Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

Marek Libura

# Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej

Analiza wrażliwości rozwiązań

zadań optymalizacji dyskretnej

Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

# Seria: BADANIA SYSTEMOWE
# tom 17

Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1993

Marek Libura

# Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej

Zakład Wydawniczo-Poligraficzny SYNPRESS

Publikację opiniowali do druku:

prof. dr hab. Juliusz Lech Kulikowski
prof. dr hab. Eugeniusz Toczyłowski

Wykonano z oryginałów tekstowych
dostarczonych przez Instytut Badań Systemowych PAN



ISBN 83-85847-10-3
ISSN 0208-8029

# WSTĘP

*Analiza wrażliwości rozwiązań* zadań optymalizacji jest działem zajmującym się badaniem wpływu zaburzeń danych zadania na jego rozwiązania. Zwykle jest zaliczana do tak zwanej *analizy pooptymalizacyjnej* (patrz np. [23,49]), która rozpoczyna się po uzyskaniu rozwiązania optymalnego lub przybliżonego zadania.

Podstawowy problem rozważany w analizie wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej polega na wyznaczeniu dla danego rozwiązania optymalnego lub suboptymalnego takich zmian danych zadania, przy których rozwiązanie to pozostaje rozwiązaniem optymalnym (suboptymalnym). Takie podzbiory danych zadania nazywane są *obszarami niewrażliwości rozwiązań* (patrz [48,49]). W konkretnych przypadkach badane są rozmaite warianty tego podstawowego problemu, sprowadzające się najczęściej do zawężenia go w taki sposób, że analizowane są jedynie obszary zmienności wybranych parametrów zadania (na przykład pojedyńczych współczynników) nie naruszające optymalności danego rozwiązania.

Takie postawienie problemu wrażliwości rozwiązań w optymalizacji dyskretnej różni się od typowego postawienia problemu wrażliwości na przykład w programowaniu nieliniowym (patrz np. [18]). W tym ostatnim przypadku celem analizy wrażliwości jest zwykle wyznaczenie zależności zmian rozwiązań optymalnych i wartości optymalnej zadania od niewielkich zaburzeń danych.

Analiza wrażliwości rozwiązań ma ścisły związek z innym działem analizy pooptymalizacyjnej - tak zwaną *analizą parametryczną rozwią-*

*zań.* Dotyczy ona sytuacji, w której zakłada się, że dane zadania zależą od pewnego zbioru parametrów. Celem analizy parametrycznej jest rozbicie całego obszaru zmienności parametrów na maksymalne w sensie zawierania podobszary, w których rozwiązania optymalne zadania pozostają niezmienne, a następnie wyznaczenie rozwiązań optymalnych dla każdego z tych obszarów. Tak więc każdy z obszarów znajdowanych w analizie parametrycznej jest pewnym podzbiorem obszaru niewrażliwości dla odpowiadającego mu rozwiązania optymalnego. Pozwala to na wykorzystanie wyników analizy wrażliwości w analizie parametrycznej.

Potrzeba prowadzenia analizy wrażliwości rozwiązań w optymalizacji dyskretnej wynika z tych samych przesłanek, co w przypadku innych działów optymalizacji. Podstawowym powodem badania wrażliwości rozwiązania w przypadku praktycznego problemu jest to, że rozwiązanie to jest uzyskiwane przy niedokładnych danych zadania. Wyznaczenie obszaru niewrażliwości lub jego podobszarów pozwala się zorientować, na ile wiarygodne jest takie rozwiązanie. Pozwala to również na wskazanie, które z parametrów modelu są najistotniejsze i powinny być w związku z tym estymowane ze szczególną uwagą.

W sposób naturalny obszar niewrażliwości określa również zakres stosowalności danego rozwiązania, a co za tym idzie, potrzebę reoptymalizacji przy dokładnych wprawdzie, ale zmieniających się danych. W przypadku optymalizacji dyskretnej argument ten staje się szczególnie istotny, ze względu na wysoką zwykle złożoność obliczeniową tego typu zadań. Przy tym sytuacje, w których zachodzi potrzeba rozwiązania sekwencji problemów nieznacznie różniących się danymi, zachodzą bardzo często. Powodem ich wystąpienia może być naturalna zmienność parametrów zadania (na przykład cen, itp.). Inny powód wynika ze specyfiki metod optymalizacji, które używają danego zadania jako podproblemu i w kolejnych iteracjach wymagają rozwiązania go dla innych, często nieznacznie zmienionych, danych. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład przy rozwiązywaniu zadań dualnych (patrz np. [52]) oraz w metodzie podziału i oszacowań.

Prace dotyczące analizy pooptymalizacyjnej w optymalizacji dyskretnej zaczęły się pojawiać w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych. Od tego czasu liczba publikacji dotyczących tej tematyki znacznie przekroczyła sto. Jednakże dziedzina ta nadal nie jest w pełni ukształtowana. Większość publikacji nadal koncentruje się na zagadnieniach dotyczących konkretnych szczególnych problemów.

Praca niniejsza jest pierwszą tak obszerną pozycją monograficzną dotyczącą ilościowych problemów analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej. Zagadnienia jakościowego badania wrażliwości (przez co rozumie się na przykład analizę takich właściwości rozwiązań zadań z zaburzonymi parametrami, jak ciągłość multifunkcji opisujących zbiory rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych) są tu całkowicie pominięte. Ta tematyka wykazuje zresztą znacznie więcej zbieżności z analogicznymi zagadnieniami w optymalizacji ciągłej i doczekała się opracowań monograficznych [4,66].

Zasadniczym zagadnieniem omawianym w pracy jest problem wyznaczania obszarów niewrażliwości dla rozwiązań optymalnych zadań dyskretnych, który jest traktowany jako centralny problem w analizie wrażliwości dla tych zadań. Inne zagadnienia są poruszane w bardzo niewielkim stopniu. Niemal całkowicie są pomijane wyniki dotyczące ilościowej analizy parametrycznej. Należy jednak sądzić, że ze względu na pilną potrzebę stworzenia skutecznych metod dla zagadnień parametrycznych, dziedzina ta stanie się w najbliższym czasie jednym z najbardziej dynamicznie rozwijających się działów optymalizacji dyskretnej.

Układ pracy jest następujący. Praca jest podzielona na trzy rozdziały.

Rozdział 1 przedstawia sformułowania podstawowych problemów pojawiających się w analizie pooptymalizacyjnej dla zadań dyskretnych.

Omawiane są również problemy, które tylko w niewielkim stopniu są rozwijane w dalszych częściach pracy, ale zostały tu zamieszczone dla pełności prezentacji. Rozdział rozpoczyna się od sformułowania klasy zadań dyskretnych, których dotyczą dalsze rozważania, oraz podania przykładów takich zadań.

Rozdział 2 jest opisem technik , które mogą być używane do znajdowania obszarów lub podobszarów niewrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej. Prezentacja ta jest podporządkowana powiązaniom między analizą wrażliwości a możliwością sformułowania warunków optymalności rozwiązania. Obszernie są przedstawiane związki analizy wrażliwości z dualnością dla zadań dyskretnych.

Rozdział 3 jest najobszerniejszą częścią pracy i zawiera wyniki analizy wrażliwości dla kilku wybranych zadań optymalizacji dyskretnej. W trzech kolejnych podrozdziałach przedstawione są rezultaty uzyskane dla zadania znajdowania w matroidzie bazy o minimalnej wadze, binarnego zadania załadunku oraz zadań wyznaczania w grafie najkrótszej drogi i obwodu Hamiltona. Starano się, aby podrozdziały te mogły być czytane w dużym stopniu niezależnie od siebie, co powodowało konieczność przypominania i powtarzania niektórych oznaczeń. Jednakże występują ścisłe związki między tymi częściami pracy, na przykład w rozdziale o drogach i obwodach Hamiltoma w istotny sposób korzysta się z rezultatów uzyskanych dla baz matroidów.

Pracę kończy spis literatury, zawierający wybór ważniejszych pozycji dotyczących analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej.

ROZDZIAŁ 1

# PODSTAWOWE PROBLEMY W ANALIZIE WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ DLA ZADAŃ OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

## 1.1 Zadania optymalizacji dyskretnej

Dany jest zbiór skończony $S = \{e_1,\dots,e_n\}$ oraz rodzina jego podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^S$. Elementy rodziny $\mathcal{F}$ będziemy nazywać *rozwiązaniami dopuszczalnymi* zadania. Załóżmy, że dla każdego $e \in S$ określona jest liczba rzeczywista $c(e)$ nazywana *wagą* elementu $e$. Jakość rozwiązania dopuszczalnego $X \in \mathcal{F}$ jest oceniana przez *wagę* $C(X)$ *rozwiązania*, definiowaną jako suma wag elementów należących do X, tzn.:

$$C(X) = \sum_{e \in X} c(e).$$

W bardziej ogólnym przypadku mogą być rozważane inne funkcje rzeczywiste $w : 2^S \to \mathbb{R}$ określające wagi elementów zbioru $\mathcal{F}$. Jednakże omawiany w pracy przypadek liniowy jest praktycznie najważniejszy. Ponadto, znaczna część zadań nieliniowych może być formalnie sprowadzona do omawianego tu zadania (patrz np. [47]).

*Zadanie optymalizacji dyskretnej* jest formułowane następująco:

Należy wyznaczyć rozwiązanie dopuszczalne $X^o$, którego waga jest nie większa niż waga dowolnego innego rozwiązania dopuszczalnego.

Będziemy stosować standardowy zapis zadania (P) :

$$(P) \qquad v(P) = \min_{X \in \mathcal{F}} C(X).$$

Wartość $v(P)$ nazywamy *wartością optymalną zadania* (P), a rozwiązanie $X^o$, dla którego $C(X^o) = v(P)$, *rozwiązaniem optymalnym* tego zadania. Zbiór rozwiązań optymalnych zadania (P) będziemy oznaczać symbolem $\Omega(P)$. Jeśli $\mathcal{F} = \emptyset$, to wówczas zadanie (P) jest sprzeczne i przyjmujemy, że jego wartość optymalna jest równa $\infty$.

W niektórych przypadkach bardziej naturalne jest takie sformułowanie zadania (P), w którym poszukuje się elementu rodziny $\mathcal{F}$ mającego maksymalną (a nie minimalną) wagę, a zatem zadanie ma wówczas postać następującą :

$$\max_{X \in \mathcal{F}} C(X).$$

Zadanie powyższe daje się wprawdzie sprowadzić do zadania (P) przez prostą zamianę znaków wag elementów, ale w dalszej części, zależnie od kontekstu, będziemy używać obu sformułowań.

W postaci zadania (P) można zapisać znaczną część rozpatrywanych zadań optymalizacji dyskretnej. Niżej podamy kilka wybranych przykładów takich zadań.

$1^o$ Zadania ekstremalne na grafach

Dany jest graf nieskierowany $G = (V,E)$, gdzie $V$ jest zbiorem wierzchołków, a $E$ zbiorem krawędzi (patrz na przykład [14,41,79]). Każdej krawędzi $e$ grafu przyporządkowana jest waga $c(e)$, która może być interpretowana jako jej długość. Definiując odpowiednio rodzinę podzbiorów $\mathcal{F}$ otrzymujemy różne klasyczne problemy optymalizacyjne na grafach. Na przykład rodzina $\mathcal{F}$ może być wybrana jako zbiór dróg w G łączących ustalone wierzchołki s oraz t, zbiór dróg Hamiltona, zbiór obwodów Hamiltona, zbiór drzew rozpinających (dendrytów), zbiór przekrojów grafu, itp. Otrzymujemy wówczas znane zadania (patrz np. [12,79]) znajdowania w grafie G najkrótszej drogi łączącej wierzchołek s z wierzchołkiem t, zadanie wyznaczania w G najkrótszej drogi Hamiltona, zadanie komiwojażera, zadanie wyznaczania najkrótszego drzewa rozpinającego w grafie, zadanie znajdowania minimalnego przekroju grafu. Niektóre z tych zadań będą omawiane dokładniej w dalszych rozdziałach. W podobny sposób mogą być definiowane inne zadania optymalizacyjne związane z grafami, takie jak problem chińskiego listonosza, zadanie skojarzenia, itp.

$2^{\circ}$ <u>Problemy optymalizacji na matroidach</u>

Najbardziej znanym problemem kombinatorycznym tego typu jest zagadnienie wyznaczania bazy matroidu mającej minimalną wagę (patrz np. [43,58,60]). W tym przypadku rodzina $\mathcal{F}$ jest zbiorem baz matroidu zdefiniowanego na zbiorze S, a funkcja C określa wagi elementów matroidu. Liczne problemy z zakresu badań operacyjnych mogą być formułowane jako zagadnienie wyznaczania bazy o minimalnej wadze w odpowiednio zdefiniowanym matroidzie (patrz np. [60]). Problem ten jest szczegółowo omawiany w Rozdziale 2.

Obszerną klasę zadań optymalizacji dyskretnej otrzymujemy w przypadku, gdy rodzina $\mathcal{F}$ jest zdefiniowana jako przecięcie rodzin zbiorów niezależnych kilku matroidów ([43]).

$3^{\circ}$ <u>Zadania optymalizacyjne na zbiorach permutacji</u>

Jest to obszerna klasa zadań kombinatorycznych, w których zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest podzbiorem zbioru permutacji pewnego zbioru skończonego. Należą tu liczne warianty zadania komiwojażera

[42], zadania przydziału [21] oraz bardzo liczne zadania szeregowania prac (patrz np. [8]).

We wszystkich powyższych przykładach zbiór $\mathcal{F}$ w pełni definiuje strukturę zadania, natomiast dane, których zmienność możemy badać, mieszczą się w funkcji celu. Zbiór $\mathcal{F}$ jest przy tym zwykle zadawany opisowo.

Ważną klasę zadań optymalizacji dyskretnej stanowią problemy, w których rodzina $\mathcal{F}$ jest określana poprzez wprowadzenie *zmiennych* zadania i podanie układu *ograniczeń*. Mamy wówczas do czynienia z *zadaniami programowania matematycznego dyskretnego.* Typowym przykładem zadań tego typu jest omawiane niżej zadanie programowania binarnego liniowego.

$4^{o}$ <u>Zadanie programowania binarnego liniowego</u>

Zadanie to jest formułowane następująco :

Dane są macierz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i wektory $b \in \mathbb{R}^{m}$ oraz $c \in \mathbb{R}^{n}$. Wektor $x \in \mathbb{R}^{n}$ nazywamy *wektorem dopuszczalnym*, jeśli $x \in \{0,1\}^{n}$ i spełnia ograniczenia $Ax \geq b$. Zadanie polega na znalezieniu takiego wektora dopuszczalnego $x^{o}$, dla którego wartość iloczynu skalarnego z wektorem $c$ jest najmniejsza, to znaczy

$$c^{T}x^{o} = \min c^{T}x \qquad Ax \geq b, \quad x \in \{0,1\}^{n}. \tag{1.1}$$

Równoważne sformułowanie powyższego zadania w postaci problemu (P) otrzymujemy, biorąc $S = \{e_1,\dots,e_n\}$, $c(e_i) = c_i$, $i = 1,\dots,n$, oraz definiując zbiór $\mathcal{F}$ jako rodzinę takich podzbiorów $X \subseteq S$, których wektory charakterystyczne $x = \xi(X)$ spełniają warunki $Ax \geq b$.

W powyższym przykładzie dane zadania, które możemy zaburzać, występują zarówno w funkcji celu, jak i w warunkach określających rodzinę $\mathcal{F}$. Dla tego typu zadań przyjmiemy, że $\mathcal{F}$ jest zależna od pewnego parametru $u$ należącego do określonego zbioru parametrów $\mathcal{U}$, tzn. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u)$. W powyższym przykładzie mamy $u = (A,b) \in \mathcal{U}$, przy czym $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m}$.

## 1.2 Obszary niewrażliwości rozwiązań

Wypiszmy raz jeszcze problem (P), eksponując zależność od danych zadania:

$$(\mathrm{P}) \qquad \min_{X\in\mathcal{F}(u)\subseteq 2^{S}} \sum_{e\in X} c(e).$$

*Dane* zadania (P) mogą być teraz określone jako para $p = (c,u)$, gdzie $c = (c(e_1),\dots,c(e_n))^T$. *Zbior możliwych danych zadania*, oznaczany dalej przez $\mathcal{P}$, jest podzbiorem zbioru $\mathcal{C} \times \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{C}$ jest zbiorem możliwych wektorów współczynników funkcji celu, a $\mathcal{U}$ zbiorem możliwych parametrów $u$.

Jeśli w dalszych rozważaniach będzie potrzebne zaznaczenie zależności od danych zadania, wówczas zbiór rozwiązań optymalnych zadania (P) z danymi p będziemy oznaczać symbolem $\Omega(P,p)$, natomiast wartość optymalną tego zadania symbolem $v(P,p)$.

Załóżmy teraz, że znamy rozwiązanie optymalne $X^o$ zadania (P) dla pewnego $p^o = (c^o,u^o) \in \mathcal{P}$.

**Definicja 1.1**

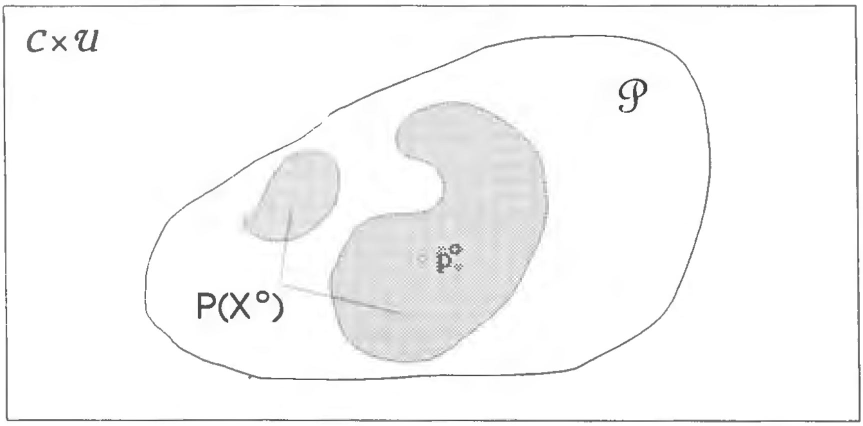
*Obszarem niewrażliwości rozwiązania* $X^o$ zadania (P) nazywamy maksymalny w sensie zawierania podzbiór zbioru $\mathcal{P}$ danych zadania, dla których $X^o$ pozostaje rozwiązaniem optymalnym.

Obszar niewrażliwości rozwiązania $X^o$ będziemy oznaczać symbolem $P(X^o)$. Stosując wprowadzone wyżej oznaczenia mamy

$$P(X^o) = \{p \in \mathcal{P}: X^o \in \Omega(P,p)\}.$$

W ogólnym przypadku obszar niewrażliwości może być obszarem niewypukłym i niespójnym w przestrzeni parametrów.

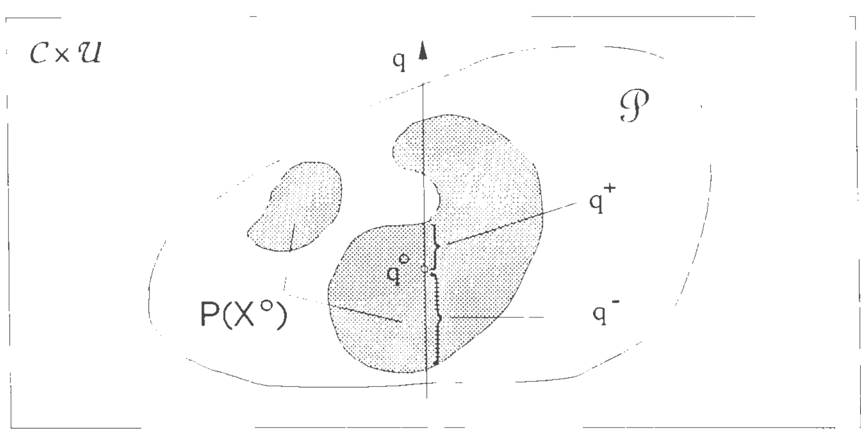
Rysunek 1. ilustruje przykładowy obszar niewrażliwości rozwiązania optymalnego uzyskanego dla parametru p.




Rys.1. Obszar niewrażliwości rozwiązania $X^o$.

Wyznaczenie całego obszaru niewrażliwości dla danego rozwiązania jest zwykle zadaniem bardzo trudnym i poza nielicznymi szczególnymi przypadkami wydaje się niewykonalne. Ponadto, można się spodziewać, że pełny opis zbioru $P(X^o)$ okazałby się na tyle skomplikowany, że praktyczne jego wykorzystanie byłoby wątpliwe. Dlatego większość prac dotyczących analizy wrażliwości w programowaniu dyskretnym koncentruje się na znajdowaniu podzbiorów zbioru $P(X^o)$, uzyskiwanych przy założeniu, że część parametrów wchodzących w dane zadania jest ustalona (co jest równoważne odpowiedniemu zdefiniowaniu zbioru $\mathcal{P}$ ).

W skrajnym przypadku może nas interesować podzbiór obszaru niewrażliwości otrzymywany przy założeniu, że wszystkie dane zadania z wyjątkiem jednego skalarnego parametru q są ustalone i interesują nas maksymalny przyrost $q^+$ oraz maksymalne zmniejszenie $q^-$ tego parametru (w stosunku do wartości $q^o$, przy której uzyskano rozwiązanie optymalne $X^o$), takie, że $X^o$ pozostaje rozwiązaniem optymalnym zadania, jeśli parametr q należy do przedziału $[q^o-q^-, q^o+q^+]$. Takie wartości $q^+$, $q^-$ nazywamy odpowiednio *tolerancją górną* i *tolerancją dolną* parametru q względem rozwiązania $X^o$. Rysunek 2 ilustruje wprowadzone pojęcia.



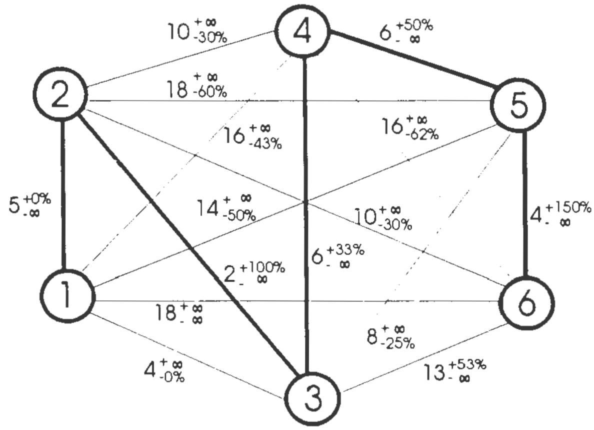

Rys.2. Tolerancje parametru q względem rozwiązania $X^o$.

Tolerancje pojedyńczych parametrów są najczęściej badanymi obiektami w analizie wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej (patrz np. [24,54,57,76,82]). Pozwalają one na uzyskanie zakresu dopuszczalnej zmienności pojedyńczych parametrów, przy którym nie jest potrzebna reoptymalizacja. Ponadto dostarczają one pewnych ogólnych informacji o zagadnieniu optymalizacyjnym, którego zapisem formalnym jest dane zadanie. Jeśli na przykład $q^+$, $q^-$ są małe w stosunku do $q^o$, to może to być wskazówką, że parametr $q$ w modelu powinien być estymowany ze szczególną uwagą.

Często jednak w optymalizacji dyskretnej nawet wyznaczenie tolerancji pojedyńczych parametrów okazuje się zbyt trudne i musimy się zadowolić znajdowaniem ich dolnych oszacowań, co odpowiada wyznaczeniu pewnego odcinka należącego do przedziału $[q^o - q^-, q^o + q^+]$. Powstaje oczywiście pytanie, czy tak ograniczona analiza wrażliwości rozwiązań jest nadal użyteczna w praktyce. W Rozdziale 3 zostaną podane przykłady zarówno takich sytuacji, gdy możliwe jest przeprowadzenie pełnej analizy wrażliwości dla danego rozwiązania $X^o$, to znaczy wyznaczenie całego zbioru $P(X^o)$, jak i przykłady sytuacji, kiedy potrafimy uzyskać zaledwie oszacowania tolerancji pojedyńczych parametrów. Poniższy przykład pokazuje, że nawet w tym ostatnim przypadku uzyskiwane informacje mogą być pożyteczne.

**Przykład 1.1**

Na Rysunku 3 przedstawiony jest graf nieskierowany ważony, dla którego rozwiązane zostało zadanie wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona (to znaczy drogi przechodzącej dokładnie jeden raz przez wszystkie wierzchołki grafu - patrz np. [43]) łączącej wierzchołki 1 oraz 6 . Droga optymalna jest zaznaczona linią pogrubioną. Przy każdej krawędzi podana jest jej długość, przy której uzyskano zaznaczoną drogę Hamiltona, a także (ze znakiem +) dopuszczalny procentowy przyrost oraz (ze znakiem -) dopuszczalne procentowe zmniejszenie tej długości (przy ustalonych długościach pozostałych krawędzi) nie naruszające optymalności tej drogi. Metoda wyznaczania takich dopuszczalnych zmian długości krawędzi grafu w przypadku zadania znajdowania najkrótszej drogi Hamiltona jest podana w Rozdziale 3.




Rys.3 Przykład dopuszczalnych zmian długości krawędzi

□

Omówione wyżej zagadnienia wiążą się z opisem (kompletnym lub częściowym) obszaru niewrażliwości danego rozwiązania optymalnego. Odrębnym zagadnieniem w analizie wrażliwości jest problem polegający na stwierdzeniu czy dane $p'$ zadania, gdzie $p' \neq p^o$, należą do obszaru niewrażliwości $P(X^o)$ znanego rozwiązania optymalnego $X^o$. Problem ten wiąże się z tak zwanym zagadnieniem *reoptymalizacji*, które stawiane jest następująco :

Mając dane rozwiązanie $X^o$ zadania (P) z danymi $p^o$ należy znaleźć rozwiązanie tego zadania z danymi $p'$.

W optymalizacji dyskretnej problem reoptymalizacji jest zwykle kosztowny obliczeniowo i często sprowadza się do ponownego rozwiązania zadania (P) z danymi $p'$. W różnych szczególnych przypadkach podejmowane są próby takich modyfikacji algorytmów rozwiązywania zadania (P), które pozwalają na tańszą reoptymalizację (patrz np. [11,64,67,68,87]).

Pierwszym krokiem w procedurze reoptymalizacji może być stwierdzenie, czy zmiana danych z $p^o$ na $p'$ narusza optymalność rozwiązania $X^o$. Takie postępowanie jest uzasadnione zwłaszcza wtedy, gdy zmiana danych jest niewielka. Niektóre z omawianych w Rozdziale 2 metod badania obszarów niewrażliwości dobrze nadają się do orzekania czy $p' \in P(X^o)$, chociaż nie dają bezpośrednio opisu obszaru niewrażliwości. Mogą one być jednak użyte (w połączeniu ze znajomością właściwości obszarów niewrażliwości dla konkretnego problemu) do znajdowania podzbiorów takich obszarów. Jeśli na przykład wiadomo, że w danym przypadku obszar niewrażliwości jest wypukły, a równocześnie można stwierdzić przy pomocy takiej metody, że dla $p^i \in \mathcal{P}$, $i \in I$, zachodzi warunek $p^i \in \mathcal{P}$, to tym samym zostaje wyznaczony podzbiór $P'$ obszaru niewrażliwości, gdzie $P' = \mathrm{conv}(p^i,\ i \in I)$.

Oprócz omawianych wyżej obszarów niewrażliwości oraz tolerancji pojedyńczych parametrów, możliwe jest badanie innych obiektów charakteryzujących wrażliwość rozwiązania optymalnego na zmiany danych. Jednym z takich wskaźników jest *promień niewrażliwości rozwiązania* $X^o$, który jest definiowany następująco:

Załóżmy, że w przestrzeni danych zadania $\mathcal{C} \times \mathcal{U}$ określona jest metryka $\delta$ i niech $K_r(p)$ będzie kulą otwartą o środku w punkcie $p$ i promieniu $r$.

**Definicja 1.2**

Promieniem niewrażliwości rozwiązania $X^o$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\rho(X^o)$, gdzie

$$\rho(X^o) = \sup\{r : K_r(p) \cap \mathcal{P} \subseteq P(X^o)\}.$$

Znajomość promienia niewrażliwości jest bardzo wygodna w praktycznych zastosowaniach. Jeśli na przykład w zadaniu (P) parametr u jest ustalony i przyjętą w $\mathcal{P}$ metryką jest metryka Czebyszewa, tzn. $\delta(c',c'') = \max\{|c_i'-c_i''|,\ i = 1,\dots,n\}$, $c',c'' \in \mathbb{R}^n$, a ponadto promień niewrażliwości rozwiązania $X^o$ jest równy $\rho$, to wiadomo, że każdy ze współczynników $c_i$, $i =1,\dots,n$, funkcji celu zadania można dowolnie i niezależnie od pozostałych zaburzać w obszarze $(c_i-\rho, c_i+\rho) \cap \mathcal{P}$ nie naruszając optymalności rozwiązania $X^o$. Niestety, często się zdarza, że $\rho(X^o) = 0$. Zauważmy, że tak jest zawsze, gdy istnieje inne rozwiązanie optymalne $X'$ zadania (P) różne od $X^o$. W mniejszym stopniu problem ten występuje, jeśli zamiast obszarów niewrażliwości rozwiązań są rozważane opisane niżej obszary $\varepsilon$-niewrażliwosci.

Niech dla ustalonego $\varepsilon \geq 0$, $\Omega_\varepsilon(P,p)$ oznacza zbiór rozwiązań $\varepsilon$-optymalnych zadania (P) z danymi $p =(c,u)$, to znaczy

$$\Omega_\varepsilon(P,p) = \{X \in \mathcal{F} : C(X) \leq v(P,p) + \varepsilon \}.$$

**Definicja 1.3**

Zbiór $P_\varepsilon(X^o)$, gdzie $P_\varepsilon(X^o) = \{p \in \mathcal{P} : X^o \in \Omega_\varepsilon(P,p)\}$, nazywamy *obszarem $\varepsilon$-niewrażliwości rozwiązania* $X^o$.

Jest oczywiste, że $P(X^o) \subseteq P_\varepsilon(X^o)$ dla dowolnego $\varepsilon \geq 0$. Część metod używanych do znajdowania obszarów niewrażliwości można w naturalny sposób przystosować do wyznaczania obszarów $\varepsilon$-niewrażliwości. W naturalny sposób mogą być również przedefiniowane takie pojęcia jak tolerancje elementów i promień niewrażliwości.

We wszystkich dotychczasowych rozważaniach punktem odniesienia było jedno znane rozwiązanie optymalne zadania. Inne podejście do zagadnień wrażliwości jest prezentowane w ciągu prac [39, 45, 46, 78] zapoczątkowanych publikacją [44]. Punktem wyjścia jest tam cały zbiór rozwiązań optymalnych zadania (P). Narzuca to inne rozumienie obszarów niewrażliwości i zamiast pojęcia obszaru niewrażliwości rozwiązania optymalnego $X^o$ wprowadzane jest pojęcie *obszaru niewrażliwości względem zbioru rozwiązań optymalnych.*

**Definicja 1.4**

Obszarem niewrażliwości względem zbioru rozwiązań optymalnych $\Omega(P,p)$ nazywamy taki maksymalny podzbiór $P_\Omega(p) \subseteq \mathcal{P}$ danych zadania, dla którego zachodzi warunek

$$p' \in P_\Omega(p) \Rightarrow \Omega(P,p') \subseteq \Omega(P,p).$$

Zauważmy, że jeśli $\Omega(P,p) = \{X^o\}$, co oznacza, że $|\Omega(P,p)| = 1$, to wówczas tak zdefiniowany obszar niewrażliwości pokrywa się ze zbiorem $P(X^o)$.

Użyteczność znajomości takiego obiektu, jak obszar niewrażliwości względem całego zbioru rozwiązań optymalnych polega na tym, że z faktu, iż $p' \in P_\Omega(p)$, wynika, że rozwiązaniem optymalnym zadania (P) z danymi $p'$ musi być jedno z rozwiązań ze zbioru $\Omega(P,p)$. Podstawowy problem, na jaki napotyka omawiane podejście, sprowadza się do tego, że aby z takiej informacji praktycznie skorzystać, trzeba znać wszystkie elementy zbioru $\Omega(P,p)$. Z taką sytuacją mamy do czynienia bardzo rzadko. Co więcej, w praktycznych zadaniach zbiór $\Omega(P,p)$ może być bardzo liczny.

Większość wspomnianych wyżej prac koncentruje się nie na badaniu samego obszaru $P_\Omega(p)$, lecz związanego z nim obiektu, będącego analogiem wprowadzonego wyżej promienia niewrażliwości rozwiązania i nazywanego *promieniem stabilności danych* p.

Przyjmijmy, jak poprzednio, że przy wprowadzonej w $\mathcal{C} \times \mathcal{U}$ metryce, $K_r(p)$ oznacza kulę otwartą o środku w punkcie p i promieniu r.

**Definicja 1.5**

Promieniem stabilności danych p dla zadania (P) nazywamy liczbę rzeczywistą $\rho_p$, gdzie

$$\rho_p = \sup\{r : K_r(p) \cap \mathcal{P} \subseteq P_\Omega(p)\}.$$

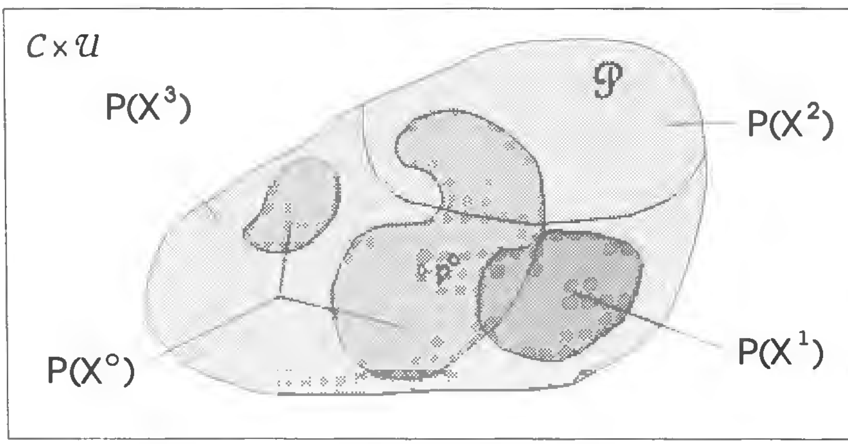
Do zagadnień związanych z wyznaczaniem tak zdefiniowanego promienia stabilności danych powrócimy jeszcze w Rozdziale 2.

## 1.3. Analiza parametryczna rozwiązań

Zagadnienie wyznaczania obszarów niewrażliwości rozwiązań jest charakterystycznym i najbardziej podstawowym problemem w analizie wrażliwości dla zadań programowania dyskretnego. Problem ten ma bardzo ścisły związek z drugim działem analizy pooptymalizacyjnej - tak zwaną *analizą parametryczną rozwiązań*. Zasadnicze zagadnienie stawiane w analizie parametrycznej jest formułowane następująco:

Mając zbiór $\mathcal{P}$ dopuszczalnych danych zadania, należy wyznaczyć *pokrycie* tego zbioru obszarami niewrażliwości rozwiązań, to znaczy należy znaleźć zbiory $P^1,\ldots,P^k \subseteq \mathcal{P}$ takie, że $\mathcal{P} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} P^i$ oraz każdy zbiór $P^i$, $i = 1,\ldots,k$, jest obszarem niewrażliwości pewnego rozwiązania $X^i \in \mathcal{F}$. (Zwykle żąda się także wyznaczenia wszystkich rozwiązań $X^i$ dla $i = 1,\ldots,k$).

Rysunek 4 ilustruje przykładowe pokrycie zbioru $\mathcal{P}$ obszarami niewrażliwości rozwiązań w analizie parametrycznej.




Rys.4 Pokrycie zbioru $\mathcal{P}$ obszarami niewrażliwości rozwiązań.

Zauważmy, że ze względu na to, iż obszary niewrażliwości poszczególnych rozwiązań mogą na siebie zachodzić, zdarza się, że dla ustalonego punktu $p$ z obszaru $\mathcal{P}$ mamy spełniony warunek $p \in P^i$ dla więcej niż jednego indeksu $i$. Taka sytuacja może nie być wygodna w praktyce, jeśli chcemy, aby rozwiązanie zadania parametrycznego dawało prostą regułę decyzyjną, przyporządkowującą danemu punktowi $p$ z obszaru danych $\mathcal{P}$ dokładnie jedno rozwiązanie optymalne $X(p)$. Wówczas zadanie parametryczne stawia się w nieco innej postaci, żądając wyznaczenia *rozbicia* zbioru $\mathcal{P}$. Oznacza to, że należy znaleźć zbiory $\underline{P}^1,\dots,\underline{P}^r \subseteq \mathcal{P}$ takie, że $\bigcup_{i=1}^{r} \underline{P}^i = \mathcal{P}$, $\underline{P}^i \cap \underline{P}^j = \emptyset$ dla $i \neq j$, a ponadto, każdy ze zbiorów $\underline{P}^i$, $i = 1,\dots,r$, jest podzbiorem obszaru niewrażliwości pewnego rozwiązania $X^i$. Przy takim postawieniu zadania parametrycznego, wspomniana wyżej niejednoznaczność w regule decyzyjnej dotyczy jedynie brzegów obszarów $\underline{P}^i$.

Potrzeba prowadzenia analizy parametrycznej wynika z tych samych przesłanek, co potrzeba prowadzenia analizy wrażliwości rozwiązań. Te oba działy analizy pooptymalizacyjnej są zresztą ściśle ze sobą powiązane i umiejętność prowadzenia analizy wrażliwości może być wykorzystana w analizie parametrycznej (patrz na przykład [53]).

Oprócz naturalnych źródeł zadań parametrycznych interesujące są również te zadania, które wynikają z formalnych transformacji zadań dyskretnych do problemów parametrycznych. Przykładem takiej transformacji jest zastąpienie zadania wyznaczania zbioru rozwiązań efektywnych problemu z dwoma funkcjami celu zadaniem parametrycznym z jedną funkcją celu (patrz np. [59]).

Ogólny problem parametryczny w optymalizacji dyskretnej jest również bardzo trudny i może być w pełni rozwiązany jedynie w nielicznych szczególnych przypadkach. Podobnie, jak przy wyznaczaniu obszarów niewrażliwości, uzyskiwane rezultaty odnoszą się głównie do sytuacji, gdy dopuszczana jest zmienność jedynie nielicznych parametrów zadania (patrz np. [3,25,31,33,35,38,61,63,69]).

# ZAKOŃCZENIE

Analiza wrażliwości rozwiązań staje się obecnie dynamicznie rozwijającym się działem optymalizacji dyskretnej. Jednakże nadal pozostaje w niej wiele nierozwiązanych problemów. Również często możliwości obliczeniowe badania wrażliwości rozwiązań znacznie odbiegają od praktycznych potrzeb. W dużym stopniu jest to następstwem faktu, że same zadania optymalizacji dyskretnej są zwykle trudne. Wymownym objawem tych trudności jest to, że obecnie żaden komercyjny pakiet, przeznaczony do rozwiązywania zadań dyskretnych, nie oferuje jakichkolwiek możliwości analizy pooptymalizacyjnej.

Wydaje się, że obecnie trudno się spodziewać istotnego postępu, jeśli chodzi o ogólne techniki rozwiązywania problemów z zakresu analizy wrażliwości. Ciągle perspektywiczne wydają się natomiast badania dla poszczególnych klas zadań, a zwłaszcza badania związane z konkretnymi algorytmami używanymi dla tych klas zadań. W przypadku każdego takiego algorytmu zasadne jest postawienie na przykład pytań o zakres i koszty obliczeniowe modyfikacji, jakie należałoby wprowadzić dla ułatwienia reoptymalizacji. Celowe jest również analizowanie każdego z takich algorytmów z punktu widzenia możliwości użycia go do rozwiązywania nie tylko pojedyńczego zadania, ale całej rodziny zadań parametrycznych.

Z praktycznego punktu widzenia bardzo pożądane wydają się również badania nad przybliżonym rozwiązywaniem zadań z zakresu analizy pooptymalizacyjnej. Dotyczy to dwóch grup zagadnień. Pierwsza jest związana z przybliżoną analizą wrażliwości i analizą parametryczną dla rozwiązań optymalnych zadań (na przykład wyznaczanie jedynie dolnych oszacowań tolerancji, oszacowań promienia niewrażliwości, przybliżone określanie przedziału zmian wartości optymalnej zadania przy zmianie parametrów, itp.). Druga grupa zagadnień dotyczy podobnych problemów, ale formułowanych dla rozwiązań przybliżonych zadań. Takie postawienie celów w analizie wrażliwości powinno zwykle być satysfakcjonujące z praktycznego punktu widzenia, a równocześnie daje szansę na dostarczenie metod akceptowalnych obliczeniowo.

## LITERATURA


[1] A.W. Aho, J.E Hopcroft, J.D. Ullman - *Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych*. PWN, Warszawa, 1983.

[2] E. Balas - Facets of the knapsack polytope. *Mathematical Programming*, 8 (1975) 146-164.

[3] M.G. Bailey, B.E. Gillet - Parametric integer programming analysis: a contraction approach. *Journal of the Operational Research Society*, 31 (1980) 257-262.

[4] B. Bank - Qualitative Stabilitatsuntersuchungen rein- und gemischt-ganzzahliger linearer parametrischer Optimierungsprobleme. Seminarberigcht Humboldt Universität, 14, nr 6, 1978.

[5] B. Bank - Stability analysis in pure and mixed integer programming. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 23 (1980) 148-153.

[6] C.E. Blair, R.G. Jeroslow - The value function of an integer program. *Mathematical Programming*, 23 (1982) 237-273.

[7] C.E. Blair, R.G. Jeroslow - Constructive characterization of the value function of a mixed-integer program II. *Discrete Applied Mathematics*, 10 (1885) 227-240.

[8] J. Błażewicz - *Złożoność obliczeniowa problemów kombinatorycznych.* WNT, Warszawa, 1988.

[9] V.J. Bowman - The structure of integer programs under the Hermite normal form. *Operations Research*, 22 (1974) 1067-1080.

[10] P.J. Brucker, H.W. Hamacher - $k$-optimal solutions sets for some polynomially solvable scheduling problems. *European Journal of Operations Research*, 41 (1989) 194-202.

[11] F.Y. Chin, D.J. Houck - Algorithm for updating minimal spanning trees. *Journal of Computers and System Sciences*,16 (1978) 333-344.

[12] N. Christofides - *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. Academic Press, New York, London, San Francisco, 1975.

[13] H. Crowder, E.L. Johnson, M. Padberg - Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, 31 (1983) 803-834.

[14] N. Deo - *Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce.* PWN, Warszawa, 1980.

[15] U. Derigs - Exchange properties and k-best strategies in combinatorial optimization. W : J.P. Brans (ed.) *Operations Research'84*, Elsevier Science Publishers B.V., (1984) 393-406.

[16] K. Dudziński, M. Libura, J. Majchrzak, J. Sikorski - On solving placement and routing problems in telephone exchange unit designs. *OR Spectrum*, 10 (1988), 213-220.

[17] K. Dudziński, S. Walukiewicz - Exact methods for the knapsack problem and its generalizations. *European Journal of Operations Research*, 28 (1987) 3-21.

[18] A.V. Fiacco - *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming.* Academic Press, New York, London, 1983.

[19] J.M. Fleisher, R.R. Meyer - A new class of sufficient optimality conditions for integer programming. University of Visconsin-Madison, Computer Sciences, Technical Repot 248 (1975).

[20] T. Gal - *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics.* McGraw-Hill, New York, 1979.

[21] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser - *Programowanie całkowitoliczbowe.* PWN, Warszawa, 1978.

[22] M.R. Garey, D.S. Johnson - *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness.* Freeman, San Francisco, 1979.

[23] A.M. Geoffrion, R. Nauss - Parametric and postoptimality analysis in integer programming. *Management Science*, 23 (1977) 453-466.

[24] D. Gusfield - A note on arc tolerances in sparse minimum path and network flow problems. *Networks*, 13 (1983) 191-196.

[25] D. Gusfield - Parametric combinatorial computing and a problem of program module distribution. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 30 (1983) 551-563.

[26] P.L. Hammer, E.L. Johnson, U.N. Peled - Facets of regular 0-1 polytopes. *Mathematical Programming*, 8 (1975) 179-206.

[27] H.W. Hamacher, M. Queyranne - $K$ best solutions to combinatorial optimization problems. *Annals of Operations Research*, 4 (1985/6) 123-143.

[28] D. Harel, R.E. Tarjan - Fast algorithms for finding nearest common ancestor. *SIAM Journal on Computing*, 13 (1984) 338-355.

[29] M. Held, R.M. Karp - The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18 (1970) 1138-1162.

[30] M. Held, R.M. Karp - The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II. *Mathematical Programming*, 1 (1971) 6-25.

[31] S. Holm, D. Klein - Discrete right hand side parametrization for linear integer programs. *European Journal of Operations Research*, 2 (1978) 50-53.

[32] S. Holm - The natural induced dual price function for an ILP solved by a cutting plane algorithm. Odense University, Dep. of Bussiness Administration, Rap. No.7/1979.

[33] L. Jenkins - Parametric mixed integer programming: an application to solid waste management. *Management Science*, 28 (1982) 1270-1284.

[34] M. Kano - Maximum and $k$-th maximal spanning trees of a weighted graph. *Combinatorica*, 7 (1987) 205-214.

[35] N. Katoh, T. Ibaraki - An efficient algorithm for the parametric resource allocation problem. *Discrete Applied Mathematics*, 10 (1985) 261-274

[36] K. Kiwiel - Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. *Lecture Notes for Mathematics* 1133, Springer, Berlin, 1985.

[37] D. Klein, S. Holm - Integer programming post-optimal analysis with cutting planes. *Management Science*, 25 (1979) 64-72.

[38] Ł.N. Kozierackaja, T.T. Lebiediewa, I.W. Siergienko - Woprosy ustojcziwosti, paramietriczieskij i postoptimalnyj analiz zadacz diskrietnoj optimizacji. *Kibiernietika*, 4 (1983) 71-80.

[39] M.Ja. Kowaljow, Ju.N. Sotskow - Ustojcziwost' ε-pribliżonnych rieszenij buljewych zadacz minimizacji liniejnoj formy. *Wiesci Akadiemii Nauk Biełarusskaj SSR*, 2 (1990) 111-116.

[40] J. Komlós - Linear verification for spanning trees. *Combinatorica*, 5 (1985) 57-65.

[41] J.L. Kulikowski - *Zarys teorii grafów*. PWN, Warszawa, 1986.

[42] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.G. Rinnoy Kan, D. Shmoys - *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley 1985.

[43] E.L. Lawler - *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[44] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' zadaczi komiwojażora. Żurnał Wyczislitielnoj Matiematiki i Matiematiczeskoj Fiziki, tom 15 (1975) 1298-1309.

[45] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' w kombinatornych zadaczach wybora. *Doklady Akadiemii Nauk SSSR*, tom 228, (1976) 23-25.

[46] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' w liniejnych diskretnych zadaczach. *Probliemy Kibiernietiki*, 35 (1979) 169-184.

[47] M. Libura, L. Słomiński - Transformacje zadań programowania dyskretnego. *Prace IOK*, z.10, Warszawa, 1974.

[48] M. Libura - Stability regions for optimal solutions of the integer programming problems. Working Paper MPD 3-76, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, 1976.

[49] M. Libura - Zagadnienia wrażliwości rozwiazań w programowaniu całkowitoliczbowym. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*. vol. XXII (1977) 299-311.

[50] M. Libura - Analiza wrażliwości rozwiązań całkowitoliczbowego zadania załadunku. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. XXII (1977) 313-322.

[51] M. Libura - Integer programming problems with inexact objective function. *Control and Cybernetics*, 9 (1980) 189-202.

[52] M. Libura - Dualność w programowaniu całkowitoliczbowym i jej zastosowanie w analizie wrażliwości i algorytmach przybliżonych. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. XXIX, zesz. 1-2 (1984) 75-92.

[53] M. Libura - Zadania programowania dyskretnego z parametryczną funkcją celu. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, seria Automatyka, z.74 (1984) 141-151.

[54] M. Libura - Analiza wrażliwości rozwiązań dla zadania wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie. *Zeszyty Naukowe Poltechniki Śląskiej*, seria Automatyka, z.84 (1986) 131-139.

[55] M. Libura - O pewnym zadaniu programowania całkowitoliczbowego z ilorazową funkcją celu. *Prace I Krajowej Konferencji Badań Operacyjnych i Systemowych*, Książ, czerwiec 1989, tom I, Optymalizacja - Metody i Zastosowania, IBS PAN, Warszawa 1989, 89-97.

[56] M. Libura - On travelling salesman problem with side constraints. W: R. Kulikowski, J.S. Sosnowski (ed.) *Badania Systemowe*, t.2, Metody Optymalizacji i Sterowania Komputerowego, Omnitech Press, Warszawa, 1990, 134-142.

[57] M. Libura - Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems. *Discrete Applied Mathematics*, 30 (1991) 197-211.

[58] M. Libura - Sensitivity analysis for minimum weight base of matroid. *Control and Cybernetics*, 20 (1991) 7-24.

[59] M. Libura - Combinatorial optimization problems in brachyradiotherapy planning. *Archives of Control Sciences*, 1 (1992) 119-126.

[60] W. Lipski - *Kombinatoryka dla programistów*. WNT, Warszawa, 1989.

[61] R.E. Marsten, T.L. Morin - Parametric integer programming : the right hand side case. *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 357-390.

[62] H. Noltemeier - Sensitivitätsanalyse bei diskreten linearen Optimierungsproblemen. *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems*, 30, M. Beckman, H.P. Kunzi (eds.) Springer Verlag, New York, 1970.

[63] Y. Othake, N. Nishida - A branch-and-bound algorithm for 0-1 parametric mixed integer programming, *Operations Research Letters*, 4 (1985) 41-45.

[64] C.J. Piper, A.A. Zoltners - Some easy postoptimality analysis for zero-one programming. *Management Science*, 22 (1976) 759-765.

[65] M.R. Rao - Adjacency of the traveling salesman tours and 0-1 vertices. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 30 (1976) 191-198.

[66] M.A. Radke - Sensitivity analysis in discrete optimization. Western Management Science Institute, University of California, Los Angeles, *Working Paper* No. 240, September 1975.

[67] G.M. Roodman - Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration. *Naval Research Logistics Quartarly*, 19 (1972) 435-447.

[68] G.M. Roodman - Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration: the mixed integer case. *Naval Research Logistics Quartarly*, 21 (1974) 595-607.

[69] S.L.K. Rountree, B.E. Gillet - Parametric integer linear programming: A synthesis of branch and bound with cutting planes. *European Journal of Operations Research*, 10 (1982) 183-189.

[70] J. Seeländer - Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Stabilitätsbereichen in der reinganzzahligen linearen Optimierung. *Mathematische Operatinsforschung und Statistic*, 11 (1980) 261-271.

[71] J. Seeländer - Über die Bestimmung von Stabilitätsbereichen bei speziellen gemischtganzahligen linearen Optimierungsproblemen. *Mathematische Operatinsforschung und Statistic*, 11 (1980) 447-454.

[72] L. Schrage, L.A. Wolsey - Sensitivity analysis for branch and bound integer programming. *Operations Research*, 33 (1985) 1008-1023.

[73] A. Schrijver - *Theory of Linear and Integer Programming.* J. Wiley, Chichester, 1986.

[74] J.F. Shapiro - *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. J. Wiley, New York, Toronto, 1979.

[75] J.F. Shapiro - Sensitivity analysis in integer programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 647-677.

[76] D.R. Shier, C. Witzgall - Arc tolerances in minimum-path and network flow problems. *Networks*, 10 (1980) 277-291.

[77] M. Simmonard - *Programowanie liniowe*. PWN, Warszawa, 1967.

[78] Y.N. Sotskov - Stability of an optimal schedule. *European Journal of Operations Research*, 55 (1991) 91-102.

[79] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik - *Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983 (tłum. polskie - *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993).

[80] R.E. Tarjan - Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 22 (1975) 215-225.

[81] R.E. Tarjan - Applications of path compression of balanced trees. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 26 (1979) 690-715.

[82] R.E. Tarjan - Sensitivity analysis of minimum spanning trees and minimum path trees. *Information Processing Letters*, 14 (1982) 30-33.

[83] J. Tind, L.A. Wolsey - An elementary survey of general duality theory in mathematical programming. *Mathematical Programming*, 21 (1981) 241-261.

[84] W.T. Tutte - *Introduction to the Theory of Matroids.* American Elsevier, New York, 1971.

[85] S. Walukiewicz - *Programowanie dyskretne*. PWN, Warszawa, 1986.

[86] J.E. Ward, R.E. Wendell - Approaches to sensitivity analysis in linear programming. *Annals of Operations Research*, 27 (1990) 3-38.

[87] G.M. Weber - Sensitivity analysis of optimal matchings. *Networks*, 11 (1981) 41-56.

[88] D.J.A. Welsh - *Matroid Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.

[89] L.A. Wolsey - Integer programming duality: Price functions and sensitivity analysis. *Mathematical Programming*, 20 (1981) 173-195.

[90] K. Zorychta, W. Ogryczak - *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe*. WNT, Warszawa, 1981.

# ANALIZA WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

## MAREK LIBURA

Analiza wrażliwości rozwiązań jest ważnym działem optymalizacji, zajmującym się wpływem zaburzeń danych zadania optymalizacyjnego na jego rozwiązania.

Niniejsza monografia jest poświęcona analizie wrażliwości w przypadku zadań optymalizacji dyskretnej. Omawiane są różne podejścia do badania wrażliwości rozwiązań, wynikające ze specyfiki tych zadań. Szczególny nacisk położony jest na techniki wyznaczania dopuszczalnych zaburzeń danych zadania, przy których pewne ustalone rozwiązanie pozostaje optymalnym. Obszerną część pracy stanowią wyniki analizy wrażliwości dla takich znanych zadań optymalizacji dyskretnej, jak zadanie wyznaczania bazy o minimalnej wadze w matroidzie, binarne zadanie załadunku, zadanie znajdowania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie oraz zadanie komiwojażera.

Dr Marek Libura jest adiunktem w Zakładzie Programowania Matematycznego Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk.

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy, prosimy o kontakt z
Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, tel. 36-19-01 w. 241
01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-10-3
ISSN 0208-8029