209/2010

Raport Badawczy
Research Report

RB/24/2010

Efektywne metody wyznaczania mediany Kemeny'ego

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2010

1. Definicje mediany Kemeny'ego . Podejście klasyczne (Kemeny, Snell [1])

Założymy, że dany jest zbiór obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$ oraz zbiór ekspertów $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$. Zadaniem ekspertów jest uporządkowanie zbioru obiektów zgodnie z przyjętym kryterium lub zbiorem kryteriów. Zakładamy również, że wszystkie obiekty ze zbioru $\mathcal{O}$ mogą być porównywane ze sobą.

Oceny pary obiektów podane przez ekspertów mogą więc mieć postać (dla uproszczenia zapisu pominięto indeks eksperta):

$O_i \succ O_j$, co oznacza, że obiekt O_i jest – ze względu na przyjęte kryterium (zbiór kryteriów) – lepszy od obiektu O_j,

$O_i \approx O_j$, co oznacza, że obiekty O_i oraz O_j są – ze względu na przyjęte kryterium (zbiór kryteriów) – równoważne,

$O_i \prec O_j$, co oznacza, że obiekt O_i jest – ze względu na przyjęte kryterium (zbiór kryteriów) – gorszy od obiektu O_j.

Stosowany jest również zapis w postaci uporządkowania

$$P = \{O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, (O_{i_s}, O_{i_t}), \ldots, O_{i_{n-1}}, O_{i_n}\}, \tag{1}$$

który oznacza, że obiekt O_{i_1} jest lepszy od obiektu O_{i_2}; obiekty równoważne (O_{i_s}, O_{i_t}) są ujęte w nawiasach.

Dla ocen par obiektów, które podaje ekspert o numerze k, tworzymy macierz porównań obiektów parami, której elementy są określone następująco

$$A^k = [a_{ij}^k], \text{ gdzie } a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } O_i \succ^k O_j \\ 0 & \text{jeżeli } O_i \approx^k O_j \\ -1 & \text{jeżeli } O_i \prec^k O_j \end{cases}. \text{ Zazwyczaj przyjmuje się, że } a_{ii} = 0, i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że eksperci podają swoje oceny w postaci uporządkowań.[1)]

Zakładamy, że mamy uporządkowanie P^k podane przez eksperta o numerze k oraz dane uporządkowanie P.

[1)] Mając dane uporządkowanie można na jego podstawie uzyskać – w sposób jednoznaczny – macierz porównań obiektów parami. Należy podkreślić, że znajomość tej macierzy nie zawsze umożliwia wyznaczenie odpowiadającego jej uporządkowania. Taka sytuacja ma miejsce, gdy podane oceny par obiektów nie są przechodnie.

Definicja 1

Odległość między parą obiektów O_i, O_j w uporządkowaniu P oraz parą tych samych obiektów w uporządkowaniu P^k jest definiowana następująco:

$$d_{ij}(P,P^k)=\left|a_{ij}-a_{ij}^k\right|. \tag{3}$$

Definicja 2.

Odległość między uporządkowaniami P oraz P^k jest definiowana następująco

$$d(P,P^k)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}d_{ij}(P,P^k)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\left|a_{ij}-a_{ij}^k\right|. \tag{4}$$

Przyjmiemy, że w uporządkowaniu P obiekt O_i poprzedza O_j, czyli a_{ij}=1. Wprowadzamy oznaczenie

$$r_{ij}^k=\left|a_{ij}^k-a_{ij}\right|=\left|a_{ij}^k-1\right| \qquad k=1,\ldots,K. \tag{5}$$

Współczynniki r_{ij}^k mogą przyjmować następujące wartości

$$r_{ij}^k=\left|a_{ij}^k-1\right|=\begin{cases}0 & \text{jeżeli } a_{ij}^k=1\\ 1 & \text{jeżeli } a_{ij}^k=0\\ 2 & \text{jeżeli } a_{ij}^k=-1\end{cases}. \tag{6}$$

Wzór (4) przybiera zatem postać

$$d(P,P^k)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\left|a_{ij}-a_{ij}^k\right|=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\left|a_{ij}^k-1\right|=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}r_{ij}^k. \tag{7}$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{K}r_{ij}^k. \tag{8}$$

Definicja 3.

Odległość $d(P,P^{(k)})$ uporządkowania P od zbioru uporządkowań $P^{(k)}=\{P^1, ..., P^K\}$ podanych przez ekspertów wynosi

$$d(P,P^{(k)})=\sum_{k=1}^{K}d(P,P^k)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}r_{ij}^k=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}r_{ij}. \tag{9}$$

Macierz $R=[r_{ij}]$ nosi nazwę macierzy strat. Ze wzoru (6) wynika, że wartości elementów macierzy R zależą wyłącznie od postaci uporządkowań podanych przez ekspertów.

Definicja4.

Medianą Kemeny'ego nazywamy takie uporządkowanie $\widetilde{P}$, że

$$d(\widetilde{P},P^{(k)}) = \min_{P} d(P,P^{(k)}) . \tag{10}$$

Z definicji mediany Kemeny'ego (10) oraz wzoru (9) wynika, że zadanie wyznaczenia mediany Kemeny'ego można sprowadzić do takiego przestawienia wierszy i kolumn macierzy R (tzn. zmiany kolejności obiektów), aby suma elementów r_{ij} nad przekątną główną była jak najmniejsza.

Należy podkreślić, że istnieje wiele sposobów upraszczania zadania wyznaczania mediany Kemeny'ego. Niektóre z nich zostaną omówione w niniejszej pracy. Jednakże w przypadku ogólnym wyznaczanie mediany Kemeny'ego stanowi problem NP-trudny.

Definicja 5 [3].

Macierz strat jest przechodnia, jeżeli z warunku

$$r_{i_j i_{j+1}} \le r_{i_{j+1} i_j} \text{ oraz } r_{i_{j+1} i_{j+s}} \le r_{i_{j+s} i_{j+1}} \text{ wynika, że } r_{i_j i_{j+s}} \le r_{i_{j+s} i_j} , \; i,j = 1,\dots n \tag{11}$$

Warto odnotować, że warunek przechodniości nie wymaga aby s=2. W przypadku ogólnym dla $K \geq 3$ macierz strat odpowiadająca dowolnym uporządkowaniom $P^{(k)} = \{P^1,\dots,P^K\}$ nie musi być przechodnia.

Definicja 6 [3].

Zwycięzcą w sensie Condorceta jest obiekt, który zdaniem większości ekspertów ($K_W > K/2$) poprzedza pozostałe obiekty[1)].

Definicja 7 [3].

Zbiór uporządkowań ma własność Condorceta, jeżeli dla każdego podzbioru obiektów istnieje zwycięzca w sensie Condorceta.

[1)] Niektórzy autorzy przyjmują, że warunek ten ma postać ($K_W \geq K/2$)

Obiekty będące zwycięzcami w sensie Condorceta są wyznaczane następująco. Najpierw określa się zwycięzcę Condorceta dla całego zbioru obiektów $\{O_i\}$ $i=1, ..., n$. Następnie obiekt ten jest usuwany ze zbioru obiektów i wyznaczany jest zwycięzca Condorceta dla (n-1) elementowego podzbioru obiektów. Tak wyznaczony obiekt jest usuwany ze zbioru obiektów i postępowanie jest powtarzane dla kolejnych podzbiorów obiektów aż do momentu otrzymania podzbioru pustego.

Twierdzenie 1 [3].

Macierz strat odpowiadająca uporządkowaniom $P^{(k)} = \{P^1, \ldots, P^K\}$ jest przechodnia wtedy i tylko wtedy gdy zbiór tych uporządkowań ma własność Condorceta.

Twierdzenie 2 [3].

Jeżeli dany zbiór uporządkowań $P^{(k)} = \{P^1, \ldots, P^K\}$ ma własność Condorceta, to medianę Kemeny'ego stanowi uporządkowanie obiektów $\tilde{P} = \{O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_{n-1}}, O_{i_n}\}$ będących zwycięzcami Condorceta dla kolejnych podzbiorów obiektów. Dla tego uporządkowania odległość $d(\tilde{P}, P^{(k)})$ jest kresem dolnym odległości od zbioru uporządkowań $P^{(k)}$. Oznacza się ją literą H.

Twierdzenie 3 [3].

Jeżeli w medianie nie występują obiekty równoważne, wówczas

$$d(P, P^{(k)}) = \sum_{(i,j) \in I_P^{(1)}} r_{ij}\,, \tag{12}$$

gdzie $I_P^{(1)}$ - zbiór indeksów (i,j), dla których w uporządkowaniu P mamy $O_i \succ O_j$, tzn. $a_{ij} = 1$.

Ta zależność może być zastosowana do wyznaczenia kresu dolnego H odległości (9). Litvak wykazał, że spełnione jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 [3].

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} min(r_{ij}, r_{ji}) \tag{13}$$

W dotychczasowych rozważaniach posługiwano się przede wszystkim macierzą porównań parami. Można uzyskać interesujące wyniki wprowadzając do rozważań macierz rozkładu głosów ekspertów.

Założymy, że dany jest zbiór uporządkowań n obiektów podanych przez K ekspertów $P^{(k)} = \{P^1, \dots, P^K\}$. Założymy również, że w opiniach ekspertów mogą występować obiekty równoważne.

Wprowadzimy oznaczenia:

l_{ij} – liczba ekspertów, których zdaniem $O_i \succ O_j$

l_{ji} – liczba ekspertów, których zdaniem $O_j \succ O_i$ (14)

m_{ij} – liczba ekspertów, których zdaniem $O_i \approx O_j$, to znaczy, ze obiekty O_i oraz O_j są równoważne w sensie przyjętego kryterium (zbioru kryteriów).

Zatem spełniona jest nierówność

$l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} = K.$ (15)

Zgodnie ze wzorem (5) macierz strat $[r_{ij}]$ tworzymy przy pomocy wyrażeń

$d_{ij} = |a_{ij}-1|,$ (16)

przybierających następujące wartości:

jeżeli $O_i \succ O_j$, to $a_{ij} = 1$ a zatem $d_{ij} = 0$,

jeżeli $O_i \prec O_j$, to $a_{ij} = -1$ a zatem $d_{ij} = 2$, (17)

jeżeli $O_i \approx O_j$, to $a_{ij} = 0$ a zatem $d_{ij} = 1$.

Z definicji macierzy strat $[r_{ij}]$ oraz z zależności (17) wynika, że

$r_{ij} = 2l_{ij} + 1 \cdot m_{ij} + 0 \cdot l_{ij}$ (18)

Odejmując od wyrażenia (18) równość (15) otrzymujemy

$r_{ij} - K = 2l_{ji} + 1 \cdot m_{ij} - l_{ij} - l_{ji} - m_{ij} = l_{ji} - l_{ij} = -\Delta l_{ij}$ (19)

Tak więc

$r_{ij} = K - \Delta l_{ij},$ (20)

jeżeli $\Delta l_{ij} > 0$, to $r_{ij} < K$,

jeżeli $\Delta l_{ij} = 0$, to $r_{ij} = K$, (21)

jeżeli $\Delta l_{ij} < 0$, to $r_{ij} > K$.

Ze wzoru (20) bezpośrednio wynika, że

$r_{ij} + r_{ji} = 2K$, $i < j$, $i=1, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, n$. (22)

Z zależności (13) i (22) wynika, że kres dolny H jest równy sumie współczynników strat mniejszych lub równych K położonych powyżej lub poniżej przekątnej głównej macierzy strat. Jeżeli $r_{ij} = r_{ji}$, to w sumie określającej kres dolny dany element występuje tylko raz.

Ze wzoru (22) wynika również, że suma wszystkich elementów macierzy $[r_{ij}]$ wynosi

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} = 2K \cdot \frac{n(n-1)}{2} = K \cdot n(n-1) \tag{23}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że rozpatrywana suma jest zawsze liczbą parzystą.

Ze wzoru (20) wynika także, że

$$|r_{ij} - r_{ji}| = 2\Delta l_{ij} \tag{24}$$

Jeżeli $\Delta l_{ij} \neq 0$, to $min\,|\,r_{ij} - r_{ji}\,| = 2$, bowiem $min\,|\,\Delta l_{ij}\,| = 1$

A zatem minimalna zmiana odległości między uporządkowaniami wynosi 2.

Ze wzoru (15) mamy, że

$$l_{ij} + l_{ji} = K - m_{ij} \tag{25}$$

Warunek $\Delta l_{ij} = 0$ czyli $l_{ij} = l_{ji}$ jest możliwy do spełnienia tylko wtedy, gdy $(K - m_{ij})$ jest liczbą parzystą.

Na podstawie wzoru (20) mamy również, że

$$0 \leq r_{ij} \leq 2K, \tag{26}$$

bowiem $0 \leq l_{ij} \leq K$.

Współczynnik r_{ij} jest więc liczbą nieujemną.

Powyższe uwagi pozwalają stwierdzić, że jeżeli dla jednego uporządkowania z rozpatrywanego zbioru uporządkowań odległość (9) jest liczbą nieparzystą, to dla wszystkich innych uporządkowań z tego zbioru odległości (9) są również liczbami nieparzystymi.

Analogiczny wniosek obowiązuje, gdy dla jednego z uporządkowań odległość (9) jest liczbą parzystą.

W pracy Litvaka [3] jest podane twierdzenie mające duże znaczenie praktyczne. W dalszych rozważaniach zostanie pokazane, jak zastosowanie tego twierdzenia pozwala istotnie uprościć proces wyznaczania mediany Kemeny'ego. Różne wersje tego twierdzenia były podawane w kilku pracach, np. Saari, Merlin [4], Truchon [5]. Jednakże ich autorzy nie odwoływali się do oryginalnej pracy Litvaka opublikowanej znacznie wcześnie, bo w 1982 r.

Twierdzenie 5 [3].

Założymy, że jest dany zbiór uporządkowań $P^{(k)} = \{P^1, \ldots, P^K\}$, dla którego wyznaczono macierz strat] = $[r_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Jeżeli uporządkowanie $\widetilde{P}$ stanowi medianę tego zbioru uporządkowań, to jest spełniony warunek

$$r_{i_\nu i_{\nu+1}} \leq r_{i_{\nu+1} i_\nu}, \; i_\nu = 1, \ldots, n\text{-}1. \tag{27}$$

Jeżeli dla danego uporządkowania P jest spełniony warunek (27) a macierz strat R jest przechodnia, to uporządkowanie P stanowi medianę zbioru uporządkowań $P^{(k)}$.

Aby zapisać warunek (27) używając elementów macierzy rozkładu głosów ekspertów, przywołamy wzór (20)

$$r_{i_t i_{t+1}} = K - (l_{i_t i_{t+1}} - l_{i_{t+1} i_t})$$

oraz (28)

$$r_{i_{t+1} i_t} = K - (l_{i_{t+1} i_t} - l_{i_t i_{t+1}}).$$

Warunek (27) można zatem zapisać jak następuje

$$K - (l_{i_t i_{t+1}} - l_{i_{t+1} i_t}) \leq K - (l_{i_{t+1} i_t} - l_{i_t i_{t+1}}). \tag{29}$$

Skąd

$$0 \leq 2(l_{i_t i_{t+1}} - l_{i_{t+1} i_t}) \tag{30}$$

i ostatecznie

$$0 \leq (l_{i_t i_{t+1}} - l_{i_{t+1} i_t}) \tag{31}$$

Warunek (27) jest warunkiem koniecznym, aby uporządkowanie P było medianą. A zatem (31) jest również warunkiem koniecznym, który musi spełniać mediana.

Konsekwencją tego warunku jest wymaganie, aby relacje większości między parami obiektów – wynikające z macierzy rozkładu głosów ekspertów – były zachowane w medianie.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku ogólnym, to znaczy z uwzględnieniem możliwości występowania obiektów równoważnych obowiązuje wzór (15), to znaczy

$l_{ij} + l_{ji} + m_{ij} = K,$

skąd

$l_{ij} + (l_{ij} - \Delta l_{ij}) = K - m_{ij}$. (32)

A zatem $l_{ij} = \frac{K - m_{ij}}{2} + \frac{\Delta l_{ij}}{2} = \frac{K'}{2} + \frac{\Delta l_{ij}}{2}$. (33)

Powyższy wzór oznacza, że w przypadku występowania obiektów równoważnych – dla $m_{ij} \neq 0$, przy definiowaniu większości należy brać pod uwagę nie całkowitą liczbę ekspertów K, ale K', to znaczy należy pomniejszyć całkowitą liczbę ekspertów o liczbę ekspertów uważających obiekty O_i oraz O_j za równoważne.

Przykład 1.

Dany jest zestaw czterech uporządkowań czterech obiektów.

$$\begin{aligned} &P^1 : O_2, O_4, O_1, O_3 \\ &P^2 : O_1, (O_3, O_4), O_2 \\ &P^3 : (O_2, O_3), O_4, O_1 \\ &P^4 : O_3, O_2, (O_1, O_4) \end{aligned} \quad (34)$$

W uporządkowaniach P^2, P^3 i P^4 występują obiekty równoważne. Mamy trzy pary takich obiektów: $(O_1, O_4), (O_2, O_3), (O_3, O_4)$. Zazwyczaj przyjmuje się – aby był spełniony wzór (15), że każdy z obiektów równoważnych otrzymuje ½ głosu eksperta. Po uwzględnieniu tej modyfikacji macierz rozkładu głosów ekspertów jest jak następuje.

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	-	1	2	1+½
O_2	3	-	1+½	3
O_3	2	2+½	-	2+½
O_4	2+½	1	1+½	-

(35)

W rozpatrywanym przykładzie liczba ekspertów wynosi 4. W przypadku obiektów, które nie mają sobie równoważnych relacja większości jest spełniona jeżeli $l_{ij} \geq 3$. Ten warunek spełniają pary obiektów $O_2 > O_1$ oraz $O_2 > O_4$. Występują jednak 3 pary obiektów równoważnych, dla których – zgodnie z (33) – zmodyfikowana większość wynosi $\frac{4-1}{2} \leq 2$.

Tę relację większości spełniają już wymienione pary obiektów.

Dla uporządkowań (34) macierz $[\Delta l_{ij}]$ ma postać

$[\Delta l_{ij}]=$ (36)

	O_1	O_2	O_3	O_4	$\sum_{j>i}\Delta l_{ij}$
O_1	-	-2	0	-1	-3
O_2	2	-	-1	2	1
O_3	0	1	-	1	1
O_4	1	-2	-1	-	$\sum_i\sum_{j>i}\Delta l_{ij}$ =-1

Zgodnie ze wzorem (20) odległość (9) dla uporządkowania O_1, O_2, O_3, O_4 jest równa $4\frac{4(4-1)}{2}-(-1)=25$.

Z kolei dla uporządkowania O_3, O_2, O_4, O_3 macierz $[\Delta l_{ij}]$ ma postać

$[\Delta l_{ij}]=$ (37)

	O_2	O_3	O_4	O_1	$\sum_{j>i}\Delta l_{ij}$
O_2	-	1	1	0	2
O_3		-	2	2	4
O_4			-	1	1
O_1				-	$\sum_i\sum_{j>i}\Delta l_{ij}$ =7

Odległość (9) dla tego uporządkowania wynosi 24-7=17.

Ze wzoru (31) wynika, że uporządkowania, w których nie są spełnione relacje większości wynikające z macierzy rozkładu głosów ekspertów, nie mogą być medianą.

Podejście, którego podstawę stanowi to stwierdzenie, zastosował M. Truchon [5] do uproszczenia procesu wyznaczania mediany Kemeny'ego.

Kolejność postępowania jest następująca:

1° Na podstawie macierzy rozkładu głosów ekspertów wyznacza się pary obiektów spełniające relację większości.

2° Dla par obiektów wyznaczonych w punkcie 1° określa się relację przeciwną, tzn., jeżeli między parą obiektów O_i oraz O_j zachodzi relacje większości $O_i \succ O_j$, to przyjmujemy, że $O_j \succ O_i$.

3° Ustalamy wszystkie możliwe uporządkowania, które mogą stanowić medianę. W przypadku n obiektów i przy założeniu, że w medianie nie występują obiekty równoważne, należy rozpatrzyć $n!$ uporządkowań.

4° Ze zbioru uporządkowań wyznaczonych w punkcie 3° usuwamy te, w których między sąsiednimi obiektami występują relacje ustalone w punkcie 2°.

5° Dla uporządkowań, które nie zostały usunięte w kroku 4° sprawdzamy, dla którego uporządkowania (dla których uporządkowań) odległość (9) jest najmniejsza. Uporządkowania, które spełniają ten warunek stanowią medianę Kemeny'ego.

Sprawdzenia, czy jest spełniony warunek z pkt 5° można dokonać na kilka sposobów.

a) Mając wyznaczoną macierz strat $[r_{ij}]$ można dla każdego uporządkowania P obliczyć odległość (9)

$$d(P,P^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n} r_{ij} \ . \tag{38}$$

b) Mając wyznaczoną macierz rozkładu głosów ekspertów $[l_{ij}]$ można dla każdego uporządkowania P obliczyć odległość $d(P,P^{(k)})$ zgodnie z wzorem

$$d(P,P^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\left[K-(l_{ij}-l_{ji})\right] = \frac{n(n-1)}{2}K - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\Delta l_{ij} \tag{39}$$

W przedstawionej procedurze – służącej do uproszczenia procesu wyznaczania mediany Kemeny'ego – zakłada się eliminację tych uporządkowań, w których sąsiadujące obiekty nie spełniają zasady większości wynikającej z macierzy rozkładu głosów ekspertów.

Jednakże może zdarzyć się sytuacja, że w uporządkowaniach pozostałych po tej eliminacji mogą występować pary obiektów nie zajmujących sąsiednich pozycji, które również nie spełniają relacji większości wynikających z macierzy rozkładu głosów ekspertów. Dla tych par obiektów $\Delta l_{ij} < 0$.

A zatem zgodnie z wzorem (39) odległość $d(P,P^{(k)})$ będzie tym mniejsza im suma $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\Delta l_{ij}$ będzie mieć mniejszą wartość. Ze względu na to, że dla rozpatrywanych par obiektów $\Delta l_{ij} < 0$, odpowiadające im składniki sumy będą powiększać wartość odległości. Można zatem przyjąć, że uporządkowanie, w którym suma $\left|\Delta l_{ij}\right|$ wyznaczona dla par obiektów nie spełniających relacji większości wynikających z macierzy rozkładu głosów ekspertów jest najmniejsza, stanowi medianę Kemeny'ego. Tak właśnie jest formułowana zasada wyznaczania mediany Kemeny'ego w pracach Klamlera [2] oraz Saariego i Merlina [4]. Zastosowanie tej zasady przedstawiono w przykładzie 3.

Nawiązując do wzoru (39) warto zwrócić uwagę na zależność, jak istnieje między drugim członem tego wzoru określonym dla danego uporządkowania a uporządkowaniem przeciwstawnym.

Założymy, że jest dane uporządkowanie $P = \{ O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_{n-1}}, O_{i_n} \}$. Dla tego uporządkowania drugi człon wzoru (39) przybiera postać

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \Delta l_{ij} = \sum_{j=i_2}^{i_n} (l_{i_1 j} - l_{j i_1}) + \sum_{j=i_3}^{i_n} (l_{i_2 j} - l_{j i_2}) + \ldots + (l_{i_{n-1} i_n} - l_{i_n i_{n-1}}) . \tag{40}$$

Dla uporządkowania przeciwstawnego $\overline{P} = \{ O_{i_n}, O_{i_{n-1}}, \ldots, O_{i_2}, O_{i_1} \}$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_n}^{i_1} \sum_{j<i}^{i_1} \Delta l_{ij} &= \sum_{j=i_{n-1}}^{i_1} (l_{i_n j} - l_{j i_n}) + \sum_{j=i_{n-2}}^{i_1} (l_{i_{n-1} j} - l_{j i_{n-1}}) + \ldots + (l_{i_2 i_1} - l_{i_1 i_2}) = \\ &= -\sum_{j=i_1}^{i_{n-1}} (l_{j i_n} - l_{i_n j}) - \sum_{j=i_1}^{i_{n-2}} (l_{j i_{n-1}} - l_{i_{n-1} j}) - \ldots - (l_{i_1 i_2} - l_{i_2 i_1}) = \\ &= -\sum_{j=i_2}^{i_n} (l_{i_1 j} - l_{j i_1}) - \sum_{j=i_3}^{i_{n-2}} (l_{i_2 j} - l_{j i_2}) - \ldots - (l_{i_n i_{n-1}} - l_{i_{n-1} i_n}) \end{aligned} \tag{41}$$

Z porównania wzorów (40) i (41) wynika, że drugi człon wyrażenia (39) ma taką samą wartość bezwzględną dla uporządkowań P i $\overline{P}$, różnią się jednak znakiem. Dla uporządkowania będącego medianą wartość tego członu musi być największa, wówczas bowiem odległość (39) osiąga najmniejszą wartość. Z kolei dla uporządkowania przeciwstawnego do mediany wartość tej odległości jest największa.

Uwzględniając wzór (39) oraz powyższą uwagę można stwierdzić, że jeżeli dla danego uporządkowania wartość odległości (9) jest większa od $\frac{n(n-1)}{2} K$ (tzn. od połowy sumy wszystkich elementów macierzy $R = [r_{ij}]$ (23)), to dla uporządkowania przeciwstawnego wartość odległości będzie mniejsza od $\frac{n(n-1)}{2} K$.

Wniosek ten ma pewne znaczenie praktyczne. Wiadomo bowiem, że – zgodnie z Twierdzeniem 4 – można określić kres dolny H odległości (9) (wzór (13)). Wartość odległości uporządkowania stanowiącego medianę musi się zawierać w przedziale wyznaczonym przez kres dolny H oraz liczbę $\frac{n(n-1)}{2} K$.

Przykład 2.

Ponownie rozpatrzymy uporządkowania z przykładu 1.

$P^1 : O_2, O_4, O_1, O_3$

$P^2 : O_1, (O_3, O_4), O_2$

$P^3 : (O_2, O_3), O_4, O_1$

$P^4 : O_3, O_2, (O_1, O_4)$

Macierz strat R wyznaczona dla tych uporządkowań ma postać

$R=$

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	0	6	4	5
O_2	2	0	5	2
O_3	4	3	0	3
O_4	3	6	5	0

(42)

Suma wszystkich elementów macierzy R wynosi 4·4(4-1) = 48.

Zgodnie ze wzorem (13) kres dolny odległości (9) jest równy

$$H = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} min(r_{ij}, r_{ji}) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} min(r_{ij}, r_{ji}) = (2+4+3)+(3+2)+3 = 17 \tag{43}$$

$$K\frac{n(n-1)}{2} = \frac{48}{2} = 24\,. \tag{44}$$

A zatem dla mediany $\tilde{P}$ uporządkowań (34) jest spełniona nierówność

$$17 \le \text{odległość}\,(\tilde{P}) \le 24 \tag{45}$$

Dla uporządkowania $O_3 \succ O_2 \succ O_4 \succ O_1$ odległość (9) jest równa 17.

Macierz R zapisana zgodnie z podaną kolejnością obiektów ma postać

$R=$

	O_3	O_2	O_4	O_1	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_3	-	3	3	4	10
O_2	5	-	2	2	4
O_4	5	6	-	3	3
O_1	4	6	5	-	
					17

(46)

czyli mediana jest równa kresowi dolnemu. Dla uporządkowania przeciwstawnego odległość (9) osiąga wartość maksymalną równą 48-17=31.

Aby zilustrować przedstawiony w pracy algorytm wyznaczania mediany Kemeny'ego, którego podstawę stanowi Twierdzenie 5 podamy jego zastosowanie do uporządkowań rozpatrywanych w przykładach 1 i 2.

Przykład 3.

Z analizy przykładu 1 wynika, że w rozpatrywanym przypadku należy brać pod uwagę zarówno zwykłą relację większości K_W, jak i zmodyfikowaną relację większości K'_W.

Pary obiektów, które spełniają te relacje większości są następujące:

$$O_2 \succ O_1; \quad O_2 \succ O_4; \quad O_3 \succ O_2; \quad O_3 \succ O_4; \quad O_4 \succ O_1 \tag{47}$$

Przyjmiemy, że mediany dla zbioru uporządkowań (34) będziemy szukać wśród uporządkowań nie zawierających obiektów równoważnych.

Wiadomo, że dla 4 obiektów takich uporządkowań jest 4!=24. Są one, jak następuje (dla uproszczenia zapisu pominięto symbol $\succ$).

1° O_1 O_2 O_3 O_4	7° O_2 O_1 O_3 O_4	13° O_3 O_1 O_2 O_4	19° O_4 O_1 O_2 O_3	
2° O_1 O_2 O_4 O_3	8° O_2 O_1 O_4 O_3	14° O_3 O_1 O_4 O_2	20° O_4 O_1 O_3 O_2	
3° O_1 O_3 O_2 O_4	9° O_2 O_3 O_1 O_4	15° O_3 O_2 O_1 O_4	21° O_4 O_2 O_1 O_3	(48)
4° O_1 O_3 O_4 O_2	10° O_2 O_3 O_4 O_1	16° O_3 O_2 O_4 O_1	22° O_4 O_2 O_3 O_1	
5° O_1 O_4 O_2 O_3	11° O_2 O_4 O_1 O_3	17° O_3 O_4 O_1 O_2	23° O_4 O_3 O_1 O_2	
6° O_1 O_4 O_3 O_2	12° O_2 O_4 O_3 O_1	18° O_3 O_4 O_2 O_1	24° O_4 O_3 O_2 O_1	

Zgodnie z przedstawionymi wyżej rozważaniami mrdian nie mogą stanowić uporządkowania, w których relacje między sąsiednimi obiektami są przeciwstawne do podanych w (47). Należy zatem wykluczyć uporządkowania, w których

$$\text{a) } O_1 \succ O_2; \quad \text{b) } O_1 \succ O_4; \quad \text{c) } O_2 \succ O_3; \quad \text{d) } O_4 \succ O_2; \quad \text{e) } O_4 \succ O_3; \tag{49}$$

Z analizy uporządkowań podanych w (48) wynika, że

- warunek a) wyklucza uporządkowania 9°, 12°, 13°, 14°, 22°, 23°
- warunek b) wyklucza uporządkowania 10°, 11°, 16°, 17°, 19°, 20°
- warunek c) wyklucza uporządkowania 1°, 2°, 13°, 17°, 19°, 23°
- warunek d) wyklucza uporządkowania 4°, 5°, 14°, 18°, 21°, 22° (50)
- warunek e) wyklucza uporządkowania 1°, 5°, 9°, 10°, 19°, 22°
- warunek f) wyklucza uporządkowania 1°, 4°, 7°, 10°, 17°, 19°

Warunek (47) spełniają jedynie uporządkowania

3° $O_1 O_3 O_2 O_4$	8° $O_2 O_1 O_4 O_3$	16° $O_3 O_2 O_4 O_1$	
6° $O_1 O_4 O_3 O_2$	11° $O_2 O_4 O_1$ $O3$	20° $O_4 O_1 O_3 O_2$	(51)
7° $O_2 O_1 O_3 O_4$	15° $O_3 O_2 O_1$ $O4$	24° $O_4 O_3 O_2 O_1$	

Aby wyznaczyć medianę wystarczy sprawdzić, dla którego z tych uporządkowań odległość $d(P, P^{(k)})$ osiąga wartość minimalną lub wyrażenie $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\Delta l_{ij}$ osiąga wartość maksymalną.

Biorąc pod uwagę macierz $R = [r_{ij}]$ mamy

	O_1	O_3	O_2	O_4	$\sum_j r_{ij}$
O_1	-	4	6	5	15
O_3		-	3	3	6
O_2			-	2	2
O_4				-	23

	O_2	O_1	O_3	O_4	$\sum_j r_{ij}$
O_2	-	2	5	2	9
O_1		-	4	5	9
O_3			-	3	3
O_4				-	21

	O_2	O_4	O_1	O_3	$\sum_j r_{ij}$
O_2	-	2	2	5	9
O_4		-	3	5	8
O_1			-	4	4
O_3				-	21

	O_3	O_2	O_4	O_1	$\sum_j r_{ij}$
O_3	-	3	3	4	10
O_2		-	2	2	4
O_4			-	3	3
O_1				-	17

(52)

	O_4	O_1	O_3	O_2	$\sum_j r_{ij}$
O_4	-	3	5	6	14
O_1		-	4	6	10
O_3			-	3	3
O_2				-	27

Z porównania macierzy (52) wynika, że medianę stanowi uporządkowanie $O_3\ O_2\ O_4\ O_1$.

Macierze $[\Delta l_{ij}]$ dla rozpatrywanych uporządkowań mają postać:

	O_1	O_3	O_2	O_4	$\sum_j \Delta l_{ij}$
O_1	-	0	-2	-1	-3
O_3		-	1	1	2
O_2			-	2	2
O_4				-	1

	O_2	O_1	O_3	O_4	$\sum_j \Delta l_{ij}$
O_2	-	2	-1	2	3
O_1		-	0	-1	-1
O_3			-	1	1
O_4				-	3

	O_2	O_4	O_1	O_3	$\sum_j \Delta l_{ij}$
O_2	-	2	2	-1	3
O_4		-	0	-1	-1
O_1			-	1	1
O_3				-	3

	O_3	O_2	O_4	O_1	$\sum_j \Delta l_{ij}$
O_3	-	1	1	0	2
O_2		-	2	2	4
O_4			-	1	1
O_1				-	7

(53)

	O_4	O_1	O_3	O_2	$\sum_j \Delta l_{ij}$
O_4	-	1	-1	-2	-2
O_1		-	0	-2	-2
O_3			-	1	1
O_2				-	-3

Z porównania macierzy (53) wynika, że medianę stanowi uporządkowanie O_3 O_2 O_4 O_1.

Poniżej zostanie przedstawiony przykład zastosowania opisanego podejścia do wyznaczania mediany Kemeny'ego dla uporządkowań pięciu obiektów podanych przez pięciu ekspertów.

Przykład 4 [3].

Dane jest pięć uporządkowań pięciu obiektów

P^1: $(O_2, O_5), O_4, (O_1, O_3)$

P^2: $(O_1, O_3), O_2, O_5, O_4$

P^3: $O_1, O_4, (O_3, O_5), O_2$ (54)

P^4: $O_4, O_3, (O_1, O_2, O_5)$

P^5: O_3, O_5, O_4, O_1, O_2

Macierz rozkładu głosów ekspertów z uwzględnieniem równoważności obiektów ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
O_1	-	3+½	1½+½	2	2+½
O_2	1+½	-	1	2	1½+½
O_3	2½+½	4	-	2	3+½
O_4	3	3	3	-	2
O_5	2+½	2½+½	1+½	3	-

(55)

Przyjęcie macierzy rozkładu głosów ekspertów w postaci danej wzorem (55) wymaga pewnego komentarza.

Uwzględnienienie w rozważaniach „połówek" głosów ekspertów wynika z przyjętego założenia, że równoważność obiektów O_i oraz O_j w podanej przez eksperta ocenie jest traktowana jako wystąpienie dwóch przeciwstawnych opinii: $O_i \succ O_j$ oraz $O_j \succ O_i$. Aby liczba *głosów* ekspertów się zgadzała, przyjmujemy umownie, że te przeciwstawne opinie stanowią połowę *głosu* eksperta.

Jeżeli dwóch ekspertów uznaje obiekty O_i oraz O_j za równoważne, to należy przyjąć – stosując podany schemat postępowania – że jeden ekspert podał ocenę $O_i \succ O_j$ oraz jeden ekspert podał ocenę $O_j \succ O_i$.

Jeżeli trzech ekspertów uznało obiekty O_i oraz O_j za równoważne, to należy przyjąć – stosując podany schemat postępowania – że jeden ekspert i „½ eksperta" podali ocenę $O_i \succ O_j$ oraz, że jeden ekspert i „½ eksperta" podali ocenę $O_j \succ O_i$.

Jeżeli większa liczba ekspertów uznaje obiekty O_i oraz O_j za równoważne, stosujemy ten sam schemat postępowania.

W związku z tym, macierz rozkładu głosów ekspertów (55) przybiera postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
O_1	-	3½	2	2	2½
O_2	1½	-	1	2	2
O_3	3	4	-	2	3½
O_4	3	3	3	-	2
O_5	2½	3	1½	3	-

(56)

Zwykła większość głosów wynosi $K_W = 3 > \frac{5}{2}$. A zatem można przyjąć, że relację zwykłej większości spełniają następujące pary obiektów:

a) $O_1 \succ O_2$ b) $O_3 \succ O_1$ c) $O_3 \succ O_2$ d) $O_3 \succ O_5$ e) $O_4 \succ O_1$ (57)

f) $O_4 \succ O_2$ g) $O_4 \succ O_3$ h) $O_5 \succ O_2$ i) $O_5 \succ O_4$

A zatem mediany nie mogą stanowić uporządkowania, w których są spełnione relacje przeciwne, to znaczy

a) $O_2 \succ O_1$ b) $O_1 \succ O_3$ c) $O_2 \succ O_3$ d) $O_5 \succ O_3$ e) $O_1 \succ O_4$ (58)

f) $O_2 \succ O_4$ g) $O_3 \succ O_4$ h) $O_2 \succ O_5$ i) $O_4 \succ O_5$

Jeżeli przyjmiemy, że w medianie nie mogą występować obiekty równoważne, to z 5!=120 uporządkowań należy rozważyć tylko te, dla których nie zachodzą relacje (58). Są to następujące uporządkowania:

a) O_1, O_5, O_4, O_3, O_2 b) O_3, O_1, O_5, O_4, O_2 c) O_3, O_5, O_4, O_1, O_2 (59)

d) O_4, O_3, O_1, O_5, O_2 e) O_4, O_3, O_5, O_1, O_2 f) O_5, O_4, O_3, O_1, O_2

A zatem w rozpatrywanym przypadku wyznaczenie mediany Kemeny'ego sprowadza się do określenia odległości dla 6 uporządkowań (59). Macierz strat dla uporządkowań (54) ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
O_1	0	3	6	6	5
O_2	7	0	8	6	6
O_3	4	2	0	6	3
O_4	4	4	4	0	6
O_5	5	4	7	4	0

(60)

Odległości dla poszczególnych uporządkowań są, jak następuje

a)	O_1	O_5	O_4	O_3	O_2	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_1	0	5	6	6	3	20
O_5		0	4	7	4	15
O_4			0	4	4	8
O_3				0	2	2
O_2					0	$\boxed{45}$

b)	O_3	O_1	O_5	O_4	O_2	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_3	0	4	3	6	2	15
O_1		0	5	6	3	14
O_5			0	4	4	8
O_4				0	4	4
O_5					0	$\boxed{41}$

c)	O_3	O_5	O_4	O_1	O_2	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_3	0	3	6	4	2	15
O_5		0	4	5	4	13
O_4			0	4	4	8
O_1				0	3	3
O_2					0	$\boxed{39}$

d)	O_4	O_3	O_1	O_5	O_2	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_4	0	4	4	6	4	18
O_3		0	4	3	2	9
O_1			0	5	3	8
O_5				0	4	4
O_2				4	0	$\boxed{39}$

(61)

e)

	O_4	O_3	O_5	O_1	O_2	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_4	0	4	6	4	4	18
O_3		0	3	4	2	9
O_5			0	5	4	9
O_1				0	3	3
O_2				4	0	$\boxed{39}$

f)

	O_5	O_4	O_3	O_1	O_2	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_5	0	4	7	5	4	20
O_4		0	4	4	4	12
O_3			0	4	2	6
O_1				0	3	3
O_2					0	$\boxed{41}$

Na podstawie analizy macierzy (61) można przyjąć, że - dla uporządkowań (54) i wprowadzonych ograniczeń - medianę Kemeny'ego stanowią następujące uporządkowania

c) O_3, O_5, O_4, O_1, O_2

d) O_4, O_3, O_1, O_5, O_2 (62)

e) O_4, O_3, O_5, O_1, O_2

Odległość $d(P,P^{(k)})$ dla tych uporządkowań wynosi 39. Jak wykazano poprzednio największą wartość odległości otrzymujemy dla uporządkowania przeciwstawnego do mediany. Założymy, że jest to uporządkowanie przeciwstawne do (62c). Odległość $d(\overline{P},P^{(k)})$ dla tego uporządkowania wynosi

	O_2	O_1	O_4	O_5	O_3	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_2	0	7	6	6	8	27
O_1		0	6	5	6	17
O_4			0	6	4	10
O_5				0	7	7
O_3					0	$\boxed{61}$

(63)

Suma elementów macierzy strat dla rozpatrywanego przykładu wynosi $5\cdot5(5\text{-}1)=100$. A zatem 61 stanowi największą wartość odległości $d(P,P^{(k)})$.

Dla uporządkowania (62c) macierz $[\Delta l_{ij}]$ jest następująca

$[\Delta l_{ij}]=$

	O_3	O_5	O_4	O_1	O_2	$\sum_{j>i} \Delta l_{ij}$
O_3	-	2	-1	1	3	5
O_5		-	1	0	1	2
O_4			-	1	1	2
O_1				-	2	2
O_2					-	$\boxed{11}$

(64)

$[\Delta\bar{l}_{ij}]=$

	O_2	O_1	O_4	O_5	O_3	$\sum_{j>i}\Delta\bar{l}_{ij}$
O_2	-	-2	-1	-1	-3	-7
O_1		-	-1	0	-1	-2
O_4			-	-1	1	0
O_5				-	-2	-2
O_3					-	$\boxed{-11}$

(65)

Wykorzystując wzór (39) otrzymujemy, że dla uporządkowania (62c) odległość $d(P,P^{(k)})=5\frac{5(5-1)}{2}-11=39$ a dla uporządkowania przeciwstawnego odległość $d(\overline{P},P^{(k)})=5\frac{5(5-1)}{2}+11=61$.

Na podstawie macierzy strat możemy określić kres dolny odległości $d(P,P^{(k)})$. Zgodnie ze wzorem (13) wynosi on 37. A zatem mediana musi spełniać nierówność

$$37\le d(\bar{P},P^{(k)})\le 49 \qquad (66)$$

We wzorze (66) jako górne ograniczenie przyjęto liczbę 49, poniewaz w rozpatrywanym przypadku odległości są liczbami nieparzystymi.

Aby wykazać zasadność zaproponowanej metody wyznaczania par obiektów spełniających relację większości w przypadku obiektów równoważnych, policzono odległość dla uporządkowań, które nie spełniają warunku $O_5 \succ O_2$ (wynikającego z doliczenia „połówek" *głosów* ekspertów, to znaczy dla uporządkowań, w których sąsiednie obiekty spełniają warunek $O_2 \succ O_5$. Odległości dla tych uporządkowań są wyznaczone przez macierze (67) (1÷4).

1)	O_2	O_5	O_4	O_3	O_1	$\sum_{j>i}r_{ij}$
O_2	0	6	6	8	7	27
O_5		0	4	7	5	16
O_4			0	4	4	8
O_3				0	4	4
O_1					0	$\boxed{55}$

2)	O_3	O_1	O_2	O_5	O_4	$\sum_{j>i}r_{ij}$
O_3	0	4	2	3	6	15
O_1		0	3	5	6	14
O_2			0	6	6	12
O_5				0	4	4
O_4					0	$\boxed{45}$

3)	O_3	O_2	O_5	O_4	O_1	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_3	0	2	3	6	4	15
O_2		0	6	6	7	19
O_5			0	4	5	9
O_4				0	4	4
O_1					0	$\boxed{47}$

4)	O_4	O_3	O_1	O_2	O_5	$\sum_{j>i} r_{ij}$
O_4	0	4	4	4	6	18
O_3		0	4	2	3	9
O_1			0	3	5	8
O_2				0	6	6
O_5					0	$\boxed{41}$

(67)

Dla wszystkich tych uporządkowań odległości sa większe niż 39.

Przykład 5.

Załóżmy, że jest dana macierz rozkładu głosów ekspertów wyznaczona na podstawie uporządkowań 6 obiektów, podanych przez 11 ekspertów.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	0	7	7	6	6	7
O_2	4	0	7	4	9	6
O_3	4	4	0	4	5	5
O_4	5	7	7	0	7	5
O_5	5	2	6	4	0	5
O_6	4	5	6	6	6	0

(68)

Liczba ekspertów wynosi 11, czyli zwykła większość $K_W = 6 > \frac{11}{2}$. W macierzy (68) zacieniowano pary obiektów spełniających zwykłą relację wiekszości. Są to:

1° $O_1 \succ O_2$; $O_1 \succ O_3$; $O_1 \succ O_4$; $O_1 \succ O_5$; $O_1 \succ O_6$

2° $O_2 \succ O_3$; $O_2 \succ O_5$; $O_2 \succ O_6$;

3° $O_4 \succ O_2$; $O_4 \succ O_3$; $O_4 \succ O_5$; (69)

4° $O_5 \succ O_3$;

5° $O_6 \succ O_3$; $O_6 \succ O_4$; $O_6 \succ O_5$.

Z przedstawionych rozważań wynika, że w medianie nie mogą wystąpić pary obiektów zajmujących sąsiednie pozycje w uporządkowaniu, spełniające następujące relacje (otrzymane poprzez odwrócenie relacji (69)).

1° $O_2 \succ O_1$; $O_2 \succ O_4$;

2° $O_3 \succ O_1$; $O_3 \succ O_2$; $O_3 \succ O_4$; $O_3 \succ O_6$;

3° $O_4 \succ O_1$; $O_4 \succ O_6$; (70)

4° $O_5 \succ O_1$; $O_5 \succ O_2$; $O_5 \succ O_4$; $O_5 \succ O_6$;

5° $O_6 \succ O_1$; $O_6 \succ O_2$.

Ze względu na fakt, że nie uwzględniamy obiektów równoważnych, liczba uporządkowań, które mogą stanowić medianę wunosi 6!=720. W wyniku eliminacji uporządkowań spełniających warunki (70) z 720 uporządkowań zostały tylko 3.

Są one, jak następuje

1° $O_1, O_4, O_2, O_6, O_5, O_3$

2° $O_1, O_2, O_6, O_4, O_5, O_3$ (71)

3° $O_1, O_6, O_4, O_2, O_5, O_3$

Aby sprawdzić, które z tych uporządkowań jest medianą, należy wyznaczyć macierz strat.

Z wzoru (20) wynika, że

$r_{ij} = K - (l_{ij} - l_{ji}) == K - \Delta l_{ij}$,

gdzie K – liczba ekspertów,

l_{ij} – liczba ekspertów, których zdaniem obiekt $O_i \succ O_j$,

l_{ji} – liczba ekspertów mających przeciwną opinię.

Wartości macierzy $[\Delta l_{ij}]$ są jak następuje.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	-	3	3	1	1	3
O_2	-3	-	3	-3	7	1
O_3	-3	-3	-	-3	-1	-1
O_4	-1	3	3	-	3	-1
O_5	-1	-7	1	-3	-	-1
O_6	-3	-1	1	1	1	-

(72)

Macierz strat R=$[r_{ij}]$ ma więc postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	0	8	8	10	10	8
O_2	14	0	8	14	4	10
O_3	14	14	0	14	12	12
O_4	12	8	8	0	8	12
O_5	12	18	10	14	0	12
O_6	14	12	10	10	10	0

(73)

Macierze strat odpowiadające uporządkowaniom (71) mają więc postać

1°	O_1	O_4	O_2	O_6	O_5	O_3	
O_1	0	10	8	8	10	8	44
O_4		0	8	12	8	8	36
O_2			0	10	4	8	22
O_6				0	10	10	20
O_5					0	10	10
O_3							$\boxed{132}$

2°	O_1	O_2	O_6	O_4	O_5	O_3	
O_1	0	8	8	10	10	8	44
O_2		0	10	14	4	8	36
O_6			0	10	10	10	30
O_4				0	8	8	16
O_5					0	10	10
O_3						0	$\boxed{136}$

3°	O_1	O_6	O_4	O_2	O_5	O_3	
O_1	0	8	10	8	10	8	44
O_6		0	10	12	10	10	42
O_4			0	8	8	8	24
O_2				0	4	8	12
O_5					0	10	10
O_3							$\boxed{132}$

(74)

Z porównania macierzy strat wyznaczonych dla trzech uporządkowań (71) wynika, że medianę stanowią uporządkowania 1° i 3°.

Należy podkreślić, że ustalenia, które z uporządkowań (71) są medianą, można również dokonać stosując podejście podane przez Saariego [4]. W myśl tego podejścia medianę stanowi uporządkowanie, dla którego suma $|\Delta l_{ij}|$ wyznaczona dla tych par obiektów, które nie spełniają zasady większości, jest najmniejsza. Przy tym podejściu rozpatrywane są wszystkie pary obiektów, a nie tylko pary obiektów sąsiadujących ze sobą.

Mamy zatem

Zasada większości	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_5$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_5$	$O_2 \succ O_6$	$O_4 \succ O_2$	$O_4 \succ O_3$	$O_4 \succ O_5$	$O_5 \succ O_3$	$O_6 \succ O_3$	$O_6 \succ O_4$	$O_6 \succ O_5$
Uporz. 1°	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_5$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_5$	$O_2 \succ O_6$	$O_4 \succ O_2$	$O_4 \succ O_3$	$O_4 \succ O_5$	$O_3 \succ O_5$	$O_6 \succ O_3$	$O_4 \succ O_6$	$O_6 \succ O_5$
Uporz. 2°	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_5$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_5$	$O_2 \succ O_6$	$O_2 \succ O_4$	$O_4 \succ O_3$	$O_4 \succ O_5$	$O_3 \succ O_5$	$O_6 \succ O_3$	$O_6 \succ O_4$	$O_6 \succ O_5$
Uporz. 3°	$O_1 \succ O_2$	$O_1 \succ O_3$	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_5$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_5$	$O_6 \succ O_2$	$O_4 \succ O_2$	$O_4 \succ O_3$	$O_4 \succ O_5$	$O_3 \succ O_5$	$O_6 \succ O_3$	$O_6 \succ O_4$	$O_6 \succ O_5$

Pary obiektów, relacja między którymi jest inna niż wynikająca z zasady większości, są jak nastepuje:

uporządkowanie 1°: (O_4, O_6), $|\Delta l_{46}|=1$ $\sum|\Delta l_{ij}|=1$

uporządkowanie 2°: (O_2, O_4), $|\Delta l_{24}|=3$ $\sum|\Delta l_{ij}|=3$

uporządkowanie 1°: (O_2, O_6), $|\Delta l_{26}|=1$ $\sum|\Delta l_{ij}|=1$

Należy podkreślić, że w każdym uporządkowaniu występuje para obiektów (O_5, O_3), dla której zasada większości nie jest spełniona; została więc ona pominięta przy sumowaniu $|\Delta l_{ij}|$.

A zatem uporządkowania 1° i 3° stanowią medianę.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z macierzy rozkładu głosów ekspertów wynika, że obiekt O_1 jest zwycięzcą w sensie Condorceta. Z kolei, z zestawienia par obiektów spełniających zasadę większości (69) wynika, że występuje cykl $O_2 \succ O_6 \succ O_4 \succ O_2$.
Dwa uporządkowania wynikające z tego cyklu występują w medianie:
$O_4 \succ O_2 \succ O_6$ (1°) oraz $O_6 \succ O_4 \succ O_2$ (3°).
Uporządkowanie $O_2 \succ O_6 \succ O_4$ występuje w 2°.

Przykład 6.
Załóżmy, że jest dana macierz rozkładu głosów ekspertów wyznaczona na podstawie uporządkowań 6 obiektów, podanych przez 9 ekspertów.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	-	4	4	5	4	5
O_2	5	-	5	6	4	7
O_3	5	4	-	6	5	6
O_4	4	3	3	-	4	7
O_5	5	5	4	5	-	5
O_6	4	2	3	2	4	-

(75)

Liczba ekspertów wynosi 9, czyli zwykła większość $K_W = 5 > \frac{9}{2}$. W macierzy (75) zacieniowano pary obiektów spełniających zwykłą relację wiekszości. Są to:

$$
\begin{array}{llll}
1°: O_1 \succ O_4, & O_1 \succ O_6, & & \\
2°: O_2 \succ O_1, & O_2 \succ O_3, & O_2 \succ O_4, & O_2 \succ O_6, \\
3°: O_3 \succ O_1, & O_3 \succ O_4, & O_3 \succ O_5, & O_3 \succ O_6, \\
4°: O_4 \succ O_6, & & & \\
5°: O_5 \succ O_1, & O_5 \succ O_2, & O_5 \succ O_4, & O_5 \succ O_6.
\end{array}
\quad (76)
$$

Zgodnie z przedstawioną metodologią w medianie nie mogą wystąpić pary obiektów zajmujących sąsiednie pozycje w uporządkowaniu, spełniające następujące relacje (otrzymane poprzez odwrócenie relacji (76)).

1°: $O_1 \succ O_2$, $O_1 \succ O_3$, $O_1 \succ O_5$,

2°: $O_2 \succ O_5$,

$3°: O_3 \succ O_2,$ (77)

$4°: O_4 \succ O_2, \quad O_4 \succ O_3, \quad O_4 \succ O_5, \quad O_4 \succ O_1,$

$5°: O_5 \succ O_3.$

Ze względu na przyjęte założenie, że w medianie nie uwzględniamy występowania obiektów równoważnych, należy rozpatrzeć 6!=720 uporządkowań.

W wyniku eliminacji uporządkowań spełniających warunki (77), do rozpatrzenia zostają następujące uporządkowania

$1°: O_2, O_3, O_5, O_1, O_4, O_6,$

$2°: O_3, O_5, O_2, O_1, O_4, O_6,$ (78)

$3°: O_5, O_2, O_3, O_1, O_4, O_6.$

Do stwierdzenia, które z tych uporządkowań stanowi medianę, zastosujemy podejście Saariego.

Zasada większości	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_6$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$
Uporz. 1°	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_6$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$
Uporz. 2°	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_1$	$O_3 \succ O_2$	$O_2 \succ O_6$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$
Uporz. 3°	$O_1 \succ O_4$	$O_1 \succ O_6$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_3$	$O_2 \succ O_6$	$O_3 \succ O_1$	$O_3 \succ O_4$

Zasada większości	$O_3 \succ O_5$	$O_3 \succ O_6$	$O_4 \succ O_6$	$O_5 \succ O_1$	$O_5 \succ O_2$	$O_5 \succ O_4$	$O_5 \succ O_6$
Uporz. 1°	$O_3 \succ O_5$	$O_3 \succ O_6$	$O_4 \succ O_6$	$O_5 \succ O_1$	$O_2 \succ O_5$	$O_5 \succ O_4$	$O_5 \succ O_6$
Uporz. 2°	$O_3 \succ O_5$	$O_3 \succ O_6$	$O_4 \succ O_6$	$O_5 \succ O_1$	$O_5 \succ O_2$	$O_5 \succ O_4$	$O_5 \succ O_6$
Uporz. 3°	$O_5 \succ O_3$	$O_3 \succ O_6$	$O_4 \succ O_6$	$O_5 \succ O_1$	$O_5 \succ O_2$	$O_5 \succ O_4$	$O_5 \succ O_6$

Pary obiektów, dla których relacja między nimi jest inna niż wynikająca z zasady większości są, jak następuje.

Uporządkowanie 1°: (O_2, O_5) $\quad |\Delta l_{25}|=1.$

Uporządkowanie 2°: (O_2, O_3) $\quad |\Delta l_{23}|=1.$

Uporządkowanie 3°: (O_3, O_5) $\quad |\Delta l_{35}|=1.$

A zatem wszystkie uporządkowania (78) są medianą.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z macierzy rozkładu głosów ekspertów wynika, że istnieje cykl $O_3 \succ O_5 \succ O_2 \succ O_3$. Każda ze składowych tego cyklu występuje w uporządkowaniach stanowiących medianę.

Przykład 7.

Mamy dane uporządkowania 7 obiektów podane przez 9 ekspertów. Są one jak następuje.

$$
\begin{aligned}
&P^1 : O_7, O_1, O_3, O_4, O_2, O_5, O_6 \\
&P^2 : O_3, (O_4, O_5, O_7), (O_1, O_2), O_6 \\
&P^3 : O_4, (O_1, O_2, O_5), O_6, O_3, O_7 \\
&P^4 : O_3, O_4, (O_5, O_6, O_7), (O_1, O_2) \\
&P^5 : O_3, O_4, O_5, O_2, O_1, O_7, O_6 \\
&P^6 : O_2, O_3, (O_1, O_4, O_6), O_7, O_5 \\
&P^7 : O_3, O_4, O_7, O_6, O_2, O_5, O_1 \\
&P^8 : O_1, (O_3, O_4, O_5, O_7), (O_2, O_6) \\
&P^9 : O_2, O_3, O_4, O_6, O_1, O_5, O_7
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Liczba głosów wymagana przez zwykłą zasadę większości $K_W = 5 > \frac{9}{2}$.

Macierz rozkładu głosów w uwzględnieniem połówek głosów dla obiektów równoważnych ma postać.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7
O_1	-	2+1½	3	2+½	4+½	5+½	5
O_2	4+1½	-	3	2	4+1½	6+½	4
O_3	6	6	-	7+½	7+½	8	7+½
O_4	6+½	7	1+½	-	7+1	8+½	6+1
O_5	4+½	4+½	1+½	0+1	-	5+½	3+1½
O_6	3+½	2+½	1+½	0½	3	-	3+½
O_7	4	5	1+½	1+1	3+1½	5+½	-

(80)

W przypadku obiektów O_1 i O_2, które zostały uznane za równoważne przez 3 ekspertów, należy przyjąć, że liczba ekspertów, którzy uznali, że $O_1 \succ O_2$ jest o 1 większa od liczby ekspertów, którzy bezpośrednio podali taką opinię. Podobnie należy postąpić w przypadlu opinii

$O_2 \succ O_1$. Oznacza to, że (4+1) ekspertów podało ocenę $O_2 \succ O_1$ a (2+1) ekspertów podało ocenę $O_1 \succ O_2$.

Analogicznie należy postapić w przypadku par obiektów (O_4, O_5), (O_4, O_7), (O_5, O_7). Po wprowadzeniu tych modyfikacji macierz rozkładu głosów ekspertów przyjmie postać.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7
O_1	-	3+½	3	2+½	4+½	5+½	5
O_2	5+½	-	3	2	4+1½	6+½	4
O_3	6	6	-	7+½	7+½	8	7+½
O_4	6+½	7	1+½	-	8	8+½	7
O_5	4+½	4+½	1+½	0+1	-	5+½	4+½
O_6	3+½	2+½	1+½	0½	3	-	3+½
O_7	4	5	1+½	2	4+½	5+½	-

(81)

Ze skorygowanej macierzy rozkładu głosów (81) wynika, że zasadę większości spełniają następujące pary obiektów (zaznaczono je kolorem szarym; pary obiektów, które wprowadzono dodatkowo zakreskowano).

$$(O_1, O_6), (O_1, O_7), (O_2, O_1), (O_2, O_5), (O_3, O_1), (O_3, O_2), (O_3, O_4),$$
$$(O_3, O_5), (O_3, O_6), (O_3, O_7), (O_4, O_1), (O_4, O_2), (O_4, O_5), \tag{82}$$
$$(O_4, O_6), (O_4, O_7), (O_5, O_6), (O_5, O_7), (O_7, O_2), (O_7, O_5), (O_7, O_6).$$

Przyjmujemy założenie, że w medianie nie mogą występować obiekty równoważne. A zatem, zgodnie z przyjętą metodologią, ze wszystkich możliwych 7!=5040 uporządkowań, należy wyeliminować te, w których występują – bezpośrednio po sobie – pary obiektów, spełniające relacje przeciwne do tych, które wynikają z relacji większości (82). Są to:

1°: $O_1 \succ O_2$, $O_1 \succ O_3$, $O_1 \succ O_4$,

2°: $O_2 \succ O_3$, $O_2 \succ O_4$, $O_2 \succ O_7$,

3°: $O_4 \succ O_3$, (83)

4°: $O_5 \succ O_3$, $O_5 \succ O_4$,

5°: $O_6 \succ O_1$, $O_6 \succ O_2$, $O_6 \succ O_3$, $O_6 \succ O_4$, $O_6 \succ O_5$, $O_6 \succ O_7$,

6°: $O_7 \succ O_1$, $O_7 \succ O_3$, $O_7 \succ O_4$.

W wyniku eliminacji uporządkowań, w których występują relacje (83) pozostało do rozpatrzenia jedynie 12 następujących uporządkowań:

$1°: O_3, O_4, O_2, O_1, O_5, O_7, O_6$

$2°: O_3, O_4, O_2, O_5, O_1, O_7, O_6$

$3°: O_3, O_4, O_5, O_2, O_1, O_7, O_6$

$4°: O_3, O_4, O_1, O_5, O_7, O_2, O_6$

$5°: O_3, O_4, O_2, O_1, O_7, O_5, O_6$

$6°: O_3, O_4, O_5, O_1, O_7, O_2, O_6$ (84)

$7°: O_3, O_4, O_1, O_7, O_2, O_5, O_6$

$8°: O_3, O_4, O_1, O_7, O_5, O_2, O_6$

$9°: O_3, O_4, O_5, O_7, O_2, O_1, O_6$

$10°: O_3, O_4, O_7, O_2, O_1, O_5, O_6$

$11°: O_3, O_4, O_7, O_2, O_5, O_1, O_6$

$12°: O_3, O_4, O_7, O_5, O_2, O_1, O_6$

Aby – stosując podejście Saariego – wskazać, które z uporządkowań (84) stanowią medianę, należy określić te pary obiektów, które nie spełniają relacji większości (82). Nie trzeba jednak sprawdzać wszystkich 18 par obiektów (83). Wiadomo bowiem, że we wszystkich uporządkowaniach:

$O_3 \succ O_j$ (j = 1, 2, 4, 5, 6, 7), $O_4 \succ O_j$ (j = 1, 2, 5, 6, 7), $O_j \succ O_6$ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 7).

Sprawdzaniu muszą podlegać wyłącznie następujące pary obiektów:

$(O_1 \succ O_7)$, $(O_2 \succ O_1)$, $(O_7 \succ O_2)$. Odpowiednie zestawienie podano w tablicy (85).

Zasada większości	$O_1 \succ O_7$	$O_2 \succ O_1$	$O_7 \succ O_2$
1°	$O_1 \succ O_7$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_7$
2°	$O_1 \succ O_7$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_7$
3°	$O_1 \succ O_7$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_7$
4°	$O_1 \succ O_7$	$O_1 \succ O_2$	$O_7 \succ O_2$
5°	$O_1 \succ O_7$	$O_2 \succ O_1$	$O_2 \succ O_7$
6°	$O_1 \succ O_7$	$O_1 \succ O_2$	$O_7 \succ O_2$
7°	$O_1 \succ O_7$	$O_1 \succ O_2$	$O_7 \succ O_2$
8°	$O_1 \succ O_7$	$O_1 \succ O_2$	$O_7 \succ O_2$
9°	$O_7 \succ O_1$	$O_2 \succ O_1$	$O_7 \succ O_2$
10°	$O_7 \succ O_1$	$O_2 \succ O_1$	$O_7 \succ O_2$
11°	$O_7 \succ O_1$	$O_2 \succ O_1$	$O_7 \succ O_2$
12°	$O_7 \succ O_1$	$O_2 \succ O_1$	$O_7 \succ O_2$

(85)

Pary obiektów, dla których relacja w uporządkowaniu jest inna niż wynikająca z zasady większości, są jak następuje:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Uporządkowanie } 1^\circ & (O_2 \succ O_7) & |\Delta l_{27}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 2^\circ & (O_2 \succ O_7) & |\Delta l_{27}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 3^\circ & (O_2 \succ O_7) & |\Delta l_{27}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 4^\circ & (O_1 \succ O_2) & |\Delta l_{12}| = 2 \\
\text{Uporządkowanie } 5^\circ & (O_2 \succ O_7) & |\Delta l_{27}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 6^\circ & (O_1 \succ O_2) & |\Delta l_{12}| = 2 \\
\text{Uporządkowanie } 7^\circ & (O_1 \succ O_2) & |\Delta l_{12}| = 2 \\
\text{Uporządkowanie } 8^\circ & (O_1 \succ O_2) & |\Delta l_{12}| = 2 \\
\text{Uporządkowanie } 9^\circ & (O_7 \succ O_1) & |\Delta l_{71}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 10^\circ & (O_7 \succ O_1) & |\Delta l_{71}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 11^\circ & (O_7 \succ O_1) & |\Delta l_{71}| = 1 \\
\text{Uporządkowanie } 12^\circ & (O_7 \succ O_1) & |\Delta l_{71}| = 1
\end{array}
\tag{86}
$$

Zatem medianę stanowią uporządkowania, dla których $|\Delta l_{i,j}| = 1$, to znaczy 1°, 2°, 3°, 5°, 9°, 10°, 11° i 12°.

Warto zwrócić uwagę, że obiekt O_3 jest zwycięzcą w sensie Condorceta oraz odnotować istnienie cyklu $O_1 \succ O_7 \succ O_2 \succ O_1$.

Spośród 12 uporządkowań, które pozostały w wyniku eliminacji, 8 stanowi medianę a 4 nie spełniają warunku minimalizacji $|\Delta l_{i,j}|$. Poniżej zestawiono 4 uporządkowania nie będące medianą z odpowiadającymi im medianami.

$$
\begin{array}{llll}
\text{A.} & \text{Mediana } 10^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_7, O_2, O_1, O_5}, O_6 \\
 & \text{Uporz. } 4^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_1, O_5, O_7, O_2}, O_6 \\
\text{B.} & \text{Mediana } 11^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_7, O_2, O_5, O_1}, O_6 \\
 & \text{Uporz. } 6^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_5, O_1, O_7, O_2}, O_6 \\
\text{C.} & \text{Mediana } 2^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_2, O_5, O_1, O_7}, O_6 \\
 & \text{Uporz. } 7^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_1, O_7, O_2, O_5}, O_6 \\
\text{D.} & \text{Mediana } 3^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_5, O_2, O_1, O_7}, O_6 \\
 & \text{Uporz. } 8^\circ & O_3, O_4, \boxed{O_1, O_7, O_5, O_2}, O_6
\end{array}
\tag{87}
$$

W zestawach A, B, C i D powtarzają się pary obiektów ($O_1 \succ O_5$) i ($O_2 \succ O_5$) oraz ($O_1 \succ O_7$) i ($O_2 \succ O_7$).

Stosując wzór (20) praz posługując się zmodyfikowaną macierzą rozkładu głosów ekspertów (81) można wyznaczyć współczynniki macierzy strat odpowiadające tym parom obiektów.

$$
\begin{aligned}
&r_{15} = 9 - (l_{15} - l_{51}) = 9 - (4 - 4) = 9 = r_{51} \\
&r_{25} = 9 - (l_{25} - l_{52}) = 9 - (4 - 4) = 9 = r_{52} \\
&r_{57} = 9 - (l_{57} - l_{75}) = 9 - (4 - 4) = 9 = r_{75} \\
&r_{17} = 9 - (l_{17} - l_{71}) = 9 - (5 - 4) = 8 \\
&r_{71} = 9 - (l_{71} - l_{17}) = 9 - (4 - 5) = 10 \\
&r_{72} = 9 - (l_{72} - l_{27}) = 9 - (5 - 4) = 8 \\
&r_{27} = 9 - (l_{27} - l_{72}) = 9 - (4 - 5) = 10 \\
&r_{12} = 9 - (l_{12} - l_{21}) = 9 - (3 - 5) = 11 \\
&r_{21} = 9 - (l_{21} - l_{12}) = 9 - (5 - 3) = 7
\end{aligned}
\tag{88}
$$

W przypadku zestawów A i B różnica odległości między uporządkowaniami nie będącymi medianą a medianą wynosi

$(r_{17} - r_{71}) + (r_{12} - r_{21}) = (8 - 10) + (11 - 7) = 2$

Podobnie w przypadku zestawów C i D różnica ta wynosi (89)

$(r_{12} - r_{21}) + (r_{72} - r_{27}) = (11 - 7) + (8 - 10) = 2$

Korzystając z wzoru (39) wyznaczymy wartość odległości odpowiadającej medianie. Dla macierzy rozkładu głosów ekspertów (81) i uporządkowania $P: O_3, O_4, O_2, O_1, O_5, O_7, O_6$ macierz $[\Delta l_{ij}]$ ma postać

	O_3	O_4	O_2	O_1	O_5	O_7	O_6	$\sum \Delta l_{ij}$
O_3	-	6	3	3	6	6	7	31
O_4		-	5	4	7	5	8	29
O_2			-	2	0	-1	4	5
O_1				-	0	1	2	3
O_5					-	0	2	2
O_7						-	2	2
O_6							-	72

(90)

Stosując wzór (39) mamy więc

$$d(P,P^{(k)})=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 9-72=117 \tag{91}$$

Na podstawie wzoru (89) mamy, że odległość $d(P,P^{(k)})$ dla uporządkowań (87) nie będących medianą wynosi 117+2=119.

Przykład 8 [5].

W konkursie startowało 15 łyżwiarzy. Jury stanowiło 9 sędziów sportowych. W tablicy (92) podano kolejności łyżwiarzy ustalone przez każdego z jurorów. Warto podkreślić, że w dwóch uporządkowaniach P^1 i P^5 występują obiekty równoważne. Są to obiekty O_5 i O_6 w P^1 oraz O_1 i O_2 w P^5.

W tablicy (93) podano macierz rozkładu głosów ekspertów. Relacja zwykłej większości ma miejsce przy $l_{ij} > \frac{9}{2}$.

Z tablicy (93)wynika, że obiekt O_1 jest zwycięzcą w sensie Condorceta oraz, że występuje cykl $O_{12} \succ O_{11} \succ O_9 \succ O_{13} \succ O_{12}$.

Uwaga ta oznacza, że stosując relację większości nie można określić kolejności wszystkich łyżwiarzy.

Oceny sędziów

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}	O_{15}
P^1	1	3	2	6	4	4	8	7	11	12	10	13	9	15	14
P^2	1	3	2	6	4	5	8	7	10	9	12	11	13	15	14
P^3	1	2	4	5	6	8	3	7	12	13	11	14	9	10	15
P^4	1	2	3	6	4	7	9	5	12	11	10	8	14	13	15
P^5	1	1	3	4	7	5	9	6	10	8	13	11	15	12	14
P^6	3	1	2	7	6	4	5	9	11	8	10	13	14	12	15
P^7	1	2	3	5	8	4	6	7	12	13	14	11	9	10	15
P^8	4	3	1	2	5	8	6	7	11	9	10	14	12	15	13
P^9	4	3	1	2	5	8	6	7	11	12	15	10	9	13	14

(92)

Macierz rozkładu głosów sędziów

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}	O_{15}	
O_1	0	5+½	6	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	117.5
O_2	3+½	0	5	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	114.5
O_3	3	4	0	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	114
O_4	2	2	0	0	5	5	7	8	9	9	9	9	9	9	9	92
O_5	0	0	0	4	0	4+½	6	7	9	9	9	9	9	9	9	84.5
O_6	0	0	0	4	4+½	0	6	5	9	9	9	9	9	9	9	82.5
O_7	0	0	1	2	3	3	0	5	9	8	9	8	9	9	9	75
O_8	0	0	0	1	2	4	4	0	9	8	9	9	9	9	9	73
O_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	6	5	7	9	35
O_{10}	0	0	0	0	0	0	1	1	5	0	6	6	5	7	9	40
O_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	5	3	0	4	5	5	8	30
O_{12}	0	0	0	0	0	0	1	0	3	3	5	0	4	6	8	30
O_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	5	0	6	8	31
O_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	4	3	3	0	6	20
O_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	0	6

(93)

Literatura

[1] Kemeny J.G., Snell L.J., *Preference Ranking: An Axiomatic Approach.* In J.G. Kemeny and L.J. Snell, Mathematical Models in the Social Sciences, New York, Ginn, 1962.

[2] Klamler C., 2004, *The Dodgson ranking and its relation to Kemeny's method and Slater's rule*. Social Choice and Welfare **23**, 91–102.

[3] Litvak B.G., *Ekspertnaja informacija. Mietody połuczienija i analiza,* Radio i Swjaz, Moskwa,1982.

[4] Saari, D.G., Merlin V.R., 2000, *A geometric examination of Kemeny's rule*. Social Choice and Welfare **17**, 403–438.

[5] Truchon M., 2004, *Aggregation of Rankings in Figure Skating*, Cahier de recherch 04-14, CIPANO, CIRPEE and Dpartement d'conomique, Universit Laval, Quebec, Canada.