



Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

Marek Libura

**Analiza wrażliwości rozwiązań
zadań optymalizacji dyskretnej**



Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej

Polska Akademia Nauk · Instytut Badań Systemowych

Seria: **BADANIA SYSTEMOWE**
tom 17

Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1993

Marek Libura

Analiza wrażliwości rozwiązań
zadań optymalizacji dyskretnej

Zakład Wydawniczo-Poligraficzny SYNPRESS

Publikację opiniowali do druku:

prof. dr hab. Juliusz Lech Kulikowski
prof. dr hab. Eugeniusz Toczyłowski

Wykonano z oryginałów tekstowych
dostarczonych przez Instytut Badań Systemowych PAN

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 1993

ISBN 83-85847-10-3
ISSN 0208-8029

WSTĘP

Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji jest działem zajmującym się badaniem wpływu zaburzeń danych zadania na jego rozwiązania. Zwykle jest zaliczana do tak zwanej *analizy pooptymalizacyjnej* (patrz np. [23,49]), która rozpoczyna się po uzyskaniu rozwiązania optymalnego lub przybliżonego zadania.

Podstawowy problem rozważany w analizie wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej polega na wyznaczeniu dla danego rozwiązania optymalnego lub suboptymalnego takich zmian danych zadania, przy których rozwiązanie to pozostaje rozwiązaniem optymalnym (suboptymalnym). Takie podzbiory danych zadania nazywane są *obszarami niewrażliwości rozwiązań* (patrz [48,49]). W konkretnych przypadkach badane są rozmaite warianty tego podstawowego problemu, sprowadzające się najczęściej do zawężenia go w taki sposób, że analizowane są jedynie obszary zmienności wybranych parametrów zadania (na przykład pojedynczych współczynników) nie naruszające optymalności danego rozwiązania.

Takie postawienie problemu wrażliwości rozwiązań w optymalizacji dyskretnej różni się od typowego postawienia problemu wrażliwości na przykład w programowaniu nieliniowym (patrz np. [18]). W tym ostatnim przypadku celem analizy wrażliwości jest zwykle wyznaczenie zależności zmian rozwiązań optymalnych i wartości optymalnej zadania od niewielkich zaburzeń danych.

Analiza wrażliwości rozwiązań ma ścisły związek z innym działem analizy pooptymalizacyjnej - tak zwaną *analizą parametryczną rozwią-*

zań. Dotyczy ona sytuacji, w której zakłada się, że dane zadania zależą od pewnego zbioru parametrów. Celem analizy parametrycznej jest rozbić cały obszar zmienności parametrów na maksymalne w sensie zawierania podobszary, w których rozwiązania optymalne zadania pozostają niezmiennie, a następnie wyznaczenie rozwiązań optymalnych dla każdego z tych obszarów. Tak więc każdy z obszarów znajdujących w analizie parametrycznej jest pewnym podzbiorem obszaru niewrażliwości dla odpowiadającego mu rozwiązania optymalnego. Pozwala to na wykorzystanie wyników analizy wrażliwości w analizie parametrycznej.

Potrzeba prowadzenia analizy wrażliwości rozwiązań w optymalizacji dyskretnej wynika z tych samych przesłanek, co w przypadku innych działań optymalizacji. Podstawowym powodem badania wrażliwości rozwiązania w przypadku praktycznego problemu jest to, że rozwiązanie to jest uzyskiwane przy niedokładnych danych zadania. Wyznaczenie obszaru niewrażliwości lub jego podobszarów pozwala się zorientować, na ile wiarygodne jest takie rozwiązanie. Pozwala to również na wskazanie, które z parametrów modelu są najistotniejsze i powinny być w związku z tym estymowane ze szczególną uwagą.

W sposób naturalny obszar niewrażliwości określa również zakres stosowalności danego rozwiązania, a co za tym idzie, potrzebę reoptymalizacji przy dokładnych wprawdzie, ale zmieniających się danych. W przypadku optymalizacji dyskretnej argument ten staje się szczególnie istotny, ze względu na wysoką zwykle złożoność obliczeniową tego typu zadań. Przy tym sytuacje, w których zachodzi potrzeba rozwiązania sekwencji problemów nieznacznie różniących się danymi, zachodzą bardzo często. Powodem ich wystąpienia może być naturalna zmienność parametrów zadania (na przykład cen, itp.). Inny powód wynika ze specyfiki metod optymalizacji, które używają danego zadania jako podproblemu i w kolejnych iteracjach wymagają rozwiązania go dla innych, często nieznacznie zmienionych, danych. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład przy rozwiązywaniu zadań

dualnych (patrz np. [52]) oraz w metodzie podziału i oszacowań.

Prace dotyczące analizy poptymalizacyjnej w optymalizacji dyskretnej zaczęły się pojawiać w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych. Od tego czasu liczba publikacji dotyczących tej tematyki znacznie przekroczyła sto. Jednakże dziedzina ta nadal nie jest w pełni ukształtowana. Większość publikacji nadal koncentruje się na zagadnieniach dotyczących konkretnych szczególnych problemów.

Praca niniejsza jest pierwszą tak obszerną pozycją monograficzną dotyczącą ilościowych problemów analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej. Zagadnienia jakościowego badania wrażliwości (przez co rozumie się na przykład analizę takich właściwości rozwiązań zadań z zaburzonymi parametrami, jak ciągłość multifunkcji opisujących zbiory rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych) są tu całkowicie pominięte. Ta tematyka wykazuje zresztą znacznie więcej zbieżności z analogicznymi zagadnieniami w optymalizacji ciągłej i doczekała się opracowań monograficznych [4,66].

Zasadniczym zagadnieniem omawianym w pracy jest problem wyznaczania obszarów niewrażliwości dla rozwiązań optymalnych zadań dyskretnych, który jest traktowany jako centralny problem w analizie wrażliwości dla tych zadań. Inne zagadnienia są poruszane w bardzo niewielkim stopniu. Niemal całkowicie są pomijane wyniki dotyczące ilościowej analizy parametrycznej. Należy jednak sądzić, że ze względu na pilną potrzebę stworzenia skutecznych metod dla zagadnień parametrycznych, dziedzina ta stanie się w najbliższym czasie jednym z najbardziej dynamicznie rozwijających się działów optymalizacji dyskretnej.

Układ pracy jest następujący. Praca jest podzielona na trzy rozdziały.

Rozdział 1 przedstawia sformułowania podstawowych problemów pojawiających się w analizie poptymalizacyjnej dla zadań dyskretnych.

Omawiane są również problemy, które tylko w niewielkim stopniu są rozwijane w dalszych częściach pracy, ale zostały tu zamieszczone dla pełności prezentacji. Rozdział rozpoczyna się od sformułowania klasy zadań dyskretnych, których dotyczą dalsze rozważania, oraz podania przykładów takich zadań.

Rozdział 2 jest opisem technik, które mogą być używane do znajdowania obszarów lub podobszarów niewrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej. Prezentacja ta jest podporządkowana powiązaniom między analizą wrażliwości a możliwością sformułowania warunków optymalności rozwiązania. Obszernie są przedstawiane związki analizy wrażliwości z dualnością dla zadań dyskretnych.

Rozdział 3 jest najobszerniejszą częścią pracy i zawiera wyniki analizy wrażliwości dla kilku wybranych zadań optymalizacji dyskretnej. W trzech kolejnych podrozdziałach przedstawione są rezultaty uzyskane dla zadania znajdowania w matroidzie bazy o minimalnej wadze, binarnego zadania załadunku oraz zadań wyznaczania w grafie najkrótszej drogi i obwodu Hamiltona. Starano się, aby podrozdziały te mogły być czytane w dużym stopniu niezależnie od siebie, co powodowało konieczność przypominania i powtarzania niektórych oznaczeń. Jednakże występują ścisłe związki między tymi częściami pracy, na przykład w rozdziale o drogach i obwodach Hamiltona w istotny sposób korzysta się z rezultatów uzyskanych dla baz matroidów.

Pracę kończy spis literatury, zawierający wybór ważniejszych pozycji dotyczących analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej.

ROZDZIAŁ 3

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI DLA WYBRANYCH ZADAŃ KOMBINATORYCZNYCH

3.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale podane zostaną wyniki dotyczące wyznaczania obszarów niewrażliwości dla kilku wybranych zadań kombinatorycznych. W punkcie 2 dokonana jest pełna analiza wrażliwości dla problemu wyznaczania bazy o minimalnej wadze w matroidzie. Punkt 3 dotyczy binarnego zadania załadunku, a prezentowane wyniki opisują obszar niewrażliwości rozwiązania optymalnego przy dopuszczeniu jedynie zmienności współczynników ograniczenia. Punkt 4 jest poświęcony wyznaczaniu oszacowań dolnych dla tolerancji wag krawędzi grafu w przypadku zadania wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie nieskierowanym oraz w przypadku symetrycznego zadania komiwojażera.

3.2 Analiza wrażliwości dla problemu wyznaczania optymalnej bazy matroidu

3.2.1 Podstawowe pojęcia z teorii matroidów

W punkcie tym przytoczymy podstawowe pojęcia i fakty z teorii matroidów, które będą wykorzystywane w dalszej części tego rozdziału. Teoria matroidów jest tematem obszernych monografii (np. [84,88]). Podstawowe pojęcia i fakty z tego zakresu można znaleźć na przykład w [60].

Niech S będzie zbiorem skończonym, $|S| = m$, i niech \mathcal{F} będzie rodziną jego podzbiorów.

Definicja 3.1

Parę $M = (S, \mathcal{F})$ nazywamy *matroidem* na S , jeśli spełnione są następujące warunki :

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (I2) Jeśli $X \in \mathcal{F}$ oraz $Y \subseteq X$, to $Y \in \mathcal{F}$;
- (I3) Jeśli $U, V \in \mathcal{F}$ oraz $|U| = |V| + 1$, to istnieje element $x \in U \setminus V$ taki, że $V \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

Liczne przykłady matroidów są podane w [43,60,84,88]; patrz również punkt 3.2.2 .

Elementy zbioru \mathcal{F} będziemy nazywać *zbiorami niezależnymi*, natomiast pozostałe podzbiory S - *zbiorami zależnymi*. Mówimy, że dwa matroidy (S, \mathcal{F}) i (S', \mathcal{F}') są *izomorficzne*, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie f zbioru S na zbiór S' takie, że $X \in \mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(X) \in \mathcal{F}'$.

Bazą matroidu nazywamy maksymalny podzbiór niezależny zbioru S . Rodzinę baz matroidu M będziemy oznaczać symbolem \mathcal{B} . Z definicji bazy i warunku (I3) wynika, że jeśli $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, to $|B_1| = |B_2|$.

Cyklem matroidu nazywamy minimalny zależny podzbiór S . Rodzinę cykli matroidu będziemy oznaczać symbolem \mathcal{Z} .

W teorii matroidów stosuje się kilka równoważnych definicji matroidu. Trzy z nich, do których będziemy się odwoływać w dalszej części tego rozdziału, przytoczymy niżej w postaci następujących twierdzeń (patrz np. [88]) :

Twierdzenie 3.1 (Aksjomaty baz)

Niepusta rodzina \mathcal{B} podzbiorów zbioru S jest rodziną baz matroidu na S wtedy i tylko wtedy, gdy dla $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ z warunku $x \in B_1 \setminus B_2$ wynika, że istnieje element $y \in B_2 \setminus B_1$ taki, że $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\} \in \mathcal{B}$.

■

Twierdzenie 3.2 (Aksjomaty cykli)

Rodzina \mathcal{Z} podzbiorów zbioru S jest rodziną cykli matroidu na S wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki :

(C1) Jeśli $C_1, C_2 \in \mathcal{Z}$ i $C_1 \neq C_2$, to nie zachodzi warunek $C_1 \subseteq C_2$;

(C2) Jeśli C_1, C_2 są różnymi elementami \mathcal{Z} i $z \in C_1 \cap C_2$, to istnieje $C_3 \in \mathcal{Z}$ taki, że $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{z\}$.

■

W dalszych rozważaniach będziemy również korzystać z twierdzenia opisującego warunek silniejszy niż (C2), nazywany silnym aksjomatem cykli (patrz [88]).

Twierdzenie 3.3

Jeśli C_1 i C_2 są różnymi cyklami matroidu M i $x \in C_1 \cap C_2$, to dla dowolnego elementu $y \in C_1 \setminus C_2$ istnieje cykl C taki, że $y \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$. ■

Bezpośrednim wnioskiem z warunku (C2) jest następujący fakt (patrz np. [88]) :

Wniosek 3.1

Jeśli A jest zbiorem niezależnym i $x \in S$, to zbiór $A \cup \{x\}$ zawiera co najwyżej jeden cykl. ■

Z powyższego wniosku i faktu, że dowolna baza B matroidu jest maksymalnym podzbiorem niezależnym, wynika, że dla dowolnego $x \in S \setminus B$ zbiór $B \cup \{x\}$ zawiera dokładnie jeden cykl. Cykl ten będziemy oznaczać symbolem $C(x, B)$ i nazywać *cyklem fundamentalnym* wyznaczonym w bazie B przez element x .

Niech $B \in \mathcal{B}$ i $x \in B$. Zbiór $W(x, B) = \{ y \in S \setminus B : x \in C(y, B) \}$ będziemy nazywać *przekrojem fundamentalnym* wyznaczonym przez element x dla danej bazy B .

Poniższy lemat określa, w oparciu o cykle fundamentalne i przekroje fundamentalne związane z daną bazą B , warunki przejścia od bazy B do innej bazy matroidu w wyniku zamiany pary elementów matroidu.

Lemat 3.1

Niech B będzie bazą matroidu $M = (S, \mathcal{I})$ oraz $x \in B$, $y \in S \setminus B$.
Następujące warunki są równoważne :

- (i) $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$;
- (ii) $x \in C(y, B)$;
- (iii) $y \in W(x, B)$.

Dowód. Równoważność warunków (ii) i (iii) wynika bezpośrednio z definicji cykli i przekrojów fundamentalnych. Implikacja (i) \Rightarrow (ii) wynika z faktu, że $B \cup \{y\}$ zawiera cykl $C(y, B)$, a ponieważ zgodnie z (i) zbiór $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ jest niezależny, zatem usuwany z bazy element x musi należeć do tego cyklu. Jeśli natomiast spełniony jest warunek (ii), to zbiór $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ jest bazą, ponieważ ma moc równą mocy B i jest niezależny. Niezależność zbioru $(B \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ wynika z faktu, że $B \cup \{y\}$ zawiera dokładnie jeden cykl $C(y, B)$.

■

W dalszej części będziemy korzystać z następującego lematu, orzekającego, jaką co najmniej liczbę elementów należy usunąć z sumy różnych cykli matroidu po to, aby powstały zbiór był niezależny.

Lemat 3.2

Niech C_1, \dots, C_k będą cyklami matroidu M na zbiorze S spełniającymi warunek

$$C_i \not\subseteq \bigcup_{i \neq j} C_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.1)$$

Wówczas dla dowolnego $T \subseteq S$ takiego, że $|T| < k$, zbiór

$$\left(\bigcup_{i=1}^k C_i \right) \setminus T \text{ jest zbiorem zależnym.}$$

Dowód. Lemat zachodzi w oczywisty sposób dla $k = 1$. Załóżmy, że zachodzi dla pewnego $k = l \geq 1$ i pokażemy, że z tego wynika jego prawdziwość dla $k = l+1$. Gdyby lemat nie był prawdziwy dla $k = l+1$, to oznaczałoby to, że istnieje $l+1$ cykli matroidu C_1, \dots, C_{l+1} spełniających warunek (3.1) oraz zbiór $T \subseteq S$ taki, że $|T| < l+1$ i

$D \in \mathcal{F}$, gdzie $D = \left(\bigcup_{j=1}^{l+1} C_j \right) \setminus T$. Rozważmy teraz dowolny cykl C_p , $p =$

$1, \dots, l+1$. Z niezależności zbioru D wynika, że musi istnieć pewien element $t_p \in T \cap C_p$. Mogą zajść dwa przypadki :

- (i) $t_p \notin C_j$, $j = 1, \dots, l+1$, $j \neq p$;
- (ii) $t_p \in C_j$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, l+1\}$, $j \neq p$.

W przypadku (i) mamy natychmiast sprzeczność z założeniem, że lemat zachodzi dla $k = l$, bowiem z niezależności zbioru D i z warunku (i) wynika, że zbiór $(D \setminus C_p) \setminus (T \setminus \{t_p\})$ jest niezależny. Również w przypadku (ii) otrzymujemy sprzeczność, ponieważ można pokazać, że zbiór $D \setminus \{t_p\}$ zawiera l cykli spełniających warunek (3.1), a po usunięciu z niego $l-1$ elementów zbioru $T \setminus \{t_p\}$ otrzymujemy zbiór niezależny. Wystarczy bowiem dla każdego $j \in \{1, \dots, l+1\} \setminus \{p\}$ wziąć cykl C^j należący do $(C_j \cup C_p) \setminus \{t_p\}$ i zawierający element x_j spełniający warunki $x_j \in C_j$ oraz $x_j \notin C_i$, $i \neq j$. Istnienie takich elementów wynika z warunku (3.1), a istnienie cyklu C^j z Twierdzenia 3.3. Oznacza to, iż założenie, że lemat nie jest prawdziwy dla $k = l+1$, prowadzi do sprzeczności, co kończy dowód.

■

Rozważmy teraz dwie bazy B', B'' matroidu M . Twierdzenie 3.1 mówi, że dowolny element x należący do $B' \setminus B''$ może być wymieniony z odpowiednio wybranym elementem $y \in B'' \setminus B'$ tak, aby zbiór $(B'' \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ był bazą matroidu M . Poniższe twierdzenie orzeka, że odwzorowanie wyznaczone przez takie pary elementów może być różnowartościowe. Fakt

równoważny temu twierdzeniu jest wspomniany bez dowodu w [88].
 Poniżej dla pełności rozważań podamy go wraz z dowodem.

Twierdzenie 3.4

Niech B' , B'' będą bazami matroidu $M = (S, \mathcal{F})$. Istnieje bijekcja $\psi : B' \setminus B'' \rightarrow B'' \setminus B'$, spełniająca następujący warunek :

$$(B'' \setminus \{\psi(x)\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B} \quad \text{dla każdego } x \in B' \setminus B''. \quad (3.2)$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia : $R = B' \setminus B''$, $Q = B'' \setminus B'$. Rozważmy element $r \in R$. Zbiór $B'' \cup \{r\}$ zawiera cykl fundamentalny $C(r, B'')$. Niech $Q_r = Q \cap C(r, B'')$. Bijekcja spełniająca warunek (3.2) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla zbiorów Q_i , $i \in R$, można znaleźć system różnych reprezentantów, to znaczy, gdy dla każdego $i \in R$ istnieje element $x_i \in Q_i$ taki, że $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Z twierdzenia Halla (patrz np. [60]) wiadomo, że system taki istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $I \subseteq R$ zachodzi nierówność $|Q(I)| \geq |I|$, gdzie $Q(I) = \bigcup_{i \in I} Q_i$. Załóżmy, że warunek powyższy nie jest spełniony,

to znaczy, że istnieje zbiór $I_0 \subseteq R$ taki, że $|Q(I_0)| < |I_0|$.

Rozważmy teraz zbiór $S_0 = \bigcup_{r \in I_0} C(r, B'') \setminus Q(I_0)$. Łatwo zauważyć, że

$S_0 \subseteq B'$, a zatem S_0 musi być zbiorem niezależnym. Ale z Lematu 3.2 wynika, że S_0 jest zbiorem zależnym, a zatem założenie o nieistnieniu systemu różnych reprezentantów dla rodziny zbiorów Q_i , $i \in R$, prowadzi do sprzeczności, co w konsekwencji dowodzi tezy twierdzenia. ■

Zbiór bijekcji $\psi : B' \setminus B'' \rightarrow B'' \setminus B'$, spełniających warunek (3.2), będziemy oznaczać symbolem $\Psi(B', B'')$.

3.2.2 Problem wyznaczania bazy o minimalnej wadze w matroidzie

Niech dla danego matroidu $M = (S, \mathcal{F})$ będzie określona funkcja rzeczywista $w : S \rightarrow \mathbb{R}$. Liczbę $w(x)$ dla $x \in S$ będziemy nazywać *wagą elementu* x . Dla zbioru $Q \subseteq S$ jego waga $v(Q)$ będzie definiowana jako suma wag zawartych w nim elementów, tzn.

$$v(Q) = \sum_{x \in Q} w(x).$$

Klasyczny problem optymalizacyjny, do którego sprowadzają się liczne problemy z zakresu badań operacyjnych (patrz np. [43]), polega na wyznaczeniu takiej bazy B^0 matroidu, której waga jest minimalna :

$$v(B^0) = \min_{B \in \mathcal{B}} v(B). \quad (3.3)$$

Zadanie powyższe wiąże się ściśle z bardzo prostym algorytmem nazywanym *algorytmem zachłannym* (ang. greedy algorithm). W poniższym opisie tego algorytmu Q jest podzbiorem S , a v liczbą rzeczywistą.

Algorytm zachłanny dla matroidów

1° (Inicjalizacja) Podstaw $Q := \emptyset$, $v := 0$;

Uporządkuj elementy zbioru S w taki sposób, aby

$$w(x_1) \leq w(x_2) \leq \dots \leq w(x_m).$$

2° for $i := 1$ to m do

if $Q \cup \{x_i\} \in \mathcal{F}$ then

```

begin
  Q := Q ∪ {xi};
  v := v + w(xi)
end;
3° B0 := Q; v(B0) := v.

```

Algorytm powyższy porządkuje m liczb (co wymaga $O(m \log m)$ porównań) oraz dokonuje m -krotnego badania niezależności zbiorów. Wiadomo (patrz np. [43]), że algorytm zachłanny daje rozwiązanie optymalne zadania (3.3). Co więcej, zachodzi następujące twierdzenie (patrz np. [60]) :

Twierdzenie 3.5

Następujące warunki są równoważne :

- (i) (S, \mathcal{F}) , gdzie S jest zbiorem skończonym, $\mathcal{F} \subseteq 2^S$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, jest matroidem na S ;
- (ii) Dla dowolnej funkcji $W : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ algorytm zachłanny wyznacza rozwiązanie optymalne zadania $\max\{W(X) : X \in \mathcal{F}\}$.

■

Poniżej przytoczymy kilka przykładów zadań wyznaczania bazy o minimalnej wadze dla różnych typów matroidów.

M a t r o i d g r a f o w y .

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym; $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ jest zbiorem wierzchołków, natomiast $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ jest zbiorem krawędzi. Zdefiniujmy rodzinę podzbiorów \mathcal{F} w następujący sposób :
 $\mathcal{F} = \{ S \subseteq E : \text{zbiór krawędzi } S \text{ nie zawiera obwodu w grafie } G \}$.
 Można pokazać, że para $M(G) = (E, \mathcal{F})$ jest matroidem, który będziemy nazywać *matroidem grafu* G , a każdy matroid izomorficzny z

matroidem pewnego grafu nazwiemy *matroidem grafowym*. Zbiorami niezależnymi matroidu $M(G)$ są podzbiory krawędzi tworzące lasy w grafie G , natomiast cyklami są podzbiory krawędzi tworzące obwody elementarne w G . Bazami tego matroidu są lasy rozpinające w G . W przypadku, gdy graf jest spójny, bazami matroidu $M(G)$ są drzewa rozpinające grafu G .

Założmy, że krawędziom grafu są przypisane wagi, które można interpretować jako długości tych krawędzi. Wówczas problem wyznaczania bazy o minimalnej wadze w matroidzie $M(G)$ jest znanym problemem wyznaczania najkrótszego lasu rozpinającego w grafie. Problem ten ma liczne praktyczne zastosowania w zagadnieniach związanych z konstrukcją i eksploatacją różnego rodzaju sieci łączności, systemów komunikacyjnych, itp. (patrz np. [14,16,43]). Przykładem matroidu grafowego będziemy się posługiwać przy ilustracji rozważań w dalszej części tego rozdziału.

M a t r o i d m a c i e r z o w y .

Niech A będzie macierzą o n wierszach i m kolumnach. Oznaczmy j -tą kolumnę macierzy symbolem A^j i niech $E = \{ A^j, j = 1, \dots, m \}$. Zdefiniujemy rodzinę \mathcal{I} w następujący sposób :

$\mathcal{I} = \{ S \subseteq E : \text{zbiór kolumn należących do } S \text{ jest liniowo niezależny} \}$

Para $M(A) = (E, \mathcal{I})$ jest matroidem, który nosi nazwę *matroidu macierzy* A , a każdy matroid izomorficzny z matroidem pewnej macierzy jest nazywany *matroidem macierzowym*. Cyklami tego matroidu są minimalne podzbiory kolumn liniowo zależnych, a bazami maksymalne podzbiory kolumn liniowo niezależnych macierzy A . Jeśli kolumnom macierzy przypisane są wagi, to wówczas problem (3.3) polega na znalezieniu w macierzy A maksymalnego podzbioru kolumn liniowo niezależnych o minimalnej sumie wag. Problem taki znajduje na przykład zastosowanie w zagadnieniu planowania eksperymentów (patrz np. [43]).

3.2.3 Analiza wrażliwości dla bazy o minimalnej wadze

Jak już wspomniano w poprzednim punkcie, zadanie znajdowania bazy o minimalnej wadze w matroidzie należy do stosunkowo łatwych zadań optymalizacji dyskretnej. Również analiza pooptymalizacyjna dla tego zadania jest prostsza niż w przypadku wielu innych zadań. Dzieje się tak dlatego, że dla danej bazy matroidu można podać proste warunki konieczne i dostateczne jej optymalności. Sformułujemy te warunki w postaci poniższego lematu :

Lemat 3.3

Następujące warunki są równoważne :

- (i) B^0 jest bazą o minimalnej wadze w matroidzie M ;
- (ii) Dla dowolnego $x \in B^0$ zachodzą nierówności $w(x) \leq w(y)$ dla wszystkich $y \in W(x, B^0)$;
- (iii) Dla dowolnego $y \in S \setminus B^0$ zachodzą nierówności $w(y) \geq w(x)$ dla wszystkich $x \in C(y, B^0)$.

Dowód. Równoważność warunków (ii) i (iii) wynika bezpośrednio z definicji cykli i przekrojów fundamentalnych. Implikacja (i)→(ii) wynika natychmiast z Lematu 3.1. Zauważmy bowiem, że gdyby dla danej bazy B^0 istniała para elementów $x \in B^0$ oraz $y \in W(x, B^0)$, dla której $w(x) > w(y)$, to przeczyłoby to optymalności B^0 , bowiem baza B' , gdzie $B' = (B^0 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$, miałaby wówczas mniejszą wagę niż B^0 . Dla dowodu, że (ii)→(i) przyjmijmy, że B^0 spełnia (ii), ale istnieje inna baza B , dla której $v(B) < v(B^0)$. Z Twierdzenia 3.4 wynika, że $\Psi(B, B^0) \neq \emptyset$. Niech ψ będzie dowolnym elementem zbioru $\Psi(B, B^0)$. Jeśli $v(B) < v(B^0)$, to dla co najmniej jednego elementu $y \in B \setminus B^0$ musi zachodzić nierówność $w(y) < w(\psi(y))$, ale to przeczy warunkowi (ii),

bowiem zbiór $(B^\circ \setminus \{y\}) \cup \{\psi(y)\}$ jest bazą, a zatem z Lematu 3.1 wynika, że $y \in W(\psi(y), B^\circ)$.

■

Lemat 3.3 pozwala na pełny opis obszaru niewrażliwości względem bazy B° . Załóżmy bowiem, że elementy matroidu zostały ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi, tzn. $S = (s_1, \dots, s_m)$ i niech $w \in \mathbb{R}^m$ będzie wektorem wag przyporządkowanych elementom matroidu. Mamy zatem $w = (w_1, \dots, w_m)$, gdzie $w_i = w(s_i)$, $s_i \in S$. Niech $W(B^\circ)$ oznacza obszar niewrażliwości dla bazy optymalnej B° w matroidzie $M = (S, \mathcal{I})$ z wagami wyznaczonymi przez pewien wektor w° . Poniższy wniosek podaje dwa równoważne opisy obszaru niewrażliwości $W(B^\circ)$ z użyciem zbioru cykli albo zbioru przekrojów fundamentalnych. Zauważmy, że zgodnie z rozważaniami z Rozdziału 1, obszar ten jest wielościanowym stożkiem wypukłym w \mathbb{R}^m .

Wniosek 3.2

$$W(B^\circ) = \{ w \in \mathbb{R}^m : w_i \leq w_j \quad \text{dla} \quad i, j = 1, \dots, m, \text{ takich, że} \\ s_i \in B^\circ, \quad s_j \in W(s_i, B^\circ) \}. \quad (3.4)$$

$$W(B^\circ) = \{ w \in \mathbb{R}^m : w_i \geq w_j \quad \text{dla} \quad i, j = 1, \dots, m, \text{ takich, że} \\ s_i \in S \setminus B^\circ, \quad s_j \in C(s_i, B^\circ) \}.$$

Dowód. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że zapisując warunki konieczne i dostateczne optymalności bazy B° wyrażone w Lemacie 3.3 (i), (ii), i stosując wprowadzone wyżej oznaczenia, otrzymujemy powyższe wyrażenia.

■

Lemat 3.3 pozwala również na znajdowanie dopuszczalnych zmian wag pojedynczych elementów matroidu, nie naruszających optymalności rozwiązania B^0 . Niech $t^+(x, B^0)$ oznacza tolerancję górną elementu x względem bazy B^0 , to znaczy maksymalny przyrost jego wagi, przy którym B^0 pozostaje bazą optymalną. Podobnie, niech $t^-(x, B^0)$ będzie tolerancją dolną elementu x , równą maksymalnemu zmniejszeniu wagi tego elementu nie naruszającemu optymalności B^0 (patrz Rozdział 1). Następujący wniosek jest bezpośrednią konsekwencją Lematu 3.3 :

Wniosek 3.3

Jeśli $x \in B^0$, to $t^-(x, B^0) = \infty$ oraz

$$t^+(x, B^0) = \min \{ w(y) : y \in W(x, B^0) \} - w(x). \quad (3.5)$$

Jeśli $x \in S \setminus B^0$, to $t^+(x, B^0) = \infty$ oraz

$$t^-(x, B^0) = w(x) - \max \{ w(y) : y \in C(x, B^0) \setminus \{x\} \}. \quad (3.6)$$

■

Wprawdzie Wniosek 3.3 opisuje jedynie dopuszczalne zmiany pojedynczych wag elementów matroidu, ale łatwo zauważyć, że znając wartości tolerancji pojedynczych elementów można, na podstawie Lematu 3.3, analizować w pewnym zakresie również dopuszczalność jednoczesnych zmian wag elementów. Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech

$$W^+(B^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : d_i \leq w(s_i) + t^+(s_i, B^0) \quad \text{dla } s_i \in B^0, \\ d_j \geq w(s_j) \quad \text{dla } s_j \in S \setminus B^0 \}$$

oraz

$$W^-(B^\circ) = \{ d \in \mathbb{R}^m : d_i \leq w(s_i) \quad \text{dla } s_i \in B^\circ, \\ d_j \geq w(s_j) - t^-(s_j, B^\circ) \quad \text{dla } s_j \in S \setminus B^\circ \},$$

gdzie $d = (d_1, \dots, d_m)^T$.

Poniższy fakt jest prostą konsekwencją Lematu 3.3 i Wniosku 3.3 :

Wniosek 3.4

$$W^+(B^\circ) \cup W^-(B^\circ) \subseteq W(B^\circ).$$

Dowód. Łatwo sprawdzić, że jeśli wektor wag w należy do zbioru $W^+(B^\circ)$ lub do zbioru $W^-(B^\circ)$, to spełnione są warunki optymalności bazy B° matroidu M sformułowane w Lemacie 3.3, a zatem w należy do obszaru niewrażliwości bazy B° i zachodzi powyższa inkluzja. ■

Wniosek 3.4 stwierdza, że znając tolerancje górne i dolne wag elementów matroidu względem B° , możemy bez utraty optymalności rozwiązania B° zwiększyć dowolnie wagi elementów nie należących do bazy optymalnej oraz jednocześnie zwiększyć (o nie więcej niż wynoszą tolerancje dolne) wagi dla dowolnego zbioru elementów należących do tej bazy. Analogicznie, bez straty optymalności bazy B° , możemy dowolnie zmniejszyć wagi elementów należących do B° oraz zmniejszyć wagi dowolnego podzbioru elementów nie należących do B° o wartości nie przekraczające ich tolerancji dolnych. Zauważmy, że powyższy wniosek nic nie mówi o przypadku jednoczesnych zmian wag elementów matroidu, przy których zarówno rosną wagi elementów należących do bazy optymalnej, jak i maleją wagi elementów nie będących w tej bazie.

Dla skorzystania z Lematu 3.3 lub Wniosków 3.2 oraz 3.3 potrzebna jest znajomość odpowiednich rodzin podzbiorów związanych z bazą matroidu B° :

rodziny przekrojów fundamentalnych

$$\mathcal{F}_{cu}(B^\circ) = (W(x, B^\circ) : x \in B^\circ) \quad (3.7)$$

oraz rodziny cykli fundamentalnych

$$\mathcal{F}_{ci}(B^\circ) = (C(y, B^\circ) : y \in S \setminus B^\circ). \quad (3.8)$$

Wprowadźmy numerację elementów w zbiorach B° i $S \setminus B^\circ$ w taki sposób, że $B^\circ = \{x_1, \dots, x_b\}$, $S \setminus B^\circ = \{y_1, \dots, y_n\}$, gdzie $b = |B^\circ|$, $n = |S \setminus B^\circ|$.

Rodziny $\mathcal{F}_{ci}(B^\circ)$, $\mathcal{F}_{cu}(B^\circ)$ mogą być teraz przedstawione z użyciem macierzy fundamentalnej $A(B^\circ)$, gdzie

$$A(B^\circ) = [a_{ij}] \quad i = 1, \dots, b, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_i \in C(y_j, B^\circ) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zbiory rodziny $\mathcal{F}_{ci}(B^\circ)$ odpowiadają teraz kolumnom macierzy $A(B^\circ)$, natomiast zbiory z $\mathcal{F}_{cu}(B^\circ)$ - wierszom $A(B^\circ)$.

Element a_{ij} macierzy $A(B^\circ)$ może być wyznaczony przez zbadanie niezależności zbioru $(B^\circ \setminus \{x_i\}) \cup \{y_j\}$, a zatem wyznaczenie całej macierzy $A(B^\circ)$ może być dokonane poprzez $O(b \cdot n)$ badań niezależności zbiorów. Mając daną macierz fundamentalną i korzystając z Wniosku 3.3, można wyznaczyć tolerancje wszystkich elementów dokonując $O(b \cdot n)$ porównań.

Inną możliwością reprezentowania struktury cykli i przekrojów fundamentalnych matroidu jest konstrukcja grafu pomocniczego nazywanego *transmuterem*. Podejście takie zostało wprowadzone w [81,82] w związku z analizą wrażliwości dla najkrótszych drzew rozpinających i drzew najkrótszych dróg w grafie. W przypadku matroidów pojęcie to może być wprowadzone w analogiczny sposób.

Dla danej bazy B matroidu $M = (S, \mathcal{I})$, transmuterem będziemy nazywać graf skierowany acykliczny $T(B)$, mający po jednym wierzchołku e_x o stopniu wejściowym równym zeru dla każdego $x \in B$, po jednym wierzchołku e_y o stopniu wyjściowym równym zeru dla każdego $y \in S \setminus B^\circ$, dowolną liczbę dodatkowych wierzchołków, a ponadto spełniający następujący warunek :

- (•) W $T(B)$ istnieje droga z e_x do e_y wtedy i tylko wtedy, gdy $y \in W(x, B)$.

W [82] pokazano, jak korzystając z odpowiednich struktur danych, można efektywnie skonstruować transmuter dla przypadku najkrótszego drzewa rozpinającego grafu (to znaczy dla optymalnej bazy matroidu grafowego).

Mając dany transmuter dla bazy B° , można do znalezienia wszystkich tolerancji górnych i dolnych elementów matroidu zastosować poniższe proste algorytmy, których poprawność wynika bezpośrednio z Wniosku 3.3 i definicji transmutera. Algorytmy te polegają na przypisywaniu wierzchołkom transmutera liczb rzeczywistych nazywanych *etykietami*. Dla etykiety przypisywanej wierzchołkowi e będziemy stosować oznaczenie $l(e)$. Ponadto, dla wierzchołka e , oznaczymy symbolem $In(e)$ zbiór wierzchołków różnych od e i incydentnych z krawędziami wchodzącymi do e , natomiast symbolem $Out(e)$ - zbiór wierzchołków różnych od e i incydentnych z krawędziami wychodzącymi z e .

Algorytm wyznaczania tolerancji dolnych dla $y \in S \setminus B^0$

- 1° Przypisz etykiety $l(e_x) = w(x)$ wszystkim wierzchołkom e_x dla $x \in B^0$; inne wierzchołki pozostają nieetykietowane.
- 2° Dla każdego wierzchołka e , dla którego wszystkie wierzchołki należące do zbioru $In(e)$ są już etykietowane, przypisz etykietę równą maksymalnej wartości etykiety wierzchołka należącego do $In(e)$.
- 3° Oblicz $t^-(y, B^0) = w(y) - l(e_y)$, $y \in S \setminus B^0$.

Algorytm wyznaczania tolerancji górnych dla $x \in B^0$

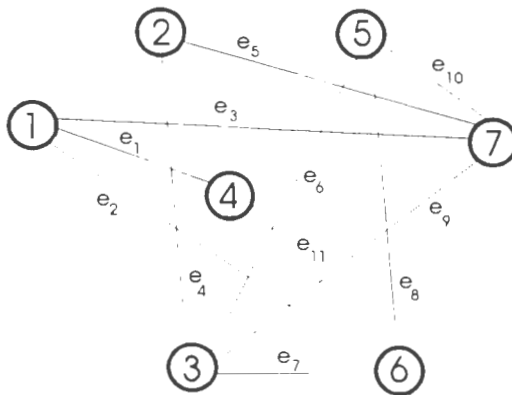
- 1° Przypisz etykiety $l(e_y) = w(y)$ wszystkim wierzchołkom e_y dla $y \in S \setminus B^0$; inne wierzchołki pozostają nieetykietowane.
- 2° Dla każdego wierzchołka e , dla którego wierzchołki ze zbioru $Out(e)$ są już etykietowane, przypisz etykietę równą minimalnej wartości etykiety wierzchołka należącego do zbioru $Out(e)$.
- 3° Oblicz $t^+(x, B^0) = l(v_x) - w(x)$, $x \in B^0$.

Powyższe algorytmy dokonują jednokrotnego etykietowania każdego z wierzchołków transmutera. Liczba porównań zależy od stopni wierzchołków grafu $T(B^0)$. Każdy transmuter można, poprzez zwiększenie liczby wierzchołków dodatkowych, przekształcić w taki sposób, że dla każdego z wierzchołków stopień wejściowy i stopień wyjściowy jest nie większy niż 2. Opisane wyżej algorytmy wymagają wówczas $O(T)$ porównań, gdzie T jest liczbą wierzchołków tak przekształconego transmutera. W [81,82] pokazano, że dla matroidu grafowego można skonstruować transmuter, dla którego T rośnie niemal liniowo w funkcji liczby krawędzi grafu m .

Przykład 3.1

Zilustrujemy dotychczasowe rozważania na przykładzie matroidu grafowego. Niech G będzie grafem nieskierowanym pokazanym na Rysunku 5. Wagi krawędzi podane są w poniższej tabeli :

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}
$w(e)$	7	4	11	6	3	2	9	4	10	5	12



Rys. 5.

Oznaczmy przez $M = (E, \mathcal{F})$ matroid grafu G . Bazą o minimalnej wadze w M jest podzbiór krawędzi G , tworzących najkrótsze drzewo rozpinające. W rozważanym przykładzie baza optymalna jest następująca :

$$B^0 = \{ e_1, e_2, e_5, e_6, e_8, e_{10} \},$$

natomiast $v(B^0) = 25$.

Wprowadźmy naturalną numerację elementów zbiorów B° i $S \setminus B^\circ$, gdzie

$$S \setminus B^\circ = \{ e_3, e_4, e_7, e_9, e_{11} \}.$$

Macierz fundamentalna dla B° jest następująca:

$$A(B^\circ) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Wiersze macierzy odpowiadają elementom $e_1, e_2, e_5, e_6, e_8, e_{10}$, natomiast kolumny - elementom $e_3, e_4, e_7, e_9, e_{11}$. Korzystając z Wniosku 3.3 i macierzy $A(B^\circ)$, łatwo teraz obliczyć tolerancje wszystkich elementów matroidu. Weźmy na przykład element e_3 nie należący do B° . Z Wniosku 3.3 wynika, że $t^+(e_3, B^\circ) = \infty$, natomiast dla obliczenia $t^-(e_3, B^\circ)$ należy wyznaczyć maksymalną wagę elementu należącego do zbioru $C(e_3, B^\circ) \setminus \{e_3\}$. Elementom tego zbioru odpowiadają jedynki w kolumnie macierzy $A(B^\circ)$ przyporządkowanej elementowi e_3 (w tym przypadku jest to kolumna pierwsza). Należy zatem wyznaczyć maksimum spośród wag elementów e_2, e_8, e_{10} . Ostatecznie z (3.6) otrzymujemy

$$t^-(e_3, B^\circ) = w(e_3) - \max\{w(e_2), w(e_8), w(e_{10})\} = 11 - \max\{4, 4, 5\} = 6.$$

Podobnie wyznaczamy podane w poniższej tabelce tolerancje dolne pozostałych elementów matroidu nie należących do bazy B° :

e	e_3	e_4	e_7	e_9	e_{11}
$t^-(e, B^\circ)$	6	1	5	5	5

Analogicznie obliczane są tolerancje górne dla elementów należących do B^0 . Weźmy na przykład element e_{10} . Do obliczenia tolerancji górnej tego elementu należy znaleźć minimalną wagę elementu ze zbioru $W(e_{10}, B^0)$. Zbiorowi temu odpowiadają jedynki w wierszu macierzy $A(B^0)$ przyporządkowanym elementowi e_{10} (w naszym przypadku jest to wiersz szósty). Należy więc wyznaczyć minimum spośród wag elementów e_3, e_4, e_9 . Ostatecznie z (3.5) mamy

$$t^+(e_{10}, B^0) = \min\{w(e_3), w(e_4), w(e_9)\} - w(e_{10}) = \min\{11, 6, 10\} - 5 = 1.$$

W podobny sposób otrzymujemy podane niżej tolerancje górne dla wszystkich pozostałych elementów bazy B^0 :

e	e_1	e_2	e_5	e_6	e_8	e_{10}
$t^+(e, B^0)$	5	7	3	4	5	1

□

3.2.4 Wykorzystanie tolerancji elementów w innych zadaniach analizy poptymalizacyjnej związanych z optymalną bazą matroidu

W poprzednim punkcie rozważany był podstawowy problem z zakresu analizy wrażliwości dla optymalnej bazy matroidu, polegający na wyznaczeniu tolerancji pojedynczych elementów matroidu. W tym punkcie pokażemy, jak znajomość tolerancji elementów może być wykorzystana w rozwiązywaniu innych problemów należących do analizy poptymalizacyjnej, związanych z bazą matroidu o minimalnej wadze. Zaczniemy od udowodnienia twierdzenia [58] będącego podstawą tego podejścia. Twierdzenie to wiąże tolerancje elementów z różnicą wag bazy optymalnej i dowolnej bazy matroidu. Z faktu tego będziemy również korzystać w następnym punkcie.

Twierdzenie 3.6

Niech B° będzie bazą o minimalnej wadze w matroidzie M , a B - dowolną bazą tego matroidu. Zachodzą wówczas następujące nierówności :

$$v(B) - v(B^\circ) \geq \sum_{y \in B \setminus B^\circ} t^-(y, B^\circ) \quad (3.9)$$

oraz

$$v(B) - v(B^\circ) \geq \sum_{x \in B^\circ \setminus B} t^+(x, B^\circ). \quad (3.10)$$

Dowód. Rozważmy dowolną bijekcję $\psi \in \Psi(B, B^\circ)$; z Twierdzenia 3.4 wynika, że taka bijekcja istnieje. Mamy

$$v(B) - v(B^\circ) = \sum_{y \in B \setminus B^\circ} [w(y) - w(\psi(y))].$$

Ponadto, z definicji Ψ wynika, że dla dowolnego $y \in B \setminus B^\circ$ zachodzi warunek $(B^\circ \setminus \{\psi(y)\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$, a zatem, na mocy Lematu 3.1, mamy $\psi(y) \in C(y, B^\circ)$. Ale warunek (3.6) pociąga teraz dla każdego $y \in B \setminus B^\circ$ nierówność $w(y) - w(\psi(y)) \geq t^-(x, B^\circ)$ i w konsekwencji otrzymujemy zależność (3.9). Podobnie, dla dowolnego $x \in B^\circ \setminus B$, z faktu, że $(B^\circ \setminus \{x\}) \cup \{\psi^{-1}(x)\} \in \mathcal{B}$ wynika, że $\psi^{-1}(x) \in W(x, B^\circ)$. Z warunku (3.5) mamy teraz $w(\psi^{-1}(x)) - w(x) \geq t^+(x, B^\circ)$, a ponieważ $v(B) - v(B^\circ) = \sum_{x \in B^\circ \setminus B} [w(\psi(x)) - w(x)]$, otrzymujemy w końcu (3.10). ■

Rozważmy teraz następujące dwa problemy z zakresu analizy poptymalizacyjnej : Mając daną bazę B° o minimalnej wadze chcemy ocenić,

jaka byłaby minimalna waga bazy, która nie zawierałaby wskazanych elementów należących do B^0 . Podobnie, może nas interesować, o ile większa musi być waga bazy, która zawiera pewne elementy nie należące do zbioru B^0 . Powyższe pytania prowadzą do sformułowanych niżej zadań wyznaczania baz matroidu o minimalnej wadze, które spełniają jeszcze dodatkowe ograniczenia.

Niech $D \subseteq B^0$. Rozważmy problem

$$v_D = \min \{ v(B) : B \in \mathcal{B}, D \cap B = \emptyset \}. \quad (3.11)$$

Podobnie, dla $A \subseteq S \setminus B^0$,

$$v^A = \min \{ v(B) : B \in \mathcal{B}, A \subseteq B \}. \quad (3.12)$$

Zadania (3.11) i (3.12) mogą być rozwiązywane poprzez nieznacznie zmodyfikowany algorytm zachłanny. Jeśli jednak znane są wartości tolerancji elementów matroidu, wówczas bardzo łatwo jest obliczyć oszacowania od dołu wartości v_D , v^A dla dowolnych zbiorów D oraz A . Z Twierdzenia 3.6 otrzymujemy bowiem następujące wnioski :

Wniosek 3.5

Niech $D \subseteq B^0$. Wówczas, dla dowolnej bazy B_D spełniającej warunek $D \cap B_D = \emptyset$, zachodzi nierówność

$$v(B_D) \geq v(B^0) + \sum_{x \in D} t^+(x, B^0). \quad (3.13)$$

■

Wniosek 3.6

Niech $A \subseteq S \setminus B^0$ i $A \in \mathcal{F}$. Wówczas, dla dowolnej bazy B^A spełniającej warunek $A \subseteq B^A$, zachodzi nierówność

$$v(B^A) \geq v(B^0) + \sum_{x \in A} t^-(x, B^0). \quad (3.14)$$

■

Przykład 3.2

Wyniki prezentowane w tym punkcie zilustrujemy na przykładzie matroidu grafowego z Przykładu 3.1. Bazą o minimalnej wadze w tym matroidzie, to znaczy najkrótszym drzewem rozpinającym w grafie z Rysunku 5, jest $B^0 = \{e_1, e_2, e_5, e_6, e_8, e_{10}\}$ i $v(B^0) = 25$.

Tolerancje elementów dla tej bazy podane są w punkcie 3.2.3. Załóżmy, że interesuje nas pogorszenie rozwiązania po wprowadzeniu dodatkowego warunku, że elementy e_2, e_6, e_8 nie mogą należeć do bazy. Wykorzystując obliczone poprzednio tolerancje, mamy

$$t^+(e_2, B) + t^+(e_6, B) + t^+(e_8, B) = 16.$$

A zatem, na podstawie Wniosku 3.5, wiadomo, że każda z baz matroidu, nie zawierająca elementów e_2, e_6, e_8 , nie może mieć wagi mniejszej niż 41. W tym przypadku oszacowanie, wyznaczone przez nierówność (3.13), okazuje się być ścisłe, bowiem tę właśnie wagę ma baza

$$B_D = \{e_1, e_3, e_4, e_5, e_7, e_{10}\}.$$

W podobny sposób można ocenić efekt włączenia pewnych elementów do bazy. Jeśli na przykład chcemy, aby e_4, e_7 znalazły się w bazie, to z Wniosku 3.6 wynika, że pogorszenie rozwiązania związane z wprowadzeniem tych elementów do bazy nie może być mniejsze niż

$$t^-(e_4, B^0) + t^-(e_7, B^0) = 6,$$

a zatem waga takiej bazy jest równa co najmniej 31. Również w tym przypadku oszacowanie jest ścisłe, bowiem rozwiązaniem zadania (3.12) jest baza $B^A = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ oraz $v(B^A) = 31$. □

3.3 Analiza wrażliwości rozwiązań dla binarnego zadania załadunku

3.3.1 Wprowadzenie

Binarne liniowe zadanie załadunku jest ważnym szczególnym przypadkiem zadania programowania binarnego liniowego. Zwykle jest formułowane w następującej postaci :

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & a^T x \leq a_0 \\ & x \in \{0,1\}^n. \end{aligned} \tag{3.15}$$

gdzie $a, c \in \mathbb{R}_+^n$, $a_0 \in \mathbb{R}_+$.

Wiadomo, że mimo prostej struktury wynikającej z istnienia tylko jednego ograniczenia, zadanie to należy do klasy problemów NP-trudnych (patrz np. [8,22]). Jednakże intensywne prace nad algorytmami rozwiązywania zadania załadunku doprowadziły do metod pozwalających na uzyskiwanie rozwiązań optymalnych dla dużych n (rzędu kilkuset tysięcy - patrz np. [17]).

Binarne zadanie załadunku może być naturalnym modelem sytuacji decyzyjnych, w których należy wybrać podzbiór spośród n możliwych wariantów. Pojedyncze ograniczenie zadania określa dopuszczalność takiego wyboru, a funkcja celu ocenia jego jakość. Bardzo prosty przykład takiego problemu jest następujący :

Danych jest n projektów badawczych, ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do n . Parametr a_j dla $j = 1, \dots, n$ jest równy wysokości nakładów finansowych niezbędnych do wykonania projektu o numerze j , natomiast c_j oznacza zysk ze zrealizowania projektu j .

Należy wybrać podzbiór projektów w taki sposób, aby łączne nakłady nie przekroczyły a_0 i zysk był maksymalny.

Oprócz naturalnych i prostych sytuacji decyzyjnych, jak ta, opisana wyżej, zadanie załadunku jest używane często jako zadanie pomocnicze w bardziej złożonych problemach. Typowym zastosowaniem tego rodzaju jest użycie zadania załadunku jako podproblemu w metodzie dualnej opartej na tak zwanym ograniczeniu zastępczym.

Bardzo intensywnie są również badane rozmaite uogólnienia zadania (3.15), takie jak zadanie załadunku z wyborem, wielowymiarowe zadanie załadunku, nieliniowe zadanie załadunku. W metodach rozwiązywania tych zadań często występują odwołania do podstawowego modelu, jakim jest zadanie (3.15).

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione wyniki [48,50], dotyczące częściowej analizy wrażliwości dla rozwiązań optymalnych binarnego zadania załadunku. Analiza jest ograniczona do przypadku, gdy zmianom mogą podlegać dane w ograniczeniu zadania. Przypadek w pewnym sensie odwrotny, gdy ustalone jest ograniczenie zadania, natomiast badany jest wpływ zmian współczynników w funkcji celu, był omawiany w bardziej ogólnym postawieniu w Rozdziale 2. Rezultaty z [50] zostały uogólnione na przypadek całkowitoliczbowego zadania załadunku w [70,71].

3.3.2 Dopuszczalne zmiany współczynników ograniczenia w zadaniu załadunku

Rozważmy binarne zadanie załadunku (3.15). Zbiór danych zadania można zapisać w postaci wektora parametrów $p = (c^T, a^T, a_0)^T$, $p \in \mathbb{R}_+^{2n+1}$. Załóżmy, że $x^0 \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (3.15) dla $p = (c^T, a^T, a_0)^T$ i niech $c_0 = c^T x^0$. Będzie nas interesował podobszar

niewrażliwości rozwiązania x^0 , wyznaczony przy założeniu, że wektor c współczynników funkcji celu jest ustalony. Przyjmijmy, że współczynniki ograniczenia zadania (3.15) mogą być dowolnymi liczbami nieujemnymi, a zatem chcemy wyznaczyć zbiór wektorów $(a^T, a_0)^T \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, dla których x^0 pozostaje rozwiązaniem optymalnym zadania (3.15). Tak określony podobszar niewrażliwości będziemy oznaczać symbolem $P(x^0; c)$. Zaczniemy od udowodnienia prostego lematu:

Lemat 3.4

Zbiór $P(x^0; c)$ jest wielościanowym stożkiem wypukłym w \mathbb{R}_+^{n+1} .

Dowód. Wektor x^0 jest rozwiązaniem optymalnym zadania (3.15) jeśli spełnione są dwa warunki:

- (i) x^0 jest rozwiązaniem dopuszczalnym;
- (ii) nie istnieje rozwiązanie dopuszczalne x zadania (3.15), dla którego $c^T x > c_0$.

Niech $C = \{ x \in \mathbb{B}^n : c^T x > c_0 \}$. Warunek (ii) jest równoważny układowi nierówności

$$a^T x > a_0 \quad \text{dla każdego } x \in C, \quad (3.16)$$

natomiast (i) odpowiada nierówności

$$a^T x^0 \leq a_0. \quad (3.17)$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned}
P(x^0; c) = \{ (a^T, a_0)^T \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \\
a^T x^0 \leq a_0 \\
a^T x > a_0 \text{ dla każdego } x \in C \}.
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

Nierówności (3.16) i (3.17) definiują stożek wypukły w \mathbb{R}_+^{n+1} , a ponieważ C jest zbiorem skończonym, zatem jest to stożek wielościenney. ■

Nierówności (3.16), (3.17) dają wprawdzie pełny opis zbioru $P(x^0; c)$, lecz jest to opis w znacznym stopniu nadmiarowy. Opis ten można uprościć przez zastąpienie zbioru C przez zbiór wektorów odpowiadających tak zwanym pokryciom minimalnym nierówności

$$c^T x \leq c_0. \tag{3.19}$$

Niech dla $Q \subseteq N = \{1, \dots, n\}$

$$v(Q) = \sum_{i \in Q} c_i, \tag{3.20}$$

gdzie c_i , $i = 1, \dots, n$, są elementami wektora c .

Zbiór $Q \subseteq N$ nazywamy *pokryciem nierówności* (3.19), jeśli $v(Q) > c_0$. Mówimy, że Q jest *pokryciem minimalnym* nierówności (3.19), jeśli jest pokryciem i dla każdego $R \subseteq Q$, $R \neq Q$, spełniona jest nierówność $v(R) < c_0$. Zbiór pokryć minimalnych nierówności (3.19) oznaczymy symbolem \mathcal{Q} . Dla danego $Q \subseteq N$ wektor $x_Q = (x_i, i \in N)$, gdzie $x_i = 1$ dla $i \in Q$ oraz $x_i = 0$ dla $i \notin Q$, nazywamy *minimalnym wektorem* *pokrywającym*, jeśli $Q \in \mathcal{Q}$. Zachodzi następujący fakt:

Lemat 3.5

Nierówność $a^T x > a_0$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+^n$, $a_0 \in \mathbb{R}^n$, jest spełniona dla każdego $x \in C = \{ y \in \mathbb{B}^n : c^T y > c_0 \}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona dla każdego x_0 będącego minimalnym wektorem pokrywającym nierówności $c^T x \leq c_0$.

Dowód.

(\Rightarrow) Dowód tej części lematu jest natychmiastowy, bowiem dla każdego $Q \in \mathcal{Q}$, $x_Q \in C$, a zatem $a^T x_Q > a_0$.

(\Leftarrow) Załóżmy, że $a^T x_Q > a_0$ dla każdego x_Q , $Q \in \mathcal{Q}$. Chcemy pokazać, że $a^T x > a_0$ dla dowolnego $x \in C$. Załóżmy, że tak nie jest, a zatem, że istnieje $x^1 \in C$, dla którego $a^T x^1 \leq a_0$. Wykażemy, że założenie to prowadzi do sprzeczności. Utwórzmy ciąg wektorów x^1, x^2, \dots, x^k w sposób następujący: Początkowo jedynym elementem ciągu jest wektor x^1 . Następnie w kolejnych krokach dla ostatniego wektora aktualnego ciągu (oznaczymy ten wektor przez x^i) wybieramy dowolny wskaźnik i , dla którego $x_i^1 = 1$ oraz spełniona jest nierówność $c^T x^1 - c_i > c_0$. Jeśli taki wskaźnik istnieje, to tworzymy nowy element x^{i+1} ciągu, gdzie $x_j^{i+1} = x_j^1$ dla $j \neq i$ oraz $x_i^{i+1} = 0$. W przeciwnym przypadku konstrukcja ciągu się kończy, a ostatni jego element jest minimalnym wektorem pokrywającym. Ponadto, z nieujemności wektora a , wynika, że $a^T x^k \leq \dots \leq a^T x^1$. Jeśli więc przyjmiemy, że $a^T x^1 \leq a_0$, to również $a^T x^k \leq a_0$, co jest sprzeczne z założeniem, że dla każdego minimalnego wektora pokrywającego zachodzi $a^T x_Q > a_0$. ■

Rodzina pokryć minimalnych nierówności może być wygenerowana w wyniku zastosowania poniższego prostego algorytmu. Załóżmy, że współczynniki c_i , $i = 1, \dots, n$, są uporządkowane według nierosnących wag, tzn. $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$. Rodzina pokryć minimalnych jest oznaczana symbolem \mathcal{Q} , natomiast \mathcal{R} jest pomocniczą rodziną zbiorów.

Algorytm generowania pokryć minimalnych

1° $Q := \emptyset, \mathcal{R} := \{ \emptyset \};$

2° Oblicz dla $j = n, n-1, \dots, 1$ wartość $s_j = \sum_{i=j}^n c_i$;

3° **for** $i:=1$ **to** n **do**

begin

 Dla każdego $R \in \mathcal{R}$ **do**

if $v(R) + s_i \leq c_0$ **then** $\mathcal{R} := \mathcal{R} \setminus \{R\}$

else utwórz zbiór $R_i := R \cup \{i\};$

if $v(R) > c_0$ **then** $Q := Q \cup \{R_i\}$

 { R jest pokryciem minimalnym }

else $\mathcal{R} := \mathcal{R} \cup \{R_i\}$

end.

Mając zbiór pokryć minimalnych można w sposób jawny wypisać zredukowany w stosunku do (3.18) układ warunków definiujących podobszar niewrażliwości $P(x^0; c)$, bowiem z (3.18) i z Lematu 3.5 mamy

$$\begin{aligned} P(x^0; c) = \{ (a_i^T, a_0)^T \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \\ a_i^T x^0 \leq a_0 \\ \sum_{i \in Q} a_i > a_0 \quad \text{dla każdego } Q \in \mathcal{Q} \}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Jednakże podanie pełnego opisu zbioru $P(x^0; c)$ jest praktycznie możliwe jedynie dla małych n , bowiem liczba pokryć minimalnych może bardzo szybko rosnąć z rozmiarem zadania.

Przykład 3.3

Rozważmy binarne zadanie załadunku

$$\begin{aligned} \max & (2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4) \\ & 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 8 \\ & x_1, \dots, x_4 = 0 \text{ albo } 1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Rozwiązaniem optymalnym tego zadania jest wektor $x^0 = (0, 1, 1, 0)^T$ i $c_0 = c^T x^0 = 10$.

Zbiór pokryć minimalnych nierówności $c^T x \leq c_0$, która w tym przypadku ma postać

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 10,$$

zawiera dwa elementy

$$Q = \{ \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\} \}.$$

Zgodnie z (3.21), zbiór $P(x^0; c)$ jest wyznaczony przez następujący układ nierówności

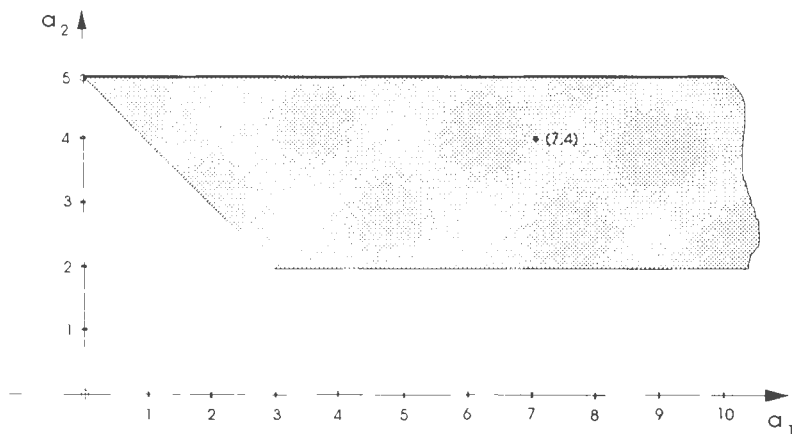
$$\begin{aligned} a_2 + a_3 & \leq a_0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & > a_0 \\ a_2 + a_3 + a_4 & > a_0 \\ a_1, a_2, a_3, a_4 & \geq 0. \end{aligned}$$

Znajomość zbioru pokryć minimalnych nierówności $c^T x \leq c_0$ pozwala na łatwe wypisywanie układów nierówności definiujących podzbiory zbioru $P(x^0; c)$, otrzymywane przy założeniu, że niektóre ze współczynników a_i , $i = 0, \dots, n$, są ustalone. Podzbiór zbioru $P(x^0; c)$ dla ustalonych c oraz a_i , $i \in I \subseteq N$, będziemy oznaczać symbolem $P(x^0; c, a_i, i \in I)$. Ustalając w omawianym wyżej przykładzie $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_0 = 8$, otrzymujemy z (3.21) podzbiór $P(x^0; c, a_3, a_4, a_0)$ obszaru

niewrażliwości wyznaczony przez następujący układ nierówności :

$$\begin{aligned} a_2 &\leq 5 \\ a_1 + a_2 &> 5 \\ a_2 &> 2 \\ a_1, a_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Obszar ten jest przedstawiony na Rysunku 6 (obszar zacięniowany). Brzeży nie zaznaczone linią pogrubioną nie należą do obszaru niewrażliwości $P(x^0; c, a_3, a_4, a_0)$.



Rys.6 Obszar niewrażliwości $P(x^0; c, a_3, a_4, a_0)$

□

Ustalenie wszystkich współczynników ograniczenia z wyjątkiem jednego pozwala na badanie tolerancji tego współczynnika względem rozwiązania optymalnego x^0 . Z Lematu 3.4 wynika, że wówczas podobszar niewrażliwości jest odcinkiem lub półprostą.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy wektor a jest ustalony, i zmiany mogą dotyczyć jedynie współczynnika a_0 prawej strony ograniczenia, to znaczy poszukujemy podobszaru niewrażliwości $P(x^0; c, a)$. Z (3.18) wynika, że

$$P(x^0; c, a) = \{ a_0 \in \mathbb{R}_+ : a_0 \geq a^T x^0, \\ a_0 < a^T x \text{ dla } x \in C \}. \quad (3.23)$$

Niech $\underline{a}_0 = a^T x^0$ i niech $\bar{a}_0 = \max_{x \in C} a^T x$, tzn. \bar{a}_0 jest wartością optymalną następującego binarnego zadania załadunku :

$$\bar{a}_0 = \min_{\substack{a^T x \\ c^T x > c_0 \\ x \in \mathbb{B}^n}} a^T x \quad (3.24)$$

Przy przyjętych wyżej oznaczeniach, z (3.23) mamy

$$P(x^0; c, a) = [\underline{a}_0, \bar{a}_0).$$

Jeśli zadanie (3.24) jest sprzeczne, to, zgodnie z przyjętą konwencją, jego wartość optymalna jest równa ∞ i współczynnik a_0 może dowolnie rosnąć, nie naruszając optymalności rozwiązania x^0 .

Zauważmy, że w zadaniu (3.24) efektywności zmiennych, mierzone ilorazami współczynników przy tych zmiennych w funkcji celu i ograniczeniu, są odwrotnościami efektywności tych zmiennych w zadaniu (3.15). Jeśli więc przy rozwiązywaniu zadania (3.15) dokonano sortowania zmiennych według nierosnących efektywności, to otrzymany porządek może być wykorzystany przy wyznaczaniu \bar{a}_0 .

Wartość \bar{a}_0 może być łatwo znaleziona, jeśli znany jest zbiór Q pokryć minimalnych nierówności $c^T x \leq c_0$, bowiem z (3.24) wynika, że

$$\bar{a}_0 = \min_{Q \in Q} \sum_{i \in Q} a_i. \quad (3.25)$$

Przykład 3.4

Rozważmy ponownie zadanie (3.22). Zbadamy, dla jakich wartości a_0 (przy ustalonych pozostałych współczynnikach zadania) wektor $x^0 = (0, 1, 1, 0)^T$ pozostaje rozwiązaniem optymalnym. Mamy $\bar{a}_0 = a^T x^0 = (7, 4, 3, 3)(0, 1, 1, 0)^T = 7$. Wartość \bar{a}_0 może być znaleziona jako wartość optymalna zadania (3.24) lub z zależności (3.25).

W pierwszym przypadku mamy

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 = \min & (7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4) \\ & 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 > 10 \\ & x_1, \dots, x_4 = 0 \text{ albo } 1. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem optymalnym tego zadania jest wektor $(0, 1, 1, 1)^T$ i $\bar{a}_0 = 10$. Tę samą wartość otrzymujemy ze zbioru pokryć minimalnych Q . W tym przykładzie $Q = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$, a zatem

$$\bar{a}_0 = \min \{ (a_1 + a_2 + a_3), (a_2 + a_3 + a_4) \} = \{14, 10\} = 10.$$

Wektor x^0 pozostaje więc rozwiązaniem optymalnym, jeśli a_0 należy do przedziału $[7, 10)$.

□

Założmy teraz, że ustalone są : wektor c , współczynnik a_0 oraz wszystkie współczynniki lewej strony ograniczenia z wyjątkiem a_k dla pewnego $k \in N$. Chcemy znaleźć obszar zmienności współczynnika a_k , przy którym x^0 pozostaje rozwiązaniem optymalnym zadania (3.15).

Dopuszczalny wzrost współczynnika a_k jest określony warunkiem $a^T x^0 \leq a_0$ w (3.23). Mamy

$$\sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_i x_i^0 + a_k x_k^0 \leq a_0. \quad (3.26)$$

Zauważmy, że jeśli w rozwiązaniu optymalnym $x_k^0 = 0$, to współczynnik a_k może dowolnie rosnąć, nie naruszając optymalności rozwiązania x^0 . Jeśli natomiast $x_k^0 = 1$, to wówczas z (3.26) otrzymujemy

$$a_k \leq \bar{a}_k = a_0 - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_i x_i^0. \quad (3.27)$$

Dopuszczalne zmniejszenie współczynnika a_k określają nierówności (3.16). Otrzymujemy następujący układ warunków :

$$a_k x_k > a_0 - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_i x_i \quad \text{dla każdego } x \in C. \quad (3.28)$$

Rozważmy następujące zadanie programowania binarnego:

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_k &= \max \left(a_o - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} a_i x_i \right) \\
 &\sum_{i \in N \setminus \{k\}} c_i x_i > c_o - c_k \\
 x_i &= 0 \text{ albo } 1 \text{ dla } i \in N \setminus \{k\}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Jeśli zadanie (3.29) jest sprzeczne albo $\underline{a}_k < 0$, to oznacza to, że warunki (3.28) są spełnione dla dowolnego $a_k \geq 0$. W przeciwnym przypadku otrzymujemy ograniczenie od dołu na a_k w postaci

$$a_k > \underline{a}_k. \tag{3.30}$$

Podobnie jak w przypadku zadania (3.24), efektywności zmiennych w zadaniu (3.29) są odwrotnościami efektywności zmiennych w oryginalnym zadaniu (3.15), co pozwala na uniknięcie ponownego sortowania zmiennych przy rozwiązywaniu problemu (3.29).

Jeśli znane są pokrycia minimalne nierówności (3.19), wówczas dopuszczalne zmniejszenie współczynnika a_k może być wyznaczone na ich podstawie.

Niech $Q_k = \{ Q \in Q : k \in Q \}$. Jeśli $Q_k = \emptyset$ albo $\underline{a}_k < 0$, gdzie $\underline{a}_k = \max_{Q \in Q_k} (a_o - \sum_{i \in Q \setminus \{k\}} a_i)$, to wówczas mamy warunek $a_k \geq 0$.

W pozostałych przypadkach prawdziwa jest nierówność (3.30).

Przykład 3.5

Rozważmy ponownie zadanie (3.22) i zbadajmy zakres zmian współczynnika a_3 , przy których wektor $x^0 = (0,1,1,0)^T$ pozostaje rozwiązaniem optymalnym. Z (3.27) mamy

$$\bar{a}_3 = a_0 - a_2 = 8 - 4 = 4,$$

a zatem musi być spełniona nierówność $a_3 \leq 4$.

Zadanie (3.29) ma teraz postać

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= \max (8 - 7x_1 + 4x_2 + 3x_4) \\ &2x_1 + 6x_2 + x_4 > 6 \\ &x_1, x_2, x_4 = 0 \text{ albo } 1. \end{aligned}$$

Wartość optymalna \bar{a}_3 powyższego zadania jest równa 1, a zatem otrzymujemy warunek $a_3 > 1$. Dopuszczalnym obszarem zmienności współczynnika a_3 , w którym zachowana jest optymalność wektora x^0 , jest więc przedział $(1,4]$. \square

3.4 Analiza wrażliwości dla zadania wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie oraz dla zadania komiwojażera

3.4.1 Wprowadzenie

Zadanie komiwojażera i związane z nim zadanie wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie należą do najbardziej znanych problemów optymalizacji kombinatorycznej. Zadaniom tym jest poświęcona bardzo obszerna literatura (patrz monografia [43]). Zadanie komiwojażera jest przy tym traktowane jako klasyczny problem optymalizacji kombinatorycznej, na którym sprawdzane są niemal wszystkie nowe podejścia i dzięki temu na jego podstawie można prześledzić rozwój całej dziedziny.

W rozdziale niniejszym rozważane są : symetryczne zadanie komiwojażera i zadanie wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona o ustalonych końcach w grafie nieskierowanym. Sformułowania obu problemów są następujące :

Rozważamy graf nieskierowany ważony $G = (V, E, C)$, gdzie $V = \{1, \dots, n\}$ jest zbiorem wierzchołków, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, $E \subseteq V \times V$, jest zbiorem krawędzi, a $C \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$, gdzie $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jest symetryczną macierzą wag krawędzi. Jeśli $e = (i, j) \notin E$, to wówczas $c(i, j) = \infty$. Przyjmijmy, że dla $i \in V$, $c(i, i) = \infty$.

Podgraf (V, Q, C) będziemy utożsamiać ze zbiorem $Q \subseteq E$ jego krawędzi. Waga $l(Q)$ tego podgrafu jest definiowana jako suma wag

jego krawędzi, tzn.

$$l(Q) = \sum_{e \in Q} c(e).$$

W przypadku, gdy nie będą istotne wagi przypisane krawędziom grafu, zamiast oznaczenia (V, E, C) będziemy stosować typowy zapis $G = (V, E)$.

Droga Hamiltona w grafie G nazywamy taki jego podgraf (V, H, C) , który jest drogą przechodzącą przez wszystkie wierzchołki grafu dokładnie jeden raz.

Obwodem Hamiltona w grafie G nazywamy podgraf, będący drogą zamkniętą, przechodzącą jeden raz przez wszystkie wierzchołki grafu.

W przypadku zadań definiowanych na drogach Hamiltona rozważane są dwa warianty :

- (i) zadania dla dróg z ustalonymi końcami ;
- (ii) zadania dla dróg z wolnymi końcami.

Zadania (ii) są sprowadzalne do problemów z ustalonymi końcami (patrz [12]). W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że w grafie G są wyróżnione dwa wierzchołki, na przykład wierzchołek 1 i wierzchołek n . Symbolem \mathcal{H} będziemy oznaczać zbiór dróg Hamiltona w G o końcach w wierzchołkach 1 oraz n . Podobnie, niech \mathcal{H} oznacza zbiór obwodów Hamiltona w grafie G .

Biorąc teraz w sformułowaniu ogólnego zadania optymalizacji dyskretnej z Rozdziału 1 $S = E$, $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ oraz $C(H) = l(H)$, otrzymujemy *zadanie znajdowania najkrótszej drogi Hamiltona w G* :

$$\min_{H \in \mathcal{H}} l(H). \tag{3.31}$$

Podobnie jest formułowane *symetryczne zadanie komiwojażera* :

$$\min_{H \in \bar{\mathcal{H}}} l(H). \quad (3.32)$$

Oba zadania należą do problemów bardzo trudnych obliczeniowo. Wiadomo, że nie tylko są w klasie zadań NP-trudnych, ale że również znalezienie rozwiązania przybliżonego z zadany błądem jest w ogólnym przypadku zadaniem NP-trudnym. Do niedawna problemy definiowane na grafach o kilkuset wierzchołkach były uważane za nierozwiązywalne na współczesnych komputerach. W ostatnich latach dokonano jednak znacznego postępu w dziedzinie algorytmów dokładnego rozwiązywania zwłaszcza zadania komiwojażera, co pozwala na uzyskiwanie rozwiązań optymalnych dla zadań o kilku tysiącach wierzchołków. Należy tu również wspomnieć o licznych i efektywnych metodach znajdowania dobrych rozwiązań przybliżonych dla omawianych zadań nawet w przypadku bardzo wielkich rozmiarów (patrz np. [43]).

Ze względu na prostszy zapis wyników, w dalszej części tego punktu będziemy głównie mówić o analizie wrażliwości dla zadania (3.31), podając za każdym razem ewentualne różnice, które należy uwzględnić w przypadku zadania (3.32).

Niech H^0 oznacza rozwiązanie optymalne zadania (3.31); podobnie, niech \bar{H}^0 będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (3.32).

Oba zadania należą do omawianej w punkcie 1.2 klasy problemów, w których wszystkie zmieniające się dane są w sposób naturalny umieszczone w funkcji celu. Ponadto z rozważań tam prowadzonych wynika, że obszar niewrażliwości względem rozwiązania optymalnego H^0 albo \bar{H}^0 jest wielościennej stożkiem wypukłym w \mathbb{R}^m . Wyznaczenie tego stożka jest ponadto równoważne znalezieniu wszystkich ścian powłoki wypukłej rozwiązań dopuszczalnych, przechodzących przez rozwiązanie

optymalne. Można to zastąpić wyznaczaniem wszystkich punktów sąsiednich z wierzchołkiem odpowiadającym rozwiązaniu optymalnemu na wielościanie rozwiązań dopuszczalnych. Jest to zadania praktycznie niewykonalne nawet dla małych n , bowiem wiadomo, że nawet problem polegający na stwierdzeniu, czy dwa wierzchołki są wierzchołkami sąsiednimi wielościanu komiwojażera jest problemem NP-zupełnym (patrz np. [65]). Tym niemniej, pewne podzbiory obszaru niewrażliwości mogą być określone, jeśli algorytm znajdujący rozwiązanie dopuszczalne wyznacza podzbiór interesujących nas ścian. Tak się dzieje w przypadku nowych metod rozwiązywania problemu komiwojażera opartych na idei podziału i odcięć [43].

Również zawężenie problemu do znalezienia jedynie tolerancji wag krawędzi grafu prowadzi do trudnych zadań. Niech bowiem dla zadania (3.31) oraz dla $e \in E$, $t^+(e, H^0)$, $t^-(e, H^0)$, oznaczają odpowiednio tolerancje górną i dolną krawędzi e grafu względem rozwiązania optymalnego H^0 , to znaczy, $t^+(e, H^0)$ jest maksymalnym przyrostem wagi krawędzi e , który nie narusza optymalności drogi H^0 , natomiast $t^-(e, H^0)$ jest maksymalnym zmniejszeniem tej wagi, przy którym H^0 jest nadal najkrótszą drogą Hamiltona. Podobnie zdefiniowane wielkości w przypadku zadania komiwojażera będziemy oznaczać symbolami $\bar{t}^+(e, \bar{H}^0)$ oraz $\bar{t}^-(e, \bar{H}^0)$. Z rozważań w punkcie 2.2.5 wiadomo, że znalezienie tych wielkości dla danej krawędzi grafu sprowadza się do wyznaczenia wartości optymalnej pomocniczego zadania, będącego w istocie zadaniem wyznaczania najkrótszej drogi albo obwodu Hamiltona z dodatkowymi warunkami. Wprowadźmy bowiem dla $e \in E$ oznaczenia

$$\mathcal{H}_e = \{ H \in \mathcal{H} : e \in H \},$$

$$\mathcal{H}^e = \{ H \in \mathcal{H} : e \notin H \},$$

i niech

$$l_e = \min \{ l(H) : H \in \mathcal{H}_e \}, \quad (3.33)$$

$$l^e = \min \{ l(H) : H \in \mathcal{H}^e \}. \quad (3.34)$$

Wniosek 2.5 może być teraz przepisany w następującej postaci :

Wniosek 3.7

Jeśli $e \in H^0$, to wówczas $t^-(e, H^0) = \infty$ oraz

$$t^+(e, H^0) = l^e - l(H^0). \quad (3.35)$$

Jeśli $e \in E \setminus H^0$, to wówczas $t^+(e, H^0) = \infty$ oraz

$$t^-(e, H^0) = l_e - l(H^0). \quad (3.36)$$

■

Identyczne fakty zachodzą dla zadania komiwojażera. Każdy z problemów (3.33), (3.34) jest obliczeniowo nie mniej trudny niż pierwotne zadanie i lemat powyższy może być użyteczny, jeśli w wyniku rozwiązania zadania (3.31) uzyskujemy równocześnie oszacowania wielkości l^e , l_e dla $e \in E$ (patrz punkt 2.2.5).

W dalszej części tego rozdziału pokażemy, jak, mając H^0 , można wyznaczyć pewne oszacowania od dołu wartości $t^+(e, H^0)$ dla $e \in H^0$ oraz $t^-(e, H^0)$ dla $e \in E \setminus H^0$. Prezentowane podejście jest oparte na wykorzystaniu problemu dualnego i jest zastosowaniem techniki opisanej w Rozdziale 2.

3.4.2 Oszacowania tolerancji krawędzi

Omówione w Rozdziale 2. podejście do analizy wrażliwości z użyciem zadania dualnego wymaga skonstruowania sparametryzowanej rodziny relaksacji zadania pierwotnego. W przypadku zadań (3.31) i (3.32) istnieją różne możliwości wyboru relaksacji. W dalszej części tego punktu stosowane będą relaksacje związane z konstrukcją najkrótszych drzew rozpinających grafu G oraz najkrótszych drzew rozpinających uzupełnionych.

Drzewem rozpinającym (lub dendrytem) grafu $G = (V, E, C)$ nazywamy podgraf $G_T = (V, T)$, który nie zawiera obwodów i jest spójny.

Zbiór drzew rozpinających grafu G będziemy oznaczać symbolem \mathcal{T} . Niech $T \in \mathcal{T}$ i załóżmy bez straty ogólności rozważań, że w grafie G stopień wierzchołka 1 jest większy od 1. Rozważmy podgraf $G_{\bar{T}} = (V, \bar{T})$ taki, że $\bar{T} = T \cup \{e\}$, gdzie e jest dowolną krawędzią incydentną z wierzchołkiem 1 spełniającą warunek $e \notin T$. Podgraf taki będziemy nazywać *drzewem rozpinającym uzupełnionym (lub dendrytem uzupełnionym) grafu G* . Zauważmy, że podgraf ten zawiera dokładnie jeden obwód przechodzący przez wierzchołek 1. Oznaczmy zbiór dendrytów uzupełnionych grafu G symbolem $\bar{\mathcal{T}}$

Rozważmy dwa zadania optymalizacji kombinatorycznej :

$$\min_{T \in \mathcal{T}} l(T) \quad (3.37)$$

oraz

$$\min_{\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}} l(\bar{T}). \quad (3.38)$$

Zadanie (3.37) jest znanym zadaniem wyznaczania najkrótszego drzewa rozpinającego w grafie, czyli omawianym w punkcie 3.1 problem znajdowania bazy o minimalnej wadze w matroidzie grafowym. Zadanie (3.38) jest również znanym (patrz np. [29,30]) problemem wyznaczania najkrótszego drzewa rozpinającego uzupełnionego.

Łatwo sprawdzić, że zadanie (3.37) jest relaksacją zadania (3.31), natomiast zadanie (3.38) jest relaksacją zadania (3.32). Wystarczy bowiem zauważyć, że funkcje celu we wszystkich tych zadaniach są identyczne, natomiast $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}$ oraz $\overline{\mathcal{H}} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$.

Niech $p \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym wektorem nazywanym ze względu na swoją rolę w algorytmach [12] *wektorem kar*. Sformułujmy zadania (3.31), (3.32) oraz (3.37), (3.38) dla grafu $G^P = (V, E, C^P)$, gdzie elementy macierzy $C^P = [c_{ij}^P]$, $i, j = 1, \dots, n$, są tworzone w następujący sposób :

$$c_{ij}^P = c_{ij} + p_i + p_j.$$

Następujący fakt jest dobrze znany (patrz np. [12]) :

Lemat 3.6

Rozwiązania H^0 i \overline{H}^0 pozostają rozwiązaniami optymalnymi zadań (3.31) i (3.32) dla dowolnego $p \in \mathbb{R}^n$. ■

Zauważmy, że analogiczny fakt nie zachodzi zwykle dla zadań (3.37) i (3.38).

Poniższy lemat [57] orzeka, że w przypadku zadań (3.31) i (3.32) również wartości tolerancji krawędzi nie są zależne od wartości wektora kar p .

Lemat 3.7

Tolerancje krawędzi $t^+(e, H^0)$, $t^-(e, H^0)$ oraz $\bar{t}^+(e, \bar{H}^0)$, $\bar{t}^-(e, \bar{H}^0)$ dla $e \in E$, pozostają takie same dla dowolnego $p \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Ograniczymy się jedynie do dowodu dla przypadku zadania wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona; w przypadku zadania komiwojażera dowód przebiega analogicznie.

Wystarczy rozważyć jedynie sytuację, gdy tolerancje krawędzi mają wartości skończone. Zauważmy, że dla każdego $p \in \mathbb{R}^n$ wartość wyrażenia $d(H', H'') = l^p(H') - l^p(H'')$ nie zależy od p dla dowolnych $H', H'' \in \mathcal{H}$. Jeśli jednak $t^+(e, H^0) < \infty$ albo $t^-(e, H^0) < \infty$, to wówczas, zgodnie z Lematem 3.6, dla $e \in H^0$ mamy zależność $t^+(e, H^0) = d(H^e, H^0)$, gdzie $H^e = \arg \min \{ l(H) : H \in \mathcal{H}^e \}$. Analogicznie, dla $e \in E \setminus H^0$, zachodzi $t^-(e, H^0) = d(H_e, H^0)$, gdzie $H_e = \arg \min \{ l(H) : H \in \mathcal{H}_e \}$. ■

Niech $l^p(Q)$ oznacza wagę podzbioru $Q \subseteq E$ w grafie G^p i niech T^p oraz \bar{T}^p będą odpowiednio rozwiązaniami optymalnymi zadań (3.37) i (3.38) sformułowanych dla grafu $G^p = (V, E, C^p)$.

Oznaczmy

$$\Delta(p) = l^p(H^0) - l^p(T^p) \quad (3.39)$$

oraz

$$\bar{\Delta}(p) = l^p(\bar{H}^0) - l^p(\bar{T}^p). \quad (3.40)$$

Wielkości $\Delta(p)$ i $\bar{\Delta}(p)$ mogą być traktowane jako miary jakości relaksacji. Wiadomo z licznych eksperymentów obliczeniowych (patrz np. [43]), że dla $p = 0$ wartości tych wyrażeń są stosunkowo duże w porównaniu z wartością rozwiązania optymalnego, ale przez odpowiedni dobór wektora p mogą być bardzo istotnie zmniejszone. Wybór

najlepszego p , to znaczy dającego najmniejszą wartość $\Delta(p)$ albo $\bar{\Delta}(p)$, jest równoważny rozwiązaniu odpowiedniego zadania dualnego. W przypadku zadania znajdowania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie jest to problem dualny związany z rodziną relaksacji (3.37) sparametryzowanych wektorem $p \in \mathbb{R}^n$. W przypadku zadania komiwojażera problem dualny jest zbudowany w oparciu o rodzinę relaksacji (3.38) sparametryzowaną w identyczny sposób.

Stosując wprowadzone wyżej oznaczenia T^p oraz \bar{T}^p dla rozwiązań optymalnych relaksacji (3.37) i (3.38), możemy zapisać zadania dualne w następującej postaci:

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} l^p(T^p) \quad (3.41)$$

oraz

$$\sup_{p \in \mathbb{R}^n} l^p(\bar{T}^p). \quad (3.42)$$

Łatwo zauważyć, że $l^p(T^p)$ i $l^p(\bar{T}^p)$ jako funkcje wektora p są odcinkowo-liniowymi wypukłymi funkcjami w \mathbb{R}^n . Typowym podejściem do rozwiązywania zadań (3.41) i (3.42) jest zastosowanie subgradientowych algorytmów dla zadań optymalizacji nieróżniczkowalnej (patrz np. [29,30]) lub monotonicznych metod optymalizacji nieróżniczkowalnej ([36]). W punkcie 3.4. zostanie opisane podejście, które wykorzystuje fakt, że w przypadku analizy pooptymalizacyjnej dla zadań (3.31) i (3.32), ich rozwiązania optymalne są znane. Co więcej, z konstrukcji zadań dualnych wynika, że dla wektorów p , będących rozwiązaniami optymalnymi lub suboptymalnymi zadań dualnych, drzewa rozpinające T^p albo uzupełnione drzewa rozpinające \bar{T}^p są "bliskie" drodze Hamiltona H^0 albo, odpowiednio, obwodowi Hamiltona \bar{H}^0 zarówno w

sensie długości, jak i tworzących je krawędzi. Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy istnieją wektory p^* i \bar{p}^* będące rozwiązaniami zadań (3.41), (3.42), a ponadto $\Delta(p^*) = 0$ lub $\Delta(\bar{p}^*) = 0$. Mamy wówczas do czynienia z zerowym odstępem dualności i rozwiązania H^0 , \bar{H}^0 są jednocześnie rozwiązaniami zadań (3.37), (3.38), sformułowanych dla grafu $G^p = (V, E, C^p)$ odpowiednio przy $p = p^*$ lub $p = \bar{p}^*$. Przypadek taki obserwuje się stosunkowo często dla małych wartości n , natomiast sam problem częstości występowania zerowego odstepu dualności w funkcji rozmiaru zadania dla losowo generowanych rodzin zadań jest nadal otwarty. Zagadnienie to jest dodatkowo interesujące ze względu na Wniosek 3.11.

Założmy teraz, że T^p i \bar{T}^p są znanymi rozwiązaniami optymalnymi zadań (3.37), (3.38) dla pewnego $p \in \mathbb{R}^n$. Oznaczmy dla $p \in \mathbb{R}^n$ symbolami $t_p^+(e, T^p)$ oraz $t_p^-(e, T^p)$ tolerancje krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego T^p w grafie $G^p = (V, E, C^p)$. W przypadku tolerancji krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego uzupełnionego \bar{T}^p , będziemy stosować oznaczenia $\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p)$ i $\bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p)$. W odróżnieniu od podobnie zdefiniowanych tolerancji $t^+(e, H^0)$, $t^-(e, H^0)$ lub $\bar{t}^+(e, \bar{H}^0)$, $\bar{t}^-(e, \bar{H}^0)$ względem optymalnej drogi lub obwodu Hamiltona, zdefiniowane wyżej wielkości w ogólnym przypadku zależą od wektora p . Zachodzą następujące fakty, które łączą wymienione wyżej tolerancje :

Lemat 3.8

Dla $p \in \mathbb{R}^n$ i $e \in (H^0 \cap T^p) \cup ((E \setminus H^0) \cap (E \setminus T^p))$,

$$t^+(e, H^0) \geq t_p^+(e, T^p) - \Delta(p) \quad (3.43)$$

oraz

$$t^-(e, H^0) \geq t_p^-(e, T^P) - \Delta(p). \quad (3.44)$$

Dla $p \in \mathbb{R}^n$ i $e \in (\bar{H}^0 \cap \bar{T}^P) \cup ((E \setminus \bar{H}^0) \cap (E \setminus \bar{T}^P))$,

$$\bar{t}^+(e, \bar{H}^0) \geq \bar{t}_p^+(e, \bar{T}^P) - \bar{\Delta}(p) \quad (3.45)$$

oraz

$$\bar{t}^-(e, \bar{H}^0) \geq \bar{t}_p^-(e, \bar{T}^P) - \bar{\Delta}(p). \quad (3.46)$$

Dowód. Przeprowadzimy jedynie dowód nierówności (3.43), bowiem dowody dla pozostałych nierówności są analogiczne. Zauważmy, że jeśli $e \in E \setminus H^0$, to wówczas $t^+(e, H^0) = \omega$ i nierówność (3.43) oczywiście zachodzi. Załóżmy więc, że $e \in H^0 \cap T^P$ i niech

$$t_p^e = \min \{ l^P(T) : T \in \mathcal{T}^e \}, \quad (3.47)$$

gdzie $\mathcal{T}^e = \{ T \in \mathcal{T} : e \notin T \}$.

Postępując analogicznie, jak w przypadku dowodu Lematu 3.7, łatwo pokazać, że

$$t_p^+(e, T^P) = t_p^e - l^P(T^P). \quad (3.48)$$

Z dowodu Lematu 3.7 wynika również, że

$$t^+(e, H^0) = l_p^e - l^P(H^0), \quad (3.49)$$

gdzie

$$l_p^e = \min \{ l^P(H) : H \in \mathcal{H}^e \}. \quad (3.50)$$

Zadanie (3.47) jest relaksacją zadania (3.50), a zatem $l_p^e \geq t_p^e$.
 To implikuje już nierówność (3.43), bowiem z (3.48) i (3.49) mamy
 $t^+(e, H^0) \geq t_p^+(e, T^P) + l^P(T^P) - l^P(H^0) = t_p^+(e, T^P) - \Delta(p)$.

■

Lemat 3.8 daje możliwość oszacowania od dołu wartości tolerancji krawędzi względem optymalnej drogi lub najkrótszego cyklu Hamiltona, jeśli znane są tolerancje krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego i najkrótszego drzewa rozpinającego uzupełnionego. Wyznaczenie tolerancji względem drzew rozpinających było już wspomniane w rozdziale dotyczącym analizy wrażliwości dla optymalnej bazy matroidu, ale wrócimy jeszcze do tego problemu w punkcie 3.4.3. Zauważmy, że Lemat 3.8 określa oszacowania tolerancji jedynie dla tych krawędzi grafu, które są identyczne w rozwiązaniach optymalnych (lub ich uzupełnieniach) dla oryginalnego zadania i jego relaksacji, to znaczy na przykład w przypadku problemu (3.31) dla krawędzi $e \in H^0 \cap T^P$ oraz dla $e \in (E \setminus H^0) \cap (E \setminus H^0)$. Ponadto, jakość oszacowania ulega pogorszeniu ze wzrostem $\Delta(p)$ lub $\bar{\Delta}(p)$. Tak więc, chociaż dowolny wektor p może być użyty dla wyznaczenia oszacowań na podstawie Lematu 3.8, to jest pożądane wybranie takiego p , dla którego zarówno $\Delta(p)$, jak i $|H^0 \setminus T^P|$ są możliwie małe. W przypadku, gdy mamy do czynienia z zerowym odstępem dualności i $\Delta(p^*) = 0$, to wybierając $p = p^*$, otrzymamy oszacowania dla wszystkich krawędzi grafu. Sposób wyboru wektora p jest dyskutowany w punkcie 3.4.4.

3.4.3 Tolerancje krawędzi względem drzew rozpinających i drzew rozpinających uzupełnionych

Wyznaczanie oszacowań dolnych tolerancji krawędzi względem najkrótszych dróg lub obwodów Hamiltona zgodnie z Lematem 3.8, wymaga znajomości wartości tolerancji tych krawędzi względem najkrótszych drzew rozpinających i drzew rozpinających uzupełnionych. Zagadnienie wyznaczania tolerancji krawędzi grafu względem najkrótszego drzewa rozpinającego było rozważane w kilku pracach [11,24,76,82], a także zostało już wspomniane w przykładach przytoczonych w Rozdziale 3.2. W dalszej części niniejszego punktu przytoczymy podstawowe fakty wiążące się z tym zagadnieniem, a następnie omówimy szczegółowo przypadek, gdy optymalne drzewo rozpinające jest jednocześnie drogą Hamiltona. Z sytuacją taką mamy do czynienia wówczas, gdy odstęp dualności jest równy zeru.

Niech T^p i \bar{T}^p będą odpowiednio najkrótszym drzewem rozpinającym i najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w grafie $G^p = (V, E, C^p)$ dla pewnego ustalonego $p \in \mathbb{R}^n$. Problem polega na znalezieniu $t_p^+(e, T^p)$, $t_p^-(e, T^p)$ lub $\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p)$, $\bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p)$ dla wszystkich $e \in E$. Jest to zagadnienie znacznie prostsze niż wyznaczanie tolerancji krawędzi względem drogi lub obwodu Hamiltona, a dzieje się tak dlatego, że rodziny \mathcal{T} i $\bar{\mathcal{T}}$ są rodzinami baz matroidów nad E . Fakt, że drzewa rozpinające są bazami matroidu, jest dobrze znany; mamy tu bowiem do czynienia z matroidem grafowym. Niżej, dla pełności rozważań, podamy dowód faktu, że również zbiór drzew rozpinających uzupełnionych tworzy rodzinę baz pewnego matroidu nad zbiorem E .

Niech \mathcal{F} będzie rodziną podzbiorów E taką, że dla zbioru $F \in \mathcal{F}$ wszystkie jego krawędzie, które nie są incydentne z wierzchołkiem 1, tworzą las w G , natomiast liczba krawędzi incydentnych z wierzchołkiem 1 jest nie większa od dwóch.

Lemat 3.9

Para $M = (E, \mathcal{F})$ jest matroidem na zbiorze E i $\bar{\mathcal{T}}$ jest rodziną baz tego matroidu.

Dowód. Zauważmy, że $\bar{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{F}$. Wystarczy więc dowieść, że $\bar{\mathcal{T}}$ spełnia aksjomaty baz matroidu (Twierdzenie 3.1). Należy pokazać, że jeśli T', T'' są drzewami rozpinającymi uzupełnionymi, to z warunku, że $e \in T' \setminus T''$ wynika, że istnieje element $u \in T'' \setminus T'$ taki, że spełniona jest zależność $(T' \cup \{u\}) \setminus \{e\} \in \bar{\mathcal{T}}$. Ale to wynika natychmiast z definicji drzew rozpinających uzupełnionych. Niech bowiem $T' = \{e'_1, e'_2\} \cup T'_1$, $T'' = \{e''_1, e''_2\} \cup T''_1$, gdzie T'_1, T''_1 są drzewami rozpinającymi w podgrafie G_1 generowanym przez zbiór wierzchołków $V \setminus \{1\}$, a krawędzie e'_1, e'_2, e''_1, e''_2 są incydentne z wierzchołkiem 1. Jeśli teraz wybrana krawędź $e \in T' \setminus T''$ jest incydentna z wierzchołkiem 1, to znaczy na przykład $e = e'_1$, to jako krawędź $u \in T'' \setminus T'$ wystarczy wziąć dowolną spośród krawędzi e''_1, e''_2 , która jest różna od e'_2 . Jeśli natomiast e należy do T'_1 , to istnienie odpowiedniej krawędzi u wynika z faktu, że T'_1, T''_1 są drzewami rozpinającymi w G_1 . ■

Z faktu, że \mathcal{T} i $\bar{\mathcal{T}}$ są rodzinami baz matroidów na zbiorze E wynika, że do wyznaczenia tolerancji krawędzi $t_p^+(e, T^P), t_p^-(e, T^P)$ oraz $\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^P), \bar{t}_p^-(e, \bar{T}^P)$ dla $e \in E$ można zastosować Wniosek 3.3. Należy w tym celu określić zbiory cykli i przekrojów fundamentalnych względem baz optymalnych T^P i \bar{T}^P .

Niech $e \notin T^P$. Wówczas cykl fundamentalny $C(e, T^P)$ wyznaczony przez element e w bazie T^P jest zbiorem krawędzi tworzących jedyny obwód w grafie $(V, T^P \cup \{e\})$. Wprowadźmy oznaczenie

$$U(e) = C(e, T^P) \setminus \{e\}.$$

Niech dla $e \in T^P$,

$$W(e) = \{ w \in E \setminus T^P : e \in C(w, T^P) \}.$$

Zbiór $W(e) \cup \{e\}$ jest *przekrojem grafu* G , a rodzina $(W(e), e \in T^P)$ jest rodziną przekrojów fundamentalnych względem bazy T^P w matroidzie (E, \mathcal{I}) . Wniosek 3.3 może być więc teraz przepisany w następującej postaci :

Wniosek 3.8

Jeśli $e \in T^P$, to $t_p^-(e, T^P) = \infty$ oraz

$$t_p^+(e, T^P) = \min\{ c^P(w) : w \in W(e) \} - c^P(e). \quad (3.51)$$

Jeśli $e \in E \setminus T^P$, to $t_p^+(e, T^P) = \infty$ oraz

$$t_p^-(e, T^P) = c^P(e) - \max\{ c^P(u) : u \in U(e) \}. \quad (3.52)$$

■

W podobny sposób na podstawie Wniosku 3.3 mogą być liczone tolerancje krawędzi grafu względem najkrótszego drzewa rozpinającego uzupełnionego \bar{T}^P .

Niech $\bar{T}^P = T_1 \cup \{(1, k), (1, l)\}$, gdzie T_1 jest drzewem rozpinającym w grafie $G_1^P = (V \setminus \{1\}, E_1, C^P)$, otrzymanym z grafu $G^P = (V, E, C^P)$ poprzez usunięcie wierzchołka 1 oraz wszystkich incydentnych z nim krawędzi, to znaczy $E_1 = \{ e \in E : \text{krawędź } e \text{ nie jest incydentna z wierzchołkiem } 1 \}$.

Rozważmy krawędź $e \notin \bar{T}^P$. Jeśli $e \in E_1$, to wówczas cykl fundamentalny wyznaczony przez element e w bazie \bar{T}^P matroidu $\bar{M} = (E, \bar{\mathcal{F}})$ jest jedynym obwodem grafu $(V, \bar{T}^P \cup \{e\}, C^P)$. Oznaczmy zbiór różnych od e krawędzi tego obwodu symbolem $U_1(e, \bar{T}^P)$. Jeśli natomiast $e \notin \bar{T}^P$ oraz $e \notin E_1$, to znaczy $e \in E'_1$, gdzie $E'_1 = (E \setminus E_1) \setminus \{(1,k), (1,l)\}$, to wówczas cykl fundamentalny wyznaczony przez element e składa się z trzech elementów : krawędzi e , $(1,k)$ oraz $(1,l)$.

Rozważmy teraz krawędź $e \in \bar{T}^P$. Jeśli $e \in E_1$, to przekrój fundamentalny wyznaczony przez element e dla bazy \bar{T}^P jest zbiorem różnych od e krawędzi grafu, tworzących w G_p^1 przekrój wyznaczony przez drzewo rozpinające T_1 i krawędź e ; taki zbiór krawędzi oznaczmy symbolem $W_1(e, \bar{T}^P)$. Jeśli natomiast $e \in \bar{T}^P$ i $e \notin E_1$, to znaczy e jest jedną z krawędzi $(1,k)$ albo $(1,l)$, to wówczas przekrój fundamentalny wyznaczony przez krawędź e i bazę \bar{T}^P jest równy zbiorowi E'_1 .

Powyższe rozważania pozwalają teraz przeformułować Wniosek 3.3 w następującej postaci :

Wniosek 3.9

Jeśli $e \in T_1$, to $\bar{t}_p^-(e, \bar{T}^P) = \infty$ oraz

$$\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^P) = \min \{ c^P(w) : w \in W_1(e, \bar{T}^P) \} - c^P(e). \quad (3.53)$$

Jeśli $e \in E_1 \setminus T_1$, to $\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^P) = \infty$ oraz

$$\bar{t}_p^-(e, \bar{T}^P) = c^P(e) - \max \{ c^P(u) : u \in U_1(e, \bar{T}^P) \}. \quad (3.54)$$

Jeśli $e \in E'_1 = (E \setminus E_1) \setminus \{(1,k), (1,1)\}$, to $\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^P) = \infty$ oraz

$$\bar{t}_p^-(e, \bar{T}^P) = c^P(e) - \max \{ c(1,k), c(1,1) \}. \quad (3.55)$$

Ponadto,

$$\bar{t}_p^-(1,k, \bar{T}^P) = \bar{t}_p^-(1,1, \bar{T}^P) = \infty \text{ oraz}$$

$$\bar{t}_p^+(1,k, \bar{T}^P) = c^P(1,k) - \min \{ c^P(e) ; e \in E'_1 \}, \quad (3.56)$$

$$\bar{t}_p^+(1,1, \bar{T}^P) = c^P(1,1) - \min \{ c^P(e) ; e \in E'_1 \}. \quad (3.57)$$

■

Wnioski 3.8 i 3.9 podają sposób wyznaczenia wszystkich tolerancji krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego i drzewa rozpinającego uzupełnionego. W dalszym ciągu skoncentrujemy się na przypadku drzew rozpinających, ponieważ rozważania dla drzew rozpinających uzupełnionych są analogiczne, natomiast notacja jest bardziej skomplikowana.

Łatwo zauważyć, że algorytm wyznaczania wszystkich tolerancji $t_p^+(e, T^P)$, $t_p^-(e, T^P)$, $e \in E$, oparty na bezpośrednim wykorzystaniu zależności (3.51) i (3.52) ma złożoność obliczeniową $O(mn)$. Konstrukcja macierzy fundamentalnej (a co za tym idzie wyznaczenie zbiorów $W(e)$ oraz $U(e)$ dla wszystkich $e \in E$) wymaga bowiem, zgodnie z rozważaniami z punktu 3.2.3, $O(mn)$ operacji i może być dokonana na przykład poprzez powtórzenie dla każdej z $m-n+1$ krawędzi nie należących do T^P konstrukcji obwodu fundamentalnego w grafie G^P , co wymaga $O(n)$ operacji. Mając macierz fundamentalną, można wyznaczyć wszystkie tolerancje krawędzi zgodnie z wzorami (3.51), (3.52) dokonując $O(mn)$ porównań.

Stosując odpowiednie struktury danych można w istotny sposób zmniejszyć złożoność obliczeniową algorytmu wyznaczania na podstawie Wniosku 3.8 tolerancji krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego w grafie. Najniższą znaną złożoność obliczeniową ma podejście zaproponowane w [82], pozwalające na obliczenie wszystkich tolerancji krawędzi w czasie $O(m \alpha(m,n))$ przy nakładzie pamięci $O(m)$, gdzie $\alpha(m,n)$ oznacza funkcję odwrotną do funkcji Ackermana (patrz [80,81]). Funkcja ta rośnie bardzo wolno ze wzrostem m oraz n i w związku z tym złożoność algorytmu jest niemal liniowa względem m . Jednakże skomplikowane struktury danych powodują, że algorytm ten, wymagający konstrukcji grafu pomocniczego nazywanego transmuterem (patrz punkt 3.5), nie jest atrakcyjny jako praktyczna procedura wyznaczania tolerancji krawędzi.

W [24] zaproponowano prostsze struktury danych pozwalające na wyznaczenie tolerancji wszystkich krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego w czasie $O(m \log n)$ i z nakładem pamięci $O(m)$.

Inne algorytmy dla tego samego problemu są podane w [76]. Jeden z nich ma nakład obliczeń i pamięci $O(n^2)$, drugi wymaga $O(mn)$ obliczeń i $O(m)$ pamięci.

W dalszym ciągu zatrzymamy się jeszcze nad szczególnym przypadkiem wyznaczania tolerancji krawędzi względem najkrótszego drzewa rozpinającego, które jest jednocześnie drogą Hamiltona. Z taką sytuacją mamy do czynienia wówczas, gdy istnieje wektor kar p^* , dla którego odstęp dualności $\Delta(p^*)$ jest równy zero. Interesujące jest, że w takim przypadku można skonstruować [57] algorytm o złożoności $O(m)$ dla wyznaczania wszystkich tolerancji dolnych względem najkrótszego drzewa rozpinającego grafu. Nie wiadomo natomiast, czy istnieje w tym szczególnym przypadku algorytm o złożoności $O(m)$ dla wyznaczania wszystkich tolerancji dolnych.

Idea algorytmu o liniowej złożoności obliczeniowej dla wyznaczania tolerancji dolnych względem najkrótszego drzewa rozpinającego, będącego jednocześnie drogą Hamiltona, jest oparta na wykorzystaniu struktury danych nazywanej *kopcem symetrycznym* (ang. symmetric heap). Definicja tej struktury jest następująca:

Niech $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ będzie k -elementowym zbiorem liczb rzeczywistych. Kopiec symetryczny $SH(U)$ jest drzewem binarnym zorientowanym mającym jeden wierzchołek $v(u)$ dla każdego $u \in U$. Jeśli $u_i \leq u_j$, to w $SH(U)$ istnieje droga z wierzchołka $v(u_j)$ do wierzchołka $v(u_i)$. Ponadto, jeśli $i < j$, to wówczas $v(u_i)$ należy do lewego poddrzewa wierzchołka $v(u_j)$; w przeciwnym przypadku $v(u_i)$ należy do prawego poddrzewa wierzchołka $v(u_j)$.

Kopiec symetryczny dla zbioru k -elementowego można skonstruować w $O(k)$ krokach [1,40].

Rozważmy teraz dwa elementy u_i oraz u_j zbioru U , gdzie $i < j$. Załóżmy, że chcemy znaleźć element $u(i,j) \in U$ taki, że $u(i,j) = \max\{u_l : i \leq l \leq j\}$. Z definicji $SH(U)$ natychmiast wynika, że element $u(i,j)$ jest przyporządkowany wierzchołkowi kopca, będącemu najbliższym wspólnym przodkiem wierzchołków $v(u_i)$ i $v(u_j)$. Jak pokazano w [28], dla k -elementowego kopca symetrycznego, operację znajdowania najbliższego wspólnego przodka dwóch wierzchołków można wykonać w czasie stałym $O(1)$, jeśli uprzednio przeprowadzono obliczenia wstępne wymagające $O(k)$ operacji. Fakt ten jest podstawą liniowego algorytmu wyznaczania tolerancji dolnych dla drzewa rozpinającego, które jest drogą.

Rozważmy bowiem wyrażenie (3.52). Dla obliczenia pojedynczej tolerancji dolnej $t_p^{\sim}(e, T^P)$ dla danego $e \in E \setminus T^P$ należy znaleźć minimalną wagę krawędzi ze zbioru $U(e)$. Załóżmy, że T^P jest jednocześnie drogą Hamiltona i ponumerujmy wierzchołki grafu w taki sposób, że $T^P = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)\}$. Rozważmy dowolną krawędź $e \in E \setminus T^P$; dla ustalenia uwagi niech to będzie krawędź (k,l) . Zauważmy teraz,

że przy przyjętej numeracji wierzchołków mamy: $k \in \{1, \dots, n-2\}$,
 $l \in \{k+2, \dots, n\}$ oraz $U(k, l) = \{ (i, i+1) : k \leq i \leq l-1 \}$. Zbudujmy ko-
 piec symetryczny dla zbioru $U = \{ c^P(i, i+1) : i=1, \dots, n-1 \}$. Łatwo
 teraz zauważyć, że znalezienie wartości

$$\max\{ c^P(u) : u \in U((k, l)) \}$$

jest równoważne wyznaczeniu najbliższego wspólnego przodka dla wierz-
 chołków $v((k, k+1))$ oraz $v((l-1, l))$ w kopcu $SH(U)$. Każdą taką ope-
 rację można wykonać w czasie stałym $O(1)$, jeśli przeprowadzono wstęp-
 ne obliczenia wymagające $O(n)$ operacji. Zatem wyznaczenie wszystkich
 m tolerancji dolnych może być wykonane w czasie $O(m)$.

Jak już wspomniano wyżej, problem istnienia dla tego szczególnego
 przypadku algorytmu o złożoności $O(m)$ dla wyznaczania tolerancji
 górných krawędzi grafu jest nadal otwarty.

Rozważania tego punktu zakończymy pokazaniem pewnych właściwości
 tolerancji krawędzi względem drzew rozpinających, które pozwalają na
 wzmocnienie oszacowań podanych w Lemacie 3.8. Właściwości te są
 bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 3.6 i wynikają natychmiast z
 faktu, że T^P oraz \bar{T}^P są bazami odpowiednich matroidów.

Wniosek 3.10

Niech T^P będzie najkrótszym drzewem rozpinającym w grafie
 $G^P = (V, E, C^P)$ i niech T oznacza dowolne drzewo rozpinające w tym
 grafie. Wówczas

$$l^P(T) - l^P(T^P) \geq \sum_{e \in T \setminus T^P} t_p^-(e, T^P) \quad (3.58)$$

oraz

$$l^p(T) - l^p(T^p) \geq \sum_{e \in T^p \setminus T} t_p^+(e, T^p). \quad (3.59)$$

Podobnie, niech \bar{T}^p będzie najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w G^p i niech \bar{T} oznacza dowolne drzewo rozpinające uzupełnione w tym grafie. Wówczas

$$l^p(\bar{T}) - l^p(\bar{T}^p) \geq \sum_{e \in \bar{T} \setminus \bar{T}^p} \bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p) \quad (3.60)$$

oraz

$$l^p(\bar{T}) - l^p(\bar{T}^p) \geq \sum_{e \in \bar{T}^p \setminus \bar{T}} \bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p). \quad (3.61)$$

■

Powyzsze fakty sa wykorzystywane w dowodzie Twierdzenia 3.7, ktore daje mozliwosc wzmocnienia oszacowan tolerancji z Lematu 3.8 w przypadku, gdy dla danego wektora kar p odstep dualnosci $\Delta(p)$ jest rowny zeru.

Twierdzenie 3.7

Jeśli $\Delta(p) = 0$ oraz $H^0 = T^p$, to wówczas dla $e \in E$:

$$t^+(e, H^0) \geq t_p^+(e, T^p) + \min \{ t_p^+(u, T^p) : u \in H^0 \setminus \{e\} \} \quad (3.62)$$

oraz

$$t^-(e, H^0) \geq t_p^-(e, T^p) + \min \{ t_p^-(u, T^p) : u \in (E \setminus H^0) \setminus \{e\} \}. \quad (3.63)$$

Podobnie, jeśli $\bar{\Delta}(p) = 0$ oraz $\bar{H}^0 = \bar{T}^p$, to wówczas dla $e \in E$:

$$\bar{t}^+(e, \bar{H}^0) \geq \bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p) + \min \{ \bar{t}_p^+(u, \bar{T}^p) : u \in \bar{H}^0 \setminus \{e\} \} \quad (3.64)$$

oraz

$$\bar{t}^-(e, \bar{H}^0) \geq \bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p) + \min \{ \bar{t}_p^-(u, \bar{T}^p) : u \in (E \setminus \bar{H}^0) \setminus \{e\} \}. \quad (3.65)$$

Dowód. Udowodnimy jedynie prawdziwość nierówności (3.62); dla pozostałych nierówności dowody są analogiczne.

Jeśli $t^+(e, H^0) < \infty$, to wówczas zgodnie z Lematem 3.6, $t^+(e, H^0) = l^p(H^e) - l^p(H^0)$, gdzie $H^e = \arg \min \{ l^p(H) : H \in \mathcal{H}^e \}$. Jak łatwo zauważyć, $|H^0 \setminus H^e| \geq 2$. Istnieje więc krawędź $u \in H^0$ taka, że $u \neq e$. Ponieważ H^0 i H^e są drzewami rozpinającymi oraz $e \in H^0 \setminus H^e$, zatem z (3.59) mamy $t^+(e, H^0) = l^p(H^e) - l^p(H^0) \geq t_p^+(e, T^p) + t_p^+(u, T^p)$. ■

Poniższe twierdzenie również wykorzystuje Wniosek 3.10 i dotyczy sytuacji, gdy optymalna droga Hamiltona nie pokrywa się z najkrótszym drzewem rozpinającym, albo gdy najkrótszy obwód Hamiltona nie pokrywa się z najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym. W takich przypadkach Lemat 3.8 nie dawał żadnych oszacowań tolerancji krawędzi względem dróg i obwodów Hamiltona dla tych krawędzi grafu, które nie należały zarówno do rozwiązań optymalnych oryginalnego zadania i jego relaksacji, albo jednocześnie do uzupełnień tych rozwiązań. Poniższe twierdzenie podaje takie oszacowania, aczkolwiek przy dużych wartościach $\Delta(p)$ lub $\bar{\Delta}(p)$ mogą one być bardzo słabe lub wręcz trywialne.

Twierdzenie 3.8

Jeśli $H^0 \neq T^p$, to wówczas dla $e \in H^0 \setminus T^p$:

$$t^+(e, H^0) \geq \min \{ t_p^-(u, T^p) : u \in (E \setminus T^p) \setminus \{e\} \} - \Delta(p) \quad (3.66)$$

oraz dla $e \in T^p \setminus H^0$

$$t^-(e, H^0) \geq \min \{ t_p^+(u, T^p) : u \in T^p \setminus \{e\} \} - \Delta(p). \quad (3.67)$$

Podobnie, jeśli $\bar{H}^0 \neq \bar{T}^p$, to wówczas dla $e \in \bar{H}^0 \setminus \bar{T}^p$

$$\bar{t}^+(e, \bar{H}^0) \geq \min \{ \bar{t}_p^-(u, \bar{T}^p) : u \in (E \setminus \bar{T}^p) \setminus \{e\} \} - \bar{\Delta}(p), \quad (3.68)$$

oraz dla $e \in \bar{T}^p \setminus \bar{H}^0$

$$\bar{t}^-(e, \bar{H}^0) \geq \min \{ \bar{t}_p^+(u, \bar{T}^p) : u \in \bar{T}^p \setminus \{e\} \} - \bar{\Delta}(p). \quad (3.69)$$

Dowód. Rozważmy krawędź $e \in H^0 \setminus T^p$. Jeśli $t^+(e, H^0) < \infty$, to wówczas $t^+(e, H^0) = l^p(H^e) - l^p(H^0)$ i ponadto istnieje drzewo rozpinające T_2^e , które jest drugim elementem w zbiorze drzew rozpinających nie zawierających krawędzi e i uporządkowanych według nierosnącej długości. Ponieważ również H^e jest drzewem rozpinającym nie zawierającym krawędzi e , zatem zachodzi nierówność $l^p(T_2^e) \leq l^p(H^e)$. Stąd wynika, że $t^+(e, H^0) \geq l^p(T_2^e) - l^p(H^0) = l^p(T_2^e) - l^p(T^p) - (l^p(H^0) - l^p(T^p)) = l^p(T_2^e) - l^p(T^p) - \Delta(p)$. Zauważmy, że zbiór $T_2^e \setminus T^p$ musi zawierać pewną krawędź $u \in (E \setminus T^p) \setminus \{e\}$, a zatem na podstawie (3.58) mamy nierówność $l^p(T_2^e) - l^p(T^p) \geq t_p^-(u, T^p)$, co dowodzi zależności (3.66). Dowody pozostałych nierówności są analogiczne. ■

3.4.4 Wybór wektora kar

Jak już wspomniano w punkcie 3.4.2, do wyznaczania tolerancji krawędzi względem H^0 albo \bar{H}^0 potrzebny jest wybór wektora p , dla którego zarówno wartości $\Delta(p)$, jak i $|H^0 \setminus T^P|$ (a w przypadku zadania komiwojażera wartości $\bar{\Delta}(p)$ oraz $|\bar{H}^0 \setminus \bar{T}^P|$) są możliwie małe. Dla ustalenia uwagi skoncentrujemy się na zadaniu wyznaczania najkrótszej drogi Hamiltona. Jeśli odstęp dualności jest równy zeru, to wówczas odpowiedni wektor p może być znaleziony jako rozwiązanie równania

$$\Delta(p) = 0. \quad (3.70)$$

Ponadto, jako rozwiązanie T^P może być w tym przypadku wzięta droga H^0 i oczywiście $|T^P \setminus H^0| = 0$. Jeśli natomiast $\Delta > 0$, to stoimy przed problemem wyboru najlepszego wektora kar ze względu na dwa kryteria : minimalizację $\Delta(p)$ oraz minimalizację $|T^P \setminus H^0|$. W tym przypadku strategii postępowania mogą być różne. Jedną z możliwości polega na uporządkowaniu kryteriów i poszukiwaniu najpierw minimum ze względu na wartość $\Delta(p)$, a następnie ze względu na wartość $|T^P \setminus H^0|$. Zarówno w przypadku zerowego, jak i niezerowego odstępu dualności, potrzebna jest metoda rozwiązywania w sposób dokładny lub przybliżony równania (3.70).

Typowym podejściem do rozwiązywania równania (3.70) jest wykorzystanie właściwości funkcji $\Delta(p)$. Łatwo bowiem dowieść, że $\Delta(p)$ jest wypukłą odcinkowo-liniową funkcją na \mathbb{R}^n , a zatem może tu być zastosowana jedna z metod optymalizacji nieróżniczkowalnej (patrz np. [36]). W dalszej części tego punktu omówimy podejście, które wykorzystuje fakt, że jeśli równanie (3.70) ma rozwiązanie p^* , to wówczas znana droga optymalna H^0 jest równocześnie rozwiązaniem optymalnym zadania (3.37) dla tego właśnie wektora kar p^* .

Wprowadźmy następujące oznaczenie :

$$P_C = \{ p \in \mathbb{R}^n : p_i + p_j - p_k - p_{k+1} \geq c(k,k+1) - c(i,j) \\ \text{dla } (i,j) \in E, i = 1, \dots, n-2, j = i+2, \dots, n \\ k = i, \dots, j-1 \}. \quad (3.71)$$

Twierdzenie 3.9

Założmy, że $H^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)\}$ jest najkrótszą drogą Hamiltona w grafie $G^P = (V, E, C^P)$. Wówczas $\Delta(p) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in P_C$.

Dowód. Równość $\Delta(p) = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy H^0 jest również najkrótszym drzewem rozpinającym w grafie G^P . Ma to miejsce wówczas, gdy spełnione są warunki konieczne i dostateczne optymalności H^0 dla zadania (3.37). Warunki te wynikają z Lematu 3.3 (ii) i w przypadku matroidu $M = (E, \mathcal{F})$ oraz jego bazy H^0 mają postać następującą : H^0 jest najkrótszym drzewem rozpinającym w grafie $G^P = (V, E, C^P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $e \in E \setminus H^0$ zachodzą nierówności

$$c^P(e) \leq c^P(u) \quad \text{dla } u \in U(e). \quad (3.72)$$

Przy przyjętej numeracji wierzchołków, dla której $H^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)\}$, mamy następujące fakty : $e \in E \setminus H^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e = (i,j)$, przy czym $i = 1, \dots, n-2, j = i+2, \dots, n$. Ponadto wówczas $U(e) = \{(k,k+1) \in E : i \leq k \leq j-1\}$. Podstawiając te wyrażenia do (3.72) i uwzględniając, że $c^P(i,j) = c(i,j) + p_i + p_j$, otrzymujemy (3.71). ■

Układ nierówności (3.71) definiuje wielościenny zbiór wypukły w \mathbb{R}^n . Liczba $S(G)$ tych nierówności jest rzędu $O(mn)$.

Jeśli $G = K_n$ (to znaczy G jest grafem pełnym o n wierzchołkach), to wówczas [57]

$$S(G) = \frac{1}{3}(2k - 1)[k(2k + 1) - 3] \quad \text{dla } n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots$$

oraz

$$S(G) = \frac{2}{3}k[(k + 1)(2k + 1) - 3] \quad \text{dla } n = 2k + 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Jeśli $P_C \neq \emptyset$, to wówczas jako wektor kar może być wybrany dowolny element zbioru P_C , chociaż różne wektory mogą dawać różne wartości oszacowań tolerancji krawędzi na podstawie Lematu 3.8. Jeśli natomiast $P_C = \emptyset$, to oznacza to, że istnieje dodatni odstęp dualności.

Jest interesującym otwartym problemem, jak często zdarza się sytuacja zerowego odstepu dualności dla pary zadań (3.31), (3.37). Praktyczne doświadczenia pokazują, że z takim przypadkiem mamy stosunkowo często do czynienia dla losowo generowanych zadań o niewielkich rozmiarach. Można się również spodziewać, że wraz ze wzrostem rozmiaru zadań będzie to zjawisko coraz rzadsze. W literaturze brak jednak doniesień na temat empirycznych albo teoretycznych badań na ten temat. Problem jest dodatkowo interesujący ze względu na poniższy wniosek [57], wynikający bezpośrednio z Twierdzenia 3.9.

Wniosek 3.11

Jeśli dla danego grafu $G=(V,E)$ odstęp dualności jest równy zeru, to wówczas optymalność danej drogi Hamiltona można sprawdzić w czasie wielomianowym.

Dowód. Jeśli dla danego grafu ważonego odstęp dualności jest równy zeru, to stwierdzenie, czy droga Hamiltona H jest optymalna, może być dokonane poprzez ponumerowanie wierzchołków grafu w taki sposób, że $H = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)\}$, a następnie zbadanie czy $P_C \neq \emptyset$. Wymaga stwierdzenia niesprzeczności wielomianowej liczby nierówności liniowych (3.71), co może być zrobione w czasie wielomianowym poprzez rozwiązanie zadania programowania liniowego z układem ograniczeń (3.71) (patrz np. [73]).

■

Podobne fakty (dowody są analogiczne jak w omawianym przypadku dróg Hamiltona) zachodzą dla zadania komiwojażera. Niech

$$\begin{aligned} \bar{P}_C = \{ p \in \mathbb{R}^n : \\ p_k - p_2 \geq c(1,2) - c(1,k) \quad \text{dla } k = 3, \dots, n-1, (1,k) \in E, \\ p_k - p_n \geq c(1,n) - c(1,k) \quad \text{dla } k = 3, \dots, n-1, (k,n) \in E, \\ p_i + p_j - p_k - p_{k+1} \geq c(k,k+1) - c(i,j) \\ \text{dla } (i,j) \in E, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ j = i+2, \dots, n, \quad k = i, \dots, j-1 \}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.10

Założmy, że $\bar{H}^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n), (n,1)\}$ jest najkrótszym obwodem Hamiltona w grafie $G^P = (V, E, C^P)$. Na to, by obwód \bar{H}^0 był również najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w tym grafie i by zachodziła zależność $\bar{\Delta}(p) = 0$, potrzeba i wystarcza, aby $p \in \bar{P}_C$.

■

Twierdzenia 3.9 i 3.10 dają sposób wybrania wektora kar w przypadku, gdy odstęp dualności jest równy zeru, poprzez znalezienie rozwiązania dopuszczalnego układu nierówności definiujących P_C albo \bar{P}_C . Może to być dokonane na przykład w wyniku rozwiązania zadania programowania liniowego

$$\min \{ a^T p : p \in P_C \} \quad (3.73)$$

albo

$$\min \{ a^T p : p \in \bar{P}_C \}. \quad (3.74)$$

W powyższych zadaniach wektor a w funkcji celu może być wybierany w różny sposób. W eksperymentach obliczeniowych w [57] przyjmowano zwykle wektor $a = (1, \dots, 1)^T$. W zasadzie, do znalezienia wektora kar p , wystarczy jedynie przeprowadzenie obliczeń dla pierwszej fazy algorytmu simplex. Liczba ograniczeń w omawianych zadaniach programowania liniowego szybko rośnie wraz z liczbą wierzchołków i krawędzi grafu i dlatego w [57] stosowano specjalizowaną wersję zredukowanej metody simplex dla problemów dualnych do zadań (3.73), (3.74).

Okazuje się, że również w przypadku niezerowego odstępu dualności, rozwiązania uzyskiwane po zakończeniu pierwszej fazy algorytmu simplex dla problemów (3.73), (3.74) mogą być użyte jako wektory kar. Odpowiadają one bowiem wektorom p dającym minimalną wartość przekroczenia ograniczeń definiujących zbiory P_C i \bar{P}_C .

Praktyczne doświadczenia pokazują [57], że czas zużywany na wyznaczenie wektora kar jest dominujący w procedurze znajdowania tolerancji krawędzi opisywaną metodą. Interesującą obserwacją jest również to, że w przeliczonych przykładach wyznaczone oszacowania dolne tolerancji okazywały się stosunkowo duże w porównaniu z wagami krawędzi grafu.

Tabela 3.1

Oszacowania tolerancji krawędzi

Krawędź	Waga	Tolerancja górna	Tolerancja dolna
(1, 2)	41.00	7.00	INF
(1, 3)	50.00	INF	0.00
(1, 4)	80.00	INF	27.00
(1, 5)	67.00	INF	18.00
(1, 6)	86.00	INF	33.00
(1, 7)	58.00	INF	12.00
(1, 8)	60.00	INF	7.00
(1, 9)	37.00	INF	0.00
(1,10)	36.00	0.00	INF
(2, 3)	14.00	15.00	INF
(2, 4)	40.00	INF	8.00
(2, 5)	28.00	INF	0.00
(2, 6)	50.00	INF	18.00
(2, 7)	41.00	INF	6.00
(2, 8)	69.00	INF	27.00
(2, 9)	39.00	INF	13.00
(2,10)	28.00	INF	3.00
(3, 4)	34.00	0.00	INF
(3, 5)	31.00	INF	1.00
(3, 6)	53.00	INF	19.00
(3, 7)	53.00	INF	16.00
(3, 8)	83.00	INF	39.00
(3, 9)	53.00	INF	25.00
(3,10)	42.00	INF	15.00
(4, 5)	28.00	5.00	INF
(4, 6)	41.00	INF	9.00
(4, 7)	64.00	INF	24.00
(4, 8)	101.00	INF	54.00
(4, 9)	74.00	INF	43.00
(4,10)	63.00	INF	33.00
(5, 6)	22.00	15.00	INF
(5, 7)	36.00	INF	0.00
(5, 8)	74.00	INF	31.00
(5, 9)	50.00	INF	23.00
(5,10)	40.00	INF	14.00
(6, 7)	40.00	0.00	INF
(6, 8)	78.00	INF	31.00
(6, 9)	61.00	INF	30.00
(6,10)	53.00	INF	23.00
(7, 8)	39.00	0.00	INF
(7, 9)	24.00	INF	1.00
(7,10)	22.00	INF	0.00
(8, 9)	30.00	0.00	INF
(8,10)	41.00	INF	12.00
(9,10)	11.00	2.00	INF

Przykład 3.6

Dany jest graf $G = K_{10}$ (graf pełny o 10 wierzchołkach); wagi krawędzi są podane w Tabeli 3.1. Rozwiązaniem optymalnym dla zadania wyznaczania najkrótszego obwodu Hamiltona w tym grafie jest $\bar{H}^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (9,10), (10,1)\}$ i $l(\bar{H}^0) = 259$. Chcemy wyznaczyć oszacowania tolerancji krawędzi względem obwodu \bar{H}^0 , stosując opisane w tym rozdziale podejście. Rozwiązując zadanie znajdowania najkrótszego drzewa rozpinającego uzupełnionego w tym grafie, otrzymujemy jako drzewo optymalne $\bar{T} = \{(1,10), (10,9), (10,7), (10,2), (2,3), (2,5), (5,6), (5,4), (9,8)\}$ i $l(\bar{T}) = 219$. W wyniku rozwiązania zadania (3.37) z $a = (1,1, \dots, 1)^T$ otrzymujemy wektor kar $p = (0,5,3,0,4,0,7,0,16,17)^T$ i $\bar{\Delta}(p) = 0$. Obwód \bar{H}^0 jest więc również najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w grafie G^p . Pozwala to na wyznaczenie oszacowań tolerancji krawędzi grafu względem obwodu Hamiltona \bar{H}^0 na podstawie Lematu 3.3 poprzez policzenie tolerancji krawędzi względem $\bar{T}^p = \bar{H}^0$ w grafie G^p . Wartości tych oszacowań podane są w Tabeli 3.1. Symbol INF oznacza nieskończoną wartość tolerancji.

□

3.4.5 Użycie tolerancji krawędzi w innych zadaniach analizy wrażliwości związanych z drogami i obwodami Hamiltona

W poprzednich punktach tego podrozdziału przedstawiono podejście do wyznaczania oszacowań dolnych dla tolerancji krawędzi względem najkrótszych dróg i obwodów Hamiltona w grafach symetrycznych. Oszacowania te były konstruowane poprzez wykorzystanie wyników analizy wrażliwości dla drzew rozpinających i drzew rozpinających

uzupełnionych w odpowiednio zmodyfikowanych grafach. Dzięki temu możliwe jest skorzystanie z wyników dowiedzionych w podrozdziale 3.1 i użycie tak wyznaczonych tolerancji krawędzi do badania w pewnym ograniczonym zakresie dopuszczalnych jednoczesnych zmian wielu krawędzi grafu. Zanim jednak przejdziemy do tych zagadnień, pokażemy, w jaki sposób wyznaczone tolerancje krawędzi można wykorzystać (patrz [56]) w zadaniach analizy poptymalizacyjnej, polegających na badaniu skutków wprowadzania dodatkowych ograniczeń dotyczących zawierania albo niezawierania wskazanych podzbiorów krawędzi w rozwiązaniu optymalnym.

Rozważmy następujący problem. Dany jest graf $G = (V, E, C)$ i najkrótsza droga Hamiltona H^0 (albo najkrótszy obwód Hamiltona \bar{H}^0) w tym grafie. Chcemy zbadać skutki wprowadzenia dodatkowych warunków o następującej postaci (sformułujemy je dla H^0 ; podobnie można postawić takie zadania dla \bar{H}^0) :

(i) Mając H^0 i dany zbiór krawędzi $D \subseteq H^0$ chcemy ocenić, na ile w stosunku do H^0 pogorszy się najkrótsza droga Hamiltona w G , jeśli żadna z krawędzi należących do D nie będzie mogła znaleźć się w tej drodze.

(ii) Mając H^0 i dany podzbiór krawędzi $A \subseteq E \setminus H^0$ chcemy ocenić o ile pogorszy się w stosunku do H^0 najkrótsza droga Hamiltona, jeśli będzie ona musiała zawierać wszystkie krawędzie należące do zbioru A . (Zauważmy, że pytanie to warto stawiać w przypadku, gdy podgraf (V, A, C) nie zawiera drogi łączącej wierzchołki 1 oraz n .)

Odpowiedź na każde z powyższych pytań wymaga rozwiązania pomocniczego zadania optymalizacyjnego o następującej postaci :

$$l^D(H^0) = \min \{ l(H) : H \in \mathcal{H}, H \cap D = \emptyset \} \quad (3.75)$$

albo

$$l_A(H^0) = \min \{ l(H) : H \in \mathcal{H}, A \subseteq H \}. \quad (3.76)$$

Niech $\bar{l}^D(\bar{H}^0)$ i $\bar{l}_A(\bar{H}^0)$ oznaczają podobnie zdefiniowane wielkości w przypadku zadania komiwojażera, tzn.

$$\bar{l}^D(\bar{H}^0) = \min \{ l(\bar{H}) : \bar{H} \in \bar{\mathcal{H}}, \bar{H} \cap D = \emptyset \}, \quad (3.77)$$

$$\bar{l}_A(\bar{H}^0) = \min \{ l(\bar{H}) : \bar{H} \in \bar{\mathcal{H}}, A \subseteq \bar{H} \}. \quad (3.78)$$

Zauważmy, że rozważanie zadania (3.78) ma sens jedynie wtedy, gdy podgraf (V, A, C) nie zawiera obwodów.

Zadania powyższe są w ogólnym przypadku trudne i taka analiza poodptymalizacyjna może być obliczeniowo bardzo złożona, szczególnie wówczas, gdy chcemy rozważać liczne podzbiory D i A . Jeśli jednak dysponujemy oszacowaniami tolerancji krawędzi uzyskanymi w sposób opisany w poprzednich punktach, to wówczas wyznaczenie oszacowań wartości optymalnych zadań (3.75) - (3.78) jest bardzo łatwe dla dowolnych podzbiorów D , A . Należy jednak brać pod uwagę, że mogą to być oszacowania stosunkowo niedokładne, jak pokazuje przytoczony niżej przykład.

Będziemy chcieli wyznaczyć oszacowania dolne następujących wielkości dla danego rozwiązania H^0 :

$$d^D = l^D(H^0) - l(H^0), \quad (3.79)$$

$$d_A = l_A(H^0) - l(H^0) \quad (3.80)$$

oraz ich odpowiedniki dla rozwiązania \bar{H}^0 zadania komiwojażera

$$\bar{d}^D = \bar{l}^D(\bar{H}^0) - l(\bar{H}^0), \quad (3.81)$$

$$\bar{d}_A = \bar{l}_A(\bar{H}^0) - l(\bar{H}^0). \quad (3.82)$$

Zauważmy, że jeśli zbiory D albo A zawierają dokładnie jedną krawędź, wówczas zdefiniowane wyżej wielkości d^D , d_A oraz \bar{d}^D , \bar{d}_A są na mocy Wniosku 3.7 równe odpowiednio tolerancjom górnym i dolnym tej krawędzi względem rozwiązania optymalnego H^0 albo \bar{H}^0 .

Wyznaczanie oszacowań dolnych dla tak zdefiniowanych wielkości opiera się na następującym twierdzeniu :

Twierdzenie 3.11

Niech dla $p \in \mathbb{R}^n$, T^p będzie najkrótszym drzewem rozpinającym w grafie $G^p = (V, E, C^p)$, a $t_p^+(e, T^p)$, $t_p^-(e, T^p)$, $e \in E$, oznaczają tolerancje krawędzi grafu względem T^p . Wówczas dla $D \subseteq H^0$ oraz dla $A \subseteq E \setminus H^0$ zachodzą następujące zależności :

$$d^D \geq \sum_{e \in T^p \cap D} t_p^+(e, T^p) - \Delta(p), \quad (3.83)$$

$$d_A \geq \sum_{e \in (E \setminus T^p) \cap A} t_p^-(e, T^p) - \Delta(p). \quad (3.84)$$

Podobnie, niech \bar{T}^p będzie najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w grafie $G^p = (V, E, C^p)$ i niech $\bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p)$, $\bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p)$, $e \in E$, oznaczają tolerancje krawędzi grafu względem \bar{T}^p . Wówczas dla $D \subseteq \bar{H}^o$ oraz $A \subseteq E \setminus \bar{H}^o$ zachodzą następujące zależności :

$$\bar{d}^D \geq \sum_{e \in \bar{T}^p \cap D} \bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p) - \bar{\Delta}(p), \quad (3.85)$$

$$\bar{d}_A \geq \sum_{e \in (E \setminus \bar{T}^p) \cap A} \bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p) - \bar{\Delta}(p). \quad (3.86)$$

Dowód. Udowodnimy jedynie prawdziwość nierówności (3.83); dowody dla pozostałych nierówności są analogiczne.

Założmy, że zadanie (3.75) ma rozwiązanie optymalne H^D ; zauważmy, że gdyby takie rozwiązanie nie istniało, wówczas zgodnie z przyjętą konwencją mielibyśmy $l^D(H^o) = \infty$ i nierówność (3.83) byłaby oczywiście spełniona. Droga Hamiltona H^D jest również drzewem rozpinającym w grafie $G^p = (V, E, C^p)$, a ponieważ nie zawiera krawędzi należących do zbioru $D \cap T^p$, zatem z faktu, że H^D i T^p są bazami matroidu grafu G^p i na mocy Wniosku 3.3, mamy zależność

$$l^p(H^D) - l^p(T^p) \geq \sum_{e \in T^p \cap D} t_p^+(e, T^p). \quad (3.87)$$

Zauważmy, że $l^p(T^p) = l^p(H^o) - \Delta(p)$, a ponadto różnica długości dwóch dowolnych dróg Hamiltona o tych samych początkach i końcach nie zależy od p . Mamy więc $d^D = l^D(H^o) - l(H^o) = l(H^D) - l(H^o) = l^p(H^D) - l^p(H^o) = l^p(H^D) - l^p(T^p) - \Delta(p) \geq \sum_{e \in T^p \cap D} t_p^+(e, T^p) - \Delta(p)$. ■

Powyższe twierdzenie pozwala na oszacowanie wartości d^D , d_A oraz \bar{d}^D , \bar{d}_A dla dowolnego wektora kar p . Podobnie jednak, jak w przypadku oszacowań tolerancji krawędzi, pożądanym jest dobór takiego p , dla którego wartości $|H^0 \setminus T^p|$, jak i $\Delta(p)$, są możliwie małe. Jeśli natomiast dysponujemy już tolerancjami krawędzi, to wówczas wyznaczanie oszacowań d^D , d_A dla dowolnych podzbiorów D , A jest bardzo tanie obliczeniowo. Należy się jednak spodziewać, że oszacowania uzyskiwane tak małym kosztem mogą być niedokładne.

Przykład 3.7

Rozważmy graf z Przykładu 3.6. Tabela 3.1 podaje wagi krawędzi oraz obliczone oszacowania tolerancji krawędzi względem rozwiązania optymalnego zadania komiwojażera $\bar{H}^0 = \{(1,2), (2,3), \dots, (9,10), (10,1)\}$. Wartość rozwiązania optymalnego jest równa 295. Obwód Hamiltona \bar{H}^0 jest równocześnie najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w grafie $G^p = (V, E, C^p)$ dla wektora kar $p = (0, 5, 3, 0, 4, 0, 7, 0, 16, 17)^T$, bowiem $\bar{\Delta}(p) = 0$. Oszacowania tolerancji krawędzi zostały obliczone zgodnie z podaną w tym podrozdziale metodologią.

Założmy teraz, że żądamy, aby krawędzie dla wybranego podzbioru $D \subseteq \bar{H}^0$, na przykład $D = \{(2,3), (5,6), (9,10)\}$, nie należały do optymalnego obwodu Hamiltona. Zgodnie z Twierdzeniem 3.11 mamy

$$\bar{d}^D \geq \bar{t}_p^+((2,3), \bar{H}^0) + \bar{t}_p^+((5,6), \bar{H}^0) + \bar{t}_p^+((9,10), \bar{H}^0).$$

Biorąc odpowiednie wartości z Tabeli 3.1, otrzymujemy

$$\bar{d}^D \geq 15 + 15 + 2 = 32.$$

Zatem niewłączenie krawędzi $(2,3)$, $(5,6)$, $(9,10)$ do obwodu Hamiltona musi spowodować jego wydłużenie o co najmniej 32. W rzeczywistości wydłużenie to jest większe, bowiem najkrótszym obwodem Hamiltona w G ,

nie zawierającym tych krawędzi, jest $H^D = \{ (1,9), (8,9), (7,8), (6,7), (4,6), (3,4), (3,5), (2,5), (2,10), (1,10) \}$ i $l(H^D) = 344$, a zatem $\bar{d}^D = 49$.

Przyjmijmy teraz, że chcemy, aby najkrótszy obwód Hamiltona zawierał krawędzie należące do wybranego podzbioru $A \subseteq E \setminus \bar{H}^0$, na przykład $A = \{(1,6), (2,8), (6,9)\}$. Z Twierdzenia 3.11 wynika, że

$$\bar{d}_A \geq \bar{t}_p^-((1,6), \bar{H}^0) + \bar{t}_p^-((2,8), \bar{H}^0) + \bar{t}_p^-(6,9), \bar{H}^0).$$

Biorąc odpowiednie wartości z Tabeli 3.1, mamy

$$\bar{d}_A \geq 33 + 27 + 30 = 90.$$

Najkrótszym obwodem Hamiltona w G , zawierającym krawędzie należące do A , jest $H^A = \{ (1,6), (6,9), (2,8), (8,9), (2,3), (3,4), (4,5), (5,7), (7,10), (10,1) \}$ i $l(H^A) = 406$. Otrzymujemy zatem $\bar{d}_A = 111$.

□

3.4.6. Jednoczesne zmiany wag wielu krawędzi grafu

Badanie jednoczesnych zmian wag wielu krawędzi grafu, nie naruszających optymalności danej drogi lub obwodu Hamiltona, może być obecnie prowadzone tylko w bardzo ograniczonym zakresie. Rozważania z tego punktu wykorzystują fakt, że do analizy wrażliwości dla oryginalnego zadania były używane wyniki znacznie prostszej jego relaksacji.

Zauważmy jednak, że niezależnie od metody użytej do wyznaczania dopuszczalnych zmian wag pojedynczych krawędzi, znajomość takich zmian definiuje pewien obszar dopuszczalnej zmienności wielu wag. Wynika to bezpośrednio z wypukłości obszaru niewrażliwości. W przypadku, gdy wynikiem analizy są oszacowania tolerancji, uzyskane z

zastosowaniem podejścia prezentowanego w tym rozdziale, prowadzi to do następujących wniosków:

Niech, jak poprzednio, H^0 będzie najkrótszą drogą Hamiltona w grafie $G = (V, E, C)$, a T^P oznacza najkrótsze drzewo rozpinające w grafie $G^P = (V, E, C^P)$ dla pewnego $p \in \mathbb{R}^n$. Ponadto, $t_p^+(e, T^P)$, $t_p^-(e, T^P)$ oznaczają, jak poprzednio, tolerancje krawędzi względem T^P i $\Delta(p) = l^P(H^0) - l^P(T^P)$.

Zgodnie z rozważaniami z punktu 2.2.2, obszar niewrażliwości $P(H^0)$ rozwiązania H^0 , gdzie

$P(H^0) = \{ d = (d(e_1), \dots, d(e_m))^T \in \mathbb{R}^m : H^0 \text{ jest najkrótszą drogą Hamiltona łączącą wierzchołki } 1 \text{ i } n \text{ w grafie } G=(V, E, D), \text{ gdzie:}$

$$D = [d_{ij}] \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}, \quad d_{ij} = d_{ji}, \quad \text{dla } i, j = 1, \dots, m,$$

$$d_{ij} = d(e) \quad \text{dla } e = (i, j) \in E,$$

$$d_{ij} = \infty \quad \text{jeśli } (i, j) \notin E \},$$

jest wielościennejnym stożkiem wypukłym w \mathbb{R}^m .

Niech

$$\delta(e) = \begin{cases} \max\{0, t_p^+(e, T^P) - \Delta(p)\} & \text{dla } e \in H^0 \cap T^P \\ \max\{0, t_p^-(e, T^P) - \Delta(p)\} & \text{dla } e \in (E \setminus H^0) \cap (E \setminus T^P) \\ \max\{0, \min\{t_p^-(u, T^P) : u \in (E \setminus T^P) \setminus \{e\}\} - \Delta(p)\} & \text{dla } e \in H^0 \setminus T^P \\ \max\{0, \min\{t_p^+(u, T^P) : u \in T^P \setminus \{e\}\} - \Delta(p)\} & \text{dla } e \in T^P \setminus H^0 \end{cases}$$

Zdefiniujmy dla $e \in H^0$

$$D^e(H^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : d(e) \leq c(e) + \delta(e), \\ d(u) = c(u) \text{ dla } u \neq e \}$$

oraz dla $e \in E \setminus H^0$

$$D^e(H^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : d(e) \geq c(e) - \delta(e), \\ d(u) = c(u) \text{ dla } u \neq e \}.$$

Niech

$$D(H^0) = \text{conv} \left(\bigcup_{e \in E} D^e(H^0) \right).$$

Zauważmy, że z definicji zbiorów $D^e(H^0)$, $e \in E$, oraz z udowodnionych w tym rozdziale Lematu 3.8 oraz Twierdzenia 3.8 wynika, że dla $e \in E$ mamy $D^e(H^0) \subseteq P(H^0)$. Zatem bezpośrednią konsekwencją wypukłości zbioru $P(H^0)$ jest następujący fakt:

Wniosek 3.12

$$D(H^0) \subseteq P(H^0). \quad \blacksquare$$

Inna możliwość badania w ograniczonym zakresie dopuszczalnych jednoczesnych zmian wag krawędzi, nie naruszających optymalności danej drogi lub obwodu Hamiltona, ma już ścisły związek z przyjętą metodą wyznaczania tolerancji krawędzi i jest konsekwencją wcześniej udowodnionych właściwości obszaru niewrażliwości dla optymalnej bazy matroidu (Rozdział 3.2).

Założmy, że w pierwotnym grafie $G = (V, E, C)$, dla którego H^0 jest najkrótszą drogą Hamiltona z wierzchołka 1 do n , wprowadzamy zaburzenie wag krawędzi i niech $d = (d(e_1), \dots, d(e_m))^T$ oznacza wektor nowych wag. Wprowadźmy dla $e \in E$ oznaczenia:

$$\begin{aligned}\delta^+(e) &= \max\{0, d(e) - c(e)\}, \\ \delta^-(e) &= \max\{0, c(e) - d(e)\}.\end{aligned}$$

Niech

$$D^+(H^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : \sum_{e \in E \setminus H^0} \delta^-(e) = 0 \text{ oraz dla każdego } S \subseteq H^0$$

$$\sum_{e \in S} \delta^+(e) \leq \max\{0, \sum_{e \in S \cap T^p} t_p^+(e, T^p) - \Delta(p)\} \} \quad (3.88)$$

oraz

$$D^-(H^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : \sum_{e \in H^0} \delta^+(e) = 0 \text{ oraz dla każdego } S \subseteq E \setminus H^0$$

$$\sum_{e \in S} \delta^-(e) \leq \max\{0, \sum_{e \in S \cap (E \setminus T^p)} t_p^-(e, T^p) - \Delta(p)\} \}. \quad (3.89)$$

Zachodzi następujący fakt:

Twierdzenie 3.12

$$D^+(H^0) \cup D^-(H^0) \subseteq P(H^0). \quad (3.90)$$

Dowód. Dowód inkluzji (3.90) przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że w grafie G wagi krawędzi są wyznaczone przez pewien wektor $d \in D^+(H^0) \cup D^-(H^0)$ i że wówczas istnieje droga Hamiltona $H' \in \mathcal{H}$ krótsza niż H^0 . Zauważmy, że jeśli $d \in D^+(H^0) \cup D^-(H^0)$, to mamy

$$\sum_{e \in E \setminus H^0} \delta^-(e) = 0 \quad \text{lub} \quad \sum_{e \in H^0} \delta^+(e) = 0. \quad \text{Przyjmijmy, że} \quad \sum_{e \in E \setminus H^0} \delta^-(e) = 0,$$

czyli że $d \in D^+(H^0)$; rozumowanie w drugim przypadku jest analogiczne. Oznacza to, że wagi krawędzi grafu nie należących do drogi H^0 mogą dowolnie rosnać, ale nie mogą maleć. Natomiast wagi krawędzi należących do H^0 mogą dowolnie maleć, ale ich wzrost jest ograniczony nierównościami (3.88). Rozważmy różnicę $L_d(H^0, H')$ długości dróg H^0 i H' , to znaczy wartość wyrażenia

$$\begin{aligned} L_d(H^0, H') &= \sum_{e \in H^0} d(e) - \sum_{e \in H'} d(e) = \sum_{e \in H^0 \setminus H'} d(e) - \sum_{e \in H' \setminus H^0} d(e) = \\ &= \sum_{e \in H^0 \setminus H'} [c(e) + \delta^+(e) - \delta^-(e)] - \sum_{e \in H' \setminus H^0} [c(e) + \delta^+(e) - \delta^-(e)] = \\ &= \sum_{e \in H^0 \setminus H'} c(e) - \sum_{e \in H' \setminus H^0} c(e) + \\ &+ \sum_{e \in H^0 \setminus H'} \delta^+(e) - \sum_{e \in H^0 \setminus H'} \delta^-(e) - \sum_{e \in H' \setminus H^0} \delta^+(e) + \sum_{e \in H' \setminus H^0} \delta^-(e). \end{aligned}$$

Z przyjętego założenia, że droga H' jest krótsza niż H^0 , wynika, że

$$L_d(H^0, H') > 0. \quad \text{Ponieważ} \quad \sum_{e \in H' \setminus H^0} \delta^-(e) = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{e \in H' \setminus H^0} \delta^+(e) \geq 0 \quad \text{oraz}$$

$$\sum_{e \in H^0 \setminus H'} \delta^-(e) \geq 0, \quad \text{to założenie takie implikuje nierówność}$$

$$\sum_{e \in H^0 \setminus H'} \delta^+(e) > \sum_{e \in H' \setminus H^0} c(e) - \sum_{e \in H^0 \setminus H'} c(e). \quad (3.91)$$

Prawa strona tej nierówności jest równa różnicy długości $l(H') - l(H^0)$ dróg H' i H^0 w oryginalnym grafie $G = (V, E, C)$, a ponieważ H^0 jest najkrótszą drogą Hamiltona w tym grafie, zatem $l(H') - l(H^0) \geq 0$. Ponadto, zgodnie z Twierdzeniem 3.11,

$$l(H') - l(H^0) \geq \sum_{e \in (H^0 \setminus H') \cap T^p} t_p^+(e, T^p) - \Delta(p).$$

Nierówność (3.91) pociąga więc za sobą zależność

$$\sum_{e \in H^0 \setminus H'} \delta^+(e) > \max\{0, \sum_{e \in (H^0 \setminus H') \cap T^p} t_p^+(e, T^p) - \Delta(p)\}.$$

To jednak oznacza sprzeczność z założeniem, że $d \in D^+(H^0)$, bowiem w definicji zbioru $D^+(H^0)$ występuje warunek przeciwny dla $S = H^0 \setminus H'$. Dowód w przypadku, gdy $d \in D^-(H^0)$, jest analogiczny. Założenie o istnieniu w grafie z wagami wyznaczonymi przez wektor d drogi H' krótszej od H^0 jest więc nieprawdziwe, a zatem d należy do obszaru niewrażliwości rozwiązania H^0 . ■

Analogiczny fakt zachodzi dla rozwiązania optymalnego \bar{H}^0 zadania komiwojażera i odpowiadającego mu obszaru niewrażliwości $\bar{P}(\bar{H}^0)$. Jeśli \bar{T}^p jest najkrótszym drzewem rozpinającym uzupełnionym w grafie G^p dla pewnego $p \in \mathbb{R}^n$ i

$$\bar{D}^+(\bar{H}^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : \sum_{e \in E \setminus \bar{H}^0} \delta^-(e) = 0 \text{ oraz dla każdego } S \subseteq \bar{H}^0$$

$$\sum_{e \in S} \delta^+(e) \leq \max\{0, \sum_{e \in S \cap \bar{T}^p} \bar{t}_p^+(e, \bar{T}^p) - \bar{\Delta}(p)\} \}$$

oraz

$$\bar{D}^-(\bar{H}^0) = \{ d \in \mathbb{R}^m : \sum_{e \in \bar{H}^0} \delta^+(e) = 0 \text{ oraz dla każdego } S \subseteq E \setminus \bar{H}^0$$

$$\sum_{e \in S} \delta^-(e) \leq \max\{0, \sum_{e \in S \cap (E \setminus \bar{T}^p)} \bar{t}_p^-(e, \bar{T}^p) - \bar{\Delta}(p)\} \},$$

to wówczas

$$\bar{D}^-(\bar{H}^0) \cup \bar{D}^+(\bar{H}^0) \subseteq \bar{P}(\bar{H}^0). \quad (3.92)$$

Powyższe fakty pozwalają na badanie w ograniczonym zakresie jednoczesnych zmian wag krawędzi grafu nie naruszających optymalności danej drogi H^0 lub obwodu Hamiltona \bar{H}^0 . Zauważmy jednak, że jednoczesność tych zmian jest ograniczona tylko do

podzbiorów krawędzi należących do rozwiązań optymalnych albo ich dopełnień. Z konstrukcji zbiorów $D^+(H^0)$, $D^-(H^0)$ oraz $\bar{D}^+(\bar{H}^0)$, $\bar{D}^-(\bar{H}^0)$ wynika też, że po to, żeby opisy takich podzbiorów obszaru niewrażliwości były praktycznie użyteczne, liczba jednocześnie zaburzanych krawędzi nie może być duża, ponieważ ilość nierówności definiujących te podzbiory bardzo szybko z nią rośnie.

ZAKOŃCZENIE

Analiza wrażliwości rozwiązań staje się obecnie dynamicznie rozwijającym się działem optymalizacji dyskretnej. Jednakże nadal pozostaje w niej wiele nierozwiązanych problemów. Również często możliwości obliczeniowe badania wrażliwości rozwiązań znacznie odbiegają od praktycznych potrzeb. W dużym stopniu jest to następstwem faktu, że same zadania optymalizacji dyskretnej są zwykle trudne. Wymownym objawem tych trudności jest to, że obecnie żaden komercyjny pakiet, przeznaczony do rozwiązywania zadań dyskretnych, nie oferuje jakichkolwiek możliwości analizy pooptymalizacyjnej.

Wydaje się, że obecnie trudno się spodziewać istotnego postępu, jeśli chodzi o ogólne techniki rozwiązywania problemów z zakresu analizy wrażliwości. Ciągłe perspektywiczne wydają się natomiast badania dla poszczególnych klas zadań, a zwłaszcza badania związane z konkretnymi algorytmami używanymi dla tych klas zadań. W przypadku każdego takiego algorytmu zasadne jest postawienie na przykład pytań o zakres i koszty obliczeniowe modyfikacji, jakie należałoby wprowadzić dla ułatwienia reoptymalizacji. Celowe jest również analizowanie każdego z takich algorytmów z punktu widzenia możliwości użycia go do rozwiązywania nie tylko pojedynczego zadania, ale całej rodziny zadań parametrycznych.

Z praktycznego punktu widzenia bardzo pożądane wydają się również badania nad przybliżonym rozwiązywaniem zadań z zakresu analizy poodptymalizacyjnej. Dotyczy to dwóch grup zagadnień. Pierwsza jest związana z przybliżoną analizą wrażliwości i analizą parametryczną dla rozwiązań optymalnych zadań (na przykład wyznaczanie jedynie dolnych oszacowań tolerancji, oszacowań promienia niewrażliwości, przybliżone określanie przedziału zmian wartości optymalnej zadania przy zmianie parametrów, itp.). Druga grupa zagadnień dotyczy podobnych problemów, ale formułowanych dla rozwiązań przybliżonych zadań. Takie postawienie celów w analizie wrażliwości powinno zwykle być satysfakcjonujące z praktycznego punktu widzenia, a równocześnie daje szansę na dostarczenie metod akceptowalnych obliczeniowo.

LITERATURA

- [1] A.W. Aho, J.E Hopcroft, J.D. Ullman - *Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych*. PWN, Warszawa, 1983.
- [2] E. Balas - Facets of the knapsack polytope. *Mathematical Programming*, 8 (1975) 146-164.
- [3] M.G. Bailey, B.E. Gillet - Parametric integer programming analysis: a contraction approach. *Journal of the Operational Research Society*, 31 (1980) 257-262.
- [4] B. Bank - Qualitative Stabilitätsuntersuchungen rein- und gemischt-ganzzahliger linearer parametrischer Optimierungsprobleme. Seminarbericht Humboldt Universität, 14, nr 6, 1978.
- [5] B. Bank - Stability analysis in pure and mixed integer programming. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 23 (1980) 148-153.
- [6] C.E. Blair, R.G. Jeroslow - The value function of an integer program. *Mathematical Programming*, 23 (1982) 237-273.
- [7] C.E. Blair, R.G. Jeroslow - Constructive characterization of the value function of a mixed-integer program II. *Discrete Applied Mathematics*, 10 (1985) 227-240.
- [8] J. Błażewicz - *Złożoność obliczeniowa problemów kombinatorycznych*. WNT, Warszawa, 1988.
- [9] V.J. Bowman - The structure of integer programs under the Hermite normal form. *Operations Research*, 22 (1974) 1067-1080.
- [10] P.J. Brucker, H.W. Hamacher - k -optimal solutions sets for some polynomially solvable scheduling problems. *European Journal of Operations Research*, 41 (1989) 194-202.
- [11] F.Y. Chin, D.J. Houck - Algorithm for updating minimal spanning trees. *Journal of Computers and System Sciences*, 16 (1978) 333-344.
- [12] N. Christofides - *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. Academic Press, New York, London, San Francisco, 1975.

- [13] H. Crowder, E.L. Johnson, M. Padberg - Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, 31 (1983) 803-834.
- [14] N. Deo - *Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce*. PWN, Warszawa, 1980.
- [15] U. Derigs - Exchange properties and k-best strategies in combinatorial optimization. W : J.P. Brans (ed.) *Operations Research'84*, Elsevier Science Publishers B.V., (1984) 393-406.
- [16] K. Dudziński, M. Libura, J. Majchrzak, J. Sikorski - On solving placement and routing problems in telephone exchange unit designs. *OR Spectrum*, 10 (1988), 213-220.
- [17] K. Dudziński, S. Walukiewicz - Exact methods for the knapsack problem and its generalizations. *European Journal of Operations Research*, 28 (1987) 3-21.
- [18] A.V. Fiacco - *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*. Academic Press, New York, London, 1983.
- [19] J.M. Fleisher, R.R. Meyer - A new class of sufficient optimality conditions for integer programming. University of Wisconsin-Madison, Computer Sciences, Technical Repot 248 (1975).
- [20] T. Gal - *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [21] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser - *Programowanie całkowitoliczbowe*. PWN, Warszawa, 1978.
- [22] M.R. Garey, D.S. Johnson - *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. Freeman, San Francisco, 1979.
- [23] A.M. Geoffrion, R. Nauss - Parametric and postoptimality analysis in integer programming. *Management Science*, 23 (1977) 453-466.
- [24] D. Gusfield - A note on arc tolerances in sparse minimum path and network flow problems. *Networks*, 13 (1983) 191-196.
- [25] D. Gusfield - Parametric combinatorial computing and a problem of program module distribution. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 30 (1983) 551-563.
- [26] P.L. Hammer, E.L. Johnson, U.N. Peled - Facets of regular 0-1 polytopes. *Mathematical Programming*, 8 (1975) 179-206.

- [27] H.W. Hamacher, M. Queyranne - K best solutions to combinatorial optimization problems. *Annals of Operations Research*, 4 (1985/6) 123-143.
- [28] D. Harel, R.E. Tarjan - Fast algorithms for finding nearest common ancestor. *SIAM Journal on Computing*, 13 (1984) 338-355.
- [29] M. Held, R.M. Karp - The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18 (1970) 1138-1162.
- [30] M. Held, R.M. Karp - The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II. *Mathematical Programming*, 1 (1971) 6-25.
- [31] S. Holm, D. Klein - Discrete right hand side parametrization for linear integer programs. *European Journal of Operations Research*, 2 (1978) 50-53.
- [32] S. Holm - The natural induced dual price function for an ILP solved by a cutting plane algorithm. Odense University, Dep. of Business Administration, Rap. No.7/1979.
- [33] L. Jenkins - Parametric mixed integer programming: an application to solid waste management. *Management Science*, 28 (1982) 1270-1284.
- [34] M. Kano - Maximum and k -th maximal spanning trees of a weighted graph. *Combinatorica*, 7 (1987) 205-214.
- [35] N. Katoh, T. Ibaraki - An efficient algorithm for the parametric resource allocation problem. *Discrete Applied Mathematics*, 10 (1985) 261-274
- [36] K. Kiwiel - Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization. *Lecture Notes for Mathematics* 1133, Springer, Berlin, 1985.
- [37] D. Klein, S. Holm - Integer programming post-optimal analysis with cutting planes. *Management Science*, 25 (1979) 64-72.
- [38] E.N. Kozierackaja, T.T. Lebidiewa, I.W. Siergienko - Woprosy ustojcziwosti, paramietriczieskij i postoptimalnyj analiz zadacz diskrietnoj optimizaczi. *Kibiernietika*, 4 (1983) 71-80.
- [39] M.Ja. Kowaljow, Ju.N. Sotskow - Ustojcziwost' ϵ -pribliżonnych rieszenij buljewych zadacz minimizaczi liniejnoj formy. *Wiesci Akademii Nauk Biełaruskaj SSR*, 2 (1990) 111-116.

- [40] J. Komlós - Linear verification for spanning trees. *Combinatorica*, 5 (1985) 57-65.
- [41] J.L. Kulikowski - *Zarys teorii grafów*. PWN, Warszawa, 1986.
- [42] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.G. Rinnoy Kan, D. Shmoys - *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley 1985.
- [43] E.L. Lawler - *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [44] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' zadaczi komiwojażora. Zurnál Wycislitelnoj Matematiki i Matematycznej Fiziki, tom 15 (1975) 1298-1309.
- [45] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' w kombinatorynych zadaczach wybora. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, tom 228, (1976) 23-25.
- [46] W.K. Leont'ew - Ustojcziwost' w liniowych dyskretnych zadaczach. *Problemy Kibernetiki*, 35 (1979) 169-184.
- [47] M. Libura, L. Słomiński - Transformacje zadań programowania dyskretnego. *Prace IOK*, z.10, Warszawa, 1974.
- [48] M. Libura - Stability regions for optimal solutions of the integer programming problems. Working Paper MPD 3-76, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, 1976.
- [49] M. Libura - Zagadnienia wrażliwości rozwiązań w programowaniu całkowitoliczbowym. *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki*, vol. XXII (1977) 299-311.
- [50] M. Libura - Analiza wrażliwości rozwiązań całkowitoliczbowego zadania załadunku. *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki*, vol. XXII (1977) 313-322.
- [51] M. Libura - Integer programming problems with inexact objective function. *Control and Cybernetics*, 9 (1980) 189-202.
- [52] M. Libura - Dualność w programowaniu całkowitoliczbowym i jej zastosowanie w analizie wrażliwości i algorytmach przybliżonych. *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki*, vol. XXIX, zes. 1-2 (1984) 75-92.

- [53] M. Libura - Zadania programowania dyskretnego z parametryczną funkcją celu. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, seria Automatyka, z.74 (1984) 141-151.
- [54] M. Libura - Analiza wrażliwości rozwiązań dla zadania wyznaczenia najkrótszej drogi Hamiltona w grafie. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, seria Automatyka, z.84 (1986) 131-139.
- [55] M. Libura - O pewnym zadaniu programowania całkowitoliczbowego z ilorazową funkcją celu. *Prace I Krajowej Konferencji Badań Operacyjnych i Systemowych*, Książ, czerwiec 1989, tom I, Optymalizacja - Metody i Zastosowania, IBS PAN, Warszawa 1989, 89-97.
- [56] M. Libura - On travelling salesman problem with side constraints. W: R. Kulikowski, J.S. Sosnowski (ed.) *Badania Systemowe*, t.2, Metody Optymalizacji i Sterowania Komputerowego, Omnitech Press, Warszawa, 1990, 134-142.
- [57] M. Libura - Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems. *Discrete Applied Mathematics*, 30 (1991) 197-211.
- [58] M. Libura - Sensitivity analysis for minimum weight base of matroid. *Control and Cybernetics*, 20 (1991) 7-24.
- [59] M. Libura - Combinatorial optimization problems in brachyradiotherapy planning. *Archives of Control Sciences*, 1 (1992) 119-126.
- [60] W. Lipski - *Kombinatoryka dla programistów*. WNT, Warszawa, 1989.
- [61] R.E. Marsten, T.L. Morin - Parametric integer programming : the right hand side case. *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 357-390.
- [62] H. Noltemeier - Sensitivitätsanalyse bei diskreten linearen Optimierungsproblemen. *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems*, 30, M. Beckman, H.P. Kunzi (eds.) Springer Verlag, New York, 1970.
- [63] Y. Othake, N. Nishida - A branch-and-bound algorithm for 0-1 parametric mixed integer programming, *Operations Research Letters*, 4 (1985) 41-45.
- [64] C.J. Piper, A.A. Zoltners - Some easy postoptimality analysis for zero-one programming. *Management Science*, 22 (1976) 759-765.

- [65] M.R. Rao - Adjacency of the traveling salesman tours and 0-1 vertices. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 30 (1976) 191-198.
- [66] M.A. Radke - Sensitivity analysis in discrete optimization. Western Management Science Institute, University of California, Los Angeles, *Working Paper No. 240*, September 1975.
- [67] G.M. Roodman - Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration. *Naval Research Logistics Quarterly*, 19 (1972) 435-447.
- [68] G.M. Roodman - Postoptimality analysis in zero-one programming by implicit enumeration: the mixed integer case. *Naval Research Logistics Quarterly*, 21 (1974) 595-607.
- [69] S.L.K. Rountree, B.E. Gillet - Parametric integer linear programming: A synthesis of branch and bound with cutting planes. *European Journal of Operations Research*, 10 (1982) 183-189.
- [70] J. Seeländer - Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Stabilitätsbereichen in der reinganzahligen linearen Optimierung. *Mathematische Operativforschung und Statistik*, 11 (1980) 261-271.
- [71] J. Seeländer - Über die Bestimmung von Stabilitätsbereichen bei speziellen gemischtganzzahligen linearen Optimierungsproblemen. *Mathematische Operativforschung und Statistik*, 11 (1980) 447-454.
- [72] L. Schrage, L.A. Wolsey - Sensitivity analysis for branch and bound integer programming. *Operations Research*, 33 (1985) 1008-1023.
- [73] A. Schrijver - *Theory of Linear and Integer Programming*. J. Wiley, Chichester, 1986.
- [74] J.F. Shapiro - *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. J. Wiley, New York, Toronto, 1979.
- [75] J.F. Shapiro - Sensitivity analysis in integer programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 1 (1977) 647-677.
- [76] D.R. Shier, C. Witzgall - Arc tolerances in minimum-path and network flow problems. *Networks*, 10 (1980) 277-291.
- [77] M. Simmonard - *Programowanie liniowe*. PWN, Warszawa, 1967.
- [78] Y.N. Sotskov - Stability of an optimal schedule. *European Journal of Operations Research*, 55 (1991) 91-102.

- [79] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik - *Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983 (tłum. polskie - *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993).
- [80] R.E. Tarjan - Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 22 (1975) 215-225.
- [81] R.E. Tarjan - Applications of path compression of balanced trees. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 26 (1979) 690-715.
- [82] R.E. Tarjan - Sensitivity analysis of minimum spanning trees and minimum path trees. *Information Processing Letters*, 14 (1982) 30-33.
- [83] J. Tind, I.A. Wolsey - An elementary survey of general duality theory in mathematical programming. *Mathematical Programming*, 21 (1981) 241-261.
- [84] W.T. Tutte - *Introduction to the Theory of Matroids*. American Elsevier, New York, 1971.
- [85] S. Walukiewicz - *Programowanie dyskretne*. PWN, Warszawa, 1986.
- [86] J.E. Ward, R.E. Wendell - Approaches to sensitivity analysis in linear programming. *Annals of Operations Research*, 27 (1990) 3-38.
- [87] G.M. Weber - Sensitivity analysis of optimal matchings. *Networks*, 11 (1981) 41-56.
- [88] D.J.A. Welsh - *Matroid Theory*. Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.
- [89] L.A. Wolsey - Integer programming duality: Price functions and sensitivity analysis. *Mathematical Programming*, 20 (1981) 173-195.
- [90] K. Zorychta, W. Ogryczak - *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe*. WNT, Warszawa, 1981.

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

MAREK LIBURA

Analiza wrażliwości rozwiązań jest ważnym działem optymalizacji, zajmującym się wpływem zaburzeń danych zadania optymalizacyjnego na jego rozwiązania.

Niniejsza monografia jest poświęcona analizie wrażliwości w przypadku zadań optymalizacji dyskretnej. Omawiane są różne podejścia do badania wrażliwości rozwiązań, wynikające ze specyfiki tych zadań. Szczególny nacisk położony jest na techniki wyznaczania dopuszczalnych zaburzeń danych zadania, przy których pewne ustalone rozwiązanie pozostaje optymalnym. Obszerną część pracy stanowią wyniki analizy wrażliwości dla takich znanych zadań optymalizacji dyskretnej, jak zadanie wyznaczania bazy o minimalnej wadze w matroidzie, binarne zadanie załadunku, zadanie znajdowania najkrótszej drogi Hamiltona w grafie oraz zadanie komiwojażera.

Dr Marek Libura jest adiunktem w Zakładzie Programowania Matematycznego Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk.

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy, prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, tel. 36-19-01 w. 241
01-447 Warszawa

ISBN 83-85847-10-3

ISSN 0208-8029