krzywej zmienia się dynamicznie w czasie co jest właśnie źródłem ryzyka stóp procentowych; por. rysunki 1 i 2.

Poziom stóp procentowych na jakim przebiega dla tych samych terminów zapadalności krzywa dochodowości zależy również od sektora rynku, dla którego ta krzywa była identyfikowana. W zależności od sektora analizowanego rynku mamy bowiem krzywe dochodowości obligacji i bonów skarbowych, krzywe dochodowości obligacji municypalnych, krzywe dochodowości obligacji korporacyjnych itp. Ze względu na stopniowanie poziomu ryzyka inwestycyjnego, jakim obarczone są walory z różnych sektorów rozpatrywanego rynku, krzywa dochodowości obligacji korporacyjnych przebiega na ogół ponad krzywą dochodowości obligacji municypalnych (o wysokim ratingu). Natomiast obie te krzywe przebiegają powyżej krzywej dochodowości obligacji skarbowych. Wynika to bezpośrednio z faktu, że w przypadku obligacji skarbowych (tzw. *the Treasuries*) o praktycznie zerowym ryzyku niewypłacalności emitenta, „żądana” przez inwestorów stopa zwrotu jest najniższa; Fabozzi, Fong (1994).

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że sam proces identyfikacji krzywej dochodowości jest procesem złożonym. Wynika to m.in. stąd, że na rynku nie ma na ogół wystarczającej liczby obligacji czysto-dyskontowych, pokrywających dostatecznie szeroki zakres analizowanych terminów zapadalności; na przykład, w przypadku obligacji skarbowych, analizuje się zakres terminów od 1 roku do 30 lat. Wykorzystuje się więc różne metody przybliżone (tzw. *boot-strapping*), w których podstawą do analiz są obligacje wielokuponowe; Fabozzi (1996). W celu określenia krzywej dochodowości wykorzystuje się również różne metody i techniki aproksymacji ciągłej przebiegów dyskretnych takie, jak metoda funkcji „spline” i inne; Anderson, Breedon, *et al.* (1997). Stosuje się również w tym przypadku metodę analizy regresyjnej; Elton, Gruber (1995).



Rys. 1. Struktura terminowa stóp procentowych $spot\ r_{0t}$ określonych dla terminów zapadalności $t=1, \dots, T$, rozpatrywana w chwili bieżącej $\tau = \tau^*$. Stopy r_{0t} wyrażane są w skali roku.



Rys. 2. Ilustracja zmiany struktury terminowej stóp procentowych $spot\ r_{0t}$ z upływem czasu bieżącego $\tau = \tau_1, \tau_2, \tau_3$;
 $t=1, 2, 3, \dots, T$ - terminy zapadalności zobowiązań

Problematyka analizy, modelowania oraz prognozowania zmian struktury terminowej rynkowych stóp procentowych $spot\ r_{0t}$ ($t=1,\dots,T$) została szczegółowo przedstawiona m. in. przez autora niniejszej pracy w publikacji Jakubowski (1996); przedstawiono tam głównie klasyczne teorie i metody analizy struktury terminowej.- por. również Sławiński (1996). Natomiast obszerny i doskonale napisany przegląd nowoczesnych metod modelowania dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, w których wykorzystuje się zaawansowane techniki analizy stochastycznej – przedstawiono w pracy Gibsona, Lhabitanta i Talay'a (2001); por. też A. Weron, R. Weron (1998), Krawczak, Miklewski, Jakubowski, *et al.* (2000), Krawczak, Jakubowski, Konieczny, *et al.* (2003) oraz D. Gątarek, P. Bachert, R. Maksymiuk (2006).

Jak wspomniano, krzywa dochodowości stanowi pewien wzorec stóp procentowych $spot\ r_{0t}$ ($t=1,\dots,T$), za pomocą którego można dokonywać wyceny różnych papierów wartościowych. Wyceny tej dokonuje się poprzez dyskontowanie w czasie (do chwili bieżącej) przyszłych wpływów pieniężnych związanych z rozpatrywanym instrumentem finansowym. W szczególności, każdą obligacją o stałym oprocentowaniu, związaną z wypłatami w kolejnych latach $t=1,2,\dots,(T-1)$ odsetek C oraz w roku T - odsetek C plus wartość nominalna N - możemy rozpatrywać jako sumę obligacji czysto-dyskontowych. A zatem, wartość bieżąca takiej obligacji (*present value*) jest równa

$$PV = \frac{C}{1+r_{01}} + \frac{C}{(1+r_{02})^2} + \dots + \frac{C+N}{(1+r_{0T})^T}. \quad (1)$$

Wartość tę nazywa się również często wartością wewnętrzną obligacji (*intrinsic value*). Natomiast sam wzór (1) jest często nazywany wzorem wyceny obligacji.

W teorii rynków kapitałowych dowodzi się (Elton, Gruber, 1995), że gdy rynek obligacji znajduje się w równowadze, strumienie pieniężne pochodzące od różnych obligacji powinny być dla tych samych okresów $t=1,\dots,T$, dyskontowane według tych samych stóp procentowych $spot\ r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0T}$. Tym samym, można w tym celu stosować „wzorcowe” stopy procentowe $spot$ określone na podstawie rentowności do wykupu *YTM* obligacji czysto-dyskontowych. Wynika to z zastosowania tzw. prawa jednej ceny (*the law of one price*) w stosunku do rozpatrywanego rynku obligacji. Prawo to oznacza, że w przypadku gdy chwilowa cena bieżąca P analizowanej obligacji jest różna od jej wartości równowagowej PV , to na skutek arbitrażu cena ta - po pewnym okresie przejściowym - staje się zbieżna do wartości PV . Zakłada się przy tym, że wspomniany okres przejściowy jest na ogół nie dłuższy niż czas trwania jednego okresu odsetkowego

analizowanej obligacji, co znajduje potwierdzenie w badaniach empirycznych z tego zakresu. Oczywiście warunkiem aby zachodziła owa zbieżność ceny bieżącej obligacji P do jej wartości równowagowej PV jest odpowiednia efektywność rynku kapitałowego (Jakubowski, 1996).

Określenie struktury terminowej stóp procentowych przez rentowności do wykupu $r_{01}, r_{02}, \dots, r_{0T}$ obligacji czysto-dyskontowych ma zasadnicze znaczenie nie tylko ze względu na wycenę wartości obligacji. Znając przebieg rozpatrywanej krzywej dochodowości, a także dynamikę zmian tego przebiegu z upływem czasu bieżącego, potrafimy oszacować wpływ zmian rynkowych stóp procentowych na wartość rozpatrywanych obligacji, a tym samym na stopę zwrotu z dokonywanych inwestycji.

Stopa zwrotu R z inwestycji w daną obligację (tzw. *period-by-period return*) wynika ogólnie rzecz biorąc z dwóch składowych: dochodów z wypłacanych odsetek C oraz z zysków lub strat związanych ze zmianą bieżącej ceny P obligacji. Z kolei zmiana ceny obligacji wynikać może ze zmiany wartości równowagowej obligacji oraz określonych działań spekulacyjnych na rozpatrywanym rynku (tzw. *arbitraż cenowy*). Pomijając dla uproszczenia owe działania spekulacyjne (jako charakterystyczne dla okresów przejściowych) otrzymamy, że cena bieżąca P obligacji jest równa jej wartości równowagowej PV określonej wzorem (1). Ze wzoru tego wynika, że zmiana ceny (wartości) bieżącej obligacji może być spowodowana oddziaływaniem dwóch czynników: zmianą wartości obligacji w czasie (w miarę upływu kolejnych okresów odsetkowych zanikają kolejne człony zależności (1)) oraz - nieoczekiwaną zmianą rynkowych stóp procentowych r_{0t} , $t = 1, \dots, T$.

Ze wzoru wyceny (1) wynika bezpośrednio, że nieoczekiwany wzrost rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t} $t = 1, \dots, T$, a więc przesunięcie się krzywej dochodowości w górę - powoduje spadek wartości bieżącej PV obligacji. Natomiast spadek tych stóp procentowych, a więc ruch krzywej dochodowości w dół, powoduje wzrost wartości bieżącej PV . Istotne są również wszelkiego rodzaju niespodziewane zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych, prowadzące do zmiany nachylenia krzywej dochodowości, pojawiania się różnego rodzaju garbów (*hump-shaped curve*), itp. Mówi się w tym przypadku o tzw. ryzyku kształtu analizowanej krzywej (*shape risk*).

Na zakończenie tych uwag należy podkreślić, że o ile znajomość i umiejętność analizy struktury terminowej stóp procentowych jest niezmiernie istotna w przypadku wszelkiego rodzaju inwestycji na rynku finansowym, o tyle na rynku obligacji - jest to sprawa o zasadniczym znaczeniu. Wynika to wprost ze wzoru wyceny (1).

3. Kwantyfikacja ryzyka stopy procentowej – parametry okresowości i wypukłości obligacji

Z przeprowadzonych w poprzednim punkcie rozważań wynika, że bieżąca cena rynkowa obligacji może podlegać ciągłym oraz nieoczekiwanym fluktuacjom - ze względu na zmiany obowiązujących w danym momencie rynkowych stóp procentowych, za pomocą których dyskontujemy w czasie do chwili bieżącej wszystkie przyszłe wpływy pieniężne związane z posiadaniem obligacji (tj. odsetki oraz nominał). Często trudne do przewidzenia zmiany rynkowych stóp procentowych oraz wynikające stąd zmiany ceny obligacji (czy też szerzej - instrumentów finansowych) są źródłem ryzyka stóp procentowych. Ryzyko to wyraża się tzw. nieoczekiwaną stopą zwrotu (*excess return*); Elton, Gruber (1995). W związku z tym istotna jest - z punktu widzenia zarówno inwestora jak i emitenta - wrażliwość (lub też przeciwnie - odporność) ceny rozpatrywanej obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych. Parametrami umożliwiającymi pomiar takiej wrażliwości jest właśnie **okresowość** (*duration*) oraz **wypukłość** (*convexity*) obligacji.

Klasyczne definicje (Macaulaya) tych parametrów związane są z przyjęciem silnie ograniczającego założenia, że wszystkie rynkowe stopy procentowe *spot* są sobie równe, niezależnie od terminów zapadalności zobowiązań, tj.

$$r_{0t} = r ; \forall t = 1, \dots, T. \quad (2)$$

Oznacza to, że struktura terminowa stóp procentowych wyrażona krzywą dochodowości skarbowych obligacji czysto-dyskontowych jest „płaska”, przy czym zachodzi to dla dowolnej chwili bieżącej $\tau = 1, 2, 3, \dots$. Z powyższego założenia wynika bezpośrednio, że jeżeli chodzi o zmiany rynkowej stopy procentowej r (w tym przypadku już tylko jednej) - to możliwe są jedynie równoległe przesunięcia w górę lub w dół rozpatrywanej krzywej dochodowości o wartość dr , tj.

$$dr_{0t} = dr ; \forall t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

gdzie dr - przyrost skończony.

3.1. Okresowość obligacji (*duration*)

Wyprowadzenie wzoru określającego parametr okresowości obligacji jest następujące. Ze wzoru (1) wyceny obligacji, uwzględniając warunek (2) oraz zakładając, że analizowany rynek jest w równowadze (tj. $P = PV$), mamy

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^t}, \quad (4)$$

gdzie C_t - przyszłe strumienie finansowe wynikające z faktu nabycia obligacji, tj. $C_t = C$ ($t=1, \dots, T-1$) oraz $C_T = C + N$; C - wartość kuponu, N - wartość nominalna.

Dla małych zmian dr rynkowej stopy procentowej, odpowiadający tym zmianom dodatni lub ujemny przyrost dP wartości obligacji możemy aproksymować różniczką zupełną, tj.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr. \quad (5)$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy pojęcie współczynnika wagowego x_t , tj.

$$x_t = [C_t / (1+r)^t] / P = [C_t / (1+r)^t] / \sum_{t=1}^T [C_t / (1+r)^t]. \quad (6)$$

Współczynnik x_t określa więc udział wartości bieżącej strumienia finansowego C_t (zdyskontowanego na chwilę początkową za pomocą rynkowej stopy procentowej r) w wartości bieżącej P obligacji. Z (6.19) wynika bezpośrednio, że

$$\sum_{t=1}^T x_t = 1 \quad (7)$$

Z (5), uwzględniając (4) i (6), otrzymamy

$$dP = - \left[\sum_{t=1}^T t C_t (1+r)^{-t} \right] \frac{dr}{1+r} = -P \times \left(\sum_{t=1}^T t x_t \right) \frac{dr}{1+r}. \quad (8)$$

Występujące w powyższym wzorze wyrażenie w nawiasie okrągłym nosi nazwę okresowości (*Macaulaya*) D obligacji. Mamy zatem

$$D = \sum_{t=1}^T x_t t = \sum_{t=1}^T \frac{t C_t}{(1+r)^t} / P \quad (9)$$

oraz z (8), (9)

$$dP = -P \times D \frac{dr}{1+r}. \quad (10)$$

Uwzględniając dodatkowo, że $dr = d(1+r)$, z (10) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -D \frac{d(1+r)}{1+r} \quad \text{oraz} \quad (11)$$

$$D = -\frac{dP}{P} \bigg/ \frac{d(1+r)}{1+r} . \quad (12)$$

Natomiast dla nieskończenie małych przyrostów dr , z (12) otrzymamy

$$D = -\frac{dP}{dr} \frac{1+r}{P} \xrightarrow{dr \rightarrow 0} -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1+r}{P} , \quad (13)$$

tak więc

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1+r}{P} . \quad (14)$$

Wyprowadzone powyżej wzory (9), (12) i (14) określają trzy równoważne definicje parametru okresowości D obligacji. A mianowicie, ze wzoru (9) wynika, że okresowość D obligacji jest pewną średnią ważoną chwil czasowych t , w których wypłacane są strumienie finansowe C_t wynikające z faktu posiadania analizowanej obligacji. Uśrednienie to odbywa się ze względu na wagi x_t dane wzorem (6). Inaczej mówiąc, parametr okresowości D jest więc pewnym *średnim ważonym okresem zwrotu* z inwestycji w obligację; stąd też nazwa tego parametru. Parametr D jest wielkością mianowaną, wyrażaną w jednostkach czasu (np. w latach).

Parametr okresowości D obligacji czysto-dyskontowej. Dla obligacji czysto-dyskontowej (tj. dla $C = 0$) mamy

$$C_t = 0, \text{ dla } t = 1, \dots, T-1 \text{ oraz } C_T = N . \quad (15)$$

$$\text{A zatem, z (4), (15)} \quad P = P(r) = \frac{N}{(1+r)^T} . \quad (16)$$

Z (9), (15) i (16) otrzymamy

$$D = \frac{T \times N}{(1+r)^T} \bigg/ P = T . \quad (17)$$

Otrzymaliśmy więc, że w przypadku obligacji czysto-dyskontowej okresowość tej obligacji jest równa bezpośrednio terminowi T jej wykupu. Z porównania wzorów (9) i (17) wynika również, że spośród wszystkich obligacji o tym samym terminie wykupu T (*term to maturity*) obligacja czysto-dyskontowa ma największą okresowość $D_{\max} = T$. Wynika to bezpośrednio stąd, że okresowość D obligacji wielokuponowych jest średnią ważoną terminów $t = 1, \dots, T$, przy czym suma wag x_t jest równa jedności; por. (7). Tak więc okresowość D musi być krótsza od najdłuższego z rozpatrywanych terminów, wynoszącego T .

Zależność parametru okresowości D obligacji od upływu czasu bieżącego oraz od poziomu stopy procentowej. Z przedstawionych powyżej rozważań wynika jeszcze jeden ważny wniosek. A mianowicie z upływem czasu bieżącego $\tau = 1, 2, 3, \dots$, okresowość Macaulaya obligacji maleje, bowiem zmniejsza się okres do wykupu tych obligacji równy $T - \tau$.

Istotna jest również zależność parametru okresowości D od poziomu rynkowej stopy procentowej r . A mianowicie, można wykazać (Bierwag, 1987), że ze wzrostem stopy procentowej r - okresowość D obligacji maleje; przy czym, podobnie jak w przypadku zależności od upływu czasu bieżącego τ - jest to zależność w ogólnym przypadku nieliniowa.

Okresowość D obligacji jako współczynnik elastyczności. Dla ustalonej chwili τ czasu bieżącego oraz przy ustalonym poziomie rynkowej stopy procentowej r , okresowość obligacji zależy wyłącznie od strumieni finansowych C_t tej obligacji (a więc od odsetek C oraz wartości nominalnej N) oraz od okresu do wykupu T . Parametr okresowości D jest więc wewnętrzną cechą tej obligacji, wyrażającą jej wrażliwość na nieoczekiwane zmiany stopy procentowej r . Parametr ten jest zatem miernikiem ryzyka stopy procentowej na rynku obligacji. Wynika to zresztą bezpośrednio z definicji (12).

A mianowicie, okresowość D obligacji jest *współczynnikiem elastyczności* (wziętym ze znakiem minus) ceny obligacji ze względu na zmianę czynnika jedność plus stopa procentowa r . Okresowość D wyraża bowiem liczbowo procentowy spadek wartości P obligacji spowodowany wzrostem wartości $(1+r)$ o 1%. Bądź odwrotnie – wyraża on procentowy wzrost wartości P wynikający ze spadku wartości $(1+r)$ o 1%. Wyprowadzona powyżej zależność (11) pozwala na przybliżone oszacowanie względnej zmiany (dP/P) wartości obligacji spowodowanej nieoczekiwaną zmianą rynkowej stopy procentowej r , o ile tylko znana jest wartość parametru okresowości D , którą można bezpośrednio wyliczyć ze wzoru (9). Z tego też powodu wartość okresowości D jest jednym z podstawowych parametrów, który jest – obok rentowności do wykupu YTM - wymieniany w tablicach kwotowań poszczególnych obligacji występujących na danym rynku. Dla rynku amerykańskiego, tablice takie są publikowane m.in. przez dziennik finansowy *The Wall Street Journal*.

Ze wzoru (14) wynika jeszcze jedna interpretacja parametru okresowości D obligacji. A mianowicie, parametr ten jest bezpośrednio zależny od pochodnej $(\partial P / \partial r)$ wartości obligacji względem stopy procentowej r . Pochodna ta jest często określana w literaturze przedmiotu mianem tzw. “dolarowej okresowości” (*dollar duration*); por. Fabozzi (2000). Natomiast w literaturze polskiej, okresowość D jest często w sposób mylący nazywana

“trwałością obligacji”. Otóż według autora niniejszej pracy, nazewnictwo to jest błędne i w wysokim stopniu nieuzasadnione. Bowiernie przedstawionych powyżej rozważań wynika, że parametr D charakteryzuje raczej “nie-trwałość” niż “trwałość” obligacji. Im większa jest bowiem wartość D , w tym większym stopniu dana obligacja jest wrażliwa na ryzyko stopy procentowej, co wynika choćby z zależności (11). Trudno więc w tym przypadku mówić o większej “trwałości”.

3.2. Wypukłość obligacji (*convexity*)

Wprowadzenie pojęcia parametru wypukłości V obligacji, umożliwia bardziej dokładne – niż wynika to ze wzoru (11) – oszacowanie wrażliwości wartości obligacji na ryzyko rynkowej stopy procentowej r . Wynika to z rozwinięcia przebiegu zależności wartości P obligacji od stopy procentowej r – w szereg Taylora. Dzięki temu nie musimy już dalej zakładać, że nieoczekiwane zmiany $h = dr$ stopy procentowej są małe. Jak wykazały badania (por. np. Zaremba, 1995), w przypadku zależności $P(r)$ danej wzorem (4) – wystarczającą dokładność uzyskuje się w analizowanym przypadku przez przybliżenie przyrostu dP tej funkcji przez dwa pierwsze człony rozwinięcia Taylora. Mamy zatem

$$dP = P(r + dr) - P(r) = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 \quad (18)$$

oraz biorąc pod uwagę postać funkcji $P(r)$ daną przez zależność (4),

$$dP = - \left[\sum_{t=1}^T t C_t (1+r)^{-t} \right] \frac{dr}{1+r} + \frac{1}{2} \left[\sum_{t=1}^T t(t+1) C_t (1+r)^{-t} \right] \left(\frac{dr}{1+r} \right)^2. \quad (19)$$

Z definicji (6) współczynnika wagowego x_t mamy

$$P x_t = C_t (1+r)^{-t}. \quad (20)$$

A zatem, z (19) i (20) otrzymamy

$$dP = P \left\{ - \left[\sum_{t=1}^T t x_t \right] \frac{dr}{1+r} + \left[\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t(t+1) x_t \right] \left(\frac{dr}{1+r} \right)^2 \right\}, \quad (21)$$

a stąd

$$\frac{dP}{P} = - \left[\sum_{t=1}^T t x_t \right] \frac{dr}{1+r} + \left[\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t(t+1) x_t \right] \left(\frac{dr}{1+r} \right)^2. \quad (22)$$

W powyższym wzorze, wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie kwadratowym jest równe parametrowi *okresowości* D obligacji; por. (9).

Natomiast wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym nazywane jest wypukłością V obligacji. Uwzględniając dodatkowo (6), mamy zatem

$$V = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t(t+1)x_t = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)C_t}{(1+r)^t} / P. \quad (23)$$

Ponadto, z (22) oraz (9) i (23), uwzględniając $dr = d(1+r)$, otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -D \times \Delta_r + V \times (\Delta_r)^2, \quad (24)$$

gdzie $\Delta_r = \frac{d(1+r)}{1+r}$.

Biorąc pod uwagę (23) oraz wzór (4) określający funkcję $P(r)$, można łatwo sprawdzić, że zachodzi

$$V = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \frac{(1+r)^2}{P}. \quad (25)$$

Wyrażenie (25) określa więc alternatywną w stosunku do (23) definicję wypukłości V obligacji.

Z porównania wyprowadzonych powyżej zależności (11) i (24) wynika, że oszacowanie względnej zmiany (dP/P) wartości obligacji tylko przy pomocy parametru okresowości D jest zbyt "konserwatywne". A mianowicie, z (24) wynika, że zarówno przy spadku stopy procentowej r ($dr < 0$) jak i przy wzroście tej stopy ($dr > 0$) - wartość (dP/P) jest wyższa niż by to wynikało tylko z parametru okresowości D rozpatrywanego oddzielnie. Musimy więc w analizowanym przypadku uwzględnić "poprawkę" $V \times (\Delta_r)^2$ wynikającą z wypukłości zależności funkcyjnej $P(r)$. Ujmując to jeszcze inaczej, oszacowanie wartości (dP/P) tylko na podstawie parametru okresowości D wiąże się bezpośrednio z linearyzacją analizowanego zagadnienia. Zauważmy bowiem, że wartość okresowości D zależy bezpośrednio od pierwszej pochodnej ($\partial P / \partial r$) przebiegu funkcji $P(r)$; por. (14). Natomiast wprowadzając do rozważań parametr wypukłości V bierzemy również pod uwagę drugą pochodną związku $P(r)$; wynika to bezpośrednio ze wzoru (25).

Własności parametru wypukłości V obligacji. Jak to przedstawimy dokładniej w dalszej części tego punktu, w literaturze przedmiotu wprowadza się często pojęcia tzw. zmodyfikowanej okresowości D_m oraz zmodyfikowanej wypukłości V_m obligacji; Fabozzi (2000). Parametry te definiuje się następująco:

$$D_m = D / (1+r) \quad \text{oraz} \quad V_m = V / (1+r)^2;$$

gdzie D , V - odpowiednio okresowość i wypukłość Macaulaya. W przypadku płaskiej struktury terminowej stóp procentowych można wykazać następujące własności parametru zmodyfikowanej wypukłości V_m obligacji (por. Jajuga, 1995):

- (i) Ze wzrostem rynkowej stopy procentowej r maleje wypukłość V_m obligacji.
- (ii) Ze wzrostem terminu do wykupu T wzrasta wypukłość V_m obligacji; przy tej samej stopie procentowej r oraz tym samym oprocentowaniu $i = C/N$ odsetek.
- (iii) Im wyższy jest parametr okresowości D_m obligacji, tym większa jest wypukłość V_m tej obligacji; tym wyższe jest również tempo wzrostu tej wypukłości.
- (iv) Im wyższe jest oprocentowanie $i = C/N$ obligacji tym większa jest wypukłość V_m obligacji; przy tej samej stopie procentowej r oraz przy równych okresowościach D_m .
- (v) Im wyższe jest oprocentowanie $i = C/N$ obligacji tym mniejsza jest wypukłość V_m obligacji; przy tej samej stopie procentowej r oraz przy tym samym terminie do wykupu T .

Powrócimy teraz do klasycznej definicji Macaulaya wypukłości V obligacji.

Zasada dominacji (Zaremba, 1995): Dla dwóch różnych obligacji A i B mówimy, że obligacja A dominuje (ściśle dominuje) nad obligacją B o ile dla dowolnego przesunięcia krzywej dochodowości (w górę lub w dół) o wartość dr , zachodzi

$$\frac{dP_A}{P_A} \geq \frac{dP_B}{P_B} \quad \left(\frac{dP_A}{P_A} > \frac{dP_B}{P_B} \right). \quad (26)$$

Stosujemy wówczas następujące oznaczenie: $A \geq B$ $A > B$.

Lemat 1.

Dla płaskiej krzywej dochodowości oraz dla dwóch dowolnych obligacji A i B o tej samej okresowości $D_A = D_B$ oraz $V_A > V_B$, mamy $A > B$, tj.

$$\frac{dP_A}{P_A} > \frac{dP_B}{P_B},$$

dla dowolnych, nieoczekiwanych zmian dr rynkowej stopy procentowej.

Dowód: Z zależności (24), biorąc pod uwagę założenia lematu, otrzymamy

$$(dP_A / P_A) - (dP_B / P_B) = (V_A - V_B)(\Delta_r)^2 > 0,$$

ponieważ dla $dr \neq 0$ zachodzi $\Delta_r \neq 0$;

c.n.d. ■

Dowód powyższego lematu można nietrudno uogólnić na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz dla następującego założonego schematu dynamiki zmian tej krzywej:

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = L^{t-1} \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}}; \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (27)$$

gdzie r_{0t} - stopa procentowa *spot*, $L \in (0,1)$ - dany parametr; por. Zaremba (1995).

Z Lematu 1 wypływa następujący ważny wniosek. A mianowicie, przyjmując, że przedstawione powyżej założenia co do dynamiki zmian analizowanej krzywej dochodowości są w przybliżeniu spełnione, spośród wszystkich obligacji o tej samej okresowości D zawsze opłaca się wybrać obligację o wyższej wypukłości V . Bowiem wówczas, wzrost wartości obligacji przy nieoczekiwanym spadku stóp procentowych będzie wyższy, natomiast spadek wartości tej obligacji towarzyszący wzrostowi stóp procentowych będzie niższy – niż w przypadku obligacji o mniejszej wypukłości. W teorii obligacji mówi się w tym przypadku o tzw. *efekcie wypukłości*. Ilustrację graficzną tego efektu można znaleźć m.in. w pracy Jajugi (1996). Ma to szczególne odniesienie do przypadku obligacji czysto-dyskontowych. Mamy bowiem:

Wypukłość V obligacji czysto-dyskontowej. Dla obligacji czysto-dyskontowej o terminie do wykupu równym T , biorąc pod uwagę (15), (16) oraz ogólną definicję wypukłości (23), otrzymamy

$$V = \frac{1}{2}T(T+1). \quad (28)$$

Dla obligacji tej obowiązuje następujący lemat:

Lemat 2

Dla płaskiej krzywej dochodowości oraz dla dwóch dowolnych obligacji A i B , przy czym B jest obligacją czysto-dyskontową o tej samej okresowości co obligacja A , tj. $D_B = D_A$, zachodzi:

$$V_A > V_B; \text{ a zatem } A > B, \text{ tj.} \quad (29)$$

$$\frac{dP_A}{P_A} > \frac{dP_B}{P_B},$$

dla dowolnych, nieoczekiwanych zmian dr rynkowej stopy procentowej.

Dowód: Ze wzoru (17) na okresowość obligacji czysto-dyskontowej mamy $D_B = T_B$, gdzie T_B - termin do wykupu tej obligacji. Natomiast ze wzoru (9) na okresowość dowolnej obligacji mamy $D_A = \sum_{t=1}^T x_t t$. Tak więc z założenia lematu, że $D_B = D_A$ otrzymamy

$$T_B = \sum_{t=1}^T x_t t. \quad (30)$$

Uwzględniając (28) oraz (30) mamy zatem (dla uproszczenia zapisu indeks dolny i indeks górny przy znaku sumy pomijamy)

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{1}{2} T_B (T_B + 1) = \frac{1}{2} (T_B^2 + T_B) = \\ &= \frac{1}{2} [(\sum tx_t)^2 + (\sum tx_t)] < \frac{1}{2} [\sum t^2 x_t + \sum tx_t] = \\ &= \frac{1}{2} \sum t(t+1)x_t = V_A. \end{aligned} \quad (31)$$

W wyrażeniu (31) wykorzystaliśmy fakt następującej nierówności

$$\left(\sum_{t=1}^T x_t t \right)^2 < \sum_{t=1}^T x_t t^2; \quad \text{dla } x_t \in (0,1); \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (32)$$

oraz $\sum x_t = 1$.

c.n.d. ■

Dowód powyższego lematu pochodzi z pracy *L. Zaremby* (1995). W pracy tej wykazano również prawdziwość Lematu 2 dla bardziej ogólnego przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz dla następującego założonego schematu dynamiki zmian tej krzywej:

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}}, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (33)$$

Zauważmy, że założenie (33) co do możliwej ewolucji z upływem czasu bieżącej analizowanej krzywej dochodowości jest znacznie bardziej

ograniczające niż założenie (27), na mocy którego nie wymaga się ściśle proporcjonalnych zmian czynnika 1 plus stopa procentowa r .

Analizowany powyżej Lemat 2 ma duże znaczenie z punktu widzenia zastosowań praktycznych. A mianowicie, okazuje się, że spośród wszystkich obligacji o tym samym parametrze okresowości D , obligacja czysto-dyskontowa charakteryzuje się najmniejszą wypukłością. Poprzednio wykazaliśmy, że obligacja ta ma z kolei najwyższy parametr okresowości D , spośród wszystkich obligacji o tym samym terminie do wykupu T .

A zatem, biorąc pod uwagę najmniejszą wypukłość obligacji czysto-dyskontowej, obligacja ta ma najmniej korzystne własności z punktu widzenia ryzyka stopy procentowej, spośród wszystkich obligacji (bądź portfeli obligacji) o tej samej okresowości. Obligacje te (a więc obligacje wielokuponowe) ściśle dominują bowiem obligację czysto-dyskontową, w sensie definicji (26). Oczywiście powyższe stwierdzenie jest prawdziwe z zastrzeżeniem, że spełnione jest (przynajmniej w przybliżeniu) poczynione uprzednio założenie (33), co do analizowanej dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych.

Portfele obligacji o maksymalnej wypukłości. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych, interesującym zagadnieniem jest poszukiwanie portfela obligacji o maksymalnej wypukłości, wśród klasy portfeli – o tym samym parametrze okresowości. Należy się bowiem spodziewać, że portfel taki – ponownie, przy zachowaniu stosownych założeń co do dynamiki zmian krzywej dochodowości – będzie zapewniał najwyższą nieoczekiwaną stopę zwrotu (dP/P). Otóż nie wnikając bliżej w szczegóły matematyczne można stwierdzić, że im większe jest rozproszenie strumieni finansowych C_t portfela obligacji wokół punktu na osi czasu wyznaczonym przez wartość parametru okresowości D tego portfela, tym większa jest jego wypukłość V . Natomiast portfelem spełniającym ów warunek największego rozproszenia rozpatrywanych strumieni finansowych C_t - jest tzw. portfel sztangowy (*barbell*); por. rysunek 2. Fakt ten, udowodniono dla schematu (33) dynamiki zmian krzywej dochodowości w pracy Zaremby (1998). Natomiast w pracy Zaremby, Smoleńskiego (1998) przeprowadzono ten dowód dla przypadku schematu znacznie bardziej ogólnego, tj.

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = g_t \frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}}; \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (34)$$

gdzie $g_t \neq 0$ - dany współczynnik (wyznaczany na podstawie obserwacji z przeszłości).

3.3. Parametry okresowości i wypukłości portfela obligacji

Wprowadzimy teraz wzory na okresowość i wypukłość portfela P obligacji. Ogólnie rzecz biorąc portfel P możemy traktować jako kombinację wypukłą obligacji O_i ($i = 1, \dots, N$), traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej obligacji. Mamy zatem

$$P = \sum_{i=1}^N w_i O_i - \text{portfel obligacji}, \quad (35)$$

gdzie w_i - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu P ;

$$\text{przy czym } w_i \in (0,1), \forall i = 1, \dots, N; \text{ oraz } \sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (36)$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

C_t^i - strumień finansowe wynikające z nabycia obligacji O_i (tj. odsetki C^i oraz wartość nominalna N^i), $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, N$,

P_i - wartość bieżąca obligacji O_i ,

l_i - liczba obligacji O_i nabytych do portfela P ,

$B_i = l_i P_i$ - łączna wartość wszystkich obligacji O_i w portfelu P ,

$$P = \sum_{i=1}^N B_i = \sum_{i=1}^N l_i P_i - \text{wartość bieżąca portfela P} .$$

Udział wartościowy w_i obligacji O_i w portfelu P jest więc równy

$$w_i = \frac{B_i}{P} = \frac{l_i P_i}{P} = l_i P_i / \sum_{i=1}^N l_i P_i . \quad (37)$$

Z wyprowadzonych poprzednio dla pojedynczej obligacji wzorów (4) oraz (9), dla obligacji O_i mamy następujące wzory na wartość P_i oraz okresowość D_i :

$$P_i = \sum_{t=1}^T \frac{C_t^i}{(1+r)^t}, \quad (38)$$

$$D_i = \sum_{t=1}^T \frac{t C_t^i}{(1+r)^t} / P_i . \quad (39)$$

Natomiast wartość bieżąca P portfela P obligacji jest równa

$$P = \sum_{i=1}^N l_i P_i = \sum_{i=1}^N l_i \sum_{t=1}^T \frac{C_t^i}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^T \frac{\sum_{i=1}^N l_i C_t^i}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}, \quad (40)$$

gdzie

$$F_t = \sum_{i=1}^N l_i C_t^i - \text{strumienie finansowe portfela obligacji, } t = 1, \dots, T. \quad (41)$$

Z wyprowadzonego powyżej wzoru (40) wynika, że portfel P obligacji jest pewną sztucznie utworzoną obligacją o strumieniach finansowych F_t danych wzorem (41). Strumienie te są po prostu sumami iloczynów liczby obligacji l_i danego typu oraz strumieni finansowych C_t^i tych obligacji. Z powyższego wynika, że parametr okresowości D_p portfela obligacji wyraża się tym samym wzorem co parametr okresowości pojedynczej obligacji; z (9) mamy zatem

$$D_p \triangleq \sum_{t=1}^T \frac{tF_t}{(1+r)^t} / P = \left\{ \sum_{t=1}^T t \frac{\sum_{i=1}^N l_i C_t^i}{(1+r)^t} \right\} / P = \sum_{i=1}^N l_i \left[\sum_{t=1}^T t \frac{C_t^i}{(1+r)^t} \right] / P. \quad (42)$$

$$\text{Natomiast z (37) mamy} \quad l_i = w_i \frac{P}{P_i}. \quad (43)$$

Podstawiając (43) do (42) otrzymamy

$$D_p = \sum_{i=1}^N w_i \left[\sum_{t=1}^T t \frac{C_t^i}{(1+r)^t} \right] / P_i; \quad (44)$$

oraz biorąc pod uwagę (39) i (44)

$$D_p = \sum_{i=1}^N w_i D_i. \quad (45)$$

Wykazaliśmy zatem, że okresowość D_p portfela P obligacji jest *kombinacją wypukłą* okresowości D_i poszczególnych obligacji, wchodzących w skład tego portfela.

Wyprowadzenie wzoru na wypukłość V_p portfela obligacji jest następujące. Dla pojedynczej obligacji O_i , wypukłość V_i tej obligacji jest dana wzorem (23), tj.

$$V_i \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[t(t+1) \frac{C_t^i}{(1+r)^t} \right] / P_i. \quad (46)$$

Również dla portfela P obligacji, który, jak już wspomnieliśmy, możemy traktować jako pewną obligację syntetyczną o strumieniach finansowych F_t - obowiązuje wzór (23), definiujący parametr wypukłości V_p , tj.

$$\begin{aligned} V_p &\triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[t(t+1) \frac{F_t}{(1+r)^t} \right] / P = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[t(t+1) \frac{\sum_{i=1}^N l_i C_t^i}{(1+r)^t} \right] / P = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ l_i \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[t(t+1) \frac{C_t^i}{(1+r)^t} \right] / P \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Podstawiając (43) do (47) otrzymamy

$$V_p = \sum_{i=1}^N w_i \left\{ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[t(t+1) \frac{C_t^i}{(1+r)^t} \right] / P_i \right\}; \quad (48)$$

oraz biorąc pod uwagę (46) i (48)

$$V_p = \sum_{i=1}^N w_i V_i. \quad (49)$$

Otrzymaliśmy zatem, że wypukłość V_p portfela P obligacji jest *kombinacją wypukłą* parametrów wypukłości V_i obligacji wchodzących w skład tego portfela.

Wyprowadzone powyżej wzory (45) i (49) na okresowość i wypukłość portfela P obligacji mają duże znaczenie dla zastosowań praktycznych. A mianowicie, dobierając odpowiednio udziały wartościowe $w_i = B_i / P$ poszczególnych obligacji O_i w portfelu P możemy utworzyć w ten sposób pewną obligację syntetyczną o odpowiednich – wymaganych przez nas – parametrach okresowości D_p i wypukłości V_p . Możemy więc w ten sposób kształtować odpowiednią wrażliwość analizowanego portfela obligacji na ryzyko stóp procentowych. Co więcej, wzory (45) i (49) można łatwo uogólnić na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie - o ile tylko dynamika zmian z upływem czasu bieżącego rynkowych stóp procentowych *spot* $r_{0,t}$, przebiega według schematu (34); por. Zaremba (1995).

3.4. Zmodyfikowane parametry okresowości i wypukłości obligacji

W punkcie 3.2, wykorzystując definicję Macaulaya okresowości i wypukłości obligacji wyprowadziliśmy wzór (24) na względną zmianę (dP/P) wartości obligacji wywołaną nieoczekiwaną zmianą stopy procentowej, tj.

$$\frac{dP}{P} = -D \times \Delta_r + V \times (\Delta_r)^2, \quad (50)$$

$$\text{gdzie } \Delta_r = \frac{d(1+r)}{1+r} \quad \text{oraz} \quad \frac{dP}{P} = \frac{P(r+dr) - P(r)}{P(r)}. \quad (51)$$

Ponieważ korzystanie ze wzoru (50) jest nieco niewygodne ze względu na sposób określenia przyrostu Δ_r , wprowadza się niekiedy następującą modyfikację definicji okresowości i wypukłości obligacji (Fabozzi, 2000)

$$D_m = \frac{D}{1+r} = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P}, \quad (52)$$

$$V_m = \frac{V}{(1+r)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \frac{1}{P}, \quad (53)$$

gdzie D , V - parametry okresowości i wypukłości Macaulaya. Biorąc pod uwagę zależności (50) – (53) otrzymamy następujący wzór na względną zmianę wartości obligacji spowodowaną nieoczekiwaną zmianą dr stopy procentowej:

$$\frac{dP}{P} = -D_m(dr) + V_m(dr)^2, \quad (54)$$

gdzie dr - przyrost skończony.

3.5. Okresowość i wypukłość obligacji w przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek

Wzory (52), (53) definiujące zmodyfikowaną okresowość i zmodyfikowaną wypukłość obligacji są również użyteczne w przypadku, gdy rozpatrujemy tzw. *ciągłą kapitalizację odsetek*. A mianowicie, gdy rozpatrujemy kapitalizację odsetek w dyskretnych chwilach czasu $t=1, \dots, T$, z wielokrotnie już cytowanego wzoru (4) na wartość bieżącą obligacji, mamy

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^T d_t C_t, \quad (55)$$

gdzie $d_t = (1+r)^{-t}$ - tzw. czynnik dyskontowy (*discount factor*).

Otóż często w modelach immunizacyjnych przybliża się ów czynnik dyskontujący d_t , czynnikiem charakterystycznym dla ciągłej kapitalizacji odsetek tj.

$$d_t = \frac{1}{(1+r)^t} \approx e^{-rt}. \quad (56)$$

Warto podkreślić, że dla ciągłej kapitalizacji odsetek obowiązuje następująca zależność dokładna, wynikająca wprost z definicji stałej Eulera e :

$$d_t = \frac{1}{(1+r/m)^{mt}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^{-rt}, \quad (57)$$

gdzie r - stopa procentowa w skali jednego roku, m - liczba kapitalizacji odsetek w ciągu jednego roku.

Można ogólnie stwierdzić, że przybliżenie (56) czynnika dyskontującego d_t jest wystarczająco dokładne dla niezbyt wysokich - co do wartości bezwzględnych - rynkowych stóp procentowych r (na przykład, wynoszących nie więcej niż kilkanaście procent). Biorąc pod uwagę (55) i (56), dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek otrzymamy

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^T C_t e^{-rt}. \quad (58)$$

Podobnie jak w przypadku dyskretnej kapitalizacji odsetek, oznaczmy

$$x_t = C_t e^{-rt} / P. \quad (59)$$

Dla małych zmian dr rynkowej stopy procentowej mamy

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr. \quad (60)$$

Z (60), uwzględniając (58) i (59), otrzymamy

$$dP = - \left[\sum_{t=1}^T t C_t e^{-rt} \right] dr = -P \times \left[\sum_{t=1}^T t x_t \right] dr. \quad (61)$$

Wyrażenie występujące w powyższym wzorze w nawiasie kwadratowym nazwiemy okresowością D_c obligacji dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek, tj.

$$D_c \triangleq \sum_{t=1}^T x_t t = \sum_{t=1}^T t C_t e^{-rt} / P. \quad (62)$$

Z (61) i (62) mamy zatem

$$dP = -P \times D_c dr, \quad (63)$$

a stąd (oszacowanie względnej zmiany wartości obligacji)

$$\frac{dP}{P} = -D_c dr \quad \text{oraz} \quad (64)$$

$$D_c = -\frac{dP}{P} / dr. \quad (65)$$

Natomiast dla nieskończenie małych przyrostów dr z (65) otrzymamy

$$D_c = -\frac{dP}{dr} / P \xrightarrow{dr \rightarrow 0} -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P}, \quad (66)$$

tak więc

$$D_c = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P}. \quad (67)$$

Wykorzystując rozwinięcie przebiegu funkcji $P(r)$ w szereg Taylora, mamy

$$dP = P(r + dr) - P(r) = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2, \quad (68)$$

oraz biorąc pod uwagę postać funkcji $P(r)$ daną wzorem (58),

$$dP = -\left[\sum_{t=1}^T t C_t e^{-rt} \right] dr + \frac{1}{2} \left[\sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-rt} \right] (dr)^2. \quad (69)$$

Z definicji (59) współczynnika wagowego x_t mamy

$$P x_t = C_t e^{-rt}. \quad (70)$$

A zatem, z (69) i (70) otrzymamy

$$dP = P \left\{ -\left[\sum_{t=1}^T x_t t \right] dr + \left[\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t t^2 \right] (dr)^2 \right\},$$

a stąd

$$\frac{dP}{P} = -\left[\sum_{t=1}^T x_t t \right] dr + \left[\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t t^2 \right] (dr)^2. \quad (71)$$

Wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie kwadratowym powyższego wzoru jest równe parametrowi *okresowości* D_c obligacji; por. (62). Natomiast wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym nazywane jest *wypukłością* V_c obligacji, dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek. Uwzględniając dodatkowo (59), mamy zatem

$$V_c \triangleq \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T x_t t^2 = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-rt} / P. \quad (72)$$

Ponadto, z (71) oraz (62) i (72) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -D_c dr + V_c (dr)^2 \quad (73)$$

dla skończonych przyrostów dr .

Biorąc pod uwagę definicję (72) wypukłości V_c oraz wzór (58) określający funkcję $P(r)$, można łatwo sprawdzić, że zachodzi

$$V_c = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \frac{1}{P}. \quad (74)$$

Wzór (74) jest więc alternatywną definicją wypukłości obligacji dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek.

Zauważmy, że wprowadzone poprzednio wzory (52) oraz (53) na zmodyfikowaną okresowość D_m i wypukłość V_m obligacji mają identyczną "zewnątrzną" postać jak wyprowadzone powyżej wzory (67) i (74) na okresowość D_c i wypukłość V_c obligacji, przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek. Również wzory (54) i (73) określające względną zmianę (dP/P) wartości obligacji są identyczne. Jednak należy podkreślić, że jest to podobieństwo pozorne. Otóż wzory (52) – (54) dotyczą dyskretnej kapitalizacji odsetek, a więc funkcji $P(r)$ danej równaniem wyceny (55). Natomiast wzory (67), (74) oraz (73) dotyczą funkcji $P(r)$ danej równaniem (58), a więc przy założeniu ciągłej kapitalizacji odsetek.

Z wyprowadzonych powyżej wzorów (62) i (72), definiujących okresowość D_c oraz wypukłość V_c obligacji w przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek, korzystać będziemy w końcowej części niniejszej pracy, w trakcie analizy zagadnienia tzw. czynnikowej immunizacji portfela obligacji.

4. Immunizacja oraz optymalizacja portfela obligacji

Powrócimy teraz do klasycznych definicji Macaulaya parametrów okresowości i wypukłości obligacji oraz udowodnimy tzw. podstawowe twierdzenie o immunizacji portfela ze względu na pojedyncze zobowiązanie finansowe. Podamy również interpretację matematyczną tego twierdzenia oraz przedstawimy jego dowód. Dowód ten został wyprowadzony przez autora niniejszej pracy niezależnie od innych dowodów z tego zakresu, jakie można znaleźć w literaturze przedmiotu; por. Bierwag (1987). W dalszej

kolejności, przedstawimy zagadnienie optymalnego wyboru zimmunizowanego portfela obligacji.

W prowadzonych rozważaniach dla uproszczenia założymy, że struktura terminowa stóp procentowych *spot* jest płaska, tj.

$$r_{0t} = r \quad \text{oraz} \quad dr_{0t} = dr; \quad \forall t = 1, \dots, T,$$

gdzie dr - przyrost skończony; por. interpretacja założeń (2), (3) podana w punkcie 3 pracy.

Twierdzenie 1 (*Podstawowe twierdzenie o immunizacji*):

- (i) Załóżmy, że zadany jest horyzont inwestycyjny h , przy czym w chwili $\tau = h$ inwestor musi spłacić zobowiązanie finansowe (*liability*) L . W celu wypełnienia tego zobowiązania oraz osiągnięcia ewentualnie dodatkowych zysków (*excess return*) inwestor kupuje na rynku w chwili $\tau = 0$ portfel obligacji o określonej strukturze strumieni finansowych.
- (ii) Ponadto, założymy, że wartość bieżąca zobowiązania finansowego L w chwili początkowej $\tau = 0$, wynikająca ze zdyskontowania zobowiązania L na chwilę bieżącą według obowiązującej w chwili $\tau = 0$ rynkowej stopy procentowej r – jest zadana i równa wartości początkowej $P = P_0$ analizowanego portfela obligacji.
- (iii) Należy tak dobrać strumienie finansowe analizowanego portfela obligacji, aby przyszła wartość tego portfela w chwili $\tau = h$ była równa co najmniej wartości L przyszłego zobowiązania finansowego. Co więcej ma to nastąpić niezależnie od nieoczekiwanych zmian dr rynkowej stopy procentowej r , jaka może wystąpić bezpośrednio po zakupie rozpatrywanego portfela.

Portfelem spełniającym postulaty (i) – (iii) – dla niezbyt dużej zmiany dr stopy procentowej - jest każdy portfel obligacji, którego parametr okresowości (Macaulaya) D jest równy horyzontowi inwestycjnemu h ; tj.

$$D = h .$$

Dowód (*A. Jakubowski*)

Przed przeprowadzeniem właściwego dowodu, dokonamy następującej interpretacji założeń rozpatrywanego twierdzenia. Przyjmijmy, że mamy do dyspozycji obligację (lub portfel obligacji) o strumieniach finansowych C_t , $t = 1, \dots, h, \dots, T$. Przyjmijmy również, że w chwili h mamy spłacić zobowiązanie finansowe L . Celem naszym jest taki dobór parametrów obligacji (lub portfela obligacji) aby po upływie okresu h wartość wypadkowa inwestycji

w daną obligację była równa L niezależnie od losowych zmian rynkowej stopy procentowej r .

Wprowadzimy oznaczenia: $\tau = 0, 1, 2, 3, \dots$ - czas bieżący;

$V_h(r)$ - wartość inwestycji w obligację w chwili $\tau = h$, jako funkcja rynkowej stopy procentowej r ;

$$P = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^t} - \text{wartość bieżąca obligacji dla chwili } \tau = 0;$$

$$P_L = \frac{L}{(1+r)^h} - \text{wartość bieżąca zobowiązania finansowego } L \text{ dla } \tau = 0.$$

Wartość inwestycji w obligację brana pod uwagę w przyszłej chwili $\tau = h$ jest następująca:

$$V_h = \sum_{\tau=1}^h C_{\tau}(1+r)^{h-\tau} + \sum_{\tau=1}^{T-h} \frac{C_{h+\tau}}{(1+r)^{\tau}}. \quad (75)$$

Jak więc można zauważyć, wartość ta składa się z dwóch członów, przy czym członki te zależą w sposób przeciwny od ryzyka stopy procentowej r . Ze spadkiem stopy procentowej r spadają bowiem wpływy z reinwestycji (na chwilę $\tau = h$) odsetek C_{τ} od obligacji. Mówimy w tym przypadku o tzw. ryzyku reinwestowania (*reinvestment risk*). Jednocześnie, ze spadkiem stopy procentowej r wzrasta wartość rynkowa obligacji rozpatrywanej (w chwili $\tau = h$) dla horyzontu czasowego $T-h$. Wynika to bezpośrednio z drugiego członki wzoru (75). Odwrotna sytuacja występuje przy założeniu wzrostu stopy r ; wzrasta bowiem wówczas pierwszy człon wzoru (75) wynikający z reinwestycji odsetek według wyższej stopy procentowej. Maleje natomiast człon drugi, bowiem przy wzroście stopy procentowej maleje wartość rynkowa analizowanej obligacji, rozpatrywana w chwili $\tau = h$; mówimy w tym przypadku o tzw. ryzyku okresu posiadania lub o ryzyku cenowym (*holding period risk, price risk*).

Podstawowym pytaniem, jakie można w analizowanym przypadku sformułować jest następujące pytanie: dla jakiego okresu h wskazane powyżej przeciwny zmiany dwóch członów wyrażenia (75) spowodowane losowymi zmianami stopy procentowej r - całkowicie się znoszą tak, że wartość inwestycji $V_h(r)$ pozostaje niezmienna. Innymi słowy, pytaniem jest - dla jakiego horyzontu inwestycyjnego h ryzyko reinwestowania jest całkowicie kompensowane przez ryzyko cenowe rozpatrywanej obligacji. Odpowiedzią na to pytanie jest właśnie *podstawowe twierdzenie o immunizacji*. A mianowicie, dla horyzontu czasowego h równego okresowości D analizowanej obligacji (bądź portfela obligacji) oba wspomniane

powyżej rodzaje ryzyka stopy procentowej całkowicie się kompensują; przynajmniej dla niedużych zmian dr stopy procentowej r . Tak więc dla zadanego horyzontu inwestycyjnego h wystarczy dostosować do tego horyzontu okresowość D rozpatrywanej obligacji (aby zachodziło $h = D$) i wówczas wartość inwestycji $V_h(r)$ jest niezależna od ryzyka stopy procentowej. Dowód tego twierdzenia jest następujący:

Krok 1. Żądamy, aby wartość $V_h(r)$ inwestycji w analizowaną obligację w chwili $\tau = h$ była równa zobowiązaniu finansowemu L , przy zadanej (niezmiennej) rynkowej stopie procentowej r . Czyli, rozpisując dokładniej wzór (75), otrzymamy

$$V_h(r) = C_1(1+r)^{h-1} + \dots + C_{h-1}(1+r) + C_h + \frac{C_{h+1}}{1+r} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-h}} = L. \quad (76)$$

Dzieląc obie strony powyższego równania przez $(1+r)^h$, mamy

$$\frac{C_1}{1+r} + \dots + \frac{C_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} + \frac{C_h}{(1+r)^h} + \frac{C_{h+1}}{(1+r)^{h+1}} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^T} = \frac{L}{(1+r)^h}, \quad (77)$$

a stąd $P = P_L$ (z definicji). (78)

Otrzymaliśmy więc, że warunkiem koniecznym analizowanego zagadnienia immunizacji jest aby wartość bieżąca P obligacji (lub portfela obligacji) była równa wartości bieżącej P_L przyszłego zobowiązania finansowego L .

Krok 2. Żądamy również, aby równość (76) była spełniona nawet w warunkach nieoczekiwanej (małej) zmiany rynkowej stopy r o wartość dr .

Rozwijając funkcję $V_h(r)$ w szereg Taylora, mamy

$$V_h(r+dr) - V_h(r) = \frac{\partial V_h}{\partial r}(r)dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_h}{\partial r^2}(r)(dr)^2 + \dots \quad (79)$$

A zatem, dla małych zmian dr otrzymamy

$$V_h(r+dr) - V_h(r) \approx \frac{\partial V_h}{\partial r}(r) dr, \quad \text{a stąd} \quad (80)$$

$$V_h(r+dr) \approx V_h(r) = L \quad \text{dla} \quad \frac{\partial V_h}{\partial r}(r) = 0. \quad (81)$$

Ze wzoru (76), definiującego funkcję $V_h(r)$, mamy zatem

$$\frac{\partial V_h}{\partial r}(r) = (h-1)C_1(1+r)^{h-2} + \dots + C_{h-1} + 0 - \frac{C_{h+1}}{(1+r)^2} - \frac{(T-h)C_T}{(1+r)^{T-h+1}} = 0. \quad (82)$$

Dzieląc obie strony powyższego równania przez $(1+r)^{h-1}$, otrzymamy

$$\frac{(h-1)C_1}{1+r} + \dots + \frac{C_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} + 0 - \frac{C_{h+1}}{(1+r)^{h+1}} - \dots - \frac{(T-h)C_T}{(1+r)^T} = 0. \quad (83)$$

Równanie (83) przekształcamy do następującej postaci

$$\begin{aligned} & \frac{(h-1)C_1}{1+r} + \dots + \frac{[h-(h-1)]C_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} + \frac{(h-h)C_h}{(1+r)^h} - \frac{[h-(h+1)]C_{h+1}}{(1+r)^{h+1}} + \\ & - \dots - \frac{(h-T)C_T}{(1+r)^T} = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Stąd,

$$\begin{aligned} & \frac{1 \times C_1}{1+r} + \dots + \frac{(h-1)C_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} + \frac{hC_h}{(1+r)^h} + \frac{(h+1)C_{h+1}}{(1+r)^{h+1}} + \dots + \frac{TC_T}{(1+r)^T} = \\ & = h \left[\frac{C_1}{1+r} + \dots + \frac{(h-1)C_{h-1}}{(1+r)^{h-1}} + \frac{C_h}{(1+r)^h} + \frac{C_{h+1}}{(1+r)^{h+1}} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^T} \right]. \end{aligned} \quad (85)$$

A zatem,

$$\sum_{t=1}^T \frac{tC_t}{(1+r)^t} = h \times \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^t} = h \times P, \quad \text{czyli} \quad (86)$$

$$\sum_{t=1}^T \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P = h, \quad (87)$$

Biorąc pod uwagę (9) i (87) otrzymujemy zatem

$$D = h, \quad (88)$$

gdzie D - parametr okresowości (*Macaulaya*) rozpatrywanej obligacji.

Wykazaliśmy więc, że warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby analizowana obligacja (lub portfel obligacji) była immunizowana ze względu na pojedyncze zobowiązania firmowe L w chwili $\tau = h$ - są warunki (78) oraz (88); **c.n.d.** ■

Przedstawiony powyżej dowód podstawowego twierdzenia o immunizacji można uogólnić na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie oraz przy założeniu dynamiki możliwych zmian tej krzywej

przebiegającej według schematu (33); por. Zaremba (1998). Kolejne uogólnienie tego dowodu podano w pracy Zaremby, Smoleńskiego (1998), w której założono, że ewolucja zmian krzywej dochodowości z upływem czasu bieżącego może przebiegać według schematu (34).

Oczywiście w praktyce, trudno jest znaleźć pojedynczą obligację spełniającą warunki konieczne i dostateczne immunizacji (78), (88). Dlatego zakładamy, że inwestor tworzy portfel P obligacji O_i ($i = 1, \dots, N$) o udziałach wartościowych w_1, w_2, \dots, w_N i o okresowościach D_1, D_2, \dots, D_N . Portfel ten dobierany jest tak, aby zachodził warunek (78), tj.

$$P = \sum_{i=1}^N l_i P_i = P_L, \quad (89)$$

gdzie l_i - liczba obligacji O_i w portfelu.

Ponadto, ze względu na warunek (88) musi zachodzić

$$\sum_{i=1}^N w_i D_i = h, \quad \text{przy czym} \quad (90)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1; \quad w_i \in [0, 1], \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (91)$$

We wzorze (90) wykorzystaliśmy wyprowadzoną poprzednio zależność (45) na okresowość D_p portfela obligacji.

Zagadnienie optymalizacji. Układ równań (90), (91) ze względu na wektor udziałów wartościowych $[w_i, i = 1, \dots, N]$ ma dla $N > 2$ nieskończenie wiele rozwiązań, co oznacza istnienie wielu możliwych zimmunizowanych portfeli obligacji. W praktyce, można na przykład wybrać ten portfel, który charakteryzuje się najwyższą stopą zwrotu z dokonanej inwestycji. Stopa ta jest pewną funkcją $Q(w_1, w_2, \dots, w_N)$ udziałów wartościowych poszczególnych walorów w portfelu.

Formalnie, rozpatrywane zagadnienie optymalizacji portfela obligacji można zapisać następująco:

$$Q(w_1, w_2, \dots, w_N) \xrightarrow{(w_i)} MAX, \quad (92)$$

przy ograniczeniach (90) i (91).

W literaturze przedmiotu, często dokonuje się linearyzacji funkcji celu $Q(w_1, w_2, \dots, w_N)$ sprowadzając w ten sposób problem (90) – (92) do zagadnienia programowania liniowego; por. Zenios (1993), Francis (1995).

Również w pracach (Bierwag, 1987), (Elton, Gruber, 1995) można znaleźć interesujące przykłady obliczeniowe, ilustrujące zastosowanie analizowanych w tym punkcie *podstawowego twierdzenia o immunizacji*.

5. Analiza czynnikowa dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych

Jednym z nowszych podejść stosowanych dla celów analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych są tzw. wieloczynnikowe modele obligacji, w których wykorzystuje się elementy znanej powszechnie z dziedziny statystyki matematycznej i analizy danych, teorii analizy czynnikowej (*Factor Analysis*); por. Harman (1967).

Modele te są najbardziej ogólne w tym sensie, że w stosunku do dynamiki zmian stóp procentowych *spot* r_{0t} ($t=1, \dots, T$) nie wprowadza się żadnych założeń upraszczających, jak to było w przypadku omówionych poprzednio podejść klasycznych. W zamian za to stawia się hipotezę, że zmiany stóp procentowych r_{0t} dla kolejnych chwil $\tau=1, 2, 3, \dots$, są generowane przez kombinację liniową pewnej zadanej liczby statystycznie niezależnych, tj. ortogonalnych, **czynników wspólnych** (*common factors*). Nie jest przy tym zbyt istotne czy czynniki te mają (czy też nie) określoną interpretację ekonomiczną; jakkolwiek na ogół czynniki te można w określony sposób interpretować.

Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że czynników wspólnych nie należy w żadnym przypadku utożsamiać ze zmiennymi egzogenicznymi rozpatrywanymi powszechnie w klasycznej analizie regresyjnej. Analiza czynnikowa i analiza regresyjna to dwie istotnie różne teorie, u których podstaw stoją różne założenia i przed którymi postawiono różne cele. Celem analizy czynnikowej jest zastąpienie zbioru dużej liczby wzajemnie skorelowanych ze sobą zmiennych, małą liczbą ortogonalnych (a więc nieskorelowanych) czynników, które w możliwie maksymalny sposób przybliżyłyby zasoby informacji reprezentowanej przez zmienne wyjściowe. Tak więc ortogonalizacja i znaczne zmniejszenie wymiarowości zagadnienia to dwa cele, jakie postawiono przed analizą czynnikową.

W modelu czynnikowym obligacji, w miejsce klasycznych definicji okresowości oraz wypukłości obligacji wprowadza się tzw. czynnikową okresowość (*factor duration*), i czynnikową wypukłość (*factor convexity*). Następnie, analizę nieoczekiwanych zmian stopy zwrotu (*excess return*) portfela obligacji, spowodowanych zmianami dr_t ($t=1, \dots, T$) rynkowych stóp procentowych, zastępuje się analizą tych zmian ze względu na zmiany dF_f ($f=1, \dots, m$) wartości zidentyfikowanych uprzednio czynników

wspólnych F_f . Czynniki te, jako wielkości wspólne dla stóp procentowych r_{0t} , nie zależą od okresów do wykupu $t = 1, \dots, T$ (zależą one jedynie od czasu bieżącego $\tau = 1, 2, 3, \dots$). W związku z tym, nie są w rozpatrywanym przypadku potrzebne dodatkowe, upraszczające założenia co do dynamiki zmian stóp r_{0t} - będące podstawą do definiowania prezentowanych poprzednio *formuł Macaulaya*; por. założenia (2)-(3), (33), (27) oraz (34).

Otrzymane w ten sposób czynnikowe modele immunizacji (*multi-factor immunization models*) nabierają ostatnio coraz większego znaczenia dla teorii i praktyki zarządzania portfelami obligacji; mogą one również stanowić podstawę do tworzenia komercyjnych pakietów komputerowego wspomaganie decyzji w tej dziedzinie. Pierwsze prace z tego zakresu zostały opublikowane przez Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) oraz Dahla (1993). Dotyczyły one czynnikowej analizy stóp procentowych oraz konstruowania portfeli immunizacyjnych dla rynków obligacji w USA oraz w Danii. W Polsce, współautorem pierwszych publikacji z tej dziedziny jest autor niniejszej pracy; por. Kulikowski, Jakubowski, Bury (1995, 1996).

Poniżej, przedstawimy podstawy teoretyczne dotyczące rozpatrywanego podejścia.

5.1 Model czynnikowy struktury terminowej

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$r_t = r_{0t}$ - stopa procentowa *spot*, tj. rentowność do wykupu obligacji czysto-dyskontowych o okresie do wykupu $t = 1, 2, 3, \dots, T$ (dla uproszczenia zapisu, pomijamy indeks 0 przy oznaczeniu r_{0t});

$TS(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_t(\tau), \dots, r_T(\tau)]$ - struktura terminowa stóp procentowych *spot* określona przez wektor wartości r_t ($t = 1, \dots, T$) dla kolejnych chwil $\tau = 1, \dots, M$;

$X = [r_{\tau t}]_{M \times T}$ - macierz obserwacji stóp procentowych r_t ($t = 1, \dots, T$) w kolejnych chwilach $\tau = 1, \dots, M$.

Rynkowe stopy procentowe *spot* r_t ($t = 1, \dots, T$) traktujemy jako zmienne losowe, przy czym zakładamy, że dysponujemy macierzą obserwacji X tych zmiennych utworzoną w ten sposób, że t -ta kolumna tej macierzy przedstawia realizację zmiennej losowej r_t w kolejnych chwilach czasowych $\tau = 1, \dots, M$. Kolejne wiersze tej macierzy określone są więc przez wektory wierszowe

$$TS(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_t(\tau), \dots, r_T(\tau)] = [r_{\tau 1}, \dots, r_{\tau t}, \dots, r_{\tau T}] \quad (93)$$

reprezentujące strukturę terminową stóp procentowych TS w chwilach $\tau = 1, \dots, M$.

Wartość średnią oraz wariancję zmiennych r_t (a dokładniej - estymatory tych parametrów) określamy ze wzorów:

$$\bar{r}_t = \frac{1}{M} \sum_{\tau=1}^M r_{\tau t}; \quad t = 1, \dots, T, \quad (94)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{\tau=1}^M (r_{\tau t} - \bar{r}_t)^2; \quad t = 1, \dots, T. \quad (95)$$

Postać macierzy obserwacji X przedstawiono w tabelicy 1.

Tabela 1. Postać macierzy obserwacji $X = [r_{\tau t}]$ o wymiarze $(M \times T)$.

	\bar{r}_1	...	\bar{r}_t	...	\bar{r}_T
$TS(\tau = 1)$	r_{11}	...	r_{1t}	...	r_{1T}
$TS(\tau = 2)$	r_{21}	...	r_{2t}	...	r_{2T}
⋮					
$TS(\tau)$	$r_{\tau 1}$...	$r_{\tau t}$...	$r_{\tau T}$
⋮					
$TS(\tau = M)$	r_{M1}	...	r_{Mt}	...	r_{MT}
	\bar{r}_1		\bar{r}_t		\bar{r}_T
	σ_1		σ_t		σ_T

Na podstawie wartości kolumn macierzy obserwacji X możemy wyznaczyć współczynniki kowariancji, a następnie, współczynniki korelacji między stopami procentowymi r_t oraz r_l ($t, l = 1, \dots, T$); a mianowicie

$$\text{cov}(r_t, r_l) = \frac{1}{M} \sum_{\tau=1}^M r_{\tau t} r_{\tau l} - \bar{r}_t \bar{r}_l, \quad (96)$$

gdzie $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ - estymator kowariancji pomiędzy zmiennymi losowymi;

$$\text{oraz} \quad \rho_{tl} = \rho(r_t, r_l) = \frac{\text{cov}(r_t, r_l)}{\sigma_t \sigma_l}, \quad (97)$$

gdzie $\rho(\dots)$ - estymator współczynnika korelacji między zmiennymi losowymi.

Dla współczynników korelacji ρ_{it} mamy

$$\rho_{it} = 1, \quad \rho_{it} = \rho_{ti}, \quad \forall t, i = 1, \dots, T. \quad (98)$$

Współczynniki korelacji ρ_{it} ($t, i = 1, \dots, T$) tworzą *macierz korelacji* R o wymiarze $(T \times T)$; postać tej macierzy przedstawiono w Tablicy 2.

Tablica 2. Macierz współczynników korelacji między zmiennymi r_t, r_i ; $t, i = 1, \dots, T$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Macierz współczynników korelacji pomiędzy stopami procentowymi r_t, r_i ($t, i = 1, \dots, T$) ma zasadnicze znaczenie dla prezentowanej dalej *metody analizy czynnikowej*; stanowić bowiem ona będzie punkt wyjściowy do dalszych rozważań.

Dokonyjemy teraz standaryzacji stóp procentowych r_t ($t = 1, \dots, T$) traktowanych jako zmienne losowe; tj.

$$r_{\tau t}^* = \frac{r_{\tau t} - \bar{r}_t}{\sigma_t}, \quad \forall \tau = 1, \dots, M; \quad (t = 1, \dots, T), \quad (100)$$

gdzie $r_{\tau t}^*$ - standaryzowane wartości elementów macierzy obserwacji X .

W wyniku, otrzymamy $(M \times T)$ - wymiarową *standaryzowaną macierz obserwacji*

$Z = [r_{\tau t}^*]$, o postaci analogicznej jak macierz X przedstawiona w tablicy 1.

Poszczególne kolumny macierzy Z są więc realizacjami standaryzowanych zmiennych losowych r_t^* odpowiadających stopom procentowym *spot* r_t ($t = 1, \dots, T$). Zmienne r_t^* będziemy nazywali *standaryzowanymi stopami procentowymi spot*; $t = 1, \dots, T$. Stosując zmienne standaryzowane, macierz korelacji R o postaci (99) można zapisać następująco:

$$R = \frac{1}{M}(Z'Z)_{T \times T}. \quad (101)$$

gdzie przez znak (') - oznaczono transpozycję macierzy.

Model czynnikowy. W modelu czynnikowym, stopy procentowe *spot* przedstawia się w postaci następującej kombinacji liniowej tzw. *czynników wspólnych* oraz *czynników swoistych*:

$$r_t^* = a_{t1}F_1^* + \dots + a_{tf}F_f^* + \dots + a_{tm}F_m^* + a_t\mu_t^*, \quad (102)$$

lub też, zapisując to bardziej skrótowo

$$r_t^* = \sum_{f=1}^m a_{tf}F_f^* + a_t\mu_t^*; \quad t=1, \dots, T, \quad (103)$$

gdzie r_t^* - standaryzowane stopy procentowe *spot*; tj.

$$r_t^* = \frac{r_t - \bar{r}_t}{\sigma_t}; \quad \bar{r}_t^* = 0, \quad \text{var}(r_t^*) = 1,$$

F_f^* - czynniki wspólne (*common factors*); $f = 1, \dots, m$,

μ_t^* - czynniki swoiste (*unique factors, residuals*); $t = 1, \dots, T$,

a_{tf} - ładunek czynnika wspólnego F_f^* w zmiennej r_t^* , tzw. ładunek czynnikowy (*common factor loading*),

a_t - ładunek czynnika swoistego μ_t^* w zmiennej r_t^* (*unique factor loading*).

W modelu czynnikowym (103) przyjmujemy następujące założenia:

- (i) Liczba m czynników wspólnych jest zadana; przy czym $m \leq T$.
- (ii) Czynniki wspólne F_f^* ($f = 1, \dots, m$) są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi, tj. $(\bar{F}_f^*) = 0$, $\text{var}(\bar{F}_f^*) = 1$.

Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, tj.

$$\rho(F_f, F_k) = 0; \quad \forall f, k = 1, \dots, m. \quad (104)$$

Ponadto, czynniki wspólne F_f^* oraz czynniki swoiste μ_t^* są również wzajemnie nieskorelowane, czyli

$$\rho(F_f, \mu_t^*) = 0; \quad \forall f = 1, \dots, m; \quad t = 1, \dots, T. \quad (105)$$

(iii) Czynniki swoiste μ_t^* ($t=1, \dots, T$) są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi, tj. $\bar{\mu}_t^* = 0$, $\text{var}(\mu_t^*) = 1$.

Czynniki swoiste są wzajemnie nieskorelowane tj.

$$\rho(\mu_t^*, \mu_l^*) = 0; \quad \forall t, l = 1, \dots, T. \quad (106)$$

Z przedstawionych powyżej założeń wynika, że każdy czynnik wspólny F_f ($f=1, \dots, m$) ma te same wartości dla wszystkich zmiennych r_t^* . Inaczej mówiąc, wzajemnie nieskorelowane czynniki wspólne oddziałują na więcej niż jedną stopę procentową r_t^* ; gdyby było inaczej to czynniki te można byłoby traktować jako czynniki swoiste dla poszczególnych zmiennych r_t^* ($t=1, \dots, T$).

Ładunki czynników wspólnych a_{tf} ($t=1, \dots, T; f=1, \dots, m$) są wielkościami specyficznymi dla każdej ze zmiennych r_t^* w tym sensie, że reprezentują one wrażliwość zmiany zmiennej r_t ze względu na zmianę czynnika wspólnego F_f^* . Można łatwo wykazać (Harman, 1967), że ładunki czynnikowe a_{tf} są równe współczynnikom korelacji między zmiennymi r_t^* a czynnikami wspólnymi F_f^* , tj.

$$a_{tf} = \rho(r_t^*, F_f^*), \quad \forall t = 1, \dots, T; \quad f = 1, \dots, m. \quad (107)$$

Oznacza to, że $a_{tf} \in [-1, +1]$.

Z kolei każdy czynnik swoisty μ_t^* jest wyłącznym atrybutem odpowiadającej mu zmiennej r_t^* ($t=1, \dots, T$). Gdyby było inaczej, to czynnik ten należałoby po prostu rozpatrywać jako jeden z czynników wspólnych F_f^* ; stąd bardzo ważne jest założenie, że czynniki swoiste są wzajemnie nieskorelowane tj. $\rho(\mu_t^*, \mu_l^*) = 0$. Wynika stąd bowiem bezpośrednio, że czynnik swoisty μ_t^* zmiennej r_t^* jest nieskorelowany z pozostałymi zmiennymi r_l^* , tj.

$$\rho(r_l^*, \mu_t^*) = 0; \quad \forall l, t = 1, \dots, T; \quad l \neq t. \quad (108)$$

Czynnik swoisty μ_t^* możemy więc interpretować jako tzw. ryzyko specyficzne analizowanej obligacji czysto-dyskontowej o okresie do wykupu t oraz rentowności r_t ($t=1, \dots, T$). Natomiast każdy z czynników wspólnych

F_f^* ($f = 1, \dots, m$) reprezentuje sobą "jeden rodzaj" ryzyka, które jest wspólne dla wszystkich rozpatrywanych obligacji.

Można łatwo wykazać (Harman, 1967), że ładunek a_t czynnika swoistego jest równy współczynnikowi korelacji między zmienną r_t^* a czynnikiem swoistym μ_t^* , tj.

$$a_t = \rho(r_t^*, \mu_t^*); \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (109)$$

Oznacza to, że $a_t \in [-1, +1]$.

Z powyższego wynika, że metoda analizy czynnikowej wiąże się z założeniem liniowej reprezentacji zbioru wzajemnie skorelowanych zmiennych r_t^* zbiorem zadanej liczby nieskorelowanych między sobą *czynników wspólnych* oraz *czynników swoistych*, przy czym przyjmuje się, że owe "hipotetyczne" czynniki wspólne są właśnie źródłem korelacji między zmiennymi r_t^* ($t = 1, \dots, T$).

Równanie modelu czynnikowego (103) zapisane dla kolejnych dyskretnych chwil czasowych $\tau = 1, \dots, M$, ma następującą postać:

$$r_{\tau}^* = \sum_{f=1}^m a_{t,f} F_{\tau,f}^* + a_t \mu_{\tau}^*; \quad \tau = 1, \dots, M; \quad t = 1, \dots, T. \quad (110)$$

W równaniu tym r_{τ}^* , $F_{\tau,f}^*$ oraz μ_{τ}^* oznaczają realizacje (dla $\tau = 1, \dots, M$) zmiennych losowych r_t^* , $F_{\tau,f}^*$ oraz μ_t^* . Jak można zauważyć, wartości ładunków czynnikowych $a_{t,f}$ oraz a_t nie zależą od czasu bieżącego $\tau = 1, \dots, M$; oznacza to, że wartości ładunków czynnikowych są stałym atrybutem rozpatrywanego modelu. Natomiast wartości czynników wspólnych i swoistych zależą oczywiście od czasu bieżącego τ .

Zadanie analizy czynnikowej. Zadaniem analizy czynnikowej jest wyznaczenie na podstawie zadanej macierzy obserwacji Z - oraz przy założeniu liniowego modelu (103) - kolejno następujących wielkości:

- macierzy korelacji R zmiennych r_t^* (a tym samym zmiennych r_t), $t = 1, \dots, T$;
- ładunków czynników wspólnych $a_{t,f}$ ($t = 1, \dots, T$; $f = 1, \dots, m$); ładunki te tworzą tzw. *macierz "zmienna-czynnik"* o postaci

$$A = [a_{t,f}]_{T \times m}, \quad (111)$$

- ładunków czynników swoistych a_t ($t=1, \dots, T$); ładunki te tworzą macierz diagonalną A_d o wymiarze $T \times T$, tj.

$$A_d = \text{diag}(a_t)_{T \times T}, \quad (112)$$

- wartości czynników wspólnych $F_{\tau f}^*$ ($\tau=1, \dots, M$; $f=1, \dots, m$) będących realizacjami zmiennych losowych F_f^* w dyskretnych chwilach czasowych $\tau=1, \dots, M$; wartości te tworzą macierz czynników wspólnych o postaci

$$F = [F_{\tau f}^*]_{M \times m}, \quad (113)$$

- wartości czynników swoistych $\mu_{\tau t}^*$ ($\tau=1, \dots, M$; $t=1, \dots, T$); wartości te tworzą macierz czynników swoistych o postaci

$$\mu = [\mu_{\tau t}^*]_{M \times T}. \quad (114)$$

Rozwiązanie powyższego zadania jest następujące.
Wprowadzimy oznaczenia

$$h_t^2 = a_{t1}^2 + \dots + a_{tf}^2 + \dots + a_{tm}^2; \quad (115)$$

gdzie h_t^2 - tzw. *zasób zmienności wspólnej* zmiennej r_t^* .

Ze wzoru (103) można łatwo wykazać, że

$$\text{var}(r_t^*) = h_t^2 + a_t^2 = 1, \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (116)$$

Zasób zmienności wspólnej (tzw. *communality*) h_t^2 , będący sumą kwadratów współczynników korelacji a_{tf}^2 wszystkich czynników wspólnych $F_{\tau f}^*$ ($f=1, \dots, m$) ze zmienną r_t^* , jest pewną miarą określającą jaka część całkowitej zmienności zmiennej r_t^* jest wyjaśniana przez czynniki wspólne. Wynika to stąd, że całkowita zmienność tej zmiennej reprezentowana przez jej wariancję $\text{var}(r_t^*)$ jest równa jedności - jako wariancja zmiennej standaryzowanej.

Podobnie, wartość a_t^2 reprezentuje *zasób zmienności swoistej* zmiennej r_t^* wyjaśnianej przez czynnik swoisty $\mu_{\tau t}^*$ ($t=1, \dots, T$).
Ze wzoru (116) wynika bezpośrednio, że

$$h_t^2 \in [0, 1] \quad \text{oraz} \quad a_t^2 \in [0, 1]. \quad (117)$$

Podstawiając na przekątnej głównej macierzy korelacji R o postaci (99) w miejsce jedynek, wartości zasobów zmienności wspólnych h_t^2 - otrzymamy tzw. zredukowaną macierz korelacji R^* ; macierz tę przedstawiono w Tabelicy 3.

Tabelica 3. Postać zredukowanej macierzy korelacji R^* , gdzie $h_t^2 = \sum_{f=1}^m a_{tf}^2$.

$$R^* = \begin{bmatrix} h_1^2 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & h_2^2 & \cdots & \rho_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \cdots & h_T^2 \end{bmatrix}; \quad (118)$$

Przy przedstawionych powyżej założeniach, można wyprowadzić następujące tzw. podstawowe równanie analizy czynnikowej:

$$R^* = AA', \quad (119)$$

gdzie A - macierz ładunków a_{tf} ($t=1, \dots, T$; $f=1, \dots, m$) czynników wspólnych o postaci (111); por. Harman (1967).

Wyznaczenie macierzy ładunków czynnikowych A (o wymiarze $T \times m$) spełniającej równanie (119) stanowi rozwiązanie rozpatrywanego problemu analizy czynnikowej. Zauważmy, że mając dane ładunki a_{tf} ($t=1, \dots, T$; $f=1, \dots, m$) czynników wspólnych możemy łatwo - na podstawie wzorów (115) i (116) - wyznaczyć ładunki a_t ($t=1, \dots, T$) czynników swoistych, a tym samym - macierz A_d o postaci (112). Macierz ta jest macierzą diagonalną - na jej przekątnej głównej wystarczy podstawić wartości

$$a_t = \sqrt{1 - h_t^2}; \quad t=1, \dots, T, \quad (120)$$

co wynika bezpośrednio ze wzoru (116).

Na podstawie znajomości macierzy A , oraz wyjściowej macierzy korelacji R można z kolei wyprowadzić następującą zależność określającą wartość macierzy czynników wspólnych F o postaci (113); Harman (1967):

$$F' = A'R^{-1}Z', \quad (121)$$

gdzie Z - standaryzowana macierz obserwacji, tj. macierz zmiennych $r_{\tau t}^*$ ($\tau=1, \dots, M$; $t=1, \dots, T$) danych wzorem (100).

Mając wyznaczoną macierz czynników wspólnych F oraz zdefiniowany liniowy model czynnikowy (110) (tj. ładunki czynników wspólnych i swoistych określone) możemy - bezpośrednio z tego modelu - wyznaczyć wartość macierzy czynników swoistych μ o postaci (114).

Na zakończenie powyższych rozważań należy podkreślić, że rozwiązywanie *podstawowego równania analizy czynnikowej* jest zagadnieniem niezwykle złożonym; ze wzorów (118), (119) wynika bowiem, że równanie to jest nieliniowym równaniem macierzowym o dosyć skomplikowanej strukturze.

Założmy, że mamy zadaną liczbę m czynników wspólnych, przy czym $m < T$; wówczas rząd szukanej macierzy A jest równy również m . Można wykazać, że aby było spełnione równanie (119) musi zachodzić (Harman, 1967):

$$\text{rząd } R^* = \text{rząd } A = m < T. \quad (122)$$

Zadanie analizy czynnikowej polega w tym przypadku na dobraniu najpierw takich zasobów zmienności wspólnej h_t^2 ($t=1, \dots, T$), aby rząd zredukowanej macierzy korelacji R^* był równy zadanej liczbie m , a następnie - na wyznaczeniu macierzy ładunków A rzędu m , spełniającej równanie (119). Zauważmy jeszcze, że nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (119). Mianowicie założmy, że dana macierz A spełnia to równanie, tj.

$$R^* = AA'.$$

Weźmy pod uwagę ortogonalne przekształcenie macierz A , tj.

$$A_p = AP, \quad (123)$$

gdzie P - dowolna macierz ortogonalna o wymiarze $(m \times m)$, czyli $PP' = I$; I - gdzie macierz jednostkowa oraz $P' = P^{-1}$. Z (123) otrzymamy wówczas

$$A = A_p P^{-1} = A_p P' \quad \text{oraz} \\ R^* = AA' = A_p P' (A_p P')' = A_p P' P A_p' = A_p A_p'. \quad (124)$$

Z (123), (124) wynika, że jeżeli macierz A spełnia podstawowe równanie analizy czynnikowej (119), to równanie to jest również spełnione przez dowolne przekształcenie ortogonalne (123) tej macierzy. Należałoby więc w tym przypadku mówić raczej o pewnej klasie rozwiązań równania (119), niż o pojedynczym rozwiązaniu zadanym macierzą A .

W związku z powyższym, istnieje wiele metod rozwiązywania równania analizy czynnikowej (119), w których dla wyznaczenia macierzy A (z określonej klasy rozwiązań) stosuje się pewne dodatkowe kryteria.

Najpowszechniej stosowaną metodą jest w rozpatrywanym przypadku tzw. metoda głównego czynnika Hotellinga; por. (Harman, 1967).

5.2. Metoda głównego czynnika (*Principal Factor Method*)

Ze wzoru (115) na zasób zmienności wspólnej h_t^2 zmiennej r_t^* możemy wyznaczyć tzw. ogólną zmienność wspólną charakteryzującą wszystkie zmienne $\{r_t^*, t = 1, \dots, T\}$, tj.

$$V = \sum_{t=1}^T h_t^2 = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{f=1}^m a_{t,f}^2 \right) = \sum_{f=1}^m \left(\sum_{t=1}^T a_{t,f}^2 \right) = \sum_{f=1}^m V_f \quad (125)$$

gdzie
$$V_f = \sum_{t=1}^T a_{t,f}^2 \quad (126)$$

- część ogólnej zmienności wspólnej V wyjaśniana przez czynnik wspólny F_f ($f = 1, \dots, m$).

Zauważmy, że wartość V_f jest równa sumie kwadratów współczynników korelacji (tj. kwadratów ładunków czynnikowych) danego czynnika F_f ze wszystkimi zmiennymi r_t^* ; $t = 1, \dots, T$. Wskaźnik V_f jest więc miarą udziału czynnika F_f w wyjaśnianiu wszystkich wzajemnych korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi wyjściowymi r_t^* ($t = 1, \dots, T$).

Podstawowa idea *metody głównego czynnika* polega na takim doborze ładunków czynników wspólnych F_f ($f = 1, \dots, m$), aby udział V_f tych czynników w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej V był malejący. A dokładniej, postępowanie rozpoczyna się od określenia ładunków czynnika pierwszego F_1 , którego udział V_1 w ogólnej zmienności V powinien być maksymalny tj. $V_1 = \hat{V}_1$. Następnie dobiera się ładunki czynnika drugiego F_2 tak, aby udział V_2 tego czynnika w wyjaśnianiu pozostałej zmienności wspólnej (tj. $V - \hat{V}_1$) był maksymalny, przy określonych uprzednio ładunkach czynnika pierwszego; itd.

W praktyce, *metodę głównego czynnika* stosuje się sposób iteracyjny. To znaczy najpierw zadaje się pewną początkową wartość h_t^2 zasobów zmienności wspólnej dla każdej ze zmiennych r_t^* ($t = 1, \dots, T$). Następnie dla zadanej w ten sposób macierzy \mathbf{R}^* - stosuje się powyższą metodę w celu

wyznaczenia ładunków dla wszystkich czynników F_1, F_2, \dots, F_m , po czym dokonuje się modyfikacji wartości h_t^2 według wzoru (115), tj.

$$(h_t^{i+1})^2 = \sum_{f=1}^m (a_{t,f}^i)^2; \quad t=1, \dots, T, \quad (127)$$

gdzie i - numer iteracji; $i = 1, 2, 3, \dots$.

W efekcie otrzymuje się zbieżny ciąg wartości zasobów zmienności wspólnych, tj. takie wartości graniczne h_t^2 ($t=1, \dots, T$), dla których zachodzi:

$$\text{rzęd } R^* = m. \quad (128)$$

Można wykazać (Harman, 1967), że otrzymuje się wówczas następujące rozwiązanie:

Oznaczmy przez λ_t, w_t - wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy R^* uporządkowane według malejących wartości λ_t ($t=1, \dots, T$), tj.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m \geq \dots \lambda_T \geq 0. \quad (129)$$

Ponieważ dodatnio półokreślona macierz R^* jest rzędu $m < T$, tylko pierwszych m wartości własnych λ_t będzie większych od zera; czyli otrzymamy ostatecznie

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_m > 0, \quad \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_T = 0. \quad (130)$$

Natomiast ładunki czynnikowe $a_{t,f}$ ($t=1, \dots, T; f=1, \dots, m$) wyrażają się następującymi wzorami

$$a_f = [a_{1f}, \dots, a_{tf}, \dots, a_{Tf}]' = \frac{w_f}{\|w_f\|} \sqrt{\lambda_f}; \quad f=1, \dots, m, \quad (131)$$

gdzie $\|\cdot\|$ - norma euklidesowa wektora.

$$\text{Stąd} \quad a_{t,f} = \frac{w_{t,f}}{\|w_f\|} \sqrt{\lambda_f}; \quad t=1, \dots, T; \quad f=1, \dots, m, \quad (132)$$

gdzie $w_{t,f}$ - t -ta składowa wektora własnego w_f .

Ze wzoru (132) wynika również, że

$$V_f \triangleq \sum_{t=1}^T a_{t,f}^2 = \lambda_f; \quad f=1, \dots, m. \quad (133)$$

Tak więc udział V_f czynnika F_f w wyjaśnianiu zmienności ogólnej V jest równy odpowiadającej temu czynnikowi wartości własnej λ_f zredukowanej macierzy korelacji R^* .

Na podstawie wzoru (133) udziały te określamy procentowo w następujący sposób:

$$P_f = \frac{V_f}{V} = \frac{\lambda_f}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m} \times 100 [\%], \quad (134)$$

gdzie P_f - procentowy udział czynnika F_f w wyjaśnianiu ogólnych zasobów zmienności wspólnej V .

Na zakończenie omawiania powyższej metody należy podkreślić, że w praktyce - w wyniku określonej dokładności obliczeń numerycznych - zależność (130) spełniona jest tylko z pewnym przybliżeniem, tj.

$$\lambda_{m+1} \approx \dots \approx \lambda_T \approx 0, \quad (135)$$

a więc wartości te jednak nieco różnią się od zera, przy czym część z nich może być ujemna.

Opisana metoda analizy czynnikowej jest oprogramowana w wielu pakietach komputerowych dotyczących zaawansowanych obliczeń statystycznych; m.in. w pakiecie STATGRAPHICS v. 7.0 (funkcja FACTOR).

Interpretacja geometryczna. Weźmy pod uwagę liniowy model czynnikowy dany równaniem (102), tj.

$$r_t^* = a_{1t}F_1^* + \dots + a_{1f}F_f^* + \dots + a_{1m}F_m^* + a_t \mu_t^*; \quad t = 1, \dots, T. \quad (136)$$

W modelu tym, wzajemnie ortogonalne czynniki wspólne F_1^*, \dots, F_m^* tworzą bazę pewnej m -wymiarowej przestrzeni liniowej. W tej *przestrzeni czynników wspólnych*, każda z analizowanych zmiennych r_t^* ($t = 1, \dots, T$) jest reprezentowana przez wektor a_t o postaci:

$$a_t = [a_{1t}, \dots, a_{1f}, \dots, a_{1m}]', \quad (137)$$

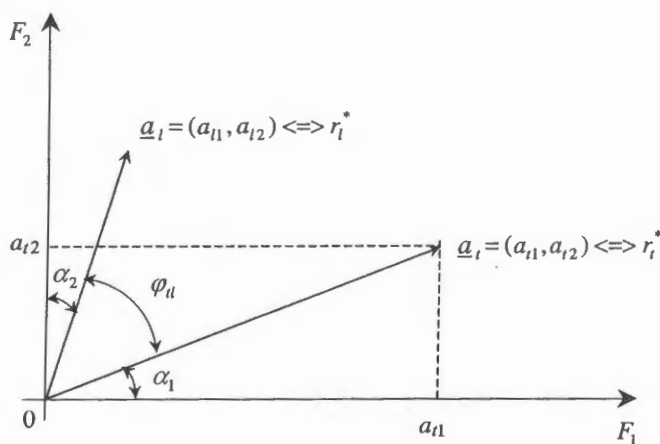
przy czym ładunki czynnikowe a_{1f} oznaczają współrzędne rozpatrywanego wektora względem poszczególnych wymiarów rozpatrywanej przestrzeni. Geometrycznie oznacza to, że czynniki wspólne F_f ($f = 1, \dots, m$) tworzą układ wzajemnie ortogonalnych osi na których możemy odkładać współrzędne a_{1f} wektorów a_t ($t = 1, \dots, T$).

Z kolei w układzie dwóch pierwszych czynników F_1 i F_2 (tj. czynników o największych procentowych udziałach w wyjaśnianiu zasobów

ogólnych zmienności wspólnej V), jako reprezentację zmiennych r_t^* ($t = 1, \dots, T$) możemy rozpatrywać wektory

$$\mathbf{a}_t^* = [a_{t1}, a_{t2}]', \quad (138)$$

będące ortogonalnymi rzutami m -wymiarowych wektorów \mathbf{a}_t na dwuwymiarową przestrzeń czynnikową OF_1, F_2 . Ilustrację powyższej graficznej reprezentacji zmiennych r_t^* za pomocą wektorów \mathbf{a}_t^* ($t = 1, \dots, T$) w układzie współrzędnych OF_1F_2 przedstawiono na rysunku 3.



Rysunek 3. Graficzna reprezentacja zmiennych r_t^* ($t = 1, \dots, T$) w dwuwymiarowej przestrzeni czynnikowej OF_1F_2 .

Można wykazać (Harman, 1967), że współczynniki korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi r_t^* , r_i^* są (w rozpatrywanym układzie OF_1F_2) proporcjonalne do cosinusów kątów między wektorami \mathbf{a}_t^* i \mathbf{a}_i^* reprezentującymi te zmienne w dwuwymiarowej przestrzeni czynnikowej. To samo dotyczy współczynników korelacji między tymi zmiennymi a czynnikami F_1 i F_2 . Dla kątów φ_{11} , α_1 i α_2 zaznaczonych na rysunku 3, mamy zatem

$$\rho(r_t^*, r_t^*) \sim \cos \varphi_{it} , \quad (139)$$

$$\rho(r_t^*, F_1^*) \sim \cos \alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \rho(r_t^*, F_2^*) \sim \cos \alpha_2 , \quad (140)$$

gdzie przez " \sim " oznaczono symbol proporcjonalności.

Z (139) i (140) wynika, że im mniejsze są kąty między rozpatrywanymi wektorami, tym zmienne reprezentowane przez te wektory są silniej skorelowane. Na przykład, z rysunku 3 wynika, że zmienna r_t^* jest silniej skorelowana z czynnikiem, F_1 , natomiast zmienna r_t^* jest silniej skorelowana z czynnikiem F_2 .

Rotacje ortogonalne. Jednym z podstawowych celów analizy czynnikowej jest interpretacja rozpatrywanego zbioru zmiennych $\{r_t^*; t=1, \dots, T\}$ za pomocą zadanej liczby m wzajemnie ortogonalnych czynników wspólnych $\{F_f^*; f=1, \dots, m\}$. Interpretacja ta odbywa się na podstawie ładunków czynnikowych $a_{t,f}$ ($t=1, \dots, T; f=1, \dots, m$), przy czym jest ona tym łatwiejsza w im większym stopniu pewne grupy zmiennych są silnie skorelowane z tylko jednym czynnikiem, natomiast słabo skorelowane z pozostałymi czynnikami. Wówczas rozpatrywany zbiór zmiennych $\{r_t^*; t=1, \dots, T\}$ można podzielić na pewne, "w dużej mierze rozłączne", grupy zmiennych rozkładających się wzdłuż poszczególnych wymiarów przestrzeni generowanej przez ortogonalne czynniki wspólne F_f ($f=1, \dots, m$). Czynniki te mają wówczas na ogół określoną interpretację, np. ekonomiczną.

Jak wspomnieliśmy poprzednio, rozwiązanie *podstawowego równania analizy czynnikowej* (119) nie jest jednoznaczne; można je rozwiązywać jedynie z dokładnością do ortogonalnego przekształcenia macierzy A . A zatem podstawową ideą różnych metod dokonywania rotacji ortogonalnych, jest takie ortogonalne przekształcenie macierzy A w nową macierz ładunków A_p , której elementy stanowią ładunki dające się łatwiej interpretować. To znaczy ładunki czynnikowe bardziej znaczące powinny mieć po rotacji wartości bezwzględne bliskie jedności, natomiast mało znaczące - bliskie zeru. Chodzi w tym przypadku o większe zróżnicowanie ładunków czynnikowych $a_{t,f}$ dla zadanego t oraz $f=1, \dots, m$; tj. ładunków występujących w tym samym wierszu macierzy A o postaci (111). Oczywiście, nie w każdym przypadku uzyskanie takiego wyniku jest możliwe.

Rozpatrywane przekształcenie można przedstawić jako

$$A_p = AP , \quad (141)$$

przy czym A - dana macierz ładunków w wymiarze $T \times m$ (wyznaczana np. metodą głównego czynnika), P - macierz ortogonalna przekształcenia o wymiarze $m \times m$ przy czym $PP' = I$, A_p - macierz ładunków po przekształceniu.

Przekształcenie (141) oznacza geometrycznie, że dokonuje się obrotu układu współrzędnych w przestrzeni czynników F_1^*, \dots, F_m^* . Można wykazać, że zasoby zmienności wspólnej h_t^2 poszczególnych zmiennych r_t^* ($t = 1, \dots, T$) nie ulegną w wyniku rotacji ortogonalnych zmianie. A mianowicie zauważmy, że wobec

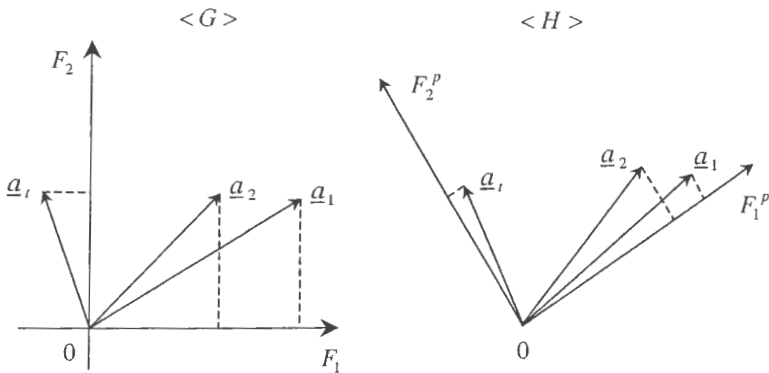
$$h_t^2 = \sum_{f=1}^m a_{tf}^2,$$

wielkości h_t^2 są równe kwadratowi normy euklidesowej wektorów $a_t = [a_{t1}, \dots, a_{tf}, \dots, a_{tm}]'$. Tak więc w wyniku rotacji ortogonalnych przestrzeni czynników F_1^*, \dots, F_m^* , długości tych wektorów reprezentujących analizowane zmienne wyjściowe r_t^* ($t = 1, \dots, T$) pozostaną te same. Oczywiście, z powyższego wynika bezpośrednio, że nie ulegnie również zmianie wielkość $V = V_1 + \dots + V_m$ zasobów ogólnych zmienności wspólnej wyjaśnianej przez wszystkie czynniki wspólne (por. wzór 125), jakkolwiek poszczególne składniki V_f ($f = 1, \dots, m$) tych zasobów będą inne niż poprzednio.

Zmienia się natomiast wartości ładunków a_{tf} każdego z czynników F_f^* (tj. dla ustalonego f) w poszczególnych zmiennych; a także, wartości czynników określone przez macierz F o postaci (113). Na rysunku 4 przedstawiono ilustrację graficzną rozpatrywanych powyżej zagadnień.

Do najczęściej stosowanych metod rotacji ortogonalnych należą metody VARIMAX, QUARTIMAX oraz EQUIMAX; Harman (1967). Metody te są również wykorzystywane we wspomnianym już pakiecie komputerowym STATGRAPHICS v. 7.0.

* * *



Rysunek 4. Ilustracja rotacji ortogonalnych; $\langle G \rangle$ - przestrzeń czynnikowa OF_1F_2 przed rotacją, $\langle H \rangle$ - przestrzeń czynnikowa $OF_1^pF_2^p$ po rotacji; $m = 2$.

6. Czynnikowa okresowość oraz czynnikowa wypukłość obligacji

W poprzednim punkcie przedstawiliśmy poszczególne etapy identyfikacji modelu czynnikowego (103) rynkowych stóp procentowych *spot* r_t , określanych dla kolejnych dyskretnych punktów czasowych $\tau = 1, 2, 3, \dots$, na podstawie rentowności do wykupu (*YTM*) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu $t = 1, \dots, T$. Model ten miał postać

$$r_t^* = \sum_{f=1}^m a_{t,f} F_f^* + a_t \mu_t^*; \quad t = 1, \dots, T, \quad (142)$$

gdzie r_t^* , F_f^* oraz μ_t^* - zmienne standaryzowane.

Proces identyfikacji modelu polegał w rozpatrywanym przypadku nie tylko na określeniu współczynników $a_{t,f}$, a_t modelu, ale również na wyznaczeniu wartości czynników wspólnych F_f^* (tj. macierzy F danej wzorem (121)) oraz czynników swoistych μ_t^* (tj. macierzy μ). Zdecydowanie wyróżnia to powyższe podejście od metodologii *analizy regresyjnej*,

w przypadku której przedmiotem identyfikacji są tylko współczynniki $a_{t,f}$ (oraz ewentualnie a_t) modelu liniowego, natomiast F_f^* traktowane są jako egzogeniczne zmienne wejściowe o określonej interpretacji ekonomicznej.

W przypadku modeli wielo-indeksowych obligacji, na ogół uważa się (Elton, Gruber, 1995), że podejście bazujące na analizie regresyjnej modelu liniowego o postaci (142) nie jest zbyt obiecujące ze względu na niestabilność tego typu modeli, spowodowaną zmianami ich współczynników w czasie. Chodzi w tym przypadku o to, że w odróżnieniu od wielo-indeksowego modelu akcji (typu APT - *Arbitrage Pricing Theory*) podstawowe parametry obligacji ulegają ciągłej zmianie z upływem czasu bieżącego $\tau = 1, 2, 3, \dots$. Skróceniu ulega bowiem okres do wykupu tych obligacji (*maturity*), a tym samym i takie parametry, jak np. *okresowość* D liczona według klasycznej formuły Macaulay'a (9).

Uważa się natomiast, że rozpatrywane w niniejszym punkcie modele czynnikowe nie mają powyższej niedogodności (Dahl, 1993). Modele te wykorzystuje się dla celów immunizacji portfeli obligacji w następujący sposób.

Z modelu czynnikowego (142), gdzie wszystkie wartości zmiennych i parametrów są dane, przechodzimy do sformułowania nieco bardziej ogólnego dokonując podstawienia:

$$dr_t = \sigma_t r_t^*; \quad \alpha_{ft} = \sigma_t a_{ft}; \quad \varepsilon_t = \sigma_t a_t \mu_t^*, \quad (143)$$

gdzie σ_t - odchylenie standardowe zmiennej niestandardyzowanej r_t ($t = 1, \dots, T$) określone wzorem (95); tj. wielkość znana.

Oznaczmy ponadto

$$dF_f = F_f^*; \quad f = 1, \dots, m, \quad (144)$$

dla podkreślenia, że interesują nas w istocie zmiany czynników wspólnych, tj. ich odchylenia od poziomu zerowego (oznaczenie to jest zabiegiem czysto formalnym i nie zmienia istoty zagadnienia).

Z (142)-(144) otrzymamy

$$dr_t = \sum_{f=1}^m \alpha_{ft} dF_f + \varepsilon_t; \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (145)$$

gdzie $dr_t = r_t - \bar{r}_t$; $\overline{dr_t} = 0$, $\text{var}(dr_t) = \sigma_t^2$ oraz (146)

$$\overline{dF_f} = 0, \quad \text{var}(dF_f) = 1; \quad \bar{\varepsilon}_t = 0, \quad \text{var}(\varepsilon_t) = a_t^2 \sigma_t^2. \quad (147)$$

Przy przedstawionych powyżej oznaczeniach, sformułowanie modelu czynnikowego o postaci (145) jest w rozpatrywanym przypadku identyczne jak w pracy Dahla (1993).

Czynnikowa okresowość (*factor duration*). Wartość bieżąca dowolnej obligacji wielokuponowej o okresie do wykupu T oraz przy założeniu krzywej dochodowości o dowolnym kształcie - dana jest wzorem (1), który można zapisać w nieco innej postaci; a mianowicie

$$P = \sum_{t=1}^T C_t d_t = \frac{C_t}{(1+r_t)^t}, \quad (148)$$

gdzie r_t - rynkowe stopy procentowe *spot*, C_t - przyszłe strumienie pieniężne wynikające z faktu posiadania obligacji, tj. odsetki C w kolejnych okresach $t=1, \dots, (T-1)$ oraz odsetki i nominal $C+N$ w chwili $t=T$; ponadto oznaczono

$$d_t = \frac{1}{(1+r_t)^t}, \quad \text{tzw. czynnik dyskontujący.} \quad (149)$$

Podobnie jak uczyniliśmy to w punkcie 3.5 niniejszej pracy (por. wzór (56)), dla uproszczenia rozważań założymy, że czynnik dyskontujący d_t można przybliżyć czynnikiem, charakterystycznym dla ciągłej kapitalizacji odsetek; tj. przyjmiemy, że

$$d_t = \frac{1}{(1+r)^t} \approx e^{-r_t t}. \quad (150)$$

Jak już wspomnieliśmy poprzednio, przybliżenie to jest usprawiedliwione pod warunkiem, że stopy procentowe *spot* r_t (wyrażone w skali jednego roku) nie są zbyt duże co do wartości bezwzględnych. Dokładna relacja pomiędzy dyskretnym a ciągłym czynnikiem dyskontującym d_t jest bowiem następująca

$$d_t = \frac{1}{(1+r_t/m)^{mt}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^{-r_t t}. \quad (151)$$

Z (148) i (151) otrzymamy

$$P = \sum_{t=1}^T C_t e^{-r_t t}. \quad (152)$$

Załóżmy początkowo, że struktura terminowa stóp procentowych jest płaska. Oznacza to, że

$$r_t = r; \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (153)$$

dla każdej chwili bieżącej $\tau = 1, 2, 3, \dots$, oraz

$$dr_t = dr; \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (154)$$

co jest bezpośrednią konsekwencją założenia (153); tzn. możliwe są jedynie równoległe przesunięcia rozpatrywanej krzywej *dochodowości*.

Wówczas, dla równowagowej wyceny obligacji danej wzorem (152), klasyczna definicja okresowości rozpatrywanej obligacji jest określona przez zależność (62) i (67); tj.

$$D_c \triangleq -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^T t C_t e^{-rt} / P. \quad (155)$$

Pominiemy teraz założenia upraszczające (153), (154) i wprowadzimy całkowicie ogólną *strukturę terminową stóp procentowych* daną wektorem

$$TS = [r_1, \dots, r_t, \dots, r_T]'$$

Z wprowadzonego uprzednio modelu czynnikowego (145) wynika, że zamiast rozpatrywać zmiany wartości dP obligacji danej wzorem (152) ze względu na zmiany dr_t , możemy analizować analogiczne zmiany dP ze względu na zmiany dF_f ($f = 1, \dots, m$) czynników wspólnych dla wszystkich stóp procentowych r_t ($t = 1, \dots, T$).

Możemy tego dokonać wprowadzając definicję tzw. *czynnikowej okresowości* D_f w następujący sposób (Dahl, 1993):

$$D_f \triangleq -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^T t \alpha_{t,f} C_t e^{-rt} / P, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (156)$$

gdzie $\alpha_{t,f} = \sigma_t a_{t,f}$ oraz $a_{t,f} \in [-1, +1]$ - ładunek czynnika wspólnego F_f^* ($f = 1, \dots, m$) w zmiennej r_t^* ($t = 1, \dots, T$).

Zauważmy, że wprowadzony wzór (156) na czynnikową okresowość D_f ($f = 1, \dots, m$) ma podobną postać do wzoru klasycznego (154) - z dokładnością do współczynnika $\alpha_{t,f}$.

Czynnikowa wypukłość (*factor convexity*). Wprowadzając chwilowo założenia (153), (154) co do płaskiego kształtu krzywej dochodowości i jej przesunięć równoległych, dla obligacji o wartości P danej wzorem (152) obowiązuje klasyczny wzór na wypukłość obligacji; por. (72), (74) tj.

$$V_c \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 C_t e^{-r_t} / P. \quad (157)$$

Natomiast pomijając założenia (153), (154), można wyprowadzić następujący wzór na *czynnikową wypukłość* (Dahl, 1993):

$$V_f \triangleq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T t^2 \alpha_{t,f}^2 C_t e^{-r_t} / P, \quad \forall f = 1, \dots, m. \quad (158)$$

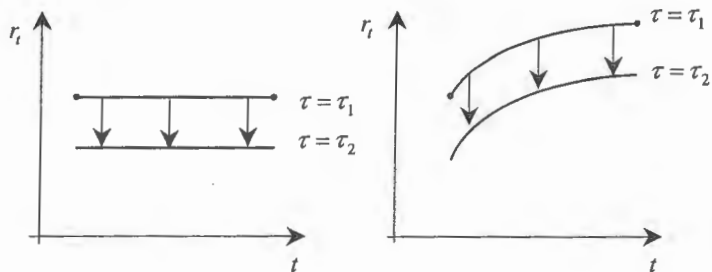
Warto w tym miejscu podkreślić, że wprowadzenie definicji zarówno *czynnikowej okresowości* jak i *czynnikowej wypukłości* wiąże się z przyjęciem po m parametrów D_f , V_f dla każdej z rozpatrywanych obligacji wielokuponowych, ponieważ rozpatrujemy m *czynników wspólnych* dF_f . Jednak nie powinno to być zbyt kłopotliwe, ponieważ - jak wykazują dotychczasowe doświadczenia - w praktyce, na rozwiniętych rynkach kapitałowych, wzięcie pod uwagę $m = 3 \div 4$ czynników prowadziło do wyjaśnienia ok. 97 % *zasobów zmienności ogólnej* rynkowych stóp procentowych $spot r_t$ ($t = 1, \dots, T$).

Na przykład, na rynku amerykańskim zdefiniowano $m=3$ istotne czynniki wspólne (Litterman, Scheinkman, 1991):

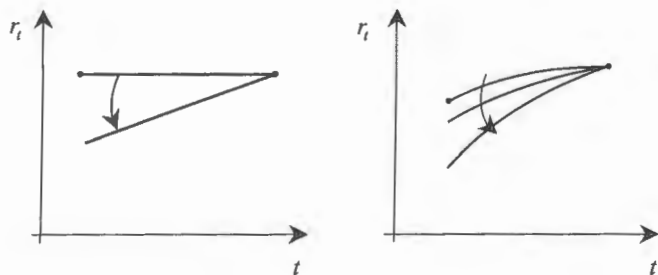
- F_1 - czynnik wpływający na ogólny poziom stóp procentowych r_t ;
tzw. czynnik poziomu (*level factor*);
- F_2 - czynnik wpływający na nachylenie krzywej dochodowości;
tzw. czynnik nachylenia (*steepness factor*);
- F_3 - czynnik wpływający na stopień zakrzywienia krzywej dochodowości;
tzw. czynnik krzywizny (*curvature factor*).

Całkowity kształt analizowanej krzywej dochodowości wynikał więc z „liniowego” nałożenia się oddziaływań rozpatrywanych czynników wspólnych, zgodnie z modelem czynnikowym (145). Ilustrację graficzną tych oddziaływań można sobie wyobrazić tak, jak to przedstawiono na rysunku 5.

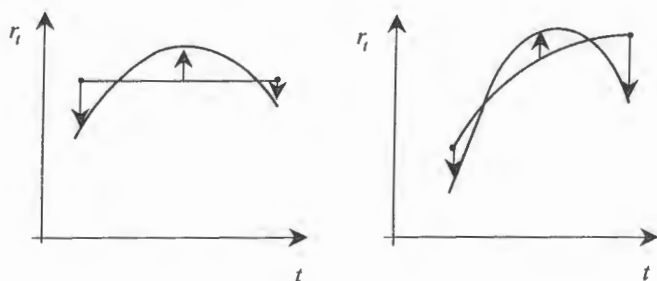
F_1 - czynnik poziomu



F_2 - czynnik nachylenia



F_3 - czynnik krzywizny



Rysunek 5. Ilustracja oddziaływań czynników wspólnych F_1, F_2 i F_3 na strukturę terminową rynkowych stóp procentowych;
 F_1 - czynnik poziomy, F_2 - czynnik nachylenia, F_3 - czynnik krzywizny.

7. Czynnikiowy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- P_i - bieżąca wartość (cena równowagowa) i -tej obligacji, $i = 1, \dots, N$;
- w_i - udział wartościowy i -tej obligacji w rozpatrywanym portfelu;
- P - Wartość bieżąca portfela P obligacji;
- P_L - zdyskontowana w czasie do chwili obecnej wartość przyszłego zobowiązania L inwestora (*liability*), przy zastosowaniu rynkowych stóp procentowych *spot* r_t jako stóp dyskontowych;
- D_{if} - czynnikowa okresowość i -tej obligacji, $f = 1, \dots, m$;
- D_{Lf} - czynnikowa okresowość zobowiązania finansowego, $f = 1, \dots, m$;
- V_{if} - czynnikowa wypukłość i -tej obligacji, $f = 1, \dots, m$;
- V_{Lf} - czynnikowa wypukłość zobowiązania finansowego, $f = 1, \dots, m$;
- $Q(w_1, \dots, w_n)$ - stopa zwrotu z portfela P obligacji jako funkcja udziałów procentowych w_i ($i = 1, \dots, N$), poszczególnych walorów.

Model immunizacji portfela obligacji ze względu na zmiany rynkowych stóp procentowych *spot* r_t ($t = 1, \dots, T$), wyznaczony przy założeniu, że wartości bieżące obligacji P_i są określone wzorem (152) oraz czynnikowe okresowości i wypukłości - wzorami (156) i (158), można sformułować następująco (Dahl, 1993):

Należy określić takie optymalne wartości udziałów \hat{w}_i ($i = 1, \dots, n$), aby zachodziło:

$$Q(w_1, \dots, w_N) \xrightarrow{(w_i)} MAX, \quad (159)$$

przy ograniczeniach

$$P = P_L, \quad (160)$$

$$\sum_{i=1}^N D_{if} P_i w_i = D_{Lf} P_L, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (161)$$

$$\sum_{i=1}^N V_{if} P_i w_i \geq V_{Lf} P_L, \quad \forall f = 1, \dots, m, \quad (162)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad \text{oraz} \quad w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (163)$$

Należy podkreślić, że wzory (160)-(163) przedstawiają rozwiązanie zagadnienia czynnikowej immunizacji portfela obligacji dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek. Szczegółowe uzasadnienie tych wzorów można znaleźć w cytowanej już wielokrotnie pracy Dahla (1993). Nie wglębiając się bliżej w szczegóły matematyczne, zauważmy jednak, że dla ciągłej kapitalizacji odsetek, z ograniczenia równościowego (161) wynika, że czynnikowa okresowość portfela obligacji ma być równa czynnikowej okresowości zobowiązań. Natomiast formułując ograniczenie nierównościowe (162) żądamy, aby *czynnikowa wypukłość* portfela obligacji miała co najmniej taką wartość jak *czynnikowa wypukłość* zobowiązań. Przedstawione warunki (160)-(163) immunizacji portfela dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek – jakkolwiek podobne – różnią się jednak od rozpatrywanych w punkcie 4 analogicznych warunków (89)-(91) sformułowanych dla dyskretnej kapitalizacji odsetek.

Zagadnienie optymalizacji (159)-(163) jest typowym zadaniem programowania matematycznego. W pracy Dahla (1993) wyprowadzono powyższy model przy założeniu, że funkcja celu $Q(w_1, \dots, w_n)$ jest liniowa względem udziałów w_i ($i = 1, \dots, n$), jakkolwiek istnieje tu wiele innych możliwości formalizacji rozpatrywanego problemu optymalizacyjnego.

Na zakończenie warto podkreślić, że pominięcie niektórych ze sformułowanych powyżej ograniczeń, np. w stosunku do immunizacji rozpatrywanego portfela ze względu na wybrany czynnik wspólny F_f (tj. dla ustalonego $f = f_0$) - może prowadzić do tzw. *aktywnego zarządzania portfelem obligacji* ze względu na ten właśnie czynnik. Załóżmy na przykład, że dla rozpatrywanego problemu immunizacji zidentyfikowano czynnik F_1 jako czynnik ogólnego poziomu stóp procentowych r_t ($t = 1, \dots, T$). W praktyce oznaczać to będzie, że ładunki czynnikowe a_{it} mają dla wszystkich stóp r_t wartości dodatnie oraz bliskie jedności. Tak więc wzrost czynnika F_1 powoduje jednoczesny wzrost wszystkich stóp procentowych r_t ($t = 1, \dots, T$); natomiast spadek czynnika F_1 - wywołuje spadek tych stóp; por. rysunek 5 (czynnik poziomu).

W takiej sytuacji, gdy dysponujemy wiarygodnymi danymi, że wszystkie stopy procentowe na przykład spadną, to możemy „uwolnić” immunizację swego portfela ze względu na czynnik F_1 . Oznaczać to będzie pominięcie w ograniczeniach (161), (162) modelu - indeksu $f = 1$. To znaczy, portfela nie immunizujemy ze względu na czynnik F_1 ponieważ wiemy, jak czynnik ten będzie się zachowywał w przyszłości, dla zadanego horyzontu czasowego. W miejsce immunizacji ze względu na pierwszy czynnik,

możemy natomiast zastosować strategię aktywną polegającą na zakupie obligacji długoterminowych, ponieważ spodziewamy się spadku ogólnego poziomu stóp procentowych.

Natomiast immunizację ze względu na pozostałe dwa czynniki, tj. czynnik nachylenia F_2 oraz czynnik krzywizny F_3 - pozostawiamy w mocy, ponieważ nie jesteśmy pewni czy spodziewane przesunięcie krzywej dochodowości TS w dół nastąpi w sposób równomierny, to znaczy czy będzie to przesunięcie równoległe o stałą wartość $dr = const(t)$; $t = 1, \dots, T$. W ten sposób, spodziewając się ogólnego spadku stóp procentowych i stosując w związku z tym odpowiednią strategię aktywną, zabezpieczamy się jednocześnie przed ryzykiem zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych (*shape risk*).

Można spodziewać się, że zastosowanie takiego właśnie postępowania, polegającego na powiązaniu aktywnej strategii zarządzania portfelowego ze strategią pasywną, dotyczącą częściowej immunizacji (tj. ze względu na wspomniane ryzyko kształtu) będzie źródłem dodatkowych zysków, w porównaniu ze strategią całkowicie pasywną. Strategia całkowicie pasywna jest w analizowanym przypadku określona przez model (159)-(163), rozpatrywany dla wszystkich zidentyfikowanych czynników F_f ($f = 1, \dots, m$) dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych.

Oczywiście przedstawione powyżej postępowanie będzie uzasadnione, o ile nasze prognozy co do spodziewanego „ruchu” krzywej dochodowości w dół się spełnią. Oznacza to, że dokonując immunizacji naszego portfela inwestycyjnego ze względu na *ryzyko kształtu*, musimy jednocześnie zaakceptować określone ogólne ryzyko zmiany poziomu stóp procentowych (*interest rate risk*), omówione dosyć szeroko w niniejszej pracy.

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawiony powyżej czynnиковy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji oferuje nam daleko szerszy wachlarz możliwości w porównaniu z modelami klasycznymi, wykorzystującymi koncepcję Macaulay'a parametru *okresowości* i *wypukłości* obligacji; bądź tylko pewne modyfikacje tej koncepcji zaproponowane np. przez Fishera, Weila (1977) czy też Babbela (1983). W przypadku modelu czynnиковego, możemy bowiem immunizować nasz portfel inwestycyjny nie tylko ze względu na wszystkie zidentyfikowane czynniki dynamiki zmian stóp procentowych; możemy również samodzielnie (tj. według naszego uznania) wybierać te czynniki, które mają podlegać immunizacji. A to już oznacza duży postęp w rozpatrywanej dziedzinie zarządzania ryzykiem inwestycyjnym.

Literatura

1. Adams A.T., Bloomfield D.S.F., Booth P.M., England P.D. (1995) *Investment Mathematics and Statistics*. Kluwer Law Intern., London.
2. Anderson N., Breedon F., Deacon M., et al. (1997) *Estimating and Interpreting the Yield Curve*. J. Wiley & Sons, Chichester.
3. Babbel D.F. (1983) Duration and the Term Structure of Interest Rates Volatility. In: G.G. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs, (Eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn., pp. 239-265.
4. Babcock G.C. (1976) *A Modified Measure of Duration*. Working Paper, University of Southern California, Los Angeles.
5. Babcock G.C., Langetieg T.C. (1978) *Applications of Duration in the Selection of Bonds*. Working Paper, University of Southern California, Los Angeles.
6. Babcock G.C. (1984) Duration as a Link Between Yield and Value. *Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 58-65; Corrections - Fall.
7. Bierwag G.O. (1979) Dynamic Portfolio Immunization Policies. *Journal of Banking and Finance*, April.
8. Bierwag G.O., Kaufman G.C., Toevs A. (1979) *Immunization for Multiple Planning Periods*. Center for Capital Market Research, University of Oregon, October.
9. Bierwag G.O., Kaufman G.C., Schweitzer R., Toevs A. (1981) The Art of Risk Management in Bond Portfolios. *Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 27-36.
10. Bierwag G.O., Kaufman G.C., Toevs A. (1983b) Immunization Strategies for Funding Multiple Liabilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18, No. 1, March, pp. 113-124.
11. Bierwag G.O. (1987) *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
12. Brennan M.J., Schwartz E. (1979) A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, pp. 133-155.

13. Brennan M.J., Schwartz E. (1983) Duration, Bond Pricing and Portfolio Management. In: G.C. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs (Eds.) *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn.
14. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S. (1979) Duration and the Measurement of Basic Risk. *Journal of Business*, Vol. 52, No. 1, pp. 51-61, January.
15. Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1981) A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, September, pp. 769-799.
16. Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, pp. 385-407.
17. Culbertson J.M. (1957) *The Term Structure of Interest Rates*. Quarterly Journal of Economics, November, pp. 489-504.
18. Dahl H. (1993) *A Flexible Approach to Interest Rate Risk Management*. In: Zenios S.A. (Ed.), *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.
19. Dobson S., Sutch R., Vanderford D. (1976): An Evaluation of Alternative Empirical Models for the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, September.
20. Dobson S.W. (1978): Estimating term structure equations with individual bond data. *Journal of Finance*, March, pp. 75-92.
21. Dothan L. (1978) On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, pp. 385-407.
22. Douglas L.G. (1988) *Yield Curve Analysis – the Fundamentals of Risk and Return*. New York Institute of Finance, New York.
23. Douglas L.G. (1995) *The Bond Markets – 1995 Edition: a desktop reference to world debt market performance and analysis*. Probus Publ. Comp., Chicago.
24. Elton E.J., Gruber M.J., Naber P. (1988) Bond Returns, Immunization and the Return Generating Process. In: Sarnat M., Szego G. (Eds.), *Studies in Banking & Finance*, North-Holland, New York, 1988.
25. Elton E.J., Gruber M.J., Michael R. (1990) The Structure of Spot Rates and Immunization. *Journal of Finance*, Vol. XLV, No.2, June, pp. 621-641.
26. Elton E.J., Gruber M.J. (1995) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, 5-th Ed.
27. Fabozzi F.J., Fong G. (1994) *Advanced Fixed Income Portfolio Management – The State of Art*. Probus Pub. Comp., Chicago.

28. Fabozzi F.J. (1996) *Bond Portfolio Management*. F.J. Fabozzi Associates, New Hope, Penn.
29. Fabozzi F.J. (2000) *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 4-th ed.
30. Fisher I. (1930) *The Theory of Interest*. MacMillan, New York (Reprint A.M. Kelly, New York 1965).
31. Fisher L., Weil R.L. (1971) Coping with the Risk of Market Rate Fluctuations - Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business*, Vol. 4, October, pp. 408-431.
32. Fong H.G., Vasicek O. (1983) Return Maximization for Immunized Portfolios. In: G.G. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs, (Eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn.
33. Fong H.G., Vasiček O.A. (1984a) A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization. *Journal of Finance*, December, pp. 1541-1546.
34. Fong H.G., Vasiček O.A. (1984b) A Risk Minimizing Strategy for Multiple Liability Immunization. *Journal of Finance*, December.
35. Francis J.C. (1991) *Investments - Analysis and Management*. McGraw-Hill, New York, 5-th ed.
36. Garbade K. (1986) *Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, June.
37. Garbade K. (1989) *Polynomial Representations of the Yield Curve and its Modes of Fluctuations*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, No. 53, July.
38. Gałarek D., Bachert P., Maksymiuk R. (2006) *The LIBOR Market Model in Practice*. J. Wiley & Sons, Chichester.
39. Gibson R., Lhabitant F.,-S., Talay D. (2001) *Modeling The Term Structure of Interest Rates – A Review of the Literature*. RiskLab Research Report, The Project on Interest Rate Risk Management and Model Risk, Zurich, June.
40. Granito M.R. (1984) *Bond Portfolio Immunization*. D.C. Heath and Co., Lexington, MA.
41. Harman H.H. (1967) *Modern Factors Analysis*. Chicago University Press, 2-nd ed.
42. Hawawini G.A. (1982) *Bond Duration and Immunization – Early Development and Recent Contributions*. Garland Publishing, New York.

43. Ho T.S.Y. (1990) *Strategic Fixed Income Investments*. Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill.
44. Jajuga K., Jajuga T. (1996) *Inwestycje - instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*. PWN, Warszawa.
45. Jakubowski A. (1994) „*Przegląd instrumentów finansowych na rynkach światowych oraz w Polsce*”. IBS PAN, Raport Badawczy A-20.53, Warszawa.
46. Jakubowski A. (1995) *Podstawowe własności obligacji i instrumentów pochodnych. Analiza rynku obligacji w kraju i zagranicą*. W: Metodologia planowania rozwoju strategicznego TP SA - etap II. (Praca zbiorowa), Raport IBS PAN - TP SA, Warszawa, lipiec, Rozdz. 4.1-4.2, s. 107-145.
47. Jakubowski A. (1996) *Modelowanie struktury czasowej stóp procentowych*. IBS PAN, Raport Projektu badawczego KBN, Nr PB 536/HO2/96/10 - G 37, Warszawa.
48. Jakubowski A. (1997a) *Ryzyko zmian stóp procentowych – zasady tworzenia zimmunizowanych portfeli inwestycyjnych*. IBS PAN, Raport Projektu Badawczego KBN, Nr PB 536/HO2/96/10-G37, Warszawa.
49. Jakubowski A. (1997b) *Zagadnienia teorii stóp procentowych*. IBS PAN, Raport Projektu Badawczego KBN, Nr PB 536/HO2/96/10-G37, Warszawa.
50. Jakubowski A. (2000) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: M. Krawczak, A. Miklewski, A. Jakubowski, P. Konieczny, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*, Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t. 25, Warszawa, Część II, s. 49-122.
51. Jakubowski A. (2002) Wycena obligacji katastroficznych w ujęciu teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a Ryzyko'02*. Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 151-177.
52. Jakubowski A. (2004a) *Zarządzanie portfelem obligacji w przypadku proporcjonalnych zmian struktury terminowej stop procentowych*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/41/2004, Warszawa.
53. Jakubowski A. (2004b) *Zagadnienia teorii stóp procentowych a ryzyko inwestycyjne*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/42/2004, Warszawa.
54. Jakubowski A. (2005a) Human Attitude Towards Risk in the Process of Pricing Catastrophe Bonds. In: K.A. Atanassov, J. Kacprzyk, M. Krawczak, E. Szmidt (Eds.) *Issues in the Representation and Processing of Uncertain and Imprecise Information*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa, pp. 153-180.

55. Jakubowski A. (2005b) *Two-Factor Utility Approach to Valuation of Catastrophe Bonds*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/59/2005, Warszawa.
56. Jakubowski A. (2006a) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '05*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 285-303.
57. Jakubowski A. (2006b) *Zagadnienia immunizacji portfela obligacji*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/31/2006, Warszawa.
58. Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003) *Matematyka finansowa – Instrumenty pochodne*. WNT, Warszawa.
59. Jones F.J. (1991) Yield Curve Strategies. *Journal of Fixed Income*, September, pp. 41-43.
60. Kaufman G.C., Bierwag G.O., Toevs A. (Eds.) (1983a) *Innovations in Bond Portfolio Management - Duration Analysis and Immunization*. JAI Press, Greenwich, Conn.
61. Klaffky T.E., Ma Y.Y., Nozari A. (1992) Managing Yield Curve Exposure – Introducing Reshaping Durations. *Journal of Fixed Income*, December 1992, pp. 5-15.
62. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000) *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*. Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t.25, Warszawa.
63. Krawczak M., Jakubowski A., Konieczny P., Kulikowski R., Miklewski A., Szkatuła G. (2003) *Aktywne zarządzanie inwestycjami finansowymi*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.
64. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995) *Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce*. Raport IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.
65. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996) *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*. Raport IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.
66. Kulikowski R., Jakubowski A. (1999) Wycena obligacji w warunkach ryzyka niewypłacalności emitenta. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '99*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, Cz. 1, s. 187-208.
67. Kulikowski R., Jakubowski A. (2000) Valuation of Catastrophe Bonds. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No. 2, 2000, pp. 181-211.

68. Ladko A. (1994) *Wybrane instrumenty rynku pieniężnego i kapitałowego*. Bibl. Menedżera i Bankowca, Warszawa.
69. Leibowitz M.L., Weinberger A. (1981) The Uses of Contingent Immunization. *Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 51-55.
70. Leibowitz M.L., Weinberger A. (1982) Contingent Immunization – Part I: Risk Control Procedures. *Financial Analysts Journal*, November-December, pp. 17-31.
71. Leibowitz M.L., Weinberger A. (1983) Contingent Immunization – Part II: Problem Areas. *Financial Analysts Journal*, January-February, pp. 35-50.
72. Litterman R., Scheinkman J. (1991) Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income Securities*, June, pp. 54-61.
73. Macaulay F.R. (1938) *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856*. Columbia University Press, National Bureau of Economic Research, New York.
74. Marshall W.J., Yawitz J.B. (1982) Lower Bounds on Portfolio Performance: An Extension of the Immunization Strategy. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. March, pp. 101-114.
75. Modigliani F., Sutch R. (1966) Innovations in Interest Rate Policy. *American Economic Review*, May, pp. 178-197.
76. Musiela M., Rutkowski M. (1997) *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg.
77. Nelson J., Schaefer S. (1983) The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies. In: G.C. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs (Eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management*, Greenwich, Conn., JAI Press.
78. Redington F.M. (1952) Review of the Principle of Life Office Valuations. *Journal of The Institute of Actuaries*, Vol. 18, pp. 286-340; (Reprinted in G.A. Hawawini (1982) *Bond Duration and Immunization – Early Development and Recent Contributions*, Garland Publishing, New York).
79. Reitano R.R. (1990) *A Multivariate Approach to Immunization Theory*. Actuarial Research Clearing House, Vol. 2.
80. Reitano R.R. (1991) Multivariate Immunization Theory. *Transactions of the Society of Actuaries*, Vol. XLIII.
81. Reitano R.R. (1992) Non-Parallel Yield Curve Shifts and Immunization. *Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 36-43.

82. Sławiński A. (1996) *Krzywa dochodowości*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 62, Warszawa, październik.
83. Soroczyński S., Stachowicz J. (1994) *Kontrakty futures i opcje*. Kantor Wyd. Zakamycze, Kraków.
84. Świętoń M. (2002) *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 150, listopad.
85. Tuckman B. (1996) *Fixed-Income Securities*. J. Wiley, New York.
86. Van Home J.C. (1994) *Financial Market Rates and Flows*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
87. Vasicek O.A. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, pp. 177-188.
88. Weron A., Weron R. (1998) *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa.
89. Zaremba L.S. (1995) *Solutions of Immunization Problem in Case of Proportional Spot Rate Shifts*. Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences (IBS PAN), Working Paper WP-3-1995, , Warsaw.
90. Zaremba L.S. (1996) *The Realized Rate of Return and the Babcock-Langetieg Equation in Case of Proportional Shifts in Spot Rates*. IBS PAN, Maszynopis powielony, Warszawa.
91. Zaremba L.S. (1998) Construction of a k-Immunization Strategy with the Highest Convexity. *Control and Cybernetics*, Vol. 27, No. 1, pp. 135-144.
92. Zaremba L.S., Smoleński W.H. (1998) *How to Find a Bond Portfolio with the Highest Convexity in a Class of Fixed Duration Portfolios*. IBS PAN, Maszynopis powielony, Warszawa, grudzień.
93. Zaremba L.S., Smoleński W.H. (2000) Optimal Portfolio Choice under a Liability Constraint. *Annals of Operational Research*, No. 00, pp. 1-11.
94. Zenios S.A., Ed. (1993) *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.
95. Ziarko-Siwiek U., Kamiński M. (2003): *Empiryczna weryfikacja teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych w Polsce*. NBP, Materiały i Studia, Zeszyt nr 159, czerwiec.

