Raport Badawczy

Research Report

RB/68/2007

Czynnikowy model immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko stóp procentowych

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2007

Raport Badawczy

Research Report

RB/68/2007

CZYNNIKOWY MODEL IMMUNIZACJI PORTFELA OBLIGACJI ZE WZGLĘDU NA RYZYKO STÓP PROCENTOWYCH

Andrzej Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

Warszawa, grudzień 2007

1. Wprowadzenie*

Przedmiotem prowadzonych rozważań będzie zastosowanie metodologii analizy czynnikowej do immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko nieoczekiwanych zmian zarówno poziomu stóp procentowych jak i ryzyko zmian kształtu krzywej dochodowości, będącej ilustracją graficzną struktury terminowej rynkowych stóp procentowych *spot*. Ogólnie rzecz biorąc, pod pojęciem immunizacji portfela obligacji rozumiemy takie zaprojektowanie udziałów wartościowych poszczególnych obligacji (o różnych terminach wykupu) wchodzących w skład analizowanego portfela, aby wartość globalna tego portfela była jak najmniej wrażliwa na nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych.

Zagadnienie to rozpatruje się przy zadanym horyzoncie inwestycyjnym wynikającym z terminu płatności przyszłych zobowiązań finansowych. W najprostszych modelach immunizacyjnych zakłada się, że w przyszłości występować będzie pojedyncze zobowiązanie. Natomiast w modelach bardziej złożonych, podstawowym problemem jest dopasowanie strumienia przyszłych dochodów wynikających z faktu posiadania określonego portfela obligacji (płatności odsetkowe i wartości nominalne) ze strumieniem przyszłych zobowiązań, rozpatrywanych w dyskretnych chwilach czasowych.

Zadanie immunizacji nie ma na ogół jednoznacznego rozwiązania - istnieje wiele (lub nieskończenie wiele) portfeli umożliwiających dopasowanie przyszłych dochodów (*assets*) do przyszłych zobowiązań (*liabilities*). Umożliwia to dodatkowo sformułowanie pewnej funkcji celu - np. maksymalizacja zysku lub minimalizacja kosztu utworzenia określonego portfela obligacji. Problematyka immunizacji sprowadza się w rozpatrywanym przypadku do zagadnienia optymalizacji, rozwiązywanego za pomocą jednej z wielu technik programowania matematycznego. W zagadnieniu tym problem immunizacji portfela formułuje się w postaci określonego zbioru ograniczeń.

W pracy podamy szczegółowy opis matematyczny analizy czynnikowej dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, przedstawimy definicje czynnikowej okresowości oraz czynnikowej wypukłości obligacji, po czym zaprezentujemy czynnikowy model immunizacji i (przy pewnych założeniach) optymalizacji portfela obligacji. Szczególną uwagę zwrócimy w tym przypadku na możliwość identyfikacji trzech ortogonalnych (a więc statystycznie niezależnych) czynników wspólnych: czynnika poziomu, czynnika nachylenia oraz czynnika krzywizny krzywej dochodowości

---

* Niniejsza praca zostanie opublikowana w: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko'2007*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2007.

(*yield curve*). Czynniki te odzwierciedlają łącznie zmiany kształtu tej krzywej, a tym samym losowe zmiany - z upływem czasu bieżącego – struktury terminowej rynkowych stóp procentowych.

2. Model czynnikowy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych

Jednym z nowszych podejść stosowanych dla celów analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych są tzw. wieloczynnikowe modele obligacji, w których wykorzystuje się elementy znanej powszechnie z dziedziny statystyki matematycznej i analizy danych, teorii analizy czynnikowej (*Factor Analysis*); por. Harman (1967). Modele te są najbardziej ogólne w tym sensie, że w stosunku do dynamiki zmian stóp procentowych *spot* r_{0t} $(t = 1,...,T)$ nie wprowadza się żadnych założeń upraszczających, jak to było w przypadku omówionych poprzednio podejść klasycznych. W zamian za to stawia się hipotezę, że zmiany stóp procentowych r_{0t} dla kolejnych chwil $\tau = 1,2,3,...$, są generowane przez kombinację liniową pewnej zadanej liczby nieskorelowanych **czynników wspólnych** (*common factors*). Nie jest przy tym zbyt istotne czy czynniki te mają (czy też nie) określoną interpretację ekonomiczną; jakkolwiek na ogół czynniki te można w określony sposób interpretować.

Należy w tym miejscu wyraźnie podkreślić, że czynników wspólnych nie należy w żadnym przypadku utożsamiać ze zmiennymi egzogenicznymi rozpatrywanymi powszechnie w klasycznej analizie regresyjnej. Analiza czynnikowa i analiza regresyjna to dwie istotnie różne teorie, u których podstaw stoją różne założenia i przed którymi postawiono różne cele. Celem analizy czynnikowej jest zastąpienie zbioru dużej liczby wzajemnie skorelowanych ze sobą zmiennych, małą liczbą ortogonalnych (a więc nieskorelowanych) czynników, które w możliwie maksymalny sposób przybliżałyby zasoby informacji reprezentowanej przez zmienne wyjściowe. Tak więc ortogonalizacja i znaczne zmniejszenie wymiarowości zagadnienia to dwa cele, jakie postawiono przed analizą czynnikową.

W modelu czynnikowym obligacji, w miejsce klasycznych definicji okresowości oraz wypukłości obligacji wprowadza się tzw. czynnikową okresowość (*factor duration*), i czynnikową wypukłość (*factor convexity*). Następnie, analizę nieoczekiwanych zmian stopy zwrotu (*excess return*) portfela obligacji, spowodowanych zmianami dr_t $(t = 1,...,T)$ rynkowych stóp procentowych, zastępuje się analizą tych zmian ze względu na zmiany dF_f $(f = 1,...,m)$ wartości zidentyfikowanych uprzednio czynników wspólnych F_f. Czynniki te, jako wielkości wspólne dla stóp procentowych

r_{0t}, nie zależą od okresów do wykupu $t = 1,...,T$ (zależą one jedynie od czasu bieżącego $\tau = 1,2,3,...$). W związku z tym, nie są w rozpatrywanym przypadku potrzebne dodatkowe, upraszczające założenia co do dynamiki zmian stóp r_{0t} - będące podstawą do definiowania klasycznych wzorów Macaulaya określających parametry okresowości i wypukłości obligacji.

Otrzymane w ten sposób czynnikowe modele immunizacji (*multi-factor immunization models*) nabierają ostatnio coraz większego znaczenia dla teorii i praktyki zarządzania portfelami obligacji; mogą one również stanowić podstawę do tworzenia komercyjnych pakietów komputerowego wspomagania decyzji w tej dziedzinie. Pierwsze prace z tego zakresu zostały opublikowane przez Garbade'a (1986, 1989), Littermana, Scheinkmana (1991) oraz Dahla (1993). Dotyczyły one czynnikowej analizy stóp procentowych oraz konstruowania portfeli immunizacyjnych dla rynków obligacji w USA oraz w Danii. W Polsce, współautorem pierwszych publikacji z tej dziedziny jest autor niniejszej pracy; por. Kulikowski, Bury, Jakubowski (1995, 1996).

Rozważane w pracy podejście jest kontynuacją wspomnianych powyżej wcześniejszych badań prowadzonych w USA (K. Garbade, R. Litterman, J. Scheinkman) i w Danii (H. Dahl). W szczególności, dotyczy to merytorycznego uzasadnienia zasadniczych koncepcji oraz formalnego wyprowadzenia podstawowych wzorów prezentowanych (bez dowodów) w tych pracach. A także, interpretacji tych zależności na gruncie metodologii nowoczesnej analizy statystycznej.

Bowiem o poziomie merytorycznym cytowanych prac, świadczy fakt, że na przykład na stronie 195, wydanej przez Cambridge University Press pracy H. Dala, autor proponuje wyznaczanie wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych z macierzy historycznych obserwacji, które (z definicji) są macierzami prostokątnymi. Zaiste, tajemnicą dla autora niniejszej pracy pozostanie to – w jaki sposób cytowani badacze rynków finansowych, o tak niskim przygotowaniu matematycznym – uzyskali poprawne wyniki końcowe.

Model czynnikowy. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$r_t = r_{0t}$ - stopa procentowa *spot*, tj. rentowność do wykupu obligacji czystodyskontowych o okresie do wykupu $t = 1,2,3,...,T$ (dla uproszczenia zapisu, pomijamy indeks 0 przy oznaczeniu r_{0t});

$TS(\tau) = [r_1(\tau),...,r_t(\tau),...,r_T(\tau)]$ - struktura terminowa stóp procentowych *spot* określona przez wektor wartości r_t $(t = 1,...,T)$ dla kolejnych chwil $\tau = 1,...,M$;

$X = [r_{\tau t}]_{M \times T}$ - macierz obserwacji stóp procentowych r_t $(t = 1,...,T)$ w kolejnych chwilach $\tau = 1,...,M$.

Rynkowe stopy procentowe *spot* r_t $(t = 1,\ldots,T)$ traktujemy jako zmienne losowe, przy czym zakładamy, że dysponujemy macierzą obserwacji X tych zmiennych utworzoną w ten sposób, że t-ta kolumna tej macierzy przedstawia realizację zmiennej losowej r_t w kolejnych chwilach czasowych $\tau = 1,...,M$. Kolejne wiersze tej macierzy określone są więc przez wektory wierszowe

$$TS(\tau) = [r_1(\tau),...,r_t(\tau),...,r_T(\tau)] = [r_{\tau 1},...,r_{\tau t},...,r_{\tau T}] \tag{1}$$

reprezentujące *strukturę terminową stóp procentowych TS* w chwilach $\tau = 1,...,M$.

Wartość średnią oraz wariancję zmiennych r_t (a dokładniej - estymatory tych parametrów) określamy ze wzorów:

$$\bar{r}_t = \frac{1}{M} \sum_{\tau=1}^{M} r_{\tau t}; \quad t = 1,...,T, \tag{2}$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{\tau=1}^{M} (r_{\tau t} - \bar{r}_t)^2; \quad t = 1,...,T. \tag{3}$$

Postać *macierzy obserwacji* X, określonej na podstawie danych historycznych - przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1. Postać macierzy obserwacji $X = [r_{\tau t}]$ o wymiarze $(M \times T)$.

	r_1	...	r_t	...	r_T
$TS(\tau = 1)$	r_{11}	...	r_{1t}	...	r_{1T}
$TS(\tau = 2)$	r_{21}	...	r_{2t}	...	r_{2T}
$\vdots$					
$TS(\tau)$	$r_{\tau 1}$	...	$r_{\tau t}$	...	$r_{\tau T}$
$\vdots$					
$TS(\tau = M)$	r_{M1}	...	r_{Mt}	...	r_{MT}
	$\bar{r}_1$		$\bar{r}_t$		$\bar{r}_T$
	σ_1		σ_t		σ_T

Na podstawie wartości kolumn macierzy obserwacji X możemy wyznaczyć współczynniki kowariancji, a następnie, współczynniki korelacji między stopami procentowymi r_t oraz r_l $(t,l=1,...,T)$; a mianowicie

$$\operatorname{cov}(r_t,r_l)=\frac{1}{M}\sum_{\tau=1}^{M} r_{\tau t}r_{\tau l}-\bar{r}_t\,\bar{r}_l\,, \tag{4}$$

gdzie cov(.,.) - estymator kowariancji pomiędzy zmiennymi losowymi;

oraz $$\rho_{tl}=\rho(r_t,r_l)=\frac{\operatorname{cov}(r_t,r_l)}{\sigma_t\sigma_l}\,, \tag{5}$$

gdzie $\rho(.,.)$ - estymator współczynnika korelacji między zmiennymi losowymi. Dla współczynników korelacji ρ_{tl} mamy

$$\rho_{tt}=1, \qquad \rho_{tl}=\rho_{lt}, \qquad \forall\, t,l=1,...,T. \tag{6}$$

Współczynniki korelacji ρ_{tl} $(t,l=1,...,T)$ tworzą *macierz korelacji* $\boldsymbol{R}$ o wymiarze ($T\times T$); postać tej macierzy przedstawiono w Tablicy 2.

Tablica 2. Macierz współczynników korelacji między zmiennymi r_t, r_l; $t,l=1,...,T$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Macierz współczynników korelacji $\boldsymbol{R}$ pomiędzy stopami procentowymi r_t, r_l $(t,l=1,...,T)$ ma zasadnicze znaczenie dla prezentowanej dalej *metody analizy czynnikowej*; stanowić bowiem ona będzie punkt wyjściowy do dalszych rozważań.

Dokonamy teraz standaryzacji stóp procentowych r_t $(t=1,...,T)$ traktowanych jako zmienne losowe; tj.

$$r^{*}_{\tau t}=\frac{r_{\tau t}-\bar{r}_t}{\sigma_t}; \qquad \forall\,\tau=1,...,M; \qquad (t=1,...,T), \tag{8}$$

gdzie $r^{*}_{\tau t}$ - standaryzowane wartości elementów macierzy obserwacji X .

W wyniku, otrzymamy $(M \times T)$- wymiarową *standaryzowaną macierz obserwacji*

$Z = [r_{\tau t}^*]$, o postaci analogicznej jak macierz X przedstawiona w tablicy 1.

Poszczególne kolumny macierzy Z są więc realizacjami standaryzowanych zmiennych losowych r_t^* odpowiadających stopom procentowym *spot* r_t $(t = 1,...,T)$. Zmienne r_t^* będziemy nazywali *standaryzowanymi stopami procentowymi spot*; $t = 1,...,T$. Stosując zmienne standaryzowane, macierz korelacji $\boldsymbol{R}$ o postaci (7) można zapisać następująco:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})_{T \times T}. \tag{9}$$

gdzie przez znak (') - oznaczono transpozycję macierzy.

W analizowanym modelu czynnikowym, stopy procentowe *spot* przedstawia się w postaci następującej kombinacji liniowej tzw. *czynników wspólnych* oraz *czynników swoistych*:

$$r_t^* = a_{t1}F_1^* + \cdots + a_{tf}F_f^* + \cdots + a_{tm}F_m^* + a_t\mu_t^*, \tag{10}$$

lub też, zapisując to bardziej skrótowo

$$r_t^* = \sum_{f=1}^{m} a_{tf}F_f^* + a_t\,\mu_t^*; \quad t = 1,...,T, \tag{11}$$

gdzie r_t^* - standaryzowane stopy procentowe *spot*; tj.

$$r_t^* = \frac{r_t - \bar{r}_t}{\sigma_t}; \quad \bar{r}_t^* = 0, \quad \mathrm{var}(r_t^*) = 1,$$

F_f^* - czynniki wspólne (*common factors*); $f = 1,...,m$,

μ_t^* - czynniki swoiste (*unique factors, residuals*); $t = 1,...,T$,

a_{tf} - ładunek czynnika wspólnego F_f^* w zmiennej r_t^*, tzw. ładunek czynnikowy (*common factor loading*),

a_t - ładunek czynnika swoistego μ_t^* w zmiennej r_t^* (*unique factor loading*).

W modelu czynnikowym (11) przyjmujemy następujące założenia:

(i) Liczba m czynników wspólnych jest zadana; przy czym $m \leq T$.

(ii) Czynniki wspólne F_f^* $(f = 1,...,m)$ są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi, tj. $(\overline{F}_f^*) = 0$, $\mathrm{var}(\overline{F}_f^*) = 1$.

Czynniki te są wzajemnie nieskorelowane, tj.

$$\rho(F_f^*, F_k^*) = 0; \qquad \forall f, k = 1,...,m. \tag{12}$$

Ponadto, czynniki wspólne F_f^* oraz czynniki swoiste μ_t^* są również wzajemnie nieskorelowane, czyli

$$\rho(F_f^*, \mu_t^*) = 0; \qquad \forall f = 1,...,m; \quad t = 1,...,T. \tag{13}$$

(iii) Czynniki swoiste μ_t^* $(t = 1,...,T)$ są wystandaryzowanymi zmiennymi losowymi, tj. $\overline{\mu}_t^* = 0$, $\mathrm{var}(\mu_t^*) = 1$.

Czynniki swoiste są wzajemnie nieskorelowane tj.

$$\rho(\mu_t^*, \mu_l^*) = 0; \qquad \forall t, l = 1,...,T. \tag{14}$$

Z przedstawionych powyżej założeń wynika, że każdy czynnik wspólny F_f^* $(f = 1,...,m)$ ma te same wartości dla wszystkich zmiennych r_t^*. Inaczej mówiąc, wzajemnie nieskorelowane czynniki wspólne oddziaływują na więcej niż jedną stopę procentową r_t^*; gdyby było inaczej to czynniki te można byłoby traktować jako czynniki swoiste dla poszczególnych zmiennych r_t^* $(t = 1,...,T)$.

Ładunki czynników wspólnych a_{tf} $(t = 1,...,T; f = 1,...,m)$ są wielkościami specyficznymi dla każdej ze zmiennych r_t^* w tym sensie, że reprezentują one wrażliwość zmiany zmiennej r_t ze względu na zmianę czynnika wspólnego F_f^*. Można łatwo wykazać (Harman, 1967), że *ładunki czynnikowe* a_{tf} są równe współczynnikom korelacji między zmiennymi r_t^* a czynnikami wspólnymi F_f^*, tj.

$$a_{tf} = \rho(r_t^*, F_f^*), \quad \forall t = 1,...,T; \quad f = 1,...,m. \tag{15}$$

Oznacza to, że $a_{tf} \in [-1, +1]$.

Z kolei każdy *czynnik swoisty* μ_t^* jest wyłącznym atrybutem odpowiadającej mu zmiennej r_t^* $(t = 1,...,T)$. Gdyby było inaczej, to czynnik ten należałoby po prostu rozpatrywać jako jeden z czynników wspólnych F_f^*; stąd bardzo ważne jest założenie, że czynniki swoiste są wzajemnie nieskorelowane tj. $\rho(\mu_t^*, \mu_l^*) = 0$. Wynika stąd bowiem bezpośrednio, że czynnik swoisty μ_t^* zmiennej r_t^* jest nieskorelowany z pozostałymi zmiennymi r_l^*, tj.

$$\rho(r_l^*, \mu_t^*) = 0; \quad \forall l, t = 1, \ldots, T; \quad l \neq t. \tag{16}$$

Czynnik swoisty μ_t^* możemy więc interpretować jako tzw. *ryzyko specyficzne* analizowanej obligacji czysto-dyskontowej o okresie do wykupu t oraz rentowności r_t $(t = 1, \ldots, T)$. Natomiast każdy z *czynników wspólnych* F_f^* $(f = 1, \ldots, m)$ reprezentuje sobą "jeden rodzaj" ryzyka, które jest wspólne dla wszystkich rozpatrywanych obligacji.

Można łatwo wykazać (Harman, 1967), że ładunek a_t czynnika swoistego jest równy współczynnikowi korelacji między zmienną r_t^* a czynnikiem swoistym μ_t^*, tj.

$$a_t = \rho(r_t^*, \mu_t^*); \quad \forall t = 1, \ldots, T \tag{17}$$

Oznacza to, że $a_t \in [-1, +1]$; z tym, że w modelu dodatkowo zakładamy, że $a_t \geq 0$.

Z powyższego wynika, że metoda analizy czynnikowej wiąże się z założeniem liniowej reprezentacji zbioru wzajemnie skorelowanych zmiennych r_t^* zbiorem zadanej liczby nieskorelowanych między sobą *czynników wspólnych* oraz *czynników swoistych*, przy czym przyjmuje się, że owe "hipotetyczne" czynniki wspólne są właśnie źródłem korelacji między zmiennymi r_t^* $(t = 1, \ldots, T)$.

Równanie modelu czynnikowego (103) zapisane dla kolejnych dyskretnych chwil czasowych $\tau = 1, \ldots, M$, ma następującą postać:

$$r_{\tau t}^* = \sum_{f=1}^{m} a_{tf} F_{\tau f}^* + a_t \mu_{\tau t}^*; \quad \tau = 1, \ldots, M; \quad t = 1, \ldots, T. \tag{18}$$

W równaniu tym $r_{\tau t}^*$, $F_{\tau f}^*$ oraz $\mu_{\tau t}^*$ oznaczają realizacje (dla $\tau = 1, \ldots, M$) zmiennych losowych r_t^*, F_f^* oraz μ_t^*. Jak można zauważyć, wartości ładunków czynnikowych a_{tf} oraz a_t nie zależą od czasu bieżącego $\tau = 1, \ldots, M$; oznacza to, że wartości ładunków czynnikowych są stałym atrybutem rozpatrywanego modelu. Natomiast wartości czynników wspólnych i swoistych zależą oczywiście od czasu bieżącego τ.

Zadanie analizy czynnikowej. Zadaniem analizy czynnikowej jest wyznaczenie na podstawie zadanej macierzy obserwacji $\boldsymbol{Z}$ - oraz przy założeniu liniowego modelu (11) - kolejno następujących wielkości:

- macierzy korelacji $\boldsymbol{R}$ zmiennych r_t^* (a tym samym zmiennych r_t), $t=1,...,T$;
- ładunków czynników wspólnych a_{tf} $(t=1,...,T;\quad f=1,...,m)$; ładunki te tworzą tzw. *macierz "zmienna-czynnik"* o postaci

$$\mathbf{A}=[a_{tf}]_{T\times m}\ , \tag{19}$$

- ładunków czynników swoistych a_t $(t=1,...,T)$; ładunki te tworzą macierz diagonalną A_d o wymiarze $T\times T$, tj.

$$A_d=diag(a_t)_{T\times T}\ , \tag{20}$$

- wartości czynników wspólnych $F_{\tau f}^*$ $(\tau=1,...,M;\ f=1,...,m)$ będących realizacjami zmiennych losowych F_f^* w dyskretnych chwilach czasowych $\tau=1,...,M$; wartości te tworzą *macierz czynników wspólnych* o postaci

$$F=[F_{\tau f}^*]_{M\times m}\ , \tag{21}$$

- wartości czynników swoistych $\mu_{\tau t}^*$ $(\tau=1,...,M;\ t=1,...,T)$; wartości te tworzą *macierz czynników swoistych* o postaci

$$\mu=[\mu_{\tau t}]_{M\times T}\,. \tag{22}$$

Rozwiązanie powyższego zadania jest następujące.

Wprowadzimy oznaczenia

$$h_t^2=a_{t1}^2+...+a_{tf}^2+...+a_{tm}^2\ ; \tag{23}$$

gdzie h_t^2 - tzw. *zasób zmienności wspólnej* zmiennej r_t^*.
Ze wzoru (11) można łatwo wykazać, że

$$\operatorname{var}(r_t^*)=h_t^2+a_t^2=1,\quad \forall t=1,...,T\ . \tag{24}$$

Zasób zmienności wspólnej (tzw. *communality*) h_t^2, będący sumą kwadratów współczynników korelacji a_{tf}^2 wszystkich czynników wspólnych $F_{\tau f}^*$ $(f=1,...,m)$ ze zmienną r_t^*, jest pewną miarą określającą jaka część całkowitej zmienności zmiennej r_t^* jest wyjaśniana przez czynniki wspólne. Wynika to stąd, że całkowita zmienność tej zmiennej reprezentowana przez jej wariancję $\mathrm{var}(r_t^*)$ jest równa jedności - jako wariancja zmiennej standaryzowanej.

Podobnie, wartość a_t^2 reprezentuje *zasób zmienności swoistej* zmiennej r_t^* wyjaśnianej przez *czynnik swoisty* μ_t^* $(t = 1,...,T)$.

Ze wzoru (24) wynika bezpośrednio, że

$$h_t^2 \in [0,1] \quad \text{oraz} \quad a_t^2 \in [0,1]. \tag{25}$$

Podstawiając na przekątnej głównej macierzy korelacji $\boldsymbol{R}$ o postaci (7) w miejsce jedynek, wartości zasobów zmienności wspólnych h_t^2 - otrzymamy tzw. *zredukowaną macierz korelacji* $\boldsymbol{R}^*$; macierz tę przedstawiono w Tablicy 3.

Tablica 3. Postać zredukowanej macierzy korelacji $\boldsymbol{R}^*$, gdzie $h_t^2 = \sum_{f=1}^{m} a_{tf}^2$.

$$\boldsymbol{R}^* = \begin{bmatrix} h_1^2 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1T} \\ \rho_{21} & h_2^2 & \cdots & \rho_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{T1} & \rho_{T2} & \cdots & h_T^2 \end{bmatrix}; \tag{26}$$

Przy przedstawionych powyżej założeniach, można wyprowadzić następujące tzw. *podstawowe równanie analizy czynnikowej*:

$$\boldsymbol{R}^* = AA', \tag{27}$$

gdzie A - macierz ładunków a_{tf} $(t = 1,...,T;\ f = 1,...,m)$ czynników wspólnych o postaci (19); por. Harman (1967).

Wyznaczenie macierzy ładunków czynnikowych A (o wymiarze $T \times m$) spełniającej równanie (27) stanowi rozwiązanie rozpatrywanego problemu analizy czynnikowej. Zauważmy, że mając dane ładunki a_{tf} $(t = 1,...,T;\ f = 1,...,m)$ czynników wspólnych możemy łatwo - na podstawie wzorów (23) i (24) - wyznaczyć ładunki a_t $(t = 1,...,T)$ czynników swoistych, a tym samym - macierz A_d o postaci (20). Macierz ta jest macierzą diagonalną - na jej przekątnej głównej wystarczy podstawić wartości

$$a_t = \sqrt{1-h_t^2}\,; \quad t = 1,\dots,T\,, \tag{28}$$

co wynika bezpośrednio ze wzoru (24).

Na podstawie znajomości macierzy $\boldsymbol{A}$, oraz wyjściowej macierzy korelacji $\boldsymbol{R}$ można z kolei wyprowadzić następującą zależność określającą wartość *macierzy czynników wspólnych* $\boldsymbol{F}$ o postaci (21); Harman (1967):

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z}'\,, \tag{29}$$

gdzie $\boldsymbol{Z}$ - standaryzowana macierz obserwacji, tj. macierz zmiennych $r_{\tau t}^*$ ($\tau = 1,\dots,M$; $t = 1,\dots,T$) danych wzorem (8).

Mając wyznaczoną macierz czynników wspólnych $\boldsymbol{F}$ oraz zdefiniowany liniowy model czynnikowy (18) (tj. ładunki czynników wspólnych i swoistych określone) możemy - bezpośrednio z tego modelu - wyznaczyć wartość macierzy czynników swoistych μ o postaci (22).

Na zakończenie powyższych rozważań należy podkreślić, że rozwiązywanie *podstawowego równania analizy czynnikowej* jest zagadnieniem niezwykle złożonym; ze wzorów (26), (27) wynika bowiem, że równanie to jest nieliniowym równaniem macierzowym o dosyć skomplikowanej strukturze.

Załóżmy, że mamy zadaną liczbę m czynników wspólnych, przy czym $m < T$; wówczas rząd szukanej macierzy $\boldsymbol{A}$ jest równy również m. Można wykazać, że aby było spełnione równanie (27) musi zachodzić (Harman, 1967):

$$\text{rząd}\,\boldsymbol{R}^* = \text{rząd}\,\boldsymbol{A} = m < T\,. \tag{30}$$

Zadanie analizy czynnikowej polega w tym przypadku na dobraniu najpierw takich zasobów zmienności wspólnej h_t^2 $(t = 1,\dots,T)$, aby rząd zredukowanej macierzy korelacji $\boldsymbol{R}^*$ był równy zadanej liczbie m, a następnie – na wyznaczeniu macierzy ładunków $\boldsymbol{A}$ rzędu m, spełniającej równanie (27). Zauważmy jeszcze, że nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (27). Mianowicie załóżmy, że dana macierz $\boldsymbol{A}$ spełnia to równanie, tj.

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\,.$$

Weźmy pod uwagę ortogonalne przekształcenie macierz $\boldsymbol{A}$, tj.

$$\boldsymbol{A}_p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\,, \tag{31}$$

gdzie P - dowolna macierz ortogonalna o wymiarze $(m \times m)$, czyli $PP' = I$; I - gdzie macierz jednostkowa oraz $P' = P^{-1}$. Z (31) otrzymamy wówczas

$$A = A_p P^{-1} = A_p P' \quad \text{oraz}$$

$$R^* = AA' = A_p P'(A_p P')' = A_p P' P A_p' = A_p A_p'. \tag{32}$$

Z (31), (32) wynika, że jeżeli macierz A spełnia podstawowe równanie analizy czynnikowej (27), to równanie to jest również spełnione przez dowolne przekształcenie ortogonalne (31) tej macierzy. Należałoby więc w tym przypadku mówić raczej o pewnej klasie rozwiązań równania (27), niż o pojedynczym rozwiązaniu zadanym macierzą A.

W związku z powyższym, istnieje wiele metod rozwiązywania równania analizy czynnikowej (27), w których dla wyznaczenia macierzy A (z określonej klasy rozwiązań) stosuje się pewne dodatkowe kryteria. Najpowszechniej stosowaną metodą jest w rozpatrywanym przypadku tzw. metoda głównego czynnika Hotellinga; por. (Harman, 1967).

3. Metoda głównego czynnika (*Principal Factor Method*)

Ze wzoru (23) na zasób zmienności wspólnej h_t^2 zmiennej r_t^* możemy wyznaczyć tzw. *ogólną zmienność wspólną* charakteryzującą wszystkie zmienne $\{r_t^*,\ t = 1,...,T\}$, tj.

$$V = \sum_{t=1}^{T} h_t^2 = \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{f=1}^{m} a_{tf}^2\right) = \sum_{f=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{T} a_{tf}^2\right) = \sum_{f=1}^{m} V_f \tag{33}$$

gdzie
$$V_f = \sum_{t=1}^{T} a_{tf}^2 \tag{34}$$

- część ogólnej zmienności wspólnej V wyjaśniana przez czynnik wspólny F_f^* $(f = 1,...,m)$.

Zauważmy, że wartość V_f jest równa sumie kwadratów współczynników korelacji (tj. kwadratów ładunków czynnikowych) danego czynnika F_f^* ze wszystkimi zmiennymi r_t^*; $t = 1,...,T$. Wskaźnik V_f jest więc miarą udziału czynnika F_f^* w wyjaśnianiu wszystkich wzajemnych korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi wyjściowymi r_t^* $(t = 1,...,T)$.

Podstawowa idea *metody głównego czynnika* polega na takim doborze ładunków czynników wspólnych F_f^* $(f = 1,...,m)$, aby udział V_f tych czynników w wyjaśnianiu ogólnej zmienności wspólnej V był malejący. A dokładniej, postępowanie rozpoczyna się od określenia ładunków czynnika pierwszego F_1^*, którego udział V_1 w ogólnej zmienności V powinien być maksymalny tj. $V_1 = \hat{V}_1$. Następnie dobiera się ładunki czynnika drugiego F_2^* tak, aby udział V_2 tego czynnika w wyjaśnianiu pozostałej zmienności wspólnej (tj. $V - \hat{V}_1$) był maksymalny, przy określonych uprzednio ładunkach czynnika pierwszego; itd.

W praktyce, *metodę głównego czynnika* stosuje się sposób iteracyjny. To znaczy najpierw zadaje się pewną początkową wartość h_t^2 zasobów zmienności wspólnej dla każdej ze zmiennych r_t^* $(t = 1,...,T)$. Następnie dla zadanej w ten sposób macierzy $\boldsymbol{R}^*$ - stosuje się powyższą metodę w celu wyznaczenia ładunków dla wszystkich czynników $F_1^*, F_2^*,...,F_m^*$, po czym dokonuje się modyfikacji wartości h_t^2 według wzoru (23), tj.

$$\left(h_t^{i+1}\right)^2 = \sum_{f=1}^{m}\left(a_{tf}^i\right)^2; \quad t = 1,...,T, \tag{35}$$

gdzie i - numer iteracji; $i = 1,2,3,...$.

W efekcie otrzymuje się zbieżny ciąg wartości zasobów zmienności wspólnych, tj. takie wartości graniczne h_t^2 $(t = 1,...,T)$, dla których zachodzi:

$$\text{rząd } \boldsymbol{R}^* = m \ . \tag{36}$$

Można wykazać (Harman, 1967), że otrzymuje się wówczas następujące rozwiązanie:
Oznaczmy przez λ_t, w_t - wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy $\boldsymbol{R}^*$ uporządkowane według malejących wartości λ_t $(t = 1,...,T)$, tj.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_m \geq \ldots \geq \lambda_T \geq 0 . \tag{37}$$

Ponieważ dodatnio półokreślona macierz $\boldsymbol{R}^*$ jest rzędu $m < T$, tylko pierwszych m wartości własnych λ_t będzie większych od zera; czyli otrzymamy ostatecznie

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m > 0, \quad \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_T = 0 . \tag{38}$$

Natomiast ładunki czynnikowe a_{tf} $(t=1,..,T; f=1,...,m)$ wyrażają się następującymi wzorami

$$\boldsymbol{a}_f = [a_{1f},...,a_{tf},...,a_{Tf}]' = \frac{\boldsymbol{w}_f}{\|\boldsymbol{w}_f\|}\sqrt{\lambda_f}; \quad f=1,...,m, \tag{39}$$

gdzie $\|\cdot\|$ - norma euklidesowa wektora.

Stąd
$$a_{tf} = \frac{w_{tf}}{\|\boldsymbol{w}_f\|}\sqrt{\lambda_f}; \quad t=1,...,T; \quad f=1,...,m, \tag{40}$$

gdzie w_{tf} - t-ta składowa wektora własnego $\boldsymbol{w}_f$.

Ze wzoru (40) wynika również, że

$$V_f \triangleq \sum_{t=1}^{T} a_{tf}^2 = \lambda_f; \qquad f=1,...,m. \tag{41}$$

Tak więc udział V_f czynnika F_f w wyjaśnianiu zmienności ogólnej V jest równy odpowiadającej temu czynnikowi wartości własnej λ_f zredukowanej macierzy korelacji $\boldsymbol{R}^*$.

Na podstawie wzoru (41) udziały te określamy procentowo w następujący sposób:

$$P_f = \frac{V_f}{V} = \frac{\lambda_f}{\lambda_1+\ldots+\lambda_m}\times 100\,[\%], \tag{42}$$

gdzie P_f - procentowy udział czynnika F_f^* w wyjaśnianiu ogólnych zasobów zmienności wspólnej V.

Na zakończenie omawiania powyższej metody należy podkreślić, że w praktyce - w wyniku określonej dokładności obliczeń numerycznych - zależność (38) spełniona jest tylko z pewnym przybliżeniem, tj.

$$\lambda_{m+1} \approx \ldots \approx \lambda_T \approx 0, \tag{43}$$

a więc wartości te jednak nieco różnią się od zera, przy czym część z nich może być ujemna.

Opisana metoda analizy czynnikowej jest oprogramowana w wielu pakietach komputerowych dotyczących zaawansowanych obliczeń statystycznych; m.in. w pakiecie STATGRAPHICS v. 7.0 (funkcja FACTOR).

Interpretacja geometryczna. Weźmy pod uwagę liniowy model czynnikowy dany równaniem (10), tj.

$$r_t^* = a_{t1}F_1^* + \ldots + a_{tf}F_f^* + \ldots + a_{tm}F_m^* + a_t\,\mu_t^*; \quad t=1,...,T. \tag{44}$$

W modelu tym, wzajemnie ortogonalne czynniki wspólne $F_1^*,\ldots,F_m^*$ tworzą bazę pewnej m-wymiarowej przestrzeni liniowej. W tej *przestrzeni czynników wspólnych*, każda z analizowanych zmiennych r_t^* $(t=1,\ldots,T)$ jest reprezentowana przez wektor $\boldsymbol{a}_t$ o postaci:

$$\boldsymbol{a}_t = [a_{t1},\ldots,a_{tf},\ldots,a_{tm}]', \tag{45}$$

przy czym ładunki czynnikowe a_{tf} oznaczają współrzędne rozpatrywanego wektora względem poszczególnych wymiarów rozpatrywanej przestrzeni. Geometrycznie oznacza to, że czynniki wspólne F_f $(f=1,\ldots,m)$ tworzą układ wzajemnie ortogonalnych osi na których możemy odkładać współrzędne a_{tf} wektorów $\boldsymbol{a}_t$ $(t=1,\ldots,T)$.

Z kolei w układzie dwóch pierwszych czynników F_1^* i F_2^* (tj. czynników o największych procentowych udziałach w wyjaśnianiu zasobów ogólnych zmienności wspólnej V), jako reprezentację zmiennych r_t^* $(t=1,\ldots,T)$ możemy rozpatrywać wektory

$$\boldsymbol{a}_t^* = [a_{t1},a_{t2}]', \tag{46}$$

będące ortogonalnymi rzutami m-wymiarowych wektorów $\boldsymbol{a}_t$ na dwuwymiarową przestrzeń czynnikową OF_1,F_2. Ilustrację powyższej graficznej reprezentacji zmiennych r_t^* za pomocą wektorów $\boldsymbol{a}_t^*$ $(t=1,\ldots,T)$ w układzie współrzędnych OF_1F_2 przedstawiono na rysunku 3.

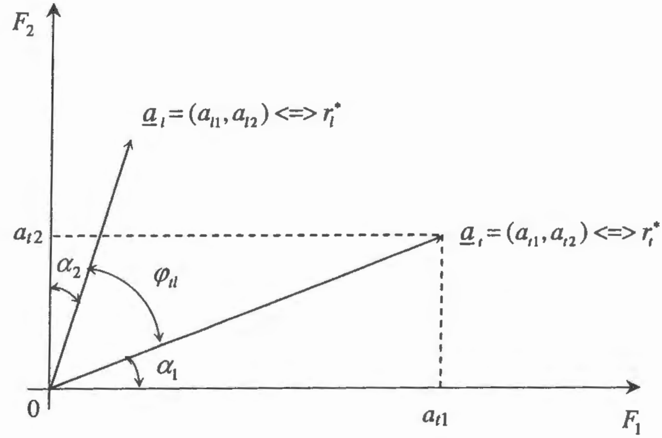
Można wykazać (Harman, 1967), że współczynniki korelacji między rozpatrywanymi zmiennymi r_t^*, r_l^* są (w rozpatrywanym układzie OF_1F_2) proporcjonalne do cosinusów kątów między wektorami $\boldsymbol{a}_t^*$ i $\boldsymbol{a}_l^*$ reprezentującymi te zmienne w dwuwymiarowej przestrzeni czynnikowej. To samo dotyczy współczynników korelacji między tymi zmiennymi a czynnikami F_1 i F_2.

Dla kątów φ_{tl}, α_1 i α_2 zaznaczonych na rysunku 3, mamy zatem

$$\rho(r_t^*,r_l^*) \sim \cos\varphi_{tl}\,, \tag{47}$$

$$\rho(r_t^*,F_1^*) \sim \cos\alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \rho(r_l^*,F_2^*) \sim \cos\alpha_2\,, \tag{48}$$

gdzie przez "~" oznaczono symbol proporcjonalności.



Rysunek 3. Graficzna reprezentacja zmiennych r_t^* $(t = 1,...,T)$ w dwuwymiarowej przestrzeni czynnikowej OF_1F_2.

Z (47) i (48) wynika, że im mniejsze są kąty między rozpatrywanymi wektorami, tym zmienne reprezentowane przez te wektory są silniej skorelowane. Na przykład, z rysunku 3 wynika, że zmienna r_t^* jest silniej skorelowana z czynnikiem, F_1, natomiast zmienna r_l^* jest silniej skorelowana z czynnikiem F_2.

Rotacje ortogonalne. Jednym z podstawowych celów analizy czynnikowej jest interpretacja rozpatrywanego zbiory zmiennych $\{r_t^*; t = 1,...,T\}$ za pomocą zadanej liczby m wzajemnie ortogonalnych czynników wspólnych $\{F_f^*; f = 1,...,m\}$. Interpretacja ta odbywa się na podstawie ładunków czynnikowych a_{tf} $(t = 1,...,T; f = 1,...,m)$, przy czym jest ona tym łatwiejsza w im większym stopniu pewne grupy zmiennych są silnie skorelowane z tylko jednym czynnikiem, natomiast słabo skorelowane z pozostałymi czynnikami. Wówczas rozpatrywany zbiór zmiennych $\{r_t^*; t = 1,...,T\}$ można podzielić na pewne, "w dużej mierze rozłączne", grupy zmiennych rozkładających się wzdłuż poszczególnych wymiarów przestrzeni generowanej przez ortogonalne czynniki wspólne F_f^* $(f = 1,...m)$. Czynniki te mają wówczas na ogół określoną interpretację, np. ekonomiczną.

Jak wspomnieliśmy poprzednio, rozwiązanie *podstawowego równania analizy czynnikowej* (27) nie jest jednoznaczne; można je rozwiązywać jedynie z dokładnością do ortogonalnego przekształcenia macierzy $\boldsymbol{A}$. A zatem podstawową ideą różnych metod dokonywania rotacji ortogonalnych, jest takie ortogonalne przekształcenie macierzy $\boldsymbol{A}$ w nową macierz ładunków $\boldsymbol{A}_p$, której elementy stanowią ładunki dające się łatwiej interpretować. To znaczy ładunki czynnikowe bardziej znaczące powinny mieć po rotacji wartości bezwzględne bliskie jedności, natomiast mało znaczące - bliskie zeru. Chodzi w tym przypadku o większe zróżnicowanie ładunków czynnikowych a_{tf} dla zadanego t oraz $f = 1,...,m$; tj. ładunków występujących w tym samym wierszu macierzy $\boldsymbol{A}$ o postaci (19). Oczywiście, nie w każdym przypadku uzyskanie takiego wyniku jest możliwe.

Rozpatrywane przekształcenie można przedstawić jako

$$\boldsymbol{A}_p = \boldsymbol{AP}, \tag{49}$$

przy czym $\boldsymbol{A}$ - dana macierz ładunków w wymiarze $T \times m$ (wyznaczana np. *metodą głównego czynnika*), $\boldsymbol{P}$ - macierz ortogonalna przekształcenia o wymiarze $m \times m$ przy czym $\boldsymbol{PP'} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}_p$ - macierz ładunków po przekształceniu.

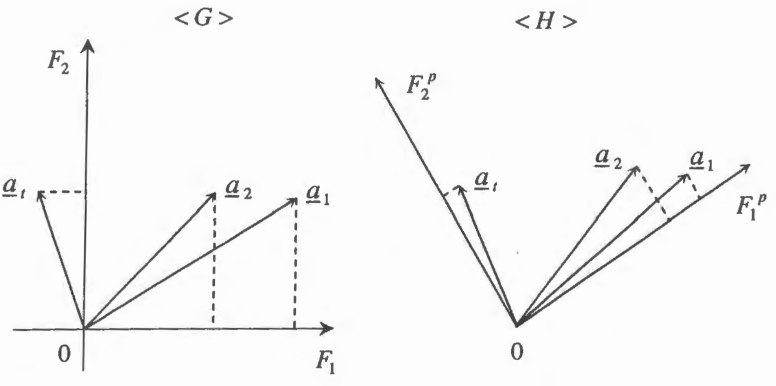
Przekształcenie (49) oznacza geometrycznie, że dokonuje się obrotu układu współrzędnych w przestrzeni czynników $F_1^*,...,F_m^*$. Można wykazać, że zasoby zmienności wspólnej h_t^2 poszczególnych zmiennych r_t^* $(t = 1,...,T)$ nie ulegną w wyniku rotacji ortogonalnych zmianie. A mianowicie zauważmy, że wobec

$$h_t^2 = \sum_{f=1}^{m} a_{tf}^2,$$

wielkości h_t^2 są równe kwadratowi normy euklidesowej wektorów $a_t = [a_{t1},...,a_{tf},...,a_{tm}]'$. Tak więc w wyniku rotacji ortogonalnych przestrzeni czynników $F_1^*,...F_m^*$, długości tych wektorów reprezentujących analizowane zmienne wyjściowe r_t^* $(t = 1,...,T)$ pozostaną te same. Oczywiście, z powyższego wynika bezpośrednio, że nie ulegnie również zmianie wielkość $V = V_1 + ... + V_m$ *zasobów ogólnych zmienności wspólnej* wyjaśnianej przez wszystkie *czynniki wspólne* (por. wzór (33)), jakkolwiek poszczególne składniki $V_f (f = 1,...,m)$ tych zasobów będą inne niż poprzednio.

Zmienią się natomiast wartości ładunków a_{tf} każdego z czynników F_f^* (tj. dla ustalonego f) w poszczególnych zmiennych; a także, wartości czynników określone przez macierz F o postaci (21). Na rysunku 4 przedstawiono ilustrację graficzną rozpatrywanych powyżej zagadnień.

Do najczęściej stosowanych metod rotacji ortogonalnych należą metody VARIMAX, QUARTIMAX oraz EQUIMAX; *Harman* (1967). Metody te są również wykorzystywane we wspomnianym już pakiecie komputerowym STATGRAPHICS v. 7.0.



Rysunek 4. Ilustracja rotacji ortogonalnych dla $m=2$;
$<G>$ - przestrzeń czynnikowa OF_1F_2 przed rotacją,
$<H>$ - przestrzeń czynnikowa $OF_1^pF_2^p$ po rotacji

6. Czynnikowa okresowość oraz czynnikowa wypukłość obligacji

W poprzednim punkcie przedstawiliśmy poszczególne etapy identyfikacji modelu czynnikowego (11) rynkowych stóp procentowych *spot* r_t, określanych dla kolejnych dyskretnych punktów czasowych $\tau=1,2,3,...$, na podstawie rentowności do wykupu (*YTM*) obligacji czysto-dyskontowych o okresach do wykupu $t=1,...,T$.

Model ten miał postać

$$r_t^* = \sum_{f=1}^{m} a_{tf} F_f^* + a_t \mu_t^*; \quad t = 1,\dots,T, \tag{50}$$

gdzie r_t^*, F_f^* oraz μ_t^* - zmienne standaryzowane.

Proces identyfikacji modelu polegał w rozpatrywanym przypadku nie tylko na określeniu współczynników a_{tf}, a_t modelu, ale również na wyznaczeniu wartości czynników wspólnych F_f^* (tj. macierzy $\boldsymbol{F}$ danej wzorem (29)) oraz czynników swoistych μ_t^* (tj. macierzy μ). Zdecydowanie wyróżnia to powyższe podejście od metodologii *analizy regresyjnej*, w przypadku której przedmiotem identyfikacji są tylko współczynniki a_{tf} (oraz ewentualnie a_t) modelu liniowego, natomiast F_f^* traktowane są jako egzogeniczne zmienne wejściowe o określonej interpretacji ekonomicznej.

W przypadku modeli wielo-indeksowych obligacji, na ogół uważa się (Elton, Gruber, 1995), że podejście bazujące na analizie regresyjnej modelu liniowego o postaci (50) nie jest zbyt obiecujące ze względu na niestabilność tego typu modeli, spowodowaną zmianami ich współczynników w czasie. Chodzi w tym przypadku o to, że w odróżnieniu od wielo-indeksowego modelu akcji (typu APT - *Arbitrage Pricing Theory*) podstawowe parametry obligacji ulegają ciągłej zmianie z upływem czasu bieżącego $\tau = 1, 2, 3, \dots$. Skróceniu ulega bowiem okres do wykupu tych obligacji (*maturity*), a tym samym i takie parametry, jak np. *okresowość* D liczona według klasycznej formuły Macaulay'a.

Uważa się natomiast, że rozpatrywane w niniejszym punkcie modele czynnikowe nie mają powyższej niedogodności (Dahl, 1993). Modele te wykorzystuje się dla celów immunizacji portfeli obligacji w następujący sposób.

Z modelu czynnikowego (50), gdzie wszystkie wartości zmiennych i parametrów są dane, przechodzimy do sformułowania nieco bardziej ogólnego dokonując podstawienia:

$$dr_t = \sigma_t r_t^*; \quad \alpha_{ft} = \sigma_t a_{ft}; \quad \varepsilon_t = \sigma_t a_t \mu_t^*, \tag{51}$$

gdzie σ_t - odchylenie standardowe zmiennej niestandaryzowanej r_t ($t = 1,\dots,T$) określone wzorem (3); tj. wielkość znana.

Oznaczymy ponadto

$$dF_t = F_t^*; \quad f = 1,\dots,m, \tag{52}$$

dla podkreślenia, że interesują nas w istocie zmiany czynników wspólnych, tj. ich odchylenia od poziomu zerowego (oznaczenie to jest zabiegiem czysto formalnym i nie zmienia istoty zagadnienia).

Z (50)-(52) otrzymamy

$$dr_t = \sum_{f=1}^{m} \alpha_{tf} dF_f + \varepsilon_t; \quad \forall t = 1,\ldots,T, \tag{53}$$

gdzie $dr_t = r_t - \bar{r}_t$; $\overline{dr_t} = 0$, $\mathrm{var}(dr_t) = \sigma_t^2$ oraz (54)

$$\overline{dF_f} = 0, \quad \mathrm{var}(dF_t) = 1; \quad \bar{\varepsilon}_t = 0, \quad \mathrm{var}(\varepsilon_t) = a_t^2 \sigma_t^2. \tag{55}$$

Przy przedstawionych powyżej oznaczeniach, sformułowanie modelu czynnikowego o postaci (53) jest w rozpatrywanym przypadku identyczne jak w pracy Dahla (1993).

Czynnikowa okresowość (*factor duration*). Wartość bieżąca dowolnej obligacji wielokuponowej o okresie do wykupu T oraz przy założeniu krzywej dochodowości o dowolnym kształcie - dana jest wzorem (1), który można zapisać w nieco innej postaci; a mianowicie

$$P = \sum_{t=1}^{T} C_t d_t = \frac{C_t}{(1+r_t)^t}, \tag{56}$$

gdzie r_t - rynkowe stopy procentowe *spot*, C_t - przyszłe strumienie pieniężne wynikające z faktu posiadania obligacji, tj. odsetki C w kolejnych okresach $t = 1,\ldots,(T-1)$ oraz odsetki i nominał $C+N$ w chwili $t = T$; ponadto oznaczono

$$d_t = \frac{1}{(1+r_t)^t}, \text{ tzw. czynnik dyskontujący.} \tag{57}$$

Dla uproszczenia rozważań założymy, że czynnik dyskontujący d_t można przybliżyć czynnikiem, charakterystycznym dla ciągłej kapitalizacji odsetek; tj. przyjmiemy, że

$$d_t = \frac{1}{(1+r)^t} \approx e^{-r_t t}. \tag{58}$$

Przybliżenie to jest usprawiedliwione pod warunkiem, że stopy procentowe *spot* r_t (wyrażone w skali jednego roku) nie są zbyt duże co do wartości bezwzględnych. Dokładna relacja pomiędzy dyskretnym a ciągłym czynnikiem dyskontującym d_t jest bowiem następująca

$$d_t = \frac{1}{(1 + r_t / m)^{mt}} \xrightarrow[m \to +\infty]{} e^{-r_t t} . \tag{59}$$

Z (56) i (59) otrzymamy

$$P = \sum_{t=1}^{T} C_t e^{-r_t t} . \tag{60}$$

Załóżmy początkowo, że struktura terminowa stóp procentowych jest płaska. Oznacza to, że

$$r_t = r ; \quad \forall t = 1,...,T , \tag{61}$$

dla każdej chwili bieżącej $\tau = 1, 2, 3, ...$, oraz

$$dr_t = dr ; \quad \forall t = 1,...,T , \tag{62}$$

co jest bezpośrednią konsekwencją założenia (61); tzn. możliwe są jedynie równoległe przesunięcia rozpatrywanej *krzywej dochodowości*.

Wówczas, dla równowagowej wyceny obligacji danej wzorem (60), klasyczna definicja okresowości rozpatrywanej obligacji jest określona przez (Jakubowski, 2006b)

$$D_c \triangleq -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^{T} t C_t e^{-rt} / P . \qquad 63)$$

Pominiemy teraz założenia upraszczające (61), (62) i wprowadzimy całkowicie ogólną *strukturę terminową stóp procentowych* daną wektorem

$$TS = [r_1, ..., r_t, ..., r_T]' .$$

Z wyprowadzonego uprzednio modelu czynnikowego (53) wynika, że zamiast rozpatrywać zmiany wartości *dP* obligacji danej wzorem (60) ze względu na zmiany dr_t, możemy analizować analogiczne zmiany *dP* ze względu na zmiany dF_f $(f = 1,...,m)$ czynników wspólnych dla wszystkich stóp procentowych r_t $(t = 1,...,T)$.

Możemy tego dokonać wprowadzając definicję tzw. *czynnikowej okresowości* D_f w następujący sposób (Dahl, 1993):

$$D_f \triangleq -\frac{\partial P}{\partial F_f} \frac{1}{P} = \sum_{t=1}^{T} t \, \alpha_{tf} C_t e^{-r_t t} / P, \quad \forall f = 1,...,m , \tag{64}$$

gdzie $\alpha_{tf} = \sigma_t a_{tf}$ oraz $a_{tf} \in [-1,+1]$ - ładunek czynnika wspólnego F_f^* $(f = 1,...,m)$ w zmiennej r_t^* $(t = 1,...,T)$.

Zauważmy, że wprowadzony wzór (64) na czynnikową okresowość D_f $(f=1,...,m)$ ma podobną postać do wzoru klasycznego (63) - z dokładnością do współczynnika α_{tf}.

Czynnikowa wypukłość (*factor convexity*). Wprowadzając chwilowo założenia (61), (62) co do płaskiego kształtu krzywej dochodowości i jej przesunięć równoległych, dla obligacji o wartości P danej wzorem (60) obowiązuje klasyczny wzór na wypukłość obligacji; por. Jakubowski (2006b)

$$V_c \triangleq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\frac{1}{P}=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t^2 C_t e^{-r_t t}/P. \tag{65}$$

Natomiast pomijając założenia (61), (62), można wyprowadzić następujący wzór na *czynnikową wypukłość* (Dahl, 1993):

$$V_f \triangleq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial F_f^2}\frac{1}{P}=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t^2 \alpha_{tf}^2 C_t e^{-r_t t}/P, \quad \forall f=1,...,m. \tag{66}$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że wprowadzenie definicji zarówno *czynnikowej okresowości* jak i *czynnikowej wypukłości* wiąże się z przyjęciem po m parametrów D_f, V_f dla każdej z rozpatrywanych obligacji wielokuponowych, ponieważ rozpatrujemy *m czynników wspólnych* dF_f. Jednak nie powinno to być zbyt kłopotliwe, ponieważ - jak wykazują dotychczasowe doświadczenia - w praktyce, na rozwiniętych rynkach kapitałowych, wzięcie pod uwagę $m=3\div4$ czynników prowadziło do wyjaśnienia ok. 97 % *zasobów zmienności ogólnej* rynkowych stóp procentowych *spot* r_t $(t=1,...,T)$.

Na przykład, na rynku amerykańskim zdefiniowano $m=3$ istotne czynniki wspólne (Litterman, Scheinkman, 1991):

F_1 - czynnik wpływający na ogólny poziom stóp procentowych r_t;
tzw. czynnik poziomu (*level factor*);

F_2 - czynnik wpływający na nachylenie krzywej dochodowości;
tzw. czynnik nachylenia (*steepness factor*);

F_3 - czynnik wpływający na stopień zakrzywienia krzywej dochodowości;
tzw. czynnik krzywizny (*curvature factor*).

Całkowity kształt analizowanej krzywej dochodowości wynikał więc z "liniowego" nałożenia się oddziaływań rozpatrywanych czynników wspólnych, zgodnie z modelem czynnikowym (53). Ilustrację graficzną tych oddziaływań można sobie wyobrazić tak, jak to przedstawiono na rysunku 5.

* * *

5. Czynnikowy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

P_i - bieżąca wartość (cena równowagowa) i-tej obligacji, $i = 1,...,N$;

x_i - liczba nominałów i-tej obligacji w rozpatrywanym portfelu (zmienna decyzyjna);

P - wartość bieżąca portfela P obligacji;

P_L - zdyskontowana w czasie do chwili obecnej wartość przyszłego zobowiązania L inwestora (*liability*), przy zastosowaniu rynkowych stóp procentowych *spot* r_t jako stóp dyskontowych;

D_{if} - czynnikowa okresowość i-tej obligacji, $f = 1,...,m$;

D_{Lf} - czynnikowa okresowość zobowiązania finansowego, $f = 1,...,m$;

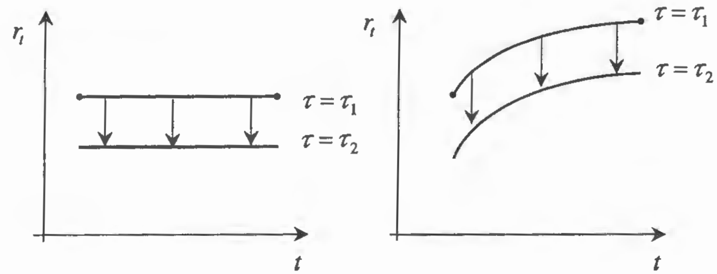
V_{if} - czynnikowa wypukłość i-tej obligacji, $f = 1,...,m$;

V_{Lf} - czynnikowa wypukłość zobowiązania finansowego, $f = 1,...,m$;

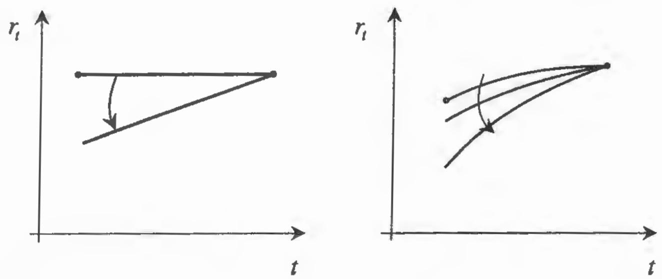
$Q(x_1,...,x_n)$ - stopa zwrotu z portfela P obligacji jako funkcja liczby nominałów x_i $(i = 1,...,N)$, poszczególnych walorów.

Model immunizacji portfela obligacji ze względu na zmiany rynkowych stóp procentowych *spot* r_t $(t = 1,...,T)$ wyznaczony przy założeniu, że wartości bieżące obligacji P_i są określone wzorem (60) oraz czynnikowe okresowości i wypukłości - wzorami (64) i (66), można sformułować następująco (Dahl, 1993) :

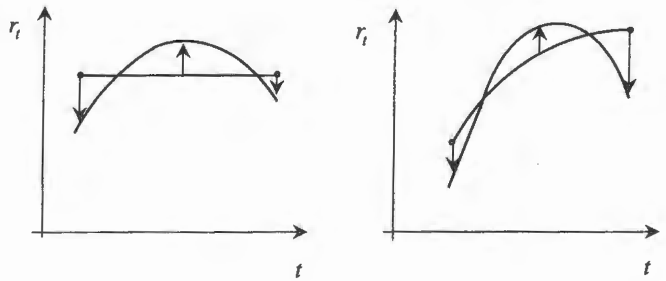
F_1 - czynnik poziomu



F_2 - czynnik nachylenia



F_3 - czynnik krzywizny



Rysunek 5. Ilustracja oddziaływań czynników wspólnych F_1, F_2 i F_3 na strukturę terminową rynkowych stóp procentowych; F_1 – czynnik poziomu, F_2 – czynnik nachylenia, F_3 – czynnik krzywizny.

Należy określić takie optymalne wartości zmiennych $\hat{x}_i\,(i=1,\dots,n)$ aby zachodziło:

$$Q(x_1,\dots,x_N) \xrightarrow[\{x_i\}]{} MAX\,, \tag{67}$$

przy ograniczeniach

$$P = P_L\,, \tag{68}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_{if} P_i x_i = D_{Lf} P_L, \quad \forall f = 1,\dots,m\,, \tag{69}$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_{if} P_i x_i \geq V_{Lf} P_L, \quad \forall f = 1,\dots,m\,, \tag{70}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{oraz} \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1,\dots,n\,. \tag{71}$$

Należy podkreślić, że wzory (68)-(71) przedstawiają rozwiązanie zagadnienia czynnikowej immunizacji portfela obligacji dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek. Zauważmy, że z ograniczenia równościowego (69) wynika, że czynnikowa okresowość portfela obligacji ma być równa czynnikowej okresowości zobowiązań. Natomiast formułując ograniczenie nierównościowe (70) żądamy, aby czynnikowa wypukłość portfela obligacji miała co najmniej taką wartość jak czynnikowa wypukłość zobowiązań. Przedstawione warunki (68)-(71) immunizacji portfela dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek – jakkolwiek podobne – różnią się jednak od rozpatrywanych w innych pracach analogicznych warunków, sformułowanych dla dyskretnej kapitalizacji odsetek; por. Jakubowski (2006b).

Zagadnienie optymalizacji (67)-(71) jest typowym zadaniem programowania matematycznego. W pracy Dahla (1993) wyprowadzono powyższy model przy założeniu, że funkcja celu $Q(x_1,\dots,x_n)$ jest liniowa względem udziałów $x_i\ (i=1,\dots,n)$, jakkolwiek istnieje tu wiele innych możliwości formalizacji rozpatrywanego problemu optymalizacyjnego.

Na zakończenie warto podkreślić, że pominięcie niektórych ze sformułowanych powyżej ograniczeń, np. w stosunku do immunizacji rozpatrywanego portfela ze względu na wybrany czynnik wspólny F_f (tj. dla ustalonego $f = f_0$) - może prowadzić do tzw. *aktywnego zarządzania portfelem obligacji* ze względu na ten właśnie czynnik. Załóżmy na przykład, że dla rozpatrywanego problemu immunizacji zidentyfikowano czynnik F_1

jako czynnik ogólnego poziomu stóp procentowych r_t $(t = 1,...,T)$. W praktyce oznaczać to będzie, że ładunki czynnikowe a_{1t} mają dla wszystkich stóp r_t wartości dodatnie oraz bliskie jedności. Tak więc wzrost czynnika F_1 powoduje jednoczesny wzrost wszystkich stóp procentowych r_t $(t = 1,...,T)$; natomiast spadek czynnika F_1 - wywołuje spadek tych stóp; por. rysunek 5 (*czynnik poziomu*).

W takiej sytuacji, gdy dysponujemy wiarygodnymi danymi, że wszystkie stopy procentowe na przykład spadną, to możemy "uwolnić" immunizację swego portfela ze względu na czynnik F_1. Oznaczać to będzie pominięcie w ograniczeniach (69), (70) modelu - indeksu $f = 1$. To znaczy, portfela nie immunizujemy ze względu na czynnik F_1 ponieważ wiemy, jak czynnik ten będzie się zachowywał w przyszłości, dla zadanego horyzontu czasowego. W miejsce immunizacji ze względu na pierwszy czynnik, możemy natomiast zastosować strategię aktywną polegającą na zakupie obligacji długoterminowych, ponieważ spodziewamy się spadku ogólnego poziomu stóp procentowych.

Natomiast immunizację ze względu na pozostałe dwa czynniki, tj. czynnik nachylenia F_2 oraz czynnik krzywizny F_3 - pozostawiamy w mocy, ponieważ nie jesteśmy pewni czy spodziewane przesunięcie krzywej dochodowości TS w dół nastąpi w sposób równomierny, to znaczy czy będzie to przesunięcie równoległe o stałą wartość $dr = const(t)$; $t = 1,...,T$. W ten sposób, spodziewając się ogólnego spadku stóp procentowych i stosując w związku z tym odpowiednią strategię aktywną, zabezpieczamy się jednocześnie przed ryzykiem zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych (*shape risk*).

Można spodziewać się, że zastosowanie takiego właśnie postępowania, polegającego na powiązaniu aktywnej strategii zarządzania portfelowego ze strategią pasywną, dotyczącą częściowej immunizacji (tj. ze względu na wspomniane ryzyko kształtu) będzie źródłem dodatkowych zysków, w porównaniu ze strategią całkowicie pasywną. Strategia całkowicie pasywna jest w analizowanym przypadku określona przez model (67)-(71), rozpatrywany dla wszystkich zidentyfikowanych czynników F_f $(f = 1,...,m)$ dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych.

Oczywiście przedstawione powyżej postępowanie będzie uzasadnione, o ile nasze prognozy co do spodziewanego „ruchu" krzywej dochodowości w dół się spełnią. Oznacza to, że dokonując immunizacji naszego portfela inwestycyjnego ze względu na *ryzyko kształtu*, musimy jednocześnie zaakceptować określone ogólne ryzyko zmiany poziomu stóp procentowych (*interest rate risk*).

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawiony powyżej czynnikowy model immunizacji i optymalizacji portfela obligacji oferuje nam daleko szerszy wachlarz możliwości w porównaniu z modelami klasycznymi, wykorzystującymi koncepcję Macaulay'a parametru *okresowości* i *wypukłości* obligacji; bądź tylko pewne modyfikacje tej koncepcji zaproponowane np. przez Fishera, Weila (1977) czy też Babbela (1983). W przypadku modelu czynnikowego, możemy bowiem immunizować nasz portfel inwestycyjny nie tylko ze względu na wszystkie zidentyfikowane czynniki dynamiki zmian stóp procentowych; możemy również samodzielnie (tj. według naszego uznania) wybierać te czynniki, które mają podlegać immunizacji. A to już oznacza duży postęp w rozpatrywanej dziedzinie zarządzania ryzykiem inwestycyjnym.

Literatura

1. Babbel D.F. (1983) Duration and the Term Structure of Interest Rates Volatility. In: G.G. Kaufman, G.O. Bierwag, A. Toevs, (Eds.), *Innovations in Bond Portfolio Management*, JAI Press, Greenwich, Conn., pp. 239-265.
2. Bierwag G.O. (1987) *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
3. Dahl H. (1993) *A Flexible Approach to Interest Rate Risk Management*. In: Zenios S.A. (Ed.), Financial Optimization. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 189-209.
4. Elton E.J., Gruber M.J. (1995) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, 5-th Ed.
5. Fabozzi F.J. (2000) *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 4-th ed.
6. Fisher L., Weil R.L. (1971) Coping with the Risk of Market Rate Fluctuations - Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. *Journal of Business*, Vol. 4, October, pp. 408-431.
7. Garbade K. (1986) *Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, June.
8. Garbade K. (1989) *Polynomial Representations of the Yield Curve and its Modes of Fluctuations*. Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, No. 53, July.

9. Harman H.H. (1967) *Modern Factors Analysis*. Chicago University Press, 2-nd ed.

10. Jakubowski A. (2000) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: M. Krawczak, A. Miklewski, A. Jakubowski, P. Konieczny, *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*, Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t. 25, Warszawa, Część II, s. 49-122.

11. Jakubowski A. (2005) Human Attitude Towards Risk in the Process of Pricing Catastrophe Bonds. In: K.A. Atanassov, J. Kacprzyk, M. Krawczak, E. Szmidt (Eds.) *Issues in the Representation and Processing of Uncertain and Imprecise Information*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa, pp. 153-180.

12. Jakubowski A. (2006a) Aktywne zarządzanie portfelem obligacji. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '05*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, s. 285-303.

13. Jakubowski A. (2006b) *Zagadnienia immunizacji portfela obligacji*. IBS PAN, Raport Badawczy RB/31/2006, Warszawa.

14. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000) *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*. Wyd. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t.25, Warszawa.

15. Krawczak M., Jakubowski A., Konieczny P., Kulikowski R., Miklewski A., Szkatuła G. (2003) *Aktywne zarządzanie inwestycjami finansowymi*. Akademicka Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.

16. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995) *Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce*. Raport IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.

17. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996) *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem*. Raport IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.

18. Litterman R., Scheinkman J. (1991) Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income Securities*, June, pp. 54-61.

19. Zenios S.A., Ed. (1993) *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.