267/2009

Raport Badawczy
Research Report

RB/74/2009

Systemowe podejście do procesu edukacyjnego z uwzględnieniem kapitału ludzkiego

M. Bereziński, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr inż. Lech Kruś

Warszawa 2009

SYSTEMOWE PODEJŚCIE DO PROCESU EDUKACYJNEGO Z UWZGLĘDNIENIEM KAPITAŁU LUDZKIEGO

Mirosław Bereziński*, Dariusz Wagner**
Instytut Badań Systemowych PAN
01-447 Warszawa, ul. Newelska 6
e-mail: Miroslaw.Berezinski@ibspan.waw.pl
e-mail: Dariusz.Wagner@ibspan.waw.pl

Streszczenie: W raporcie przedstawiono ogólny kontekst współczesnych badań nad modelowaniem procesów edukacyjnych jako czynnika świadomego i celowego kształtowania kapitału ludzkiego. Omówiono podstawowe mankamenty metodologiczne i merytoryczne obciążające obecną teorię modelowania procesów edukacyjnych. Należą do nich, przede wszystkim: traktowanie rozmaitych form kapitału występujących w procesie edukacyjnym jako wielkości wzajemnie od siebie niezależnych, utożsamianie pojęcia funkcji matematycznej z pojęciem funkcji fizycznej oraz opisywanie procesu wytwarzania wiedzy za pomocą deterministycznej funkcji Cobba-Douglasa. Omówiono podstawowe sposoby ustochastyczniania tej funkcji za pomocą sprowadzania jej do modeli regresyjnych i wskazano metodologiczną ograniczoność tego podejścia. Zwrócono uwagę na to, że podobnie jak w matematyce deterministycznej do konstruowania modeli dynamicznych korzysta się z teorii równań różniczkowych, tak do konstruowania modeli dynamicznych w warunkach przypadkowości trzeba korzystać z teorii stochastycznych równań różniczkowych. W ślad za literaturą podano podstawowe wiadomości na temat tych równań i całki stochastycznej Itô, a następnie wykorzystano je do sformułowania wstępnej koncepcji stochastycznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa. W szczególności wykazano, że w przypadku stochastycznym o wyborze konkretnej postaci funkcji decydują warunki brzegowe. Rozważania są inspirowane przez dotychchczasowe doświadczenie w zakresie modelowania procesów edukacyjnych z uwzględnieniem materialnego i intelektualnego kapitału ludzkiego jako istotnego czynnika wytwarzania wiedzy.

Słowa kluczowe: edukometria, ekonomika edukacji, proces edukacyjny, kapitał ludzki, funkcja produkcji.

1. Cel, zakres i struktura raportu

W raporcie są przedstawione wyniki badań prowadzonych przez autorów w 2009 r. nad zastosowaniami podejścia systemowego do analizy i modelowania procesów edukacyjnych. Procesy te są podstawowym trybem wytwarzania i powiększania kapitału wiedzy, zarówno w ujęciu indywidualnym, jak i społecznym. Jednostki edukacyjne są uważane za przedsiębiorstwa produkcyjne, które w toku właściwego sobie procesu technologicznego, zwanego procesem edukacyjnym, wytwarzają dobro niematerialne w postaci usługi edukacyjnej. Efektem wytworzenia tej usługi jest wzrost wiedzy i umiejętności podmiotu, któremu została wyświadczona. W toku procesu edukacyjnego są zużywane rozmaite postacie pracy (w tym pracy fizycznej i umysłowej człowieka) oraz kapitału (w tym kapitału osobowego człowieka oraz kapitału społecznego).

Rozdział 2 jest poświęcony skrótowemu omówieniu ogólnego kontekstu problematyki modelowania procesów edukacyjnych, jako czynników kształtujących kapitał ludzki, zarówno w jego wymiarze indywidualnym, jak i społecznym. Na tym tle wymieniamy i charakteryzujemy podstawowe mankamenty metodologiczne i merytoryczne obecnej teorii modelowania procesów edukacyjnych. W szczególności zwracamy uwagę na niepoprawność utożsamiania pojęcia funkcji matematycznej z pojęciem funkcji ekonometrycznej, na systemową sprzeczność założenia o wzajemnej niezależności wszystkich form kapitału i pracy zużywanych w procesie edukacyjnym oraz na niewłaściwość opisywania technologicznego procesu wytwarzania wiedzy za pomocą deterministycznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa.

W rozdziale 3 zwracamy uwagę na niewłaściwość posługiwania się pojęciem modelu ekonometrycznego w odniesieniu do procesów edukacyjnych. Przypominamy, że ponieważ zastosowaniem metod statystycznych w dziedzinie edukacji zajmuje się edukometria, więc należy używać pojęcia modelu edukometrycznego. Omawiamy podstawowe wady i zalety modeli edukometrycznych zwracając szczególną uwagę na konieczność respektowania ich odmienności od abstrakcyjnych modeli matematycznych. Wskazujemy, że bezpośrednią konsekwencją nieprzestrzegania tej konwencji jest utożsamianie pojęcia zmiennej zależnej z pojęciem zmiennej objaśnianej oraz pojęcia zmiennych niezależnych z pojęciem zmiennych objaśniających. Zwracamy więc uwagę, że zmienne objaśniające mogą, ale nie muszą być zmiennymi niezależnymi w sensie matematyki deterministycznej. Przypominamy, że w matematyce stochastycznej zmienne objaśniające są traktowane jako wielkości losowe i dąży się do tego, by – w miarę możności – były one niezależne, ale w sensie statystycznym.

Jak już powiedzieliśmy, jedną z tendencji w modelowaniu procesów edukacyjnych jest rozpatrywanie ich jako procesów produkcyjnych i dążenie do opisywania ich dynamiki w kategoriach funkcji produkcji. Szczególną uwagę przykłada się do wykorzystania dwuczynnikowej funkcji Cobba-Douglasa. W dotychczasowych zastosowaniach przyjmuje się deterministyczną postać tej funkcji, a wszelkie elementy przypadkowości odwzorowuje się przez nadanie tej funkcji formy modelu ekonometrycznego. Doświadczenie pokazuje, że przydatność takiego modelu jest bardzo mała, bowiem parametry charakteryzujące procesy edukacyjne nie są wielkościami deterministycznymi obciążonymi przypadkowymi błędami, lecz są z natury wielkościami losowymi. Sensowne jest więc zastanowienie się nad możliwością bezpośredniego odwzorowania tej losowości w modelach dynamiki procesów edukacyjnych. Poświęcamy temu rozdział 4. Zakładamy, że w jakiś sposób jest określony stan procesu edukacyjnego i przedstawiamy ideę konstruowania stochastycznych modeli dynamiki tego procesu w przestrzeni stanów. Rozpatrujemy dwie wersje modelu: różnicową i różniczkową. W rozdziale 5 przyjmujemy, że – zgodnie z ekonomiką edukacji – jedną z głównych charakterystyk procesu edukacyjnego może być odpowiednia funkcja produkcji. Zakładamy, że z uwagi na rolę, jaką w procesach edukacyjnych odgrywają czynniki losowe, powinna to być funkcja stochastyczna i przedstawiamy ideę skonstruowania takiej funkcji. Ponieważ w rozważaniach korzysta się z aparatu teorii stochastycznych równań różniczkowych, więc w załączniku, który jest integralną częścią raportu, przedstawiamy podstawowe wiadomości z zakresu teorii tych równań. W szczególności podajemy formalną definicję całki Itô, wymieniamy podstawowe własności tej całki i przytaczamy treść lematu Itô, stanowiącego teoretyczną podstawę wszelkich zastosowań stochastycznych równań różniczkowych.

W rozdziale 6 formułujemy podstawowe wnioski dotyczące możliwości wykorzystania przedstawionych w raporcie rozważań teoretycznych w dalszych badaniach nad edukacją, a zwłaszcza w edukometrii i ekonomice edukacji. Określamy też kilka problemów badawczych, których podjęcie i rozwiązanie jest – naszym zdaniem – niezbędne, jeśli chce się sformułować podstawy systemowej interdyscyplinarnej teorii modelowania procesów edukacyjnych.

W wykazie literatury umieszczono jedynie te pozycje, z których bezpośrednio korzystano.

2. Potrzeba i ogólny kontekst modelowania procesów edukacyjnych

Niemal każda epoka cywilizacyjnego rozwoju społeczeństw ma jakieś wiodące hasło, w którym wyrażony jest jej stosunek do człowieka jako osoby ludzkiej, a także do społeczeństwa, jako zbiorowości ludzkiej zamieszkującej dane terytorium, posiadającej wspólną kulturę, wspólną tożsamość, własną sieć wzajemnych stosunków społecznych, własną formę organizacyjną w postaci państwa oraz własne instytucje wspomagające jego funkcjonowanie. Hasłem minionego stulecia była budowa społeczeństwa przemysłowego. Charakteryzowało się ono dominującą rolą przemysłu i rozmaitych zjawisk towarzyszących procesowi industrializacji, zarówno pozytywnych (wzrost produktywności, poprawa warunków bytowych, urbanizacja itd.), jak i negatywnych (traktowanie człowieka przede wszystkim jako nośnika pracy fizycznej i umysłowej, obniżenie znaczenia i roli rodziny, wzrost niesprawiedliwości społecznej itd.). Hasłem obecnego wieku jest budowa społeczeństwa postindustrialnego, w którym główną siłą napędową rozwoju cywilizacyjnego przestanie być praca fizyczna, a stanie się praca w sektorze usług oraz wytwarzanie, przechowywanie, przetwarzanie, przesyłanie i wykorzystywanie informacji. Z uwagi na rolę, jaką w tym społeczeństwie będzie pełnić informacja – a więc i wiedza – nazywa się je też społeczeństwem informacyjnym lub społeczeństwem wiedzy. Pojęcie społeczeństwa informacyjnego nie jest nowe, zostało wprowadzone w 1963 r. przez japońskiego dziennikarza T. Umesao (zob., np., Tadeusiewicz 2001).

Tworzenie społeczeństwa informacyjnego wymaga zorganizowania multimodalnych sieci telekomunikacyjnych zarówno o zasięgach krajowych, jak i o zasięgu globalnym, zapewnienia nieskrępowanego dostępu do nich wszystkim operatorom, powszechnej dostępności do Internetu, stworzenia sprawnie działających rynków informacyjnych, wprowadzenia stosownych regulacji prawnych, prowadzenia odpowiednich badań naukowych itd. Przede wszystkim jednak wymaga zmiany nastawienia jednostek, grup zawodowych i społecznych oraz całych społeczeństw do zachodzących procesów innowacyjnych. Pod wpływem tych procesów zmieniają się i będą coraz bardziej się zmieniały podstawowe funkcje społeczeństwa, a zwłaszcza jego funkcja edukacyjna. Edukacja jest bowiem tą dziedziną, dzięki której jednostki i społeczeństwa zdobywają wiedzę, nabierają umiejętności jej wszechstronnego wykorzystywania, kształtują swoje systemy wartości oraz uczą się zasad zawiązywania, utrzymywania i rozwijania stosunków społecznych. Z tego powodu konieczna jest naukowa refleksja nad rolą i znaczeniem edukacji dla powstania, funkcjonowania i rozwoju społeczeństwa informacyjnego. Refleksja ta jest rozwijana w ramach takich podejść, jak teoria kapitału ludzkiego, teoria kapitału intelektualnego, teoria kapitału społecznego itp. (zob., np.: Tadeusiewicz 2001).

Prace nad modelowaniem procesu edukacyjnego jako podstawowego trybu wytwarzania kapitału intelektualnego są prowadzone w Pracowni Wspomagania Decyzji w Warunkach Ryzyka Instytutu Badań Systemowych PAN od 2002 r. Podstawową metodą badawczą jest matematyczne i systemowe modelowanie rozmaitych aspektów procesu edukacyjnego w szeroko rozumianym kontekście decyzyjnym. Dotychczasowe wyniki są udokumentowane w raportach badawczych (Bereziński 2002, 2003, 2004; Bereziński, Inkielman i Wagner 2005a, 2006, 2007; Bereziński i Wagner 2008c) oraz publikacjach (Bereziński i Hołubiec 2004; Bereziński, Inkielman i Wagner 2005b; Bereziński i Wagner 2008a, 2008 b; Bereziński, Hołubiec i Wagner 2009). Charakterystyczną cechą przyjętego podejścia jest dążenie do jak najpełniejszego poznania historii badań nad edukacją, ocena ich obecnego stanu oraz konstruowanie modeli wspomagających kształtowanie procesów edukacyjnych na różnych poziomach ich szczegółowości (mikroskopowym, mezoskopowym i makroskopowym), przy założeniu, że immanentną właściwością tych procesów jest niepełność i niedokładność ich poznania oraz niepewność i nieokreśloność. Jako sposób odwzorowywania tych cech w konstruowanych modelach uznano stochastyczność.

W toku dotychczasowych prac stwierdzono, że w badaniach nad modelowaniem edukacji jako procesu wytwarzania wiedzy niezbędnej do kształtowania rodzących się społeczeństw informacyjnych powstało i utrwaliło się wiele niebezpiecznych mitów, a także popełnia się wiele błędów metodologicznych i merytorycznych. Ich źródłem jest – przede wszystkim – niedostrzeganie istotnych różnic i nie zawsze poprawne widzenie analogii między produkcją dóbr materialnych, a produkcją wiedzy. Wskutek tego, począwszy od drugiej połowy lat 50. dwudziestego wieku, wciąż z uporem podejmuje się próby skonstruowania ekonomiki wiedzy w ramach wyznaczonych przez neoklasyczną ekonomikę produkcji dóbr materialnych, wykorzystując do tego rozmaite podejścia matematyczne, z reguły deterministyczne. Najbardziej znanym przykładem takiego postępowania jest monografia amerykańskiego ekonomisty, G.S. Beckera, poświęcona teoretycznej analizie pojęcia kapitału ludzkiego i próbie włączenia do wybranych modeli funkcji produkcji elementu charakteryzującego rolę czynnika wiedzy w procesach produkcyjnych (Becker 1964). Chociaż była to próba nie do końca udana, to jednak znaczenie monografii Beckera trudno przecenić. Przede wszystkim stała się ona impulsem do szerokiego zainteresowania się środowisk naukowych wielu krajów problematyką kapitału ludzkiego, a zwłaszcza ekonomiką edukacji. Wielu obecnych badaczy traktuje jednak monografię Beckera w sposób zgoła niewłaściwy, przypisując jej – wbrew oczywistym intencjom jej Autora – rangę jedynej poprawnej koncepcji teorii kapitału ludzkiego i traktując matematyczno-ekonomiczne modele skonstruowane przez Beckera oraz wynikające z nich wnioski jako niemal niepodważalne prawdy naukowe w tej dziedzinie. Jest to podejście krzywdzące dla Beckera, a także hamujące rozwój nowoczesnej teorii kapitału ludzkiego. Znaczenie monografii Beckera polega przede wszystkim na uprzytomnieniu środowisku 20. wiecznych ekonomistów, zwłaszcza zwolenników szkoły neoklasycznej, że – wbrew rozpowszechnionemu wówczas w modelowaniu procesów produkcyjnych podejściu – człowiek angażuje w te procesy nie tylko swoją siłę fizyczną, ale także energię intelektualną. Monografia Beckera była niewątpliwie pierwszą próbą systematyzacji ówczesnej wiedzy ekonomistów – zwłaszcza północnoamerykańskich – na temat roli oraz znaczenia kapitału ludzkiego w produkcji dóbr materialnych, a zarazem pionierską próbą stworzenia ekonomiki edukacji. Na przełomie lat 60. i 70. dwudziestego wieku monografia Beckera spotkała się z krytyką ze strony wielu środowisk. Niestety, nie była to krytyka konstruktywna. Spowodowała jedynie zaprzestanie prac nad ekonomiką edukacji, a zastój ten trwał niemal do początku ostatniej dekady dwudziestego wieku. Postęp w dziedzinie technik i technologii informacyjnych oraz ich zastosowań sprawił, że nie tylko ponownie zwrócono uwagę na wiedzę jako na jeden z głównych czynników produkcji, ale wręcz uznano ją za podstawową siłę napędową rozwoju ludzkości w 21. wieku. W naturalny sposób odrodziła się potrzeba skonstruowania teorii kapitału ludzkiego. Jedni badacze przypomnieli sobie o istnieniu monografii Beckera i zaczęli dostosowywać skonstruowane przez niego modele do dzisiejszych wymogów. Inni zaczęli przenosić na grunt teorii kapitału ludzkiego modele organizacji i funkcjonowania przedsiębiorstw produkcyjnych, konstruowane od dziesiątków lat dla potrzeb towarzystw asekuracyjnych i ubezpieczeniowych. Jeszcze inni – ewidentnie wykorzystując te ostatnie modele – zaczęli tworzyć własne, niezwykle uproszczone i nie zawsze poprawne teorie przedsiębiorstw, oparte na koncepcji niezależności rozmaitych form kapitału produkcyjnego. Wszystkie te wysiłki nie przynoszą spodziewanych efektów, ponieważ u ich podstaw wciąż leży koncepcja człowieka jako bytu materialnego, kierującego się w swym postępowaniu wyłącznie przesłankami czysto ekonomicznymi. Konieczna jest nowa teoria przedsiębiorstwa, oparta na zasadzie personalizmu, czyli pojmowania człowieka jako bytu osobowego, będącego jednością psychofizyczną. Skonstruowanie takiej teorii wymaga uprzedniego sformułowania personalistycznej teorii kapitału ludzkiego. Jej koncepcja została zaproponowana przez M. Berezińskiego i D. Wagnera (zob. Bereziński i Wagner 2008b). Rozważania prowadzone w niniejszym raporcie są osadzone w ramach tej koncepcji i stanowią przyczynek do sformułowania podstaw edukometrii oraz nowoczesnej ekonomiki edukacji, opartej na personalistycznej teorii kapitału ludzkiego.

Jak już powiedzieliśmy, dotychczasowe wysiłki w tym kierunku nie przyniosły spodziewanych efektów. Edukometria i ekonomika edukacji wciąż znajdują się w powijakach. Przyczyn tego stanu rzeczy jest wiele. Wydaje się, że najpoważniejszą z nich jest niemal mechaniczne przenoszenie do ekonomiki edukacji modeli z innych dziedzin nauki, zwłaszcza z neoklasycznej ekonomii i matematyki. Wprowadza to jednak więcej zamieszania niż korzyści przede wszystkim dlatego, że teorie kapitału ludzkiego – indywidualnego i społecznego – nie tylko nie doczekały się jeszcze jednoznacznego określenia przedmiotu swoich badań, ale – co gorsza – zamiast podążać w kierunku stworzenia teorii jednolitej, coraz bardziej oddalają się od siebie. Nic więc dziwnego, że podobnie jak to było z monografią Beckera, mają one oprócz zagorzałych entuzjastów i apologetów również licznych przeciwników (zob., np.: Blaug 1987; Block 1990; Marginson 1993). Przeciwnicy zwracają uwagę na to, że błędne jest osadzenie tych teorii w ramach neoklasycznej doktryny ekonomicznej, w której przyjmuje się wiele matematycznie wygodnych, lecz w rzeczywistości nierealnych założeń, a mianowicie, że:

1. Rynek funkcjonuje w sposób bardzo sprawny, a wszystkie podmioty zachowują się w sposób racjonalny.
2. Mechanizm cenowy zawsze doprowadza do zrównoważenia popytu z podażą i to zarówno w odniesieniu do czynników produkcji, jak i wytwarzanych dóbr.
3. Producenci dążą do maksymalizacji zysków, natomiast konsumenci – do maksymalizacji korzyści płynących z konsumpcji dóbr. Korzyści te wyraża się za pomocą funkcji użyteczności.

4. Wszystkie podmioty działają w warunkach ograniczeń budżetowych – nie mogą wydawać więcej środków niż zarobiły.

5. Rynek funkcjonuje w warunkach doskonałej konkurencji.

Istotnie, trudno byłoby uzasadnić, że którykolwiek z tych postulatów jest spełniony na rynku wiedzy, która – ponadto – jest dobrem niematerialnym. Dla przykładu zastanówmy się na trzecim z tych postulatów. W teorii kapitału ludzkiego przyjął on formę stwierdzenia, że jednostki edukacyjne dążą do maksymalizacji swoich zysków, podczas gdy osoby pobierające w tych jednostkach naukę są zainteresowane jedynie maksymalizacją własnych korzyści materialnych ze zdobycia wiedzy na danym poziomie edukacyjnym. Tymczasem tak nie jest. Maksymalizacja wyłącznie własnych korzyści z edukacji byłaby możliwa tylko w całkowicie zatomizowanej zbiorowości ludzkiej, pozbawionej jakichkolwiek więzi społecznych. Istnienie i bogactwo tych więzi – to podstawowe cechy, których posiadanie czyni ze zbiorowości ludzkiej społeczność, a ze zbioru społeczności – społeczeństwo. Z tego powodu teoria kapitału ludzkiego i teoria kapitału społecznego nie stanowią swoich przeciwieństw, lecz wzajemnie się dopełniają, tworząc pełną sprzeczności systemową jedność.

Innym przykładem ilustrującym mankamenty neoklasycznej teorii kapitału ludzkiego jest lansowane przez jej zwolenników hasło, że naturalną konsekwencją rozwoju edukacji jest wzrost gospodarczy. To prawda, że wykształcone społeczeństwo bardziej świadomie, a więc i bardziej efektywnie, uczestniczy w procesie produkcji, ale przecież istnieje także wiele innych czynników, w nie mniejszym stopniu równie korzystnie oddziałujących na wzrost produkcji. Wydaje się więc, że uznając edukację uzna za wiodącą siłę napędową rozwoju społecznego i gospodarczego kraju, trzeba równocześnie odpowiedzieć na pytanie, czy – a jeśli tak, to w jakiej mierze – wzrost edukacji bardziej przyśpiesza i zwiększa wzrost dobrobytu społecznego, niż takie działania, jak podnoszenie poziomu zdrowotności społeczeństwa, poprawa warunków mieszkaniowych ludności, zapewnienie właściwych warunków pracy i sprawiedliwej płacy, racjonalny rozwój technicznej infrastruktury kraju itp. Powyższych stwierdzeń nie należy traktować jako podważających potrzebę coraz lepszej edukacji społeczeństwa. Chodzi przede wszystkim o zwrócenie uwagi na to, że nie każda edukacja staje się siłą napędową rozwoju. Nawet najwyższy poziom edukacji społecznej nie będzie w pełni użyteczny, jeśli struktura i profil wykształcenia nie będą odpowiadały rzeczywistym doraźnym oraz perspektywicznym potrzebom kraju, jeśli nie będą respektowane dobrze rozumiane podstawowe zasady życia społecznego, a zwłaszcza zasada dobra wspólnego, zasada pomocniczości, zasada solidarności społecznej i zasada sprawiedliwości. Nie wolno zapominać, że o poziomie kapitału ludzkiego nie świadczy posiadanie dyplomu ukończenia studiów wyższych. Każdemu krajowi byli, są i zawsze będą potrzebni pracownicy fizyczni, technicy, niższy personel administracyjny itd. Chodzi o to, żeby w każdych warunkach człowiek miał pełną swobodę wyboru kierunku i poziomu swego wykształcenia, biorąc jednakże pod uwagę nie tylko własne aspiracje, ale również uwzględniając uwarunkowania wynikające z zasad życia społecznego. Przykładem skutków nieliczenia się z tymi uwarunkowaniami może być sytuacja, jak miała miejsce w szkolnictwie wyższym Stanów Zjednoczonych w latach 70. dwudziestego wieku. Ulegając modzie panującej wtedy wśród amerykańskiej młodzieży zapomniano o potrzebie liczenia się z rzeczywistymi perspektywicznymi potrzebami społeczeństwa i wykształcono ogromną rzeszę historyków, dla których zabrakło miejsc pracy. Koszty przekwalifikowania tych ludzi – a wiązało się to często z koniecznością ukończenia innego kierunku studiów – poważnie obciążyły budżet kraju.

Jeszcze jednym przykładem wskazującym na oderwanie neoklasycznej teorii kapitału intelektualnego od realiów rzeczywistości jest niemal zupełne pomijanie w niej kosztów nakładów poniesionych na edukację w przeszłości. Wskutek tego rachunki dotyczące ekonomicznej efektywności edukacji na ogół nie mówią nic o zwrocie netto wydatków publicznych poświęconych na ten cel. A przecież na wydatki te składają się nie tylko same koszty nauczania, ale także chociażby suma bezpośredniej pomocy finansowej udzielanej uczniom lub studentom (stypendia, zapomogi, nagrody itd.). Poziom tych wydatków może wpływać zniechęcająco lub zachęcająco na zainteresowanie poszczególnych członków społeczeństwa – a zwłaszcza młodzieży – zdobywaniem wiedzy, ale zasadniczo nie może bezpośrednio wpływać na tempo wzrostu produktu krajowego brutto (PKB) na głowę. Co więcej, nie zawsze sprzyja realizacji zasady wyrównywania szans edukacyjnych oraz zasad równości i sprawiedliwości, zwłaszcza wobec dzieci i młodzieży mieszkających i uczących się w ośrodkach i regionach peryferyjnych.

3. O kilku błędach metodologicznych popełnianych w edukometrii i ekonomice edukacji

3.1. Założenie o determinizmie funkcji produkcji

Dotychczasowe rozważania miały przede wszystkim zwrócić uwagę na brak w ekonomice edukacji i w teorii kapitału ludzkiego prac o charakterze metodologicznym oraz na konieczność ich podjęcia bądź zintensyfikowania. Nie ulega wątpliwości, że osnową tych prac powinna być metodologia systemowa, której podstawowym narzędziem badawczym jest analiza systemowa. Ponieważ podstawowym zinstytucjonalizowanym trybem zdobywania wiedzy jest proces edukacyjny, obejmujący wszystkie etapy kształcenia (przedszkole, edukacja wczesnoszkolna, edukacja podstawowa, edukacja gimnazjalna, edukacja na poziomie szkoły średniej, edukacja wyższa i rozmaite formy kształcenia podyplomowego), więc konieczne jest przede wszystkim przeprowadzenie systemowej analizy tego procesu. Wiele aspektów tego zadania rozpatrzono w poprzednich latach przy okazji analizowania i modelowania rozmaitych aspektów procesu edukacyjnego (w ramach realizacji odpowiednich zadań badawczych). Wyniki te są szczegółowo omówione w cytowanych wyżej pracach autorów niniejszego raportu oraz ich współpracowników, dlatego nie będziemy ich tu powtarzać. Ograniczymy się do rozpatrzenia trzech systemowych aspektów procesu edukacyjnego, niezwykle ważnych dla dalszego rozwoju teorii kapitału ludzkiego: charakteryzowania procesu wytwarzania wiedzy za pomocą deterministycznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa, posługiwania się zlogarytmowaną postacią tej funkcji oraz metodologiczną niepoprawnością założenia o wzajemnej niezależności różnych form kapitału występującego w procesach edukacyjnych.

Spojrzymy na jednostkę edukacyjną jako na przedsiębiorstwo usługowe, które w toku właściwego sobie procesu technologicznego, zwanego procesem edukacyjnym, wytwarza produkt niematerialny w postaci usługi edukacyjnej. Jedną z podstawowych cech tej usługi jest ładunek i jakość wiedzy teoretycznej i praktycznej wynoszonej przez absolwenta oraz umiejętność jej stosowania. Modelowanie tak rozumianego efektu procesu edukacyjnego w zasadzie nie wyszło dotychczas poza wykorzystanie dwuczynnikowej funkcji produkcji Cobba-Douglasa

$$Y = F(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad K,L \geq 0, \tag{3.1}$$

gdzie K oznacza nakład kapitału, L – nakład pracy potrzebny do wytworzenia $Y = F(K,L)$, a jest parametrem skalującym. W przypadku $\alpha + \beta > 1$ mamy pozytywne korzyści skali, w przypadku $\alpha + \beta < 1$ skutki te są negatywne. W klasycznej funkcji Cobba-Douglasa $\alpha + \beta = 1$, czego skutkiem jest brak efektów skali (tzn. wzrost K i L o $p\%$ powoduje wzrost Y o $p\%$).

Zastosowanie funkcji Cobba-Douglasa w ekonomii jest od dawna przedmiotem krytyki ze strony wielu środowisk naukowych. Niestety, na ogół nie jest to krytyka konstruktywna, tzn. wskazując wady tej funkcji z reguły nie proponuje się sposobów ich usunięcia. Odpowiadając na zarzuty krytyków zwolennicy stosowania funkcji Cobba-Douglasa wyrażają przekonanie, że w najgorszym razie można ją traktować jako pierwsze przybliżenie nieznanej rzeczywistej funkcji produkcji. Zwracają też uwagę na liczne badania empiryczne, które zdają się potwierdzać jej przydatność. O ile można zgodzić się z pierwszym z tych argumentów, o tyle drugi jest nie do przyjęcia, bowiem nawet najliczniejszy zbiór faktów empirycznych nie uzasadnia formalnej poprawności żadnej teorii naukowej. W szczególności odnosi się to do funkcji Cobba-Douglasa: oprócz wyników empirycznych przemawiających za jej stosowaniem można wskazać co najmniej tyle samo – o ile nie więcej – przypadków jej nieadekwatności. Istnieje więc potrzeba innego niż dotychczas spojrzenia na tę funkcję i radykalnej zmiany jej interpretacji. Zwraca na to uwagę, między innymi, włoski ekonomista, P.S. Labini, który – krytycznie oceniając entuzjazm tych, którzy rozpowszechniają pogląd o niemal uniwersalnej przydatności dotychczasowych wersji funkcji Cobba-Douglasa – wręcz stwierdza: *„Uważam, że ten sukces jest iluzją i że z reguły wykładniki α i β przyjmują wartości niezgodne z rzeczywistym rozkładem zasobów kapitału i pracy. Uważam też, że musimy zwrócić większą uwagę na postęp technologiczny i przyjąć, że substytucja ma charakter dynamiczny, a nie statyczny. (...) Co więcej, jeżeli jest prawdą, że wzrost jest z natury procesem nierównomiernym, to musimy przyjąć dynamiczne podejście wielosektorowe*" (Labini 1995).

Chociaż trudno nie zgodzić się z tą opinią, to jednak trzeba zwrócić uwagę, że pominięty jest w niej bodaj najważniejszy aspekt procesów produkcyjnych, tj. stochastyczny charakter czynników produkcji oraz dynamiki samych procesów. Nie ma bowiem najmniejszej wątpliwości co do tego, że jedną z głównych przyczyn niezgodności wyników teoretycznych otrzymanych za pomocą tej funkcji z doświadczeniem jest – z jednej strony – determinizm funkcji Cobba-Douglasa, a z drugiej nadmiernie wysoki poziom zagregowania występujących w niej czynników kapitału i pracy. W szczególności odnosi się to do procesów edukacyjnych, w których trzeba wyróżniać różne formy kapitału i różne formy pracy.

Potrzeba takiego zmodyfikowania funkcji Cobba-Douglasa, by w jakiejś mierze odwzorowywała inherentną stochastyczność procesów produkcji, jest odczuwana od dawna i to nie tylko intuicyjnie. Dwaj wybitni ekonomiści 20. wieku, G. Tintner i J.K. Sengupta, już bez mała czterdzieści lat temu zwracali uwagę na metodologiczną niepoprawność deterministycznych teorii ekonomicznych i pisali: *„Modele rozwoju* *gospodarczego, które stały się niezwykle popularne (...), są co najwyżej dynamiczne, ale wciąż deterministyczne. (...) Można tłumaczyć, że deterministyczne modele ekonomiczne muszą być traktowane, jako mające do czynienia z wartościami średnimi zmiennych losowych, które faktycznie charakteryzują system ekonomiczny. (...) Ale czy jest to założenie realistyczne? (...) Proponujemy pójść tropem współczesnej fizyki i rozpatrywać zjawiska ekonomiczne z czysto stochastycznego punktu widzenia, tzn. po prostu traktować zmienne ekonomiczne jako zmienne losowe. (...) Można używać argumentów, że procesy stochastyczne stanowią doświadczalną bazę ekonomii, że ekonomia powinna naśladować fizykę oraz że kulturowe opóźnienie ekonomii w stosunku do fizyki jest już wystarczająco długie i wynosi 50 lat! Trzeba jednak wiedzieć, że istnieją znacznie ważniejsze przesłanki przemawiające za koniecznością używania procesów stochastycznych w analizach zjawisk ekonomicznych*" (Tintner i Sengupta 1972).

Powszechnie stosowanym formalnym chwytem mającym na celu ustochastycznienie funkcji Cobba-Douglasa jest posługiwanie się jej wersją logarytmiczną, zazwyczaj rozszerzaną przez dodanie składnika reprezentującego elementy przypadkowości. Otrzymany w ten sposób model jest wprawdzie formalnie podobny do modelu ekonometrycznego, ale w istocie nim nie jest. Co najwyżej może być traktowany jako jedno z ogniw procesu estymacji wartości parametrów funkcji Cobba-Douglasa. Trzeba jednak zdawać sobie sprawę z tego, że prowadzona w taki sposób estymacja nie jest w pełni poprawna, ponieważ wymaga operowania zlogarytmowanymi zbiorami danych empirycznych. Co więcej, zlogarytmowane wersje funkcji produkcji są często błędnie traktowane jako funkcje czysto matematyczne. Jak wiadomo (zob., np., Mikusiński 1990) istotą funkcji matematycznych jest powiązanie liczb w pary, w których inna jest rola elementu pierwszego, inna zaś elementu drugiego. Zbiór liczb stojących w tych parach na pierwszej pozycji stanowi dziedzinę funkcji, podczas gdy zbiór liczb stojących na drugiej pozycji jest jej przeciwdziedziną. Co więcej, zbiór par określających funkcję nie może być zupełnie dowolny: żąda się, żeby każdej liczbie należącej do jej dziedziny była jednoznacznie przyporządkowana liczba należąca do jej przeciwdziedziny. Funkcje ekonometryczne na ogół nie spełniają tych warunków, ponieważ każdemu elementowi ich dziedziny z reguły odpowiada wiele możliwych alternatywnych elementów przeciwdziedziną.

Jak już wspomnieliśmy, posługując się pojęciem funkcji trzeba rozróżniać między funkcjami matematycznymi, które mają charakter abstrakcyjny, a funkcjami niematematycznymi, które mają charakter empiryczny. Najważniejszym przykładem funkcji niematematycznych są funkcje fizyczne fizycznymi, odwzorowujące zależnościami zachodzące między wielkościami fizycznymi. W przypadku funkcji matematycznych operuje się pojęciami zmiennych zależnych i zmiennych niezależnych, natomiast w przypadku funkcji niematematycznych używa się pojęć zmiennych objaśnianych i objaśniających. Ta różnica w nazewnictwie nie jest przypadkowa. Aby ją właściwie pojmować, trzeba przede wszystkim poprawnie rozumieć matematyczne pojęcia niezależności, zależności, prostopadłości i ortogonalności. Pojęcia te inaczej interpretuje się w matematyce deterministycznej, a inaczej w matematyce stochastycznej. Inny sens mają pojęcia niezależności oraz zależności zmiennych deterministycznych, a inny pojęcia niezależności oraz zależności zmiennych losowych. Inaczej należy rozumieć prostopadłość i ortogonalność wielkości deterministycznych, a inaczej stochastycznych. Mieszanie tych pojęć często prowadzi do formułowania na pozór oczywistych stwierdzeń apriorycznych, które – zdaniem ich autorów – powinny leżeć u podstaw nowoczesnej teorii kapitału ludzkiego, a co za tym idzie, również edukometrii i ekonomiki edukacji, faktycznie jednak bezzasadnych i nierzadko merytorycznie niepoprawnych. Istnieje więc potrzeba respektowania podstawowych faktów matematycznych związanych z tymi pojęciami, zwłaszcza w kontekście tworzenia teoretycznych podstaw modelowania procesów edukacyjnych.

3.2. Modele matematyczne a modele edukometryczne

Dziedziną zajmującą się zastosowaniami metod rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej w dziedzinie edukacji jest edukometria (Lulla 1980). Podstawowym celem modelu edukometrycznego jest udzielenie odpowiedzi na pytanie, jakie powiązania między zmiennymi charakteryzującymi procesy edukacyjne ujawniają się w świetle przyjętych założeń apriorycznych i posiadanej informacji statystycznej.

Niestety, w dziedzinie edukometrii został popełniony ten sam błąd metodologiczny, który wcześniej popełniono w ekonometrii. Mianowicie, w edukometrii rozpowszechnił się i utrwalił zwyczaj utożsamiania funkcji edukometrycznych z funkcjami matematycznymi, a w konsekwencji także układów równań i nierówności edukometrycznych z układami równań i nierówności matematycznych. Pojęcie modelu edukometrycznego stało się synonimem pojęcia abstrakcyjnego modelu matematycznego. Utożsamianie tych pojęć jest jednak takim samym błędem metodologicznym, jak synonimiczne używanie pojęć modelu ekonometrycznego i modelu matematycznego. W odniesieniu do modeli ekonometrycznych zwracało na to uwagę w przeszłości wielu wybitnych ekonometryków (zob., np.: Goldberger 1966; Tintner i Sengupta, 1972; Czerwiński 1982). Trzeba pamiętać, że pojęcie funkcji edukometrycznej, tak samo jak ekonometrycznej, jest bliższe niematematycznemu pojęciu funkcji fizycznej niż abstrakcyjnemu pojęciu funkcji matematycznej. W odróżnieniu od matematyki, która opiera się na systemach abstrakcyjnych aksjomatów, fizyka opiera się na postulacie istnienia poznawalnych obiektywnych praw przyrody. Podobnie do fizyki, edukometria opiera się na postulacie istnienia poznawalnych obiektywnych praw rządzących procesami edukacyjnymi. Zgodnie z tymi koncepcjami istnieje zarówno uporządkowana rzeczywistość fizyczna, jak i uporządkowana rzeczywistość edukacyjna. W każdej z tych rzeczywistości zjawiska biegną zgodnie z właściwym im rytmem i zgodnie z pewnymi regułami, nazywanymi – odpowiednio – prawami natury oraz prawami edukacyjnymi. Praw tych nie można dostrzec gołym okiem – ujawnia je dopiero staranna analiza. Środkiem wspomagającym tę analizę jest matematyka. Co więcej, jest rzeczą niemożliwą odkrycie i zrozumienie tych praw, jeśli nie zna się matematyki i to na dość wysokim poziomie.

Konstruując matematyczne modele procesów edukacyjnych trzeba wiedzieć, że w matematyce istnieją dwie tradycje: grecka i babilońska. Wedle pierwszej z nich każde badanie należy rozpoczynać od sformułowania takich stwierdzeń, które można przyjąć za aksjomaty i – wychodząc z nich – budować odpowiednią teorię. W tym kierunku poszła ekonomia matematyczna. W tym kierunku biegną też próby skonstruowania matematycznej teorii edukacji. Okazuje się jednak, że przyjęcie nawet najlepszego systemu aksjomatów nie zawsze jest gwarancją osiągnięcia sukcesu teoretycznego bądź praktycznego. W dziedzinach empirycznych, takich jak fizyka, edukometria i ekonometria, trzeba korzystać z metody babilońskiej. R.P. Feynman, jeden z największych fizyków dwudziestego wieku, charakteryzuje tę metodę w następujący sposób: „*Tak się złożyło, że wiem to i to, a nawet jeszcze i to, co już wystarczy, żeby wyprowadzić wszystkie inne twierdzenia. Jutro mogę zapomnieć jedną z tych zasad podstawowych, ale będę pamiętał inne, które są również prawdziwe, więc będę mógł zrekonstruować wszystkie twierdzenia. Nigdy nie jestem pewny, od czego powinienem zaczynać i na czym skończyć. Po prostu zawsze pamiętam dostatecznie dużo twierdzeń, aby każdego dnia, gdy zawiedzie mnie pamięć i zapomnę jakąś zasadę, móc zrekonstruować całą wiedzę*" (Feynman 1965).

Mówiąc o wzajemnych związkach matematyki z fizyką i – przez analogię – z edukometrią, trzeba zwrócić uwagę na to, że o ile matematycy konstruują abstrakcyjne teorie, które można wykorzystywać w praktyce, jeśli tylko system aksjomatów mówi coś o rzeczywistości, to wszystkie pojęcia używane przez fizyków i edukometryków mają znaczenie konkretne. Trzeba też pamiętać, że ani fizyka, ani edukometria nie są dziedzinami matematyki, lecz jedynie korzystają z jej języka oraz sposobu rozumowania. Nie można też zapominać, że rozważania matematyczne charakteryzuje dążenie do uzyskania jak największej ogólności, natomiast rozważania fizyczne i edukometryczne dotyczą zawsze przypadków szczególnych. W odróżnieniu od matematyka, którego swoboda rozumowania jest związana systemem aksjomatów, fizyk i edukometryk na ogół wiedzą, jak mniej więcej powinno wyglądać rozwiązanie. Rezygnując z przestrzegania bezwzględnej ścisłości matematycznej na ogół potrafią – przynajmniej częściowo – odgadnąć postać rozwiązania i znaleźć odpowiedź na interesujące ich pytania. Jest to metoda niezwykle skuteczna. Warto pamiętać, że P.A.M. Dirac, angielski dwudziestowieczny fizyk i matematyk, sformułował prawa relatywistycznej mechaniki kwantowej nie w drodze wyrafinowanych rozważań matematycznych, lecz po prostu je odgadując.

Skoro zadaniem edukometrii jest wspomaganie odkrywania praw rządzących procesami edukacyjnymi, przede wszystkim lokalnych, to warto zastanowić się, w jaki sposób powinien przebiegać związany z tym proces badawczy. I znów warto zwrócić uwagę na analogię zachodzącą między fizyką i edukometrią. I w jednej, i w drugiej badacz najpierw stara się odgadnąć nowe prawo, potem – aby sprawdzić, czy jego hipoteza jest słuszna – rozważa możliwe konsekwencje tego prawa, z reguły przeprowadzając odpowiednie obliczenia. Otrzymane wyniki teoretyczne porównuje z danymi eksperymentalnymi. Jeśli ma miejsce istotna rozbieżność, to sformułowana przez niego hipoteza jest odrzucana. Aby ten tok postępowania uznać za poprawny trzeba oczywiście przyjąć, że zostały spełnione wszystkie warunki gwarantujące, że przewidywania teoretyczne są rzeczywiście logiczną konsekwencją przyjętej hipotezy i że są naprawdę sprzeczne z wynikami starannie przeprowadzonych obserwacji. Trzeba jednak pamiętać, że odrzucenie hipotezy przez test statystyczny, zwłaszcza na małym poziomie istotności, nie zawsze jest równoznaczne z jej obaleniem, ponieważ mogą istnieć przesłanki psychologiczne uprawniające badacza do jej przyjęcia.

Rozpowszechniony jest pogląd, że jednokrotnie ale prawidłowo przeprowadzona procedura testowania statystycznego definitywnie rozstrzyga o przyjęciu lub odrzuceniu danej hipotezy. Przykładów takiego rozumowania jest wiele. Tymczasem jednokrotne zastosowanie testu statystycznego niczego do końca nie rozstrzyga. Nie tylko w ekonometrii roi się od ustalonych w ten właśnie sposób faktów, którym została przypisana ranga naukowa, mimo iż jej nie posiadają. Chociaż zostało to już dawno zauważone i skrytykowane, to jednak nie przyniosło pożądanego efektu. W szczególności już czterdzieści lat temu zwracał na to uwagę światowej sławy probabilista amerykański, W. Feller, który taki sposób wykorzystania statystyki matematycznej nazwał skandalem (Feller 1969). L. Kubik, jeden z największych obecnych probabilistów polskich pisze: *„Sądzę, że w ciągu ponad ćwierć wieku, które minęło od ukazania się artykułu Fellera, skandale te nie zniknęły, ale przeciwnie – nasiliły się. Dzięki powszechności stosowania komputerów wykrywanie ‹faktów naukowych› w opisany sposób staje się bowiem coraz łatwiejsze"*. Podaje też przykłady pokazujące, do jak absurdalnych wniosków może doprowadzić niepoprawnie stosowane wnioskowanie statystyczne (Kubik 1998).

Jak już powiedzieliśmy, wynikiem poprawnie przeprowadzonego badania statystycznego może być stwierdzenie, że testowana hipoteza jest nieprawdziwa. Może jednak mieć miejsce i taka sytuacja, że hipoteza była poprawnie sformułowana, prawidłowo został przeprowadzony proces wnioskowania i wszystkie obliczenia teoretyczne, a ich wyniki są zgodne z danymi eksperymentalnymi. Wielu badaczy uważa, że świadczy to o prawdziwości hipotezy. Tymczasem tak nie jest. Świadczy to jedynie o tym, że hipoteza ta nie została obalona. W przyszłości bowiem mogą pojawić się obserwacje, w świetle których okaże się, że jest ona błędna. Nigdy więc nie można do końca udowodnić, że hipoteza jest prawdziwa. Pewność można uzyskać jedynie co do tego, że jest ona błędna. Hipoteza uznana za prawdziwą powinna stwarzać możliwość przewidywania wyników zdarzeń, które jeszcze nie zaistniały. Co więcej, powinna dać się ekstrapolować poza dziedzinę, w której została zweryfikowana.

Istotne wpływ na poprawność wnioskowania statystycznego ma sposób sformułowania hipotezy. Hipoteza powinna być sformułowana w sposób jednoznaczny. Nie można bowiem obalić hipotezy niejednoznacznej. Istnieje, na przykład, wiele niezwykle trudnych do obalenia wskutek ich niejednoznaczności teorii kapitału ludzkiego lub społecznego. W wielu z nich można przy odrobinie zręczności przedstawić prawie każde wyniki empiryczne jako zgodne z postulatami teoretycznymi. Dla przykładu wyobraźmy sobie studenta, który twierdzi, że nie lubi matematyki, ponieważ na wcześniejszych etapach edukacyjnych nauczyciele tego przedmiotu nie poświęcali temu uczniowi dostatecznej uwagi. Gdy jednak po sprawdzeniu okazuje się, że było wprost przeciwnie – nauczyciele poświęcili mu wystarczająco dużo czasu i czynili wszystko co w ich mocy, by nauczyć go matematyki – wtedy student stwierdza, że nie lubi tego przedmiotu, bo owi nauczyciele byli dla niego zbyt wyrozumiali i pobłażliwi itd.

4. Idea stochastycznego modelowania dynamiki procesu edukacyjnego

Istnieje wiele powodów, dla których matematyczne modele dynamiki procesów edukacyjnych powinny mieć postać stochastyczną. Są nimi, przede wszystkim: systemowa złożoność tych procesów, niepewność warunków, w których są one realizowane, niepełności niedokładność wyników pomiarów edukacyjnych, nieokreśloność przyszłości itd.

Podobnie jak to się robi w innych zastosowaniach, aby badać dynamikę procesów edukacyjnych trzeba przede wszystkim wprowadzić pojęcie stanu procesu i skonstruować równanie różnicowe lub różniczkowe opisujące zmiany stanu przy pewnych z góry określonych ograniczeniach. Analizę tę można prowadzić w dwóch ujęciach: traktując czas jako zmienną dyskretną lub przyjmując, że biegnie on w sposób ciągły. Rozpatrzymy odrębnie każdy z tych przypadków.

Model różnicowy

Niech $x(t)$ będzie stanem procesu edukacyjnego w chwili $t \in T$, gdzie T – zbiór chwil, pokrywający się ze zbiorem nieujemnych liczb całkowitych. Oznaczmy przez X przestrzeń stanów. W przypadku deterministycznym formalnym modelem dynamiki zmian stanu procesu edukacyjnego jest następujące równanie różnicowe

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \qquad t \in T, \tag{4.1}$$

z warunkiem początkowym , gdzie $x(0) = x_0$, przy czym $f : T \times X \to X$.

Tego rodzaju modeli jest w ekonomii wiele, jednak w większości nie zostały one jeszcze przeanalizowane pod kątem możliwości ich wykorzystania do opisu dynamiki procesów edukacyjnych. Przykładem takiego modelu jest trzysektorowy zamknięty makroekonomiczny model wzrostu Keynesa, mający postać następującego układu rownań (zob., np.: Czerwiński 1973; Baumol 1991):

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + G_t, \\ C_t &= a_0 + a_1 Y_{t-1}, \end{aligned}, \tag{4.2a}$$

gdzie Y_t – wydatki zagregowane, C_t – wydatki na konsumpcję, I_t – wydatki na inwestycje, G_t – wydatki rządowe w roku t. Układ (4.2) jest równoważny następującemu liniowemu równaniu różnicowemu:

$$Y_t = (a_0 + I_t + G_t) + a_1 Y_{t-1}. \tag{4.2b}$$

Jeżeli przyjmiemy, że w chwili $t \in T$ są dane wartości wielkości I_t oraz G_t i oznaczmy je, odpowiednio, przez $\overline{I}_t$, $\overline{G}_t$, to spełniają one równanie

$$Y_t = (a_0 + \overline{I}_t + \overline{G}_t) + a_1 Y_{t-1}. \tag{4.3}$$

Jest to liniowe równanie różnicowe, bezpośrednio nie zależne od czasu (autonomiczne). Model ten można ustochastycznić stosując standardową technikę ekonometryczną, polegającą na wyodrębnieniu po jego prawej stronie składowej losowej reprezentującej czynnik przypadkowości (zob., np.: Pawłowski 1978; Stolarska 1987). Niech U_t będzie zmienną losową reprezentującą tę składową. Otrzymujemy następujące liniowe stochastyczne równanie różnicowe:

$$Y_t = (a_0 + \overline{I}_t + \overline{G}_t) + a_1 Y_{t-1} + U_t. \tag{4.4}$$

Zazwyczaj przyjmuje się, że U_t jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, mających zerowe wartości oczekiwane i skończone wariancje.

Powróćmy teraz do równania (4.1). W sposób analogiczny do opisanego można równaniu temu nadać postać stochastyczną. W tym celu załóżmy, że $x(t+1)$ jest zmienną losową postaci

$$x(t+1) = f(t, x(t)) + v(t, x(t)), \qquad t \in T, \tag{4.5}$$

gdzie f jest średnią warunkową zmiennej losowej $x(t+1)$ pod warunkiem zajścia $x(t)$, zaś v jest pewną zmienną losową o zerowej wartości średniej i skończonej wariancji. Oznaczmy tę wariancję przez $\sigma^2(t,x)$. Załóżmy, że rozkład warunkowy zmiennej losowej v przy danym $x(t)$ jest niezależny od $x(s)$, dla $s < t$. Przy tych założeniach równanie (4.5) jest stochastycznym równaniem różnicowym. Co więcej, z uwagi na przyjęte założenie o niezależności proces $\{x(t),\ t \in T\}$ jest markowowski.

Przyjmijmy, że rozkład warunkowy zmiennej v przy danym $x(t)$ jest normalny. Skoro tak, to zmienna losowa

$$u(t) = \frac{v(t)}{\sigma(t,x)} \tag{4.6}$$

ma rozkład normalny o zerowej wartości średniej i jednostkowej wariancji. Zauważmy, że ponieważ $u(t)$ jest niezależne od $x(t)$, więc $\{u(t),\ t \in T\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, zerowej wartości średniej i jednostkowej wariancji. Po uwzględnieniu (4.6) równanie (4.5) przyjmuje postać następującego stochastycznego równania różnicowego.

$$x(t+1) = f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))u(t), \qquad t \in T, \tag{4.7}$$

Z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Jest ono dyskretnym stochastycznym modelem dynamiki zmian stanu procesu edukacyjnego.

Model różniczkowy

Przyjmijmy teraz, że zmienna czasowa t $(t \in T)$ jest ciągła. Z teoretycznego punktu widzenia przedział zmienności t może być skończony lub nieskończony. W naszych rozważaniach przyjmiemy, że T jest skończone. Dynamicznym deterministycznym modelem procesu edukacyjnego jest teraz następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \qquad t \in T, \tag{4.8}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$.

Podobnie jak w przypadku dyskretnym, istnieje wiele modeli ekonomicznych, które mają postać deterministycznych ciągłych równań różniczkowych. Przykładem może być neoklasyczny model wzrostu podany przez Solowa (zob., np.: Czerwiński 1973; Baumol 1991):

$$\frac{dk}{dt} = sf(k(t)) - nk(t), \qquad t \in T, \tag{4.9}$$

z warunkiem początkowym $k(0) = k_0$, gdzie $k = k(t)$ – kapitał na jednostkę pracy efektywnej, $sf(k(t))$ – inwestycje na jednostkę pracy, $nk(t)$ – inwestycje restytucyjne na jednostkę pracy. Model ten jest szczególnym przypadkiem równania (4.8).

Istnieje wiele sposobów wprowadzenia do równania (4.8) elementu stochastyczności. Można, na przykład, postąpić tak: rozpatrzmy dwie chwile, t oraz $t + \Delta t$ i weźmy pod uwagę różnicę

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(f, x(t))\Delta t + o(\Delta t), \qquad t \in T, \tag{4.10}$$

gdzie $o(\Delta t)$ oznacza, że $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$, gdy $\Delta t \to 0$. Deterministyczne równanie (4.8) otrzymuje się, dzieląc obie strony formuły (4.10) przez Δt i przechodząc po obu stronach otrzymanego wyrażenia do granicy przy $\Delta t \to 0$. Zauważmy, że ponieważ (4.10) jest równaniem różnicowym, więc można do niego zastosować rozumowanie, które przeprowadziliśmy w przypadku dyskretnej zmiennej czasowej.

Przyjmijmy więc, że $\{v(t),\ t \in T\}$ jest procesem stochastycznym o przyrostach niezależnych, tzn. że jeżeli H_i jest podzbiorem zbioru R oraz $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k$ (zob., np.: Gichman i Skorochod 1968; Pugaczew i Sinicyn 1985), to prawdopodobieństwo P tego, że $v(t_i) - v(t_{i-1})] \in H_i$, dla $i \le k$, wynosi:

$$P[v(t_i) - v(t_{i-1})] \in H_i,\ i \le k] = \prod_{i \le k} P[v(t_i) - v(t_{i-1})] \in H_i], \qquad t \in T. \tag{4.11}$$

Uwzględniając tę formułę można równaniu (4.10) nadać taką postać:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t))\Delta t + v(t + \Delta t) - v(t) + o(\Delta t), \qquad t \in T. \tag{4.12}$$

Jeżeli przyjmiemy, że rozkład warunkowy przyrostów zmiennej losowej v przy danym $x(t)$ jest normalny, to

$$v(t + \Delta t) - v(t) = \sigma(f, x(t))[z(t + \Delta t) - z(t)], \qquad t \in T, \tag{4.13}$$

gdzie $\{z(t),\ t \in T\}$ jest procesem Wienera o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji (zob., np.: Gichman i Skorochod 1968; Pugaczew i Sinicyn 1985). Po podstawieniu (4.13) do (4.12) otrzymamy

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t))\Delta t + \sigma(t, x(t))[z(t + \Delta t) - z(t)] + o(\Delta t), \quad t \in T. \tag{4.14}$$

W równaniu tym wyraz $o(\Delta t)$ jest zmienną losową taką, że $\frac{E|\Delta t|^2}{\Delta t} \to 0$, gdy $\Delta t \to 0$. Zauważmy jednak, że – w przeciwieństwie do sytuacji jaka miała miejsce w przypadku równania (4.10) – operacja podzielenia obu stron równania (4.14) przez Δt i przejścia do granicy przy $\Delta t \to 0$ jest niedopuszczalna, ponieważ proces

Wienera jest nieróżniczkowalny, tzn. granica $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$ nie istnieje (zob., np.: Gichman i Skorochod 1968; Pugaczew i Sinicyn 1985). Z tego powodu, w miejsce dzielenia równania (4.14) przez Δt i przechodzenia do granicy przy $\Delta t \to 0$ w zwykłym sensie, możemy jedynie obliczyć granicę przy $\Delta t \to 0$ w sensie nadawanym temu przejściu w teorii równań stochastycznych. Zanim w następnym punkcie wyjaśnimy istotę tego przejścia, zapiszmy równanie (4.14) – w sposób czysto formalny – w następującej postaci:

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dz(t), \qquad t \in T, \tag{4.15}$$

z warunkiem początkowym. Jest to tzw. stochastyczne równanie różniczkowe Itô. Równanie to odgrywa niezwykle ważną rolę w zastosowaniach, na przykład w matematyce finansowej (zob., np.: Tarczyński i Zwolankowski 1999). W rozdziale 5 zwracamy uwagę na możliwość rozszerzenia zakresu jego wykorzystania na sferę edukacyjną.

Idea rozwiązywania równania (4.15)

Załóżmy, że $t \in [0, T]$ i formalnie scałkujmy obie strony równania (4.15) po czasie w tym przedziale. Otrzymamy następujące równanie całkowe

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t \sigma(s, x(s))\, dz(s). \tag{4.16}$$

Pierwsza całka po prawej stronie tego równania jest całką w sensie Riemanna-Stieltjesa. Obliczenie jej wartości nie nastręcza więc większych trudności. Kłopoty sprawia jednak druga całka, ponieważ $dz(t)$ nie istnieje: $z(t)$ jest wprawdzie funkcją ciągłą, ale ponieważ jest równocześnie funkcją z nieograniczonym wahaniem, więc druga całka nie ma sensu całki Riemanna-Stieltjesa. Konieczne jest więc określenie sposobu jej rozumienia.

Jako pierwszy uczynił to amerykański matematyk i cybernetyk, N. Wiener, który wprowadził pojęcie całki stochastycznej (Wiener 1923). Koncepcja Wienera została uogólniona przez japońskiego matematyka, K. Itô (Itô 1944). Omówienie pojęcia całki stochastycznej oraz zasad stochastycznego rachunku całkowego można obecnie znaleźć w wielu łatwo dostępnych monografiach (zob., np.: Gichman i Skorochod 1968; Pugaczew i Sinicyn 1985). Formalne określenie całki stochastycznej w sensie Itô, a także jej podstawowe własności oraz treść lematu Itô są podane w załączniku umieszczonym na końcu raportu. W tym miejscu ograniczymy się do przeprowadzenia analizy intuicyjnej. Zaczniemy od rozpatrzenia deterministycznego różniczkowego modelu dynamiki procesu edukacyjnego

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T. \tag{4.17}$$

W tym przypadku mówi się, że funkcja $y(s)$ jest rozwiązaniem równanie (4.17), jeżeli dla każdego $s \in T$

$$\frac{dy(s)}{dt} = f(s, y(s)), \tag{4.18}$$

lub – co na jedno wychodzi – jeśli dla wszystkich t, s $(s \leq t)$ zachodzi równość

$$y(t) - y(s) = \int_s^t f(r, y(r))\, dr, \tag{4.19}$$

gdzie $[s,t] \subset [0,T]$. Jak wiadomo, przybliżoną wartość całki występującej po prawej stronie tego równania można otrzymać dzieląc przedział $[s,t]$ na takie dowolnie małe podprzedziały

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t, \tag{4.20}$$

że dla dowolnie małej z góry ustalonej liczby $\varepsilon > 0$

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i| \leq \varepsilon, \quad [t_i, t_{i+1}] \subset [s,t] \tag{4.21}$$

i zastępując równanie (4.19) następującą formułą

$$y(t) - y(s) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, y(t_i))(t_{i+1} - t_i) + o(\varepsilon), \tag{4.22}$$

gdzie $o(\varepsilon) \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$.

Gdybyśmy powtórzyli to rozumowanie w odniesieniu do równania stochastycznego (4.15) to powiedzielibyśmy, że proces stochastyczny $y(s)$ jest jego rozwiązaniem dla wszystkich t, s $(s \leq t)$, jeśli

$$y(t) - y(s) = \int_s^t f(r, y(r))\, dr + \int_s^t \sigma(r, y(r))\, dz(r), \tag{4.23}$$

lub, po aproksymacji całek występujących po prawej stronie za pomocą sum skończonych, jeśli

$$y(t) - y(s) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, y(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(t_i, y(t_i))[z(t_{i+1}) - z(t_i)] + o(\varepsilon). \tag{4.24}$$

W odróżnieniu od przypadku deterministycznego (patrz formuła (4.22)), w równaniu (4.24) wielkość $o(\varepsilon)$ jest zmienną losową, przy czym w tym przypadku warunek $o(\varepsilon) \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$ oznacza, że $E\,|\,o(\varepsilon)\,|^2 \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$. Wiener i Itô zauważyli, że jeżeli oprzeć się na podziale przedziału $[s,t]$ określonym formułami (4.20) i (4.21), to pojawiają się pewne trudności matematyczne, uniemożliwiające uzasadnienie formuły (4.24) i udowodnienie istnienia procesu stochastycznego $y(s)$ spełniającego równanie (4.23). Jedną z nich jest to, że o ile w przypadku funkcji deterministycznych $g(t,z)$ oraz $z(t)$ takich, że $\max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i| \to 0$, granice

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i, z(t_i))[z(t_{i+1}) - z(t_i)] \tag{4.25}$$

oraz

$$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_{i+1}, z(t_{i+1}))[z(t_{i+1}) - z(t_i)] \tag{4.26}$$

pokrywają się ze sobą, to w przypadku stochastycznym tak nie jest. Jeśli, na przykład, $g(t,z) = z(t)$, gdzie $z(t)$ jest procesem Wienera o jednostkowej wariancji, to przy $\varepsilon \to 0$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} z(t_i)[z(t_{i+1}) - z(t_i)] \tag{4.27}$$

natomiast

$$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} z(t_{i+1})[z(t_{i+1}) - z(t_i)]. \tag{4.28}$$

W przypadku, gdy $z(t)$ jest funkcją deterministyczną, wielkości A i B są zwykłymi całkami Riemanna-Stieltjesa i jeśli przyjmiemy, że funkcja $z(t)$ jest całkowalna, to $B - A \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$. Innymi słowy, w przypadku deterministycznym nie ma żadnej niejednoznaczności dotyczącej pojęcia zbieżności. Jeśli jednak przyjmiemy, że $z(t,\omega)$ jest zmienną losową, wtedy wchodzą w grę różne rodzaje zbieżności: zbieżność średnia z kwadratem, zbieżność prawie na pewno, zbieżność według prawdopodobieństwa, zbieżność według dystrybuant itd. (zob., np., Gichman i Skorochod 1968). W każdej konkretnej sytuacji trzeba więc określić, o jakiej zbieżności jest mowa.

Dla skonkretyzowania dalszych rozważań przyjmijmy, że będziemy rozpatrywać zbieżność w sensie chodzi średniokwadratową. Innymi słowy, załóżmy, że

$$\lim_{n\to\infty} E\,|\,A - \sum_{i=0}^{n-1} z(t_i)[z(t_{i+1}) - z(t_i)]\,|^2 = 0, \tag{4.29}$$

lub

$$\lim_{n\to\infty} E\,|\,B - \sum_{i=0}^{n-1} z(t_{i+1})[z(t_{i+1}) - z(t_i)]\,|^2 = 0, \tag{4.30}$$

gdzie E jest symbolem operatora wartości oczekiwanej. Ponieważ przyjęliśmy, że $z(t,\omega)$ jest procesem Wienera – a jest to proces o przyrostach $z(t_{i+1}) - z(t_i)$ stacjonarnych niezależnych i wariancji równej $t_{i+1} - t_i$ – więc $B - A = t - s \neq 0$.

Widzimy więc, że – w zależności od tego, czy przyjmiemy wyrażenia graniczne postaci (4.27), czy (4.28), czy też ich kombinację liniową – wchodzą w grę różne sposoby zdefiniowania pojęcia całki stochastycznej. Jeżeli rozważa się przejścia graniczne jedynie postaci (4.27), to otrzymuje się całkę stochastyczną Itô.

Rekapitulując stwierdzamy, że modelowanie dynamiki procesu edukacyjnego w sposób bezpośrednio uwzględniający przypadkowy charakter charakteryzujących go wielkości prowadzi do konieczności posługiwania się stochastycznymi równaniami różniczkowymi i stosowania stochastycznego rachunku całkowego. W dziedzinie edukacji nie prowadzono dotychczas tego rodzaju badań. W świetle negatywnych dotychczasowych doświadczeń wynikających ze stosowania deterministycznych modeli dynamiki procesów edukacyjnych nieodzowne jest prowadzenie tych badań.

5. Stochastyczne korzenie dwuczynnikowej funkcji produkcji Cobba-Douglasa

Próby skonstruowania stochastycznych funkcji produkcji są podejmowane od dawna, ale badania nad tym zagadnieniem nie są prowadzone w sposób systematyczny. Od czasu do czasu pojawiają się prace na ten temat, ale na ogół nie są one ze sobą powiązane. Odnosi się wrażenie, że jest to spowodowane przede wszystkim brakiem ogólnych wytycznych metodologicznych, w ramach których badania nad stochastycznością funkcji produkcji powinny być prowadzone. Z tym większą satysfakcją trzeba przypomnieć, że jednym z pierwszych pomysłów idących w tym kierunku była koncepcja opracowania stochastycznych podstaw teorii funkcji produkcji Cobba-Douglasa, zaproponowana na początku lat 70. ubiegłego stulecia przez wybitnego polskiego ekonometryka, prof. Z. Pawłowskiego. Wielokrotnie refował zarysy tej koncepcji zarówno na seminariach ówczesnego Zakładu Teorii Systemów Wielkich Instytutu Badań Systemowych PAN, jak i w prywatnych rozmowach z pracownikami Instytutu. Efektem była przedstawiona wówczas w odpowiednim raporcie badawczym propozycja zastosowania metodologii fizyki statystycznej do modelowania procesów ekonomicznych na poziomie makroskopowym. Po śmierci Profesora prace nad tym zagadnieniem zostały przerwane. W ostatnich latach zostały one wznowione przez autorów niniejszego raportu. Impulsem do tego były – z jednej strony – prowadzone przez nas badania nad matematycznym modelowaniem procesów edukacyjnych, zwłaszcza na poziomie szkolnictwa wyższego, a z drugiej – powstanie ekonofizyki, jako nowej dyscypliny naukowej stojącej na pograniczu fizyki i ekonomii. Okazało się bowiem, że deterministyczne funkcje produkcji są zbyt uproszczeniami charakterystykami procesu edukacyjnego. Konieczne stało się podjęcie prac nad skonstruowaniem modeli dokładniejszych, uwzględniających nie tylko podstawowe czynniki produkcji usług edukacyjnych, ale także charakterystyczną dla procesów edukacyjnych niepewność i nieokreśloność. W literaturze światowej jest niewiele prac poświęconych temu zagadnieniu. Jedną z ostatnich jest artykuł C. Chilarescu i N. Vaneecloo (2005). Chociaż zaproponowana przez nich koncepcja jest znacznie uboższa od koncepcji prof. Z. Pawłowskiego, to jednak zostanie przez nas szczegółowo przeanalizowana, bo – naszym zdaniem – stanowi dobry punkt wyjścia do przedstawienia znacznie poprzedzającej ją w czasie koncepcji Profesora. Uczynimy to w następnym raporcie.

Załóżmy, że wyniki procesu edukacyjnego są oceniane w kategoriach użyteczności, a nie w jednostkach fizycznych. Do przyjęcia tego założenia skłania niejednorodność podstawowych czynników produkcji, tj. kapitału i pracy, przy czym – podobnie jak w przypadku produkcji materialnej – wchodzą w grę różne, specyficzne dla edukacji formy pracy i kapitału. Niech $L = L(t)$ oznacza nakłady pracy na prowadzenie procesu edukacyjnego (praca fizyczna, związana z utrzymaniem jednostki edukacyjnej w stanie ustawicznej gotowości do prowadzenia procesu edukacyjnego, praca dydaktyczna, praca wychowawcza itd.), zaś $K = K(t)$ – nakłady kapitału (kapitał naturalny, kapitał społeczny, kapitał ludzki, kapitał infrastrukturalny, kapitał finansowy itd.). Zarówno różne formy pracy, jak i różne formy kapitału są ze sobą silnie powiązane i współdziałają w procesie edukacyjnym, wytwarzając odpowiedni dodatni lub ujemny efekt synergetyczny. Rozpatrywane w czasie nakłady pracy i kapitału tworzą odpowiednie strumienie zasilające proces edukacyjny. Załóżmy strumienie te, a także wyjściowy strumień wiedzy $F(L,K)$ są przedstawione w postaci zagregowanej. Załóżmy też, że rozpatrujemy proces edukacyjny w przedziale czasowym $[0,T]$.

Przyjmijmy za punkt wyjścia postulat, że wielkości strumienie pracy $L = L(t)$ i kapitału $K = K(t)$ są rozwiązaniami następującego układu stochastycznych równań różniczkowych:

$$dL = L\{\mu_L dt + \sigma_L dz_L\}, \tag{5.1a}$$

$$dK = K\{\mu_K dt + \sigma_K dz_K\}, \tag{5.1b}$$

gdzie z_L i z_K są standardowymi procesami Wienera spełniającymi warunek

$$E_t(dW_L, dW_K) = \rho\, dt, \tag{5.2}$$

przy czym ρ jest pewną z góry ustaloną stałą należącą do przedziału $(0,1)$. Współczynniki μ_L, μ_K, σ_L, σ_K, na mocy definicji przyjętych w teorii stochastycznych równań różniczkowych (zob., np.: Gichman i Skorochod 1968), są określone w następujący sposób:

$$\mu_l = \lim_{h\to 0} \frac{E_t[\log L(t+h) - \log L(t)]}{h}, \tag{5.3a}$$

$$\mu_k = \lim_{h\to 0} \frac{E_t[\log K(t+h) - \log K(t)]}{h}, \tag{5.3b}$$

$$\sigma_L^2 = \lim_{h\to 0} \frac{E_t[\log L(t+h) - \log L(t)]}{h}, \tag{5.3c}$$

$$\sigma_K^2 = \lim_{h\to 0} \frac{E_t[\log K(t+h) - \log K(t)]}{h}, \tag{5.3d}$$

przy czym zachodzą zależności: $\mu_L = \mu_l + \frac{\sigma_L^2}{2}$, $\mu_K = \mu_k + \frac{\sigma_K^2}{2}$. Po skorzystaniu z lemat Itô (zob. załącznik) otrzymamy formułę:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial L}dL + \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}dL^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}dK^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}dL\partial K, \tag{5.4}$$

gdzie $0 \le t \le T$. Uwzględniając w tej formule zależności (5.1a) i (5.1b) otrzymamy po wykonaniu odpowiednich przekształceń takie równanie:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} dt + \mu_L L \frac{\partial F}{\partial L} + \mu_K K \frac{\partial F}{\partial K} + \frac{\sigma_L^2 L^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} + \frac{\sigma_K^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} + \rho \sigma_L \sigma_K LK \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} \right) dt + \sigma_L L \frac{\partial F}{\partial L} dW_L + \sigma_K K \frac{\partial F}{\partial K} dW_K \tag{5.5}$$

Jeżeli przyjmijmy, że funkcja produkcji może być zapisana w postaci

$$F(L,K,t) = F_d(L,K,t) + \Delta_L L(t) + \Delta_K K(t), \tag{5.6}$$

gdzie $F_d(L,K,t)$ jest składową deterministyczną, natomiast Δ_L i Δ_K są niewiadomymi, to niewiadome te muszą one być określone w taki sposób, by spełniony był warunek:

$$dF_d(L,K,t) = rF_d(L,K,t)dt), \tag{5.7}$$

gdzie parametr r charakteryzuje wielkość zwrotu nakładów inwestycyjnych na edukację w warunkach braku ryzyka.

Jeżeli w równaniu (5.5) przyjmiemy, że $\Delta_L = \frac{\partial F}{\partial L}$, $\Delta_K = \frac{\partial F}{\partial K}$ i wykonamy niezbędne przekształcenia to okaże się, że składniki losowe, tj. dwa ostatnie składniki po prawej stronie tego równania, znikają i sprowadza się ono do deterministycznego cząstkowego równania różniczkowego postaci

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} + rL \frac{\partial F}{\partial L} + rK \frac{\partial F}{\partial K} + \frac{\sigma_L^2 L^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} + \frac{\sigma_K^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} + \rho \sigma_L \sigma_K LK \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} - rF = 0. \tag{5.8}$$

Z ekonomicznego punktu widzenia sensowne jest przyjęcie następujących warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} &F(0,K,t) = F(L,0,t) = F(0,0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ &F(L,K,0) \geq 0, \quad L,K \in R^+, \\ &F(L,K,t) = AL^\alpha K^\beta, \quad t \geq T. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Pierwszy z nich oznacza, że brak nakładów pracy lub nakładów kapitału, lub też obu tych czynników równocześnie, wstrzymuje proces edukacyjny. Drugi warunek wyraża fakt, że w przypadku dysponowania odpowiednimi nakładami pracy i kapitału, proces edukacyjny przynosi efekt niezerowy, tzn. przyrost wiedzy. Znaczenie trzeciego warunku jest oczywiste.

Aby rozwiązać tego rodzaju równanie, w teorii równań różniczkowych cząstkowych proponuje się dokonanie następującej zamiany zmiennych (zob. Logan 1998):

$$\begin{aligned} &\tau = T - t, \\ &x_1 = \lambda_1 \ln L + \delta_1 \tau, \\ &x_2 = \lambda_2 \ln L + \delta_2 \tau, \\ &F(L,K,t) = e^{-r\tau} G(x_1, x_2, \tau), \end{aligned} \tag{5.10}$$

gdzie λ_1, λ_2, δ_1, δ_2 są nowymi niewiadomymi. Po uwzględnieniu tej zamiany i przyjęciu następujących postaci zmiennych λ_1, λ_2, δ_1, δ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_L}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_K}, \quad \delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_L}\left(r - \frac{\sigma_L^2}{2}\right), \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_K}\left(r - \frac{\sigma_K^2}{2}\right) \tag{5.11}$$

równanie (5.8) przechodzi w równanie

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + 2\rho \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{5.12}$$

z takim warunkiem początkowym

$$G(x_1, x_2, 0) = A\exp\left(\frac{\alpha\sigma_L}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{\beta\sigma_K}{\sqrt{2}} x_2\right). \tag{5.13}$$

Aby je rozwiązać trzeba dokonać jeszcze jednej zamiany zmiennych. Podstawmy więc (Logan 1998):

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \tau) &= H(y_1, y_2, \tau), \\ y_1 &= -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} x_2, \\ y_2 &= x_1. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Po wykonaniu odpowiednich działań równanie (5.8) przyjmie postać

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2}, \tag{5.15}$$

natomiast warunek początkowy (5.13) przejdzie w

$$H(y_1, y_2, 0) = A\exp\left(\frac{\beta\sigma_K\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{\alpha\sigma_L + \beta\rho\sigma_K}{\sqrt{2}} y_2\right). \tag{5.16}$$

Układ równań stochastycznych (5.1) został więc sprowadzony do deterministycznego dwuwymiarowego równania dyfuzyjnego (5.15) z warunkiem początkowym (5.16).

Logan (1998) wykazał, że rozwiązaniem równania (5.15) z warunkiem początkowym (5.16) jest funkcja:

$$H(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{4\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(z_1, z_2) \exp\left(-\frac{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2}{4\tau}\right), \tag{5.17}$$

gdzie $h(z_1, z_2) = H(y_1, y_2, 0)$. Aby obliczyć całkę występującą w formule (5.17) należy dokonać podstawienia:

$$u_1 = \frac{z_1 - y_1 - \sqrt{2(1-\rho^2)}\beta\sigma_K\tau}{4\tau},$$
$$u_1 = \frac{z_2 - y_2 - \sqrt{2}(\alpha\sigma_L + \beta\rho\sigma_K)\tau}{4\tau}. \tag{5.18}$$

Po przeprowadzeniu niezbędnych przekształceń otrzymuje się:

$$H(y_1, y_2, \tau) = A\exp|\xi_1(\tau)|\cdot\exp|\xi_2(y_1, y_2)|, \tag{5.19}$$

gdzie

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\alpha^2\sigma_L^2 + \beta^2\sigma_K^2 + 2\alpha\beta\rho\sigma_L\sigma_K),$$
$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta\sqrt{1-\rho^2}\sigma_K y_1 + (\alpha\sigma_L + \beta\rho\sigma_K)y_2. \tag{5.20}$$

Biorąc pod uwagę podstawienia (5.10) i (5.14) oraz formułę (5.19) ostatecznie otrzymamy

$$F(L,K,t) = F(L,K,T)e^{-\theta(T-t)} = AL^\alpha K^\beta e^{-\theta(T-t)}, \tag{5.21}$$

przy czym

$$\theta = \frac{\alpha(\alpha-1)(\sigma_L^2 + \sigma_K^2 - 2\rho\sigma_L\sigma_K))}{2}. \tag{5.22}$$

Zauważmy, że ponieważ $\alpha \in [0,1]$, a $\sigma_L^2 + \sigma_K^2 - 2\rho\sigma_L\sigma_K \geq 0$, więc wobec tego $\theta \leq 0$ i wobec tego

$$F(L,K,t) \leq AL^\alpha K^\beta, \qquad t \leq T. \tag{5.22}$$

Znaczy to, że funkcja produkcji jest zbieżna od dołu do funkcji Cobba-Douglasa.

W warunkach stanu ustalonego $t = T$ i wobec tego otrzymujemy funkcję Cobba-Douglasa

$$F(L,K,t) = AL^\alpha K^\beta. \tag{5.23}$$

Jeżeli $\theta = 0$, ale $t \leq T$ dostajemy najprostszy przypadek funkcji Cobba-Douglasa

$$F(L,K,t) = AL^\alpha K^{1-\alpha}, \tag{5.24}$$

przy czym

$$\rho = \frac{\sigma_L^2 + \sigma_K^2}{2\sigma_L\sigma_K}. \tag{5.25}$$

W ekonomii od dawna istnieje przekonanie, że funkcja produkcji Cobba-Douglasa jest konsekwencją faktu, iż długofalowymi mechanizmami ekonomicznymi rządzą probabilistyczno-statystyczne prawa oparte na rozkładach Pareto (zob., np., Mandelbrot 1997). Przeprowadzone rozważania zdają się potwierdzać to przekonanie. Co więcej, prowadzą do stwierdzenia, że w przypadku stochastycznym postać funkcji produkcji $F(L,K,t)$ nie jest na przedziale $[0,T]$ określona jednoznacznie. O tym, czy będzie to funkcja Cobba-Douglasa, czy też nie, decydują warunki brzegowe.

Zauważmy, że współczynnik θ może być uważany za miarę dystansu dzielącego wielkość wiedzy wytwarzanej w toku procesu edukacyjnego w dowolnej konkretnej chwili, od wielkości wiedzy wytwarzanej w warunkach stanu ustalonego. To zaś sugeruje, że przy odpowiednich założeniach, funkcja produkcji charakteryzująca proces edukacyjny jest zbieżna od dołu do funkcji Cobba-Douglasa.

6. Wnioski końcowe

Modelowanie procesów edukacyjnych musi mieć charakter systemowy, tzn. musi traktować edukację jako układ wzajemnie ze sobą sprzężonych elementów, z których każdy realizuje swoje własne lokalne zadania edukacyjne, a wszystkie razem współdziałają dla jak najsprawniejszego wykonywania zadania globalnego. Jeśli, na przykład, układem tym jest sieć szkół podstawowych, to każda z nich, jako element sieci, realizuje własny proces edukacyjny, a wszystkie razem współuczestniczą w realizacji sieciowego zadania edukacyjnego, jakim jest jak najlepsze przygotowanie danego pokolenia uczniów do podjęcia nauki w gimnazjach. Jest to zadanie wieloaspektowe i wielokontekstowe, niezwykle złożone i pełne sprzeczności. Rozwiązać je można jedynie na gruncie interdyscyplinarnym. Stąd wniosek, że nauka o edukacji musi mieć charakter interdyscyplinarny. W jej tworzeniu muszą uczestniczyć i współpracować ze sobą przedstawiciele reprezentujący takie dyscypliny, jak teoria i inżynieria systemów, inżynieria społeczna, dydaktyka, pedagogika, ekonomia, socjologia, psychologia, ergonomia, matematyka, informatyka, mechanika statystyczna i wiele innych. Ani edukometria, ani ekonomika edukacji nie mogą więc być uważane za teorię edukacji. Każda z nich reprezentuje bowiem konkretny, właściwy sobie punkt spojrzenia na procesy edukacyjne.

Edukometria i ekonomika edukacji są stosunkowo nowymi obszarami badań nad edukacją i wymagają przede wszystkim opracowania podstaw metodologicznych. Dotychczasowy rozwój tych dziedzin świadczy o tym, że pierwsza z nich jest w zasadzie zwierciadlanym odbiciem ekonometrii, a druga – wierną kopią ekonomii neoklasycznej. Wskutek tego jedna i druga są obciążone tymi samymi mankamentami co ich pierwowzory. Konieczne jest wyjście z tego impasu i zbudowanie tych nauk od podstaw, tak aby były zgodne z ogólnymi zasadami tworzenia teorii naukowych i odpowiadały wymogom współczesności. Nie będzie to możliwe dopóty, dopóki nie przeprowadzi się krytycznej, ale zarazem konstruktywnej krytycznej analizy obecnego stanu edukometrii i ekonomiki edukacji. Dotychczas nie prowadzono takich analiz, przejmując i traktując niemal jak dogmat postulaty sformułowane w ekonometrii i ekonomii neoklasycznej.

Immanentną właściwością procesów edukacyjnych jest szeroko rozumiana niepewność, niepełność i nieokreśloność wiedzy na ich temat. Współczesna matematyka oferuje rozmaite sposoby odwzorowywania niepewności. Jeśli przyjąć, że niepewność charakterystyczna dla procesów edukacyjnych ma charakter przypadkowy w sensie klasycznego rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, to formalnymi reprezentantami wielkości niepewnych stają się klasyczne zmienne losowe. Modele opisujące procesy edukacyjne powinny więc być konstruowane przede wszystkim na gruncie matematyki stochastycznej. Wchodzą w grę dwa rodzaje modeli: statyczne i dynamiczne. Do konstruowania modeli dynamicznych trzeba wykorzystywać aparat teorii stochastycznych równań różniczkowych.

Ważnym aspektem badań nad edukacją powinna stać się cybernetyka edukacji. Ten kierunek badań, zapoczątkowany jeszcze w latach sześćdziesiątych 20. wieku przez prof. M. Mazura i niezwykle dynamicznie wtedy rozwijający się, został po śmierci Profesora bardzo osłabiony i stopniowo odszedł w niepamięć. Konieczne jest nie tylko przypomnienie, ale i rozwinięcie idei cybernetyki edukacji, zwłaszcza w kontekście wielocelowego sterowania procesami edukacyjnymi oraz zarządzania jednostkami edukacyjnymi i szkolnictwem.

Za główny wynik pracy uważamy przeprowadzenie krytycznej analizy podstawowych założeń dotychczasowej edukometrii i ekonomiki edukacji. Nacisk został położony na wykazanie istotnych niewłaściwości popełnianych w toku probabilistyczno-statystycznych analiz procesów edukacyjnych. Zwróciliśmy uwagę na metodologiczną niepoprawność utożsamiania funkcji edukometrycznych z abstrakcyjnymi funkcjami matematycznymi. Doprowadziło to bowiem do utożsamiania pojęcia niezależności zmiennych w sensie klasycznej deterministycznej analizy matematycznej z pojęciem niezależności używanym w analizie stochastycznej oraz do nierozróżniania między pojęciami prostopadłości i ortogonalności w sensie deterministycznym i w sensie stochastycznym. W konsekwencji tego, w teorii edukacji istnieje wiele rozmaitych stwierdzeń, niesłusznie nazywane zasadami, w których operuje się niepoprawnie użytymi pojęciami niezależności, prostopadłości i ortogonalności. Co gorsza, często nadaje się tym stwierdzeniom rangę twierdzeń rzekomo wyrażających warunki konieczne i dostateczne posiadania przez określone procesy takich czy innych własności. Przykładem może być tzw. zasada ortogonalności oraz oparte na niej tzw. równanie fundamentalne stwierdzające, że w warunkach równowagi rynkowej wartość przedsiębiorstwa w każdej chwili jest równa sumie czterech i tylko czterech form kapitału (finansowego, materialnego, ludzkiego i społecznego), a także traktowanie formuły wyrażającej ten fakt jako równania czysto matematycznego, a nie fizycznego. Niepoprawność tego równania i przyjmowanie, że występujące w nim te cztery formy kapitału są wzajemnie rozłączne lub ortogonalne jest oczywista nie tylko dla ekonomistów. Każde przedsiębiorstwo, a więc i każda jednostka edukacyjna, jest systemem i dlatego wszystkie jego elementy, a więc również wszystkie rodzaje czynników produkcji, w tym pracy i kapitału, muszą wzajemnie od siebie zależeć.

W przypadku deterministycznym pojęcie ortogonalności dwóch wielkości określa się w kategoriach ich iloczynu wewnętrznego, zwanego też iloczynem skalarnym. W przypadku stochastycznym klasyczne pojęcie iloczynu skalarnego traci sens. Konieczne jest wprowadzenie innej definicji, odpowiadającej probabilistycznemu charakterowi rozpatrywanych wielkości.

Zwróciliśmy uwagę, że jednym z głównych problemów ekonomiki edukacji jest modelowanie dynamiki procesów edukacyjnych. Z uwagi na niepewność i nieokreśloność tych procesów jest to dynamika stochastyczna. Matematycznego aparatu do modelowania takiej dynamiki dostarcza teoria stochastycznych równań różniczkowych. W raporcie przedstawiono podstawowe wiadomości z tej dziedziny, a następnie wykorzystano je – w ślad za pracą Chilarescu i Vaneecloo (2007) – do pokazania, że przy określonych założeniach matematycznych dwuczynnikowa deterministyczna funkcja produkcji Cobba-Douglasa jest szczególnym przypadkiem odpowiedniego modelu stochastycznego.

Wspomnieliśmy już, że n początku lat 70. dwudziestego wieku prof. Z. Pawłowski zaproponował metodologicznie ogólniejszą od przedstawionej przez Chilarescu i Vaneecloo koncepcję badań nad stochastyczną funkcją produkcji. Praca Chilarescu i Vaneecloo, chociaż późniejsza o przeszło trzy dekady, jest dobrym wprowadzeniem do koncepcji Profesora, która zostanie omówiona i rozszerzona w następnym raporcie.

ZAŁĄCZNIK

Podstawowe wiadomości z zakresu teorii stochastycznych równań różniczkowych

Nieantycypujący proces stochastyczny

Uściślimy teraz przeprowadzoną w rozdziale 4 intuicyjną analizę, która doprowadziła do otrzymania ogólnego stochastycznego modelu dynamiki procesu edukacyjnego. Dla uproszczenia symboliki matematycznej przyjmijmy oznaczenie $z_t \equiv z(t,\omega)$. Załóżmy, że proces Wienera z_t jest określony na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) i że dla $t \geq 0$ jest określona w F rodzina σ-ciał, którą oznaczymy przez F_t. Mówimy, że jest to rodzina nieantycypująca (tj. niezależna od przyszłości) względem z_t jeśli są spełnione następujące warunki:

1. $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ dla $0 \leq t_1 \leq t_2$.
2. z_t jest mierzalne względem F_t dla każdego $t \geq 0$, tzn. F_t zawiera σ-ciało generowane przez z_s, $0 \leq s \leq t$, tzn. $F_t \supseteq \sigma(z_s, 0 \leq s \leq t)$.
3. F_t jest niezależne od σ-ciała generowanego przez przyrost $z_u - z_t$, $t \leq u \leq \infty$, które oznaczymy przez $\sigma(z_u - z_t, t \leq u \leq \infty)$. Innymi słowy, dla $h = u - t$ $(t \leq u < \infty)$ proces $z(t+h) - z(h)$ jest niezależny od każdego ze zdarzeń należących do σ-ciała F_h. W szczególności oznacza to, że F_0 może zawierać tylko te zdarzenia, które są niezależne od całego procesu z_t $(t \geq 0)$.

Rozpatrzmy teraz funkcję $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to R$ i załóżmy, że jest ona mierzalna w sensie F_t dla każdego $t \in [0,T].(t,\omega)$. Załóżmy, że jest to funkcja nieantycypująca względem rodziny σ-ciał F_t oraz że całka

$$\int_0^T |\sigma(t,\omega)|^2\,dt \tag{4.31}$$

przyjmuje wartość skończoną z prawdopodobieństwem równym jedności.

Zauważmy, że jeżeli funkcja $\sigma(t,\cdot)$ jest ciągła z prawdopodobieństwem 1, to całka (4.31) ma sens całki Riemanna. W bardziej ogólnych przypadkach jest to całka Lebesgue'a.

Szczególnym rodzajem rodziny funkcji nieantycypujących jest rodzina nieantycypujących funkcji skokowych. Powiada się, że funkcja nieantycypująca $\sigma(t,\omega)$ jest skokowa, jeśli istnieje taki podział

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \tag{4.32}$$

przedziału $[0,T]$, że $\sigma(t,\omega) = \sigma(t_i,\omega)$ dla $t \in [t_i, t_{i+1})$, gdzie $i = 0,1,\ldots,n-1$. Dla takich właśnie funkcji skokowych Itô wprowadził pojęcie całki stochastycznej.

Pojęcie całki Itô

Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to R$ – nieantycypującą funkcją skokową odpowiadającą podziałowi postaci (4.32), zaś $z(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to R$ – procesem Wienera. Stochastyczną całką Itô funkcji σ względem z na przedziale $[0,T]$ nazywa się zmienną losową rzeczywistą $I(\sigma)$ określoną w następujący sposób:

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= I(\sigma(t,\omega)) = \\ &= \int_0^T \sigma(t,\omega)dz(t,\omega) = \\ &= \int_0^T \sigma\, dz = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(t_{i-1},\omega)[z(t_i,\omega) - z(t_{i-1},\omega)] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sigma(t_{i-1})[z(t_i) - z(t_{i-1})]. \end{aligned} \tag{Z.1}$$

Zależność wartości tej całki od $\omega \in \Omega$ podkreśla fakt, że całka Itô jest zmienną losową. Zazwyczaj jednak symbol ω jest opuszczany dla uproszczenia i przejrzystości zapisów. Należy zwrócić uwagę na to, że w definicji funkcji skokowej, a w konsekwencji i w definicji stochastycznej całki Itô, używa się lewych krańców podprzedziałów podziału (4.32).

Powyższa definicja stochastycznej całki Itô opiera się na wykorzystaniu pojęcia zbieżności według prawdopodobieństwa. Alternatywnym sposobem określenia tej całki jest skorzystanie z pojęcia zbieżności średniej z kwadratem. Ponieważ zbieżność średnia z kwadratem jest ogólniejsza i pociąga za sobą zbieżność według prawdopodobieństwa, więc definicja stochastycznej całki Itô w oparciu o pojęcie zbieżności średniej z kwadratem jest uogólnieniem definicji otrzymanej w oparciu o pojęcie zbieżności według prawdopodobieństwa.

Podstawowe własności całki Itô

Ponieważ własności te są dobrze omówione w literaturze (zob., np.: Itô 1944; Gichman i Skorochod 1968; Lipcer i Sziriajew 1981; Pugaczew i Sinicyn 1985), więc ograniczymy się jedynie do wyliczenia najważniejszych z nich. Oto one:

1. Jeżeli $\sigma_1(t,\omega)$ i $\sigma_2(t,\omega)$ są funkcjami nieantycypującymi $[0,T]\times\Omega\to R$ i jeżeli $a_1, a_2 \in R$, to

$$\int_0^T (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2)dz = a_1\int_0^T \sigma_1 dz + a_2\int_0^T \sigma_2 dz \tag{Z.2}$$

2. Jeżeli $\sigma_1(t,\omega)$ i $\sigma_2(t,\omega)$ są funkcjami nieantycypującymi $[0,T]\times\Omega\to R$ i jeżeli $a_1(\omega)$, $a_2(\omega)$ są zmiennymi losowymi o wartościach rzeczywistych, takimi że $a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$ jest funkcja nieantycypująca na przedziale $[0,T]$, to

$$\int_0^T (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2)dz = a_1\int_0^T \sigma_1 dz + a_2\int_0^T \sigma_2 dz\,. \tag{Z.3}$$

3. Niech $[s,u]\subset[0,T]$ i niech $\chi_{[s,u]}$ będzie charakterystyczną funkcją przedziału $[s,u]$. Wtedy

$$\int_0^T \chi_{[s,u]}dz = z(u) - z(s)\,. \tag{Z.4}$$

4. Jeżeli $\sigma(t,\omega)$ jest funkcją nieantycypującą na przedziale $[0,T]$ i taką, że $\int_0^T E\,|\,\sigma(s)\,|^2\,ds < \infty$, to

$$\int_0^T \sigma(t)dz(t) = 0 \tag{Z.5}$$

zaś

$$E\,\Big|\int_0^T \sigma(t)dz(t)\Big|^2 = \int_0^T E\,|\,\sigma(t)\,|^2 dt\,. \tag{Z.6}$$

Zauważmy, że trzy pierwsze własności są analogiczne do własności całki Riemanna-Stieltjesa.

Lemat Itô

Rozpatrzmy przestrzeń probabilistyczną (Ω,F,P), proces stochastyczny $x(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to R$ mierzalny względem F_t dla każdego $t\in[0,T]$, oraz proces Wienera $z(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to R$. Załóżmy, że $\sigma(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to R$ jest funkcją nieantycypującą na $[0,T]$, że $f(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to R$ jest mierzalna względem F_t dla każdego $t \in [0,T]$ oraz że $\int_0^T |f(t,\omega)|\,dt < \infty$ z prawdopodobieństwem równym jeden. Niech $0 \le r \le s \le T$ i załóżmy, że

$$x(s) - x(r) = \int_r^s f(t,\omega)dt + \int_r^s \sigma(t,\omega)dz(t,\omega)\,. \qquad (Z.7)$$

Stochastyczną różniczką procesu $x(t)$ nazywa się wielkość

$$dx(t) = f(t)dt + \sigma(t)dz(t)\,. \qquad (Z.8)$$

Itô udowodnił, że jeżeli $u(t,x):[0,T]\times R \to R$ jest funkcją deterministyczną ciągłą, mającą ciągłe pochodne cząstkowe u_t, u_x, u_{xx} i jeżeli $x(t,\omega):[0,T]\times \Omega \to R$ jest procesem stochastycznym takim, że zachodzi (Z.8), to stochastyczna różniczka funkcji $y(t) = u(t,x(t))$ ma postać:

$$dy(t) = [u_t(t,x(t)) + u_x(t,x(t))f(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t,x(t))\sigma^2(t)] + u_x(t,x(t))\sigma(t)dz(t)\,. \qquad (Z.9)$$

Stwierdzenie to jest znane jako lemat Itô, a wyrażenie (Z,9) jako formuła Itô. W matematyce stochastycznej formuła ta pełni rolę podobną do tej, jaką w matematyce deterministycznej pełni rozwinięcie funkcji w szereg Taylora.

Literatura

Baumol B. (1991). Economics. Pitman, London.

Becker G. (1964). Human capital. A theoretical analysis with special reference to education. University of Chicago Press, Chicago.

Bereziński M. (2002). Kapitał intelektualny: termodynamiczny model wiedzy. *Raport Badawczy* RB/82/2002, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Bereziński M. (2003). Markowski model procesu edukacyjnego na wyższej uczelni. *Raport Badawczy* RB/73/2003, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Bereziński M. (2004). Markowskie modele procesów edukacyjnych na wyższej uczelni. *Raport Badawczy* RB/63/2004, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Bereziński M., Hołubiec J. (2004). Ku humanizacji kapitału intelektualnego. *Mazowieckie Studia Humanistyczne*, **1-2**, 207-239.

Bereziński M., Wagner D. (2008a). Kapitał społeczny – pojęcie nowe czy zapomniane? *Studia i Materiały Polskiego Stowarzyszenia Zarządzania Wiedzą*, **17**, 13-21.

Bereziński M., Wagner D. (2008b). Kapitał intelektualny a kapitał ludzki – koncepcja personalistyczna.W: J.W. Owsiński, Z. Nahorski i T. Szapiro, red., Badania operacyjne i systemowe: decyzje, gospodarność, kapitał ludzki i jakość. Instytut Badań Systemowych PAN i Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych, Warszawa, 397-407.

Bereziński M., Wagner D. (2008c). Metoda pomiaru jakości szkoły wyższej. *Raport Badawczy* RB/42/2008, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Bereziński M., Hołubiec J., Wagner D. (2009). Hierarchiczna struktura poznania – piramida wiedzy. *Studia i Materiały Polskiego Stowarzyszenia Zarządzania Wiedzą*, **19**, 5-17.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2005a). Wieloaspektowy statystyczny model sterowania procesem edukacyjnym. *Raport Badawczy* RB/45/2005, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2005b). Sieciowy stochastyczny model procesu kształcenia w szkole wyższej. W: Z. Bubnicki, R. Kulikowski i J. Kacprzyk, red., XV Krajowa Konferencja Automatyki, T. III, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa, 359-364.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2006). Metody oceny i doboru kadry dydaktycznej. *Raport Badawczy* RB/43/2006, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2007). Integracja metod oceny nauczycieli i studentów dla potrzeb konstrukcji modelu szkoły wyższej. *Raport Badawczy* RB/74/2007, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Blaug M. (1987). Rate of return on investment in Great Britain.W: M. Blaug, red., The economics of education and the education of an economists. New York University Press, New York.

Block F. (1990). Post industrial possibilities: a critique of economic discourse. University of California Press, Los Angeles.

Chilarescu C., Vaneecloo N. (2005). A stochastic approach to the Cobb-Douglas production function. *Economics Bulletin*, **3**, 1-8.

Czerwiński Z. (1982). Matematyczne modelowanie procesów ekonomicznych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Feller W. (1969). Are life scientists overawed by statistics? *Scientific Research*, **4**, 24-29.

Feynman R.P. (1965). The character of physical laws. Addison-Wesley-Longman, London.

Gichman I.I., Skorochod A.N. (1968). Stochasticzeskije differencialnyje urawnienija. Naukowa Dumka, Kijew.

Golbgerger A.S. (1966). Econometric theory. John Wiley, New York.

Itô K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, Tokyo, **20**, 519-524.

Kubik L. (1998). Zastosowanie elementarnego rachunku prawdopodobieństwa do wnioskowania statystycznego. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Labini P.S. (1995). Why the interpretation of the Cobb-Douglas production function must be radically changed. *Structural Change and Economic Dynamics*, **6**, 485-504.

Logan D. (1998). Applied partial differential equations. Springer Verlag, Berlin.

Lulla B.P. (1980). Concept of educometrics. Bombay Teacher's Training College, Publications Unit, Bombay.

Mandelbrot B. (1997). Fractals and scaling in finance. Discontinuity, concentration, risk. Springer Verlag, New York.

Marginson S. (1993). Education and public policy in Australia. Cambridge University Press, Cambridge.

Mikusiński J. (1990). Wstęp do analizy matematycznej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pawłowski Z. (1978). Ekonometria. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Pugaczew W.S., Sinicyn I.N. (1985). Stochasticzeskije differencialnyje sistiemy. Nauka, Moskwa.

Stolarska E. (1987). Dynamiczne modele ekonometryczne. Własności i zastosowania. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Tadeusiewicz R. (2001). O potrzebie naukowej refleksji nad rozwojem społeczeństwa informacyjnego. W: L. Haber, red., Mikrospołeczność informatyczna. AGH, Kraków, 13-38.

Tarczyński W., Zwolankowski M. (1999). Inżynieria finansowa. Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa.

Tintner G., Sengupta J.K. (1972). Stochastic economics. Stochastic processes, control, and programming. Academic Press, New York.

Wiener N. (1923). Differential Space. *Journal of Mathematical Physics, Massachusetts Institute of Technology,* **2**, 131-174.