Instytut Badań Systemowych
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW ODPORNEGO STEROWANIA W CZASIE DYSKRETNYM

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW ODPORNEGO STEROWANIA W CZASIE DYSKRETNYM

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 38

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004

Piotr Suchomski

SYNTEZA ALGORYTMÓW ODPORNEGO STEROWANIA W CZASIE DYSKRETNYM

Publikację opiniowali do druku:
Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Doc. dr hab. inż. Piotr Kulczyki (prof. PK)

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6 01-447 Warszawa
Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw
tel. 837-68-22
email: biblioteka@ibspan.waw.pl

ISBN 83-85847-94-4
ISSN 0208-8029

Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Zakłada się, że poszukiwane rozwiązania (parametry algorytmów o założonej strukturze, nastawy regulatorów) uzyskuje się, stosując komputer w celu wykonania odpowiednich obliczeń wymaganych przez daną metodę syntezy. Jakość takich rozwiązań zależy od trzech podstawowych czynników:

(*1*) właściwości realizowanej arytmetyki (numerycznej precyzji oraz zakresu reprezentowanych liczb),

(*2*) uwarunkowania problemu syntezy (wrażliwości rozwiązania na zmiany wejściowych danych),

(*3*) właściwości algorytmu użytego do rozwiązywania postawionego zadania (numerycznej stabilności metody pozyskiwania rozwiązań).

Wymaga podkreślenia, że w rzetelnej analizie cech danego konkretnego sposobu dochodzenia do pożądanych rozwiązań, nie można zaniedbać żadnego z wyżej wymienionych aspektów. Przykładowo, nawet numerycznie stabilna metoda obliczeniowa implementowana w 'silnej' arytmetyce może, w przypadku źle uwarunkowanego zadania, prowadzić do wyników nieakceptowalnych ze względu na zakładany cel sterowania.

Współcześnie obserwuje się intensywne dążenie do zapewnienia metodom syntezy algorytmów sterowania odpowiednio wysokiej numerycznej jakości. Zabieganie o wymieniony walor dostępnych narzędzi projektowania systemów automatycznego sterowania procesami jest głęboko uzasadnione rolą odgrywaną przez takie systemy we wszystkich dziedzinach techniki. Znaczenie jakie uzyskała omawiana tendencja rozwoju metod projektowania przejawia się w: (*i*) randze licznych publikacji poświęconych tej tematyce (Datta [78], Higham *et al.* [180], Mehrmann i Xu [288], Patel *et al.* [319], Petkov *et al.* [323], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], Varga [451]), (*ii*) powodzeniu oraz żywotności inicjatyw służących promowaniu stosownego oprogramowania – zob. specjalizowane przyborniki pakietu MATLAB, projekt NICONET oraz biblioteka SLICOT (Math Works [283], Van Dooren [447], Van Huffel *et al.* [448], http://www.win.tue.nl/ niconet/niconet.html; por. także biblioteka NETLIB, http://www.netlib.org/ master_counts2.html, Elmroth *et al.* [103]).

W niniejszej pracy skupiono się na wybranych algorytmach odpornego sterowania w czasie dyskretnym, wywiedzionych głównie z metod przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$. Akcentując potrzebę i znaczenie analizy błędów oraz uwarunkowania proponowanych metod syntezy algorytmów sterowania, wskazuje się na sposoby polepszania takiego uwarunkowania. W szczególności, dowodzi się, że cel ten w wielu przypadkach można osiągnąć przez zastosowanie modelowania sterowanych obiektów opartego na operatorze delta (δ).

Merytoryczną treść pracy ujęto w sześciu rozdziałach oraz dodatku.

Wstępny *rozdział 1.* dotyczy modeli z czasem dyskretnym w tym głównie modeli związanych z operatorem δ. Podano tu podstawowe definicje oraz pojęcia wykorzystywane w dalszych rozdziałach.

Rozdział 2. poświęcono problemom syntezy dyskretnych algorytmów sterowania, w których stosuje się metodę rozmieszczania (pozycjonowania) biegunów odpowiedniej funkcji przenoszenia układu zamkniętego. To klasyczne zadanie rozwiązuje się, rozważając niezbędne równania diofantyczne zdefiniowane dla operatora δ. Zbadano właściwości dwóch rodzin par takich równań, przyporządkowanych odpowiednio tylko minimalnofazowym oraz minimalnofazowym i nieminimalnofazowym nominalnym modelom sterowanych obiektów. Pokazano w jaki sposób, modyfikując znaną metodę Youli–Kučery, zapewnić danemu układowi odporną stabilność oraz odporną jakość przy założeniu typowych charakterystyk niepewności nominalnego modelu obiektu. Podano oszacowanie względnego błędu rozwiązania zadania rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń danych tego zadania. Rozważono trudności, które pojawiają się przy rozwiązywaniu równań diofantycznych sformułowanych dla nieminimalnych nominalnych modeli sterowanych obiektów. Przedstawiono także stosowne numerycznie stabilne algorytmy upraszczania takich modeli.

Rozdział 3. poświęcono algorytmom sterowania predykcyjnego w oparciu o prognozę sterowanego procesu uzyskiwaną na podstawie odpowiedniego modelu tego procesu. Podano analityczne formuły opisujące rodziny charakterystycznych wielomianów tak ukształtowanych optymalnych układów zamkniętych. Omówiono metody parametryzacji takich prototypowych wielomianów przy wykorzystaniu standardowych nastaw regulatorów predykcyjnych. Parametryzacja, o której mowa, służy dążeniu do zapewnienia projektowanym układom sterowania założonych cech – a więc wymaganego zapasu stabilności oraz pożądanego charakteru procesów przejściowych. Rozważania tego rozdziału, dotycząc przede wszystkim reguł sterowania w czasie dyskretnym, obejmują także analizę asymptotycznych cech układów zamkniętych odpowiadających predykcyjnemu sterowaniu na podstawie modeli w czasie ciągłym.

Tematem *rozdziału 4.* są właściwości równań Riccatiego oraz Lapunowa zdefiniowanych dla modeli związanych z operatorem δ. Sformułowano tu lematy dotyczące stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego, a także omówiono cechy uogólnionych macierzy Hamiltona skojarzonych z takimi równaniami. Rozważając wrażliwość dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa na zaburzenia elementów macierzowych pęków definiujących takie równania, pokazano, że przy dostatecznie małym okresie próbkowania rozwiązania równań przyporządkowanych standardowemu operatorowi przesunięcia charakteryzują się znacznie gorszym uwarunkowaniem, a więc i mniejszą odpornością na wpływ zaburzeń, w zestawieniu z odpowiednimi równaniami wywiedzionymi dla operatora δ. Pokazano też w jaki sposób, korzystając z rozwiązań pewnych pomocniczych równań Lapunowa, ocenić zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

W *rozdziale 5.* postawiono problem syntezy układu zamkniętego, w którym uogólniony obiekt dynamiczny jest reprezentowany przez swoje odpowiednio zdefiniowane modele w czasie dyskretnym, to znaczy standardową macierz rozproszenia oraz łańcuchowe macierze rozproszenia. W następnej kolejności wprowadzono cechę tak zwanej $J-$bezstratności operatora opisującego dany obiekt, co stanowi podstawę definicji stosownych $J-$bezstratnych faktoryzacji wymienionych modeli. Badano właściwości $J-$bezstratnych stabilizujących koniugatorów, a także dokonano pewnego uogólnienia definicji łańcuchowych macierzy rozproszenia.

Rozdział 6., ostatni i najobszerniejszy rozdział pracy, poświęcono problemom syntezy dyskretnych układów sterowania oraz estymacji optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$. Rozważano standardowe zadania formułowane dla różnych modeli (macierzy) rozproszenia danego uogólnionego obiektu, koncentrując się przede wszystkim na zadaniach dotyczących łańcuchowych macierzy rozproszenia. Podstawę rozwiązania omawianych zadań stanowią odpowiednie $J-$bezstratne faktoryzacje tych macierzy. Liczne twierdzenia sformułowane w tym rozdziale odnoszą się do problemu istnienia oraz właściwości rozwiązań dwóch 'sprzężonych' dyskretnych równań Riccatiego podanych w postaci stosownej dla operatora δ. W przypadku, w którym model obiektu nie ma zer należących do brzegu obszaru wyznaczonego definicją stabilności liniowych systemów modelowanych za pomocą operatora δ, poszukiwane są stabilizujące rozwiązania odpowiednich równań Riccatiego. Gdy model obiektu ma takie zera, interesują nas także rozwiązania niestabilizujące stosownych równań Riccatiego. W omawianym rozdziale dokonano także analizy podstawowych strukturalnych cech tak uzyskiwanych optymalnych regulatorów oraz estymatorów. Wskazano wreszcie na pewien typ osobliwych problemów, które – pomimo stosowania reguł modelowania odwołującego się do operatora δ – mogą charakteryzować się złym numerycznym uwarunkowaniem.

W *dodatku A* zebrano podstawowe informacje dotyczące uwarunkowania, oceny względnych błędów, numerycznej stabilności, a także wstecznych błędów rozwiązań nieosobliwych zadań liniowych oraz nieosobliwych liniowych zadań najmniejszych kwadratów. *Dodatek B* zawiera spis oznaczeń.

Wszystkie istotne wyniki uzyskane w niniejszej pracy mają analityczne ugruntowanie. Prezentacja materiału zasadza się na układzie *twierdzeń*, *lematów* oraz *uwag*, czyli podziale odwzorowującym merytoryczną ważkość odpowiednich sformułowań. Integralną część pracy stanowią numeryczne *przykłady*, ilustrujące uprzednie teoretyczne wywody. Nie wszystkie twierdzenia oraz lematy są wszakże dowodzone z jednakową szczegółowością. W każdym przypadku podano jednak źródło danej tezy, co umożliwia Czytelnikowi śledzenie wkładu autora niniejszej pracy w rozwój referowanej tematyki.

W pracy umieszczono szereg nowych i nigdzie nie publikowanych elementów. Dotyczy to przede wszystkim: algorytmu wyznaczania minimalnego modelu sterowanego obiektu, zagadnień numerycznego uwarunkowania zadania rozmieszczania biegunów, własności oraz syntezy $J-$bezstratnych stabilizujących koniugatorów oraz własności rozszerzonych modeli obiektów opisanych łańcuchowymi macierzami rozproszenia.

Rozdział 4

Dyskretne równania Riccatiego oraz Lapunowa

Rozdział ten poświęcono badaniu właściwości dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa sformułowanych w dziedzinie operatora δ. Ciągłe i dyskretne (q) równania Riccatiego oraz Lapunowa odgrywają istotną role w nowoczesnej teorii sterowania (Datta [78], Fairman [108], Hodel [182], Lancaster i Rodman [256], Laub *et al.* [260], Petkov *et al.* [323], Zhou *et al.* [487]), w tym także w metodach syntezy układów optymalnych ze względu na wymagania wyrażone za pomocą normy $\mathcal{H}_\infty$.

Zdefiniowano odpowiadające operatorowi δ typy dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa. Dla każdego takiego typu wyróżniono dwa sposoby parametryzacji macierzowych pęków skojarzonych z danym równaniem, prowadzące do odmiennego skalowania rozwiązań tych równań. Podano lematy dotyczące stabilizujących rozwiązań równań Riccatiego, a także omówiono właściwości uogólnionych macierzy Hamiltona przyporządkowanych równaniom Riccatiego w dziedzinie operatora δ.

Najważniejszym fragmentem niniejszego rozdziału są rozważania obejmujące zagadnienia związane z wrażliwością dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa na zaburzenia elementów odpowiednich macierzowych pęków. Sformułowano szereg lematów, w których pokazano, że w typowych nieosobliwych przypadkach przy dostatecznie małym okresie próbkowania równania przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia q charakteryzują się istotnie gorszym uwarunkowaniem – a zatem większą wrażliwością na wpływ takich zaburzeń wejściowych danych – w porównaniu z analogicznymi równaniami sformułowanymi dla operatora δ. Studium wrażliwości równań Riccatiego oraz Lapunowa oparto na standardowym i dobrze ugruntowanym rachunku perturbacyjnym (Kato [214], Suchomski [397, 403, 408]). Inną ciekawą możliwość takiej analizy uzyskalibyśmy, rozwijając teorię zaburzeń liniowych macierzowych nierówności skojarzonych z rozważanymi równaniami Riccatiego (*Linear Matrix Inequality, LMI*; Boyd *et al.* [41], Hung i Chu [188], Stoorvogel i Saberi [387]).

Na przykładzie modyfikacji algorytmu Bartelsa–Stewarta rozwiązywania dyskretnych równań Lapunowa oraz na przykładzie właściwości rozwiązań takich równań dla par macierzy o kanonicznej sterowalnej postaci pokazano, że stosowne rachunkowe procedury, a także uzyskiwane rozwiązania, w przypadku modeli odwołujących się do operatora δ mogą mieć 'strukturę' bardziej złożoną w zestawieniu z ich ciągłymi lub standardowymi dyskretnymi (q) odpowiednikami. Wskazano także na możliwość zastosowania odpowiednio zdefiniowanych równań Lapunowa do oceny zakresu niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

Materiał tu omówiony wykorzystamy w kolejnych rozdziałach, poświęconych optymalizacji układów sterowania i estymacji ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$.

Teoretyczne rozważania niniejszego rozdziału zilustrowano dwoma numerycznymi przykładami. Pierwszy z nich dotyczy uwarunkowania zadania wyznaczania gramianów sterowalności oraz obserwowalności danego dyskretnego modelu. W drugim przykładzie pokazano w jaki sposób ocenić zapas stabilności układu sterowania optymalizowanego w oparciu o kwadratowe kryteria jakości (LQG).

4.1 Wrażliwość równań Riccatiego

Dane jest dyskretne równanie Riccatiego ($DARE$)

$$\begin{gathered} P_q^T X_q P_q - X_q \\ -(P_q^T X_q Q_q + S_q)(T_q + Q_q^T X_q Q_q)^{-1}(Q_q^T X_q P_q + S_q^T) + R_q = 0_{n\times n} \end{gathered} \tag{4.1}$$

z niewiadomą $X_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, przy czym P_q, $R_q = R_q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q_q, $S_q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ oraz $T_q = T_q^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Zakładając, że $P_q = I_n + \Delta P$, gdzie $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, rozpatrzymy dwa zbiory uporządkowanych czwórek $(Q_q,\ R_q,\ S_q,\ T_q)$:

$$\begin{array}{ll} (R1) & (\Delta\cdot Q,\ R,\ S,\ T) \\ (R2) & (Q,\ \Delta^2\cdot R,\ \Delta\cdot S,\ T) \end{array}$$

w których $R = R^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q, $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$ oraz $T = T^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ oznaczają macierze o odpowiednich wymiarach (Suchomski [404, 409]). W obu przypadkach otrzymujemy dyskretne równanie Riccatiego (δARE)

$$\begin{gathered} P^TX + XP + \Delta P^TXP - ((I_n + \Delta P^T)XQ + S) \\ \times(T + \Delta Q^TXQ)^{-1}(Q^TX(I_n + \Delta P) + S^T) + R = 0_{n\times n} \end{gathered} \tag{4.2}$$

gdzie $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, przy czym obowiązuje następujące skalowanie:

$$\begin{aligned} &(R1) \qquad X = \Delta \cdot X_q \\ &(R2) \qquad X = \Delta^{-1} \cdot X_q\,. \end{aligned}$$

Należy w tym miejscu podkreślić, że $X = X(\Delta)$ oraz $X_q = X_q(\Delta)$, odpowiednio. Jak pokażemy w *rozdziale 6.*, przyjęta parametryzacja *R1* oraz *R2* równań Riccatiego jest podporządkowana podstawowym zadaniom (etapom) syntezy liniowych układów optymalnych w sensie normy $\mathcal{H}_\infty$.

Niech (U, W) oznacza parę następująco ustrukturalizowanych rzeczywistych macierzy związanych z równaniem Riccatiego (4.2) (Suchomski [404, 409])

$$(U,W) = \left(\begin{bmatrix} P & 0_{n\times n} & Q \\ -R & -P^T & -S \\ S^T & Q^T & T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{n\times n} & I_n + \Delta P^T & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & -\Delta Q^T & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \right). \tag{4.3}$$

Pęk $U - \lambda W$ o wymiarach $(2n + m) \times (2n + m)$ nazywamy *rozszerzonym macierzowym pękiem.* Nieosobliwy pęk $U - \lambda W$ ma pełny normalny rząd: normrank $(U - \lambda W) = 2n + m$. Nieosobliwy pęk $U - \lambda W$ z regularną macierzą P nazywamy pękiem *regularnym*, gdy $-\Delta^{-1} \notin \lambda(U, W)$.

Lemat 4.1 (o nieregularnym rozszerzonym pęku; Suchomski [408]). *Niech $U - \lambda W$ będzie rozszerzonym pękiem. $-\Delta^{-1} \in \lambda(U, W)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-\Delta^{-1} \in \lambda(\bar{U}, \bar{W})$, gdzie*

$$(\bar{U},\bar{W}) = \left(\begin{bmatrix} P & Q \\ S^T & T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \right). \square$$

Czwórkę macierzy (P, Q, S^T, T) interpretować można jako realizację pewnego pomocniczego kwadratowego $(m \times m)$ systemu $\bar{G}(\zeta)$. Poniższy lemat charakteryzuje widmo $\lambda(U, W)$ w oparciu o właściwości tego systemu.

Lemat 4.2 (o wystarczających warunkach nieregularności rozszerzonego pęku; Suchomski [408]). *Dla rozszerzonego pęku* $U - \lambda W$ *mamy* $-\Delta^{-1} \in \lambda(U, W)$, *gdy spełniony jest jeden z warunków:*

(*i*) *P jest macierzą regularną oraz* $-\Delta^{-1}$ *jest blokującym zerem funkcji* $\bar{G}(\zeta)$,

(*ii*) *P jest macierzą regularną oraz funkcja* $\bar{G}(\zeta)$ *nie ma pełnego normalnego rzędu,*

(*iii*) *P jest macierzą regularną,* $\bar{G}(\zeta)$ *ma pełny normalny rząd oraz* $-\Delta^{-1}$ *jest transmisyjnym zerem tej funkcji,*

(*iv*) *T jest macierzą nieosobliwą oraz* $P - QT^{-1}S^T$ *jest macierzą nieregularną,*

(*v*) *pęk* $\bar{U} - \lambda\bar{W}$ *nie ma pełnego normalnego rzędu,*

(*vi*) *pęk* $\bar{U} - \lambda\bar{W}$ *ma pełny normalny rząd oraz* $-\Delta^{-1}$ *jest niezmienniczym zerem realizacji* (P, Q, S^T, T). □

Uwaga 4.1 (Suchomski). Pęk $U - \lambda W$ o regularnej macierzy P może nie być być pękiem regularnym. Niezmiennicze zero $-\Delta^{-1}$ rozważanej realizacji (P, Q, S^T, T) może być wartością własną macierzy P. Można także wskazać nietrywialne przypadki, w których $-\Delta^{-1} \in \lambda(P - QT^{-1}S^T)$ oraz $-\Delta^{-1} \in \lambda(P)$.

Załóżmy teraz, że pęk $\bar{U} - \lambda\bar{W}$ ma pełny normalny rząd. Liczba $-\Delta^{-1}$ jest niezmienniczym zerem realizacji (P, Q, S^T, T) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy wektor $x \in \mathbb{R}^n$ oraz wektor $v \in \mathbb{R}^m$, dla których $(\bar{U} + \Delta^{-1}W)\ [x^T \quad v^T\ ]^T = 0_{n+m}$. Ponadto, gdy $v = 0_m$, wtedy $-\Delta^{-1}$ jest nieobserwowalną (ze względu na parę (P, S^T)) wartością własną macierzy P. □

Niech $\mathcal{X}_-(U, W)$ oznacza stabilną niezmienniczą podprzestrzeń rozszerzonego pęku $U - \lambda W$, przy czym $n_- = \dim(\mathcal{X}_-(U, W)) \le n$. Przyjmijmy, że kolumny macierzy $[\ X_1^T \quad X_2^T \quad X_3^T\ ]^T \in \mathbb{R}^{(n+n+m)\times n_-}$ stanowią bazę tej podprzestrzeni. A zatem: $\mathcal{X}_-(U, W) = \mathrm{Im}\,[\ X_1^T \quad X_2^T \quad X_3^T\ ]^T$ oraz

$$U\,[\ X_1^T \quad X_2^T \quad X_3^T\ ]^T = W\,[\ X_1^T \quad X_2^T \quad X_3^T\ ]^T \Lambda$$

gdzie $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_-\times n_-}$ jest stabilną macierzą, $\lambda(\Lambda) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Dziedziną $\mathrm{dom}(\delta Ric)$ operatora $\delta Ric\ :\ \mathbb{R}^{(2n+m)\times(2n+m)} \times \mathbb{R}^{(2n+m)\times(2n+m)} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ jest zbiór złożony z tych wszystkich par (U, W), dla których $n_- = n$ oraz $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą nieosobliwą. Następujący lemat, sprowadzający rozwiązywanie równania (4.2) do stosownego uogólnionego problemu własnego, jest odpowiednikiem w dziedzinie operatora δ wyniku znanego z teorii równań Riccatiego (Arnold i Laub [10], Datta [78], Lancaster i Rodman [256], Laub [259], Van Dooren [444]).

Lemat 4.3 (o dyskretnym równaniu Riccatiego (I); Suchomski [404, 408]). *Niech* $(U, W) \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ *oraz* $X = X_2 X_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Wówczas:*

(i) $X = \delta Ric(U, W)$ *jest jednoznacznie wyznaczoną symetryczną macierzą;*

(ii) $T + \Delta Q^T X Q$ *jest macierzą nieosobliwą oraz* X *spełnia równanie* δARE *dane wzorem (4.2);*

(iii) $G_\delta = X_1 \Lambda X_1^{-1} = P + QF_\delta$ *jest macierzą stabilną,* $\lambda(G_\delta) \subset \mathcal{D}_\Delta$, *gdzie*

$$F_\delta = X_3 X_1^{-1} = -(T + \Delta Q^T X Q)^{-1}((I_n + \Delta P^T) X Q + S)^T . \square$$

Analizę zaburzeń rozwiązań ciągłych oraz dyskretnych (q) równań Riccatiego znajdziemy w (Datta [78], Gahinet i Laub [123], Ghavimi i Laub [135], Kenney i Hewer [216], Konstantinov *et al.* [231], Sun [422]). Relacje miedzy ciągłymi a dyskretnymi równaniami Riccatiego badano w (Mehrmann [285], Ran i Vreugdenhill [331], Salgado *et al.* [351]; zob. także Hung i Chu [188]).

Niech $(U, W) \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$. Przyjmijmy, że macierze P, Q, R, S oraz T związane z parą (U, W) podlegają addytywnym zaburzeniom $\varepsilon\bar{P}$, $\varepsilon\bar{Q}$, $\varepsilon\bar{R}$, $\varepsilon\bar{S}$ oraz $\varepsilon\bar{T}$, odpowiednio. Zakłada się przy tym, że $\bar{R}$ oraz $\bar{T}$ są macierzami symetrycznymi, a ponadto $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Pochodną odwzorowania $X = \delta Ric(U, W)$ w punkcie (P, Q, R, S, T) w kierunku $(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T})$ oznaczamy jako $\nabla_\varepsilon X(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T} | P, Q, R, S, T)$. Taką pochodną, będącą obrazem $(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T})$ w liniowym i ciągłym odwzorowaniu wyznaczonym pochodną Frécheta $\nabla X(P, Q, R, S, T)$, można zatem traktować jako odpowiednią różniczkę Frécheta. Niech

$$\|\nabla X(P, Q, R, S, T)\| =$$

$$\sup_{\|(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T})\|_D \neq 0} \frac{\left\|\nabla_\varepsilon X\left(\|\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T}\right| P, Q, R, S, T)\right\|_R}{\left\|(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T})\right\|_D}$$

gdzie $\|\cdot\|_D$ oraz $\|\cdot\|_R$ oznaczają normy w dziedzinie oraz przeciwdziedzinie tego odwzorowania. Przyjmując odpowiednio ważoną normę Frobeniusa oraz normę Frobeniusa, mamy

$$\|\nabla X(P,Q,R,S,T)\| =$$

$$\sup_{\|(\bar{P},\bar{Q},\bar{R},\bar{S},\bar{T})\|_F \neq 0} \frac{\left\|\nabla_\varepsilon X\left(\|P\|_F\bar{P}, \|Q\|_F\bar{Q}, \|R\|_F\bar{R}, \|S\|_F\bar{S}, \|T\|_F\bar{T} \,|\, P,Q,R,S,T\right)\right\|_F}{\|(\bar{P},\bar{Q},\bar{R},\bar{S},\bar{T})\|_F}.$$

Powyższa norma charakteryzuje wrażliwość rozwiązania X równania Riccatiego (4.2) na wpływ 'małych' zaburzeń macierzy tego równania. Zaburzone rozwiązanie ma postać

$$\tilde{X} = X + \varepsilon\nabla_\varepsilon X(\|P\|_F\bar{P}, \|Q\|_F\bar{Q}, \|R\|_F\bar{R}, \|S\|_F\bar{S}, \|T\|_F\bar{T}|P,Q,R,S,T).$$

Na tej podstawie definiujemy wskaźnik uwarunkowania tego równania (Suchomski [404, 408])

$$\kappa(P,Q,R,S,T) = \frac{\|\nabla X(P,Q,R,S,T)\|}{\|X\|_F}, \quad \|X\|_F \neq 0.$$

Odpowiedni wskaźnik uwarunkowania równania Riccatiego (4.1) definiuje się w analogiczny sposób, otrzymując $\kappa_q(P_q,Q_q,R_q,S_q,T_q)$.

Lemat 4.4 (o uwarunkowaniu dyskretnego równania Riccatiego (I); Suchomski [404, 408]). *Dla dostatecznie małych wartości okresu próbkowania Δ zachodzi:*

$$\begin{aligned}
\kappa(P,Q,R,S,T) &= \frac{\|(F_P,F_Q,F_R,F_S,F_T)\|_2}{\|X\|_F}, \quad \|X\|_F \neq 0 \\
\frac{\kappa_q(P_q,Q_q,R_q,S_q,T_q)}{\kappa(P,Q,R,S,T)} &= \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\left\|(\|I_n+\Delta P\|_F\hat{F}_P, \Delta F_Q, \Delta F_R, \Delta F_S, \Delta F_T)\right\|_2}{\|(F_P,F_Q,F_R,F_S,F_T)\|_2}
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_P &= H_\delta^{-1}\left[I_n \otimes (I_n+\Delta G_\delta^T)X + ((I_n+\Delta G_\delta^T)X \otimes I_n)T_{n,n}\right] \\
F_P &= \|P\|_F\,\hat{F}_P \\
F_Q &= \|Q\|_F\,H_\delta^{-1}\left[F_\delta^T \otimes (I_n+\Delta G_\delta^T)X + ((I_n+\Delta G_\delta^T)X \otimes F_\delta^T)T_{n,m}\right] \\
F_R &= \|R\|_F\,H_\delta^{-1} \\
F_S &= \|S\|_F\,H_\delta^{-1}\left[F_\delta^T \otimes I_n + (I_n \otimes F_\delta^T)T_{n,m}\right] \\
F_T &= \|T\|_F\,H_\delta^{-1}(F_\delta^T \otimes F_\delta^T)
\end{aligned}$$

oraz

$$H_\delta = G_\delta^T \otimes I_n + I_n \otimes G_\delta^T + \Delta G_\delta^T \otimes G_\delta^T$$

zaś

$$T_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{n,i} e_{m,j}^T \otimes e_{m,j} e_{n,i}^T$$

jest macierzą permutacji $e_{k,l}$ dla $l-$tego jednostkowego wektora z $\mathbb{R}^k$. □

Uwaga 4.2 (Suchomski [404, 408]). Macierz H_δ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_i + \lambda_j + \Delta\lambda_i\lambda_j \neq 0$, $\forall \lambda_i, \lambda_j \in \lambda(G_\delta)$. Dla stabilizującego rozwiązania $X = \delta\mathrm{Ric}(U, W)$ mamy $\lambda(G_\delta) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Oznacza to, że H_δ jest macierzą nieosobliwą. Dla niestabilizujących rozwiązań X teza *lematu 4.4* pozostaje słuszna, jeżeli G_δ nie ma wartości własnych należących do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Gdy $X = 0_{n\times n}$, norma $\|\nabla X(P,Q,R,S,T)\|$ może służyć jako podstawa oceny uwarunkowania danego równania Riccatiego. Podobną rolę pełnią wskaźniki $\bar{\kappa}(P,Q,R,S,T) = \|(F_P, F_Q, F_R, F_S, F_T)\|$ oraz odpowiednio $\bar{\kappa}_q(P_q, Q_q, R_q, S_q, T_q)$ zdefiniowane dla dowolnej macierzowej normy. Zerowe stabilizujące rozwiązanie rozważanego równania Riccatiego otrzymujemy przykładowo w sytuacji, w której dla nieosobliwej macierzy T zachodzi $\lambda(P - QT^{-1}S^T) \subset \mathcal{D}_\Delta$ oraz $R = ST^{-1}S^T$, lub też, gdy $\lambda(P) \subset \mathcal{D}_\Delta$, $R = 0_{n\times n}$ oraz $S = 0_{n\times m}$. Zauważmy, że $X = 0_{n\times n}$ może prowadzić do zerowania się macierzy $\hat{F}_P$ oraz F_P. Wtedy $\bar{\kappa} = \Delta\bar{\kappa}_q$ w przypadku *R1*, zaś $\bar{\kappa} = \Delta^{-1}\bar{\kappa}_q$ dla *R2*. Ponadto, jeżeli dla $\Delta \to 0$ zarówno $\hat{F}_P$ jak i F_P dążą do zera przynajmniej liniowo ze względu na Δ, to należy oczekiwać asymptotycznej równoważności wskaźników κ oraz κ_q. □

Uwaga 4.3 (Suchomski [408]). Załóżmy, że dostępna jest pewna wiedza o 'strukturze' zaburzeń macierzy (P, Q, R, S, T) pęku $U - \lambda W$, pozwalająca na określenie liniowego odwzorowania $e \mapsto \mathrm{vec}(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T})$, w którym przez e oznaczono wektor odpowiednich niestrukturalizowalnych zaburzeń. Niech macierze $(E_P, E_Q, E_R, E_S, E_T)$ opisują pewien (zlinearyzowany) model wpływu takich zaburzeń. Przykładowo, w przypadku multiplikatywnych zaburzeń dla stosownych macierzy mamy $E_\cdot = \mathrm{diag}(\mathrm{vec}\,(\cdot))$. W takiej sytuacji *lemat 4.4* wymaga modyfikacji, polegającej między innymi na zastąpieniu macierzy $(F_P, F_Q, F_R, F_S, F_T)$ przez odpowiednie macierze $(F_P E_P, F_Q E_Q, F_R E_R, F_S E_S, F_T E_T)$.

Z *lematu 4.4* wynika, że w nieosobliwych przypadkach za złe uwarunkowanie równania (4.1) w głównej mierze odpowiada 'afiniczna' transformacja $I_n + \Delta P$ macierzy P, nie zaś skalowanie elementów Q, R oraz S danego macierzowego pęku. Można jednak wskazać takie osobliwe problemy, których złe uwarunkowanie nie może być poprawione przez zastosowanie modeli wyprowadzonych dla operatora δ. Przykład ilustrujący tę sytuację podamy w *podrozdziale 6.5*, rozważając równania Riccatiego o nieregularnych pękach $U - \lambda W$. Metody poprawiania uwarunkowania ciągłych oraz dyskretnych (q) równań Riccatiego przez odpowiednie skalowanie ich wejściowych danych omawiane są w (Gudmundsson *et al.* [158], Kenney *et al.* [218], Pandey [316], Petkov *et al.* [322]). □

Lemat 4.5 (o porównaniu uwarunkowania dyskretnych równań Riccatiego; Suchomski [397, 404, 408]). *Dla nieosobliwych przypadków (ograniczone macierze F oraz niezerowa macierz $\hat{F}_P$) uwarunkowanie dyskretnych równań Riccatiego sformułowanych w oparciu o modele w dziedzinie operatora δ jest przy dostatecznie małych wartościach okresu próbkowania Δ lepsze, niż uwarunkowanie odpowiednich równań wyznaczonych dla modeli w dziedzinie operatora q – w tym sensie, że $\kappa_q(P_q, Q_q, R_q, S_q, T_q) \propto \Delta^{-1}\kappa(P, Q, R, S, T)$.* □

W wielu problemach prowadzących do dyskretnych równań Riccatiego mamy do czynienia z rozszerzonym pękiem $U - \lambda W$, w którym występuje diagonalna, bądź nawet jednostkowa, macierz T, co czyni trywialnym zadanie wyznaczania odwrotności T^{-1}. W takich przypadkach, stosując podstawienia $P - QT^{-1}S^T \to P$, $R - ST^{-1}S^T \to Q$ oraz $QT^{-1}Q^T \to R$, uzyskujemy odpowiedni uproszczony problem własny, który może być rozwiązywany przez zastosowanie numerycznych technik dostosowanych do pęków o mniejszych wymiarach ($2n \times 2n$) (Arnold i Laub [10], Benner *et al.* [28], Datta [78], Ionescu *et al.* [191], Lancaster i Rodman [256], Saberi *et al.* [348]). W ogólnym przypadku T może być macierzą źle uwarunkowaną, lub nawet macierzą osobliwą. W takich sytuacjach niezbędne jest użycie bardziej złożonych metod obliczeniowych, w których wykorzystuje się rozszerzone pęki o zwiększonych wymiarach $(2n + m) \times (2n + m)$ (Arnold i Laub [10], Datta [78], Ionescu *et al.* [191], Ionescu i Weiss [193], Stoorvogel i Saberi [387]).

Należy podkreślić, że dyskretne równania Riccatiego odpowiadające operatorowi q mogą być źle uwarunkowane pomimo tego, że sformułowano je dla odpowiednich rozszerzonych pęków (zob. *podrozdział 6.2.3*).

Przechodząc do analizy wrażliwości równań odpowiadających pękom o wymiarach $2n \times 2n$, rozważmy dyskretne równanie Riccatiego (*DARE*)

$$P_q^T X_q P_q - X_q - P_q^T X_q R_q (I_n + X_q R_q)^{-1} X_q P_q + Q_q = 0_{n \times n} \tag{4.4}$$

z niewiadomą $X_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gdzie P_q, $R_q = R_q^T$, $Q_q = Q_q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zakładając, że $P_q = I_n + \Delta P$, gdzie $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, rozpatrzymy dwa zbiory par (Q_q, R_q):

$$\begin{array}{ll} (R1) & (Q,\, \Delta^2 \cdot R) \\ (R2) & (\Delta^2 \cdot Q,\, R) \end{array}$$

przy czym $Q = Q^T, R = R^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. W obu przypadkach otrzymujemy dyskretne równanie Riccatiego (δARE)

$$\begin{gathered} P^T X + XP + \Delta P^T XP \\ -(I_n + \Delta P^T)XR(I_n + \Delta XR)^{-1}X(I_n + \Delta P) + Q = 0_{n\times n} \end{gathered} \tag{4.5}$$

w którym $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz stosownie do założonej parametryzacji:

$$\begin{array}{ll} (R1) & X = \Delta \cdot X_q \\ (R2) & X = \Delta^{-1} \cdot X_q\,. \end{array}$$

Równaniu Riccatiego (4.5) odpowiada teraz para rzeczywistych macierzy U, $W \in \mathbb{R}^{(n+n)\times(n+n)}$ (Suchomski [400, 406])

$$(U, W) = \left(\begin{bmatrix} P & -R \\ -Q & -P^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_n & \Delta R \\ 0_{n\times n} & I_n + \Delta P^T \end{bmatrix} \right).$$

W tym przypadku regularność macierzy P jest koniecznym i wystarczającym warunkiem regularności nieosobliwego pęku $U - \lambda W$. Niech podprzestrzeń $\mathcal{X}_-(U, W)$ o wymiarze $n_- = \dim(\mathcal{X}_-(U, W)) \leq n$ oznacza stabilną niezmienniczą podprzestrzeń pęku $U - \lambda W$. Załóżmy, że $\bar{X} = [\; X_1^T \quad X_2^T \;]^T \in \mathbb{R}^{(n+n)\times n_-}$ jest macierzą, której kolumny tworzą bazę tej podprzestrzeni. Zachodzi zatem $\mathcal{X}_-(U, W) = \mathrm{Im}\bar{X}$ oraz $U\bar{X} = W\bar{X}\Lambda$, gdzie $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_-\times n_-}$ jest pewną stabilną macierzą, $\lambda(\Lambda) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Symbolem $\mathrm{dom}(\delta Ric)$ oznaczamy dziedzinę odpowiedniego operatora $\delta Ric \;:\; \mathbb{R}^{2n\times 2n} \times \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, będącą zbiorem tych wszystkich par (U, W), dla których $n_- = n$ oraz $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą nieosobliwą. Koniecznym warunkiem przynależności $(U, W) \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ jest, aby pęk $U - \lambda W$ nie miał wartości własnych należących do $\partial\mathcal{D}_\Delta$.

Lemat 4.6 (o dyskretnym równaniu Riccatiego (*II*); Suchomski [400, 406]). *Niech* $(U, W) \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ *oraz* $X = X_2 X_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Wówczas:*

(*i*) $X = \delta Ric(U, W)$ *jest jednoznacznie wyznaczoną symetryczną macierzą;*

(ii) $I_n + \Delta XR$ *jest macierzą nieosobliwą oraz* X *spełnia równanie* δARE *dane wzorem (4.5) lub wzorami równoważnymi:*

$$\begin{aligned} (P^T - XR)(I_n + \Delta XR)^{-1}X & \\ +(I_n + \Delta P^T)(I_n + \Delta XR)^{-1} + XP + Q &= 0_{n\times n} \\ (I_n + \Delta P^T)(I_n + \Delta XR)^{-1}X(P - RX) + P^T X + Q &= 0_{n\times n}; \end{aligned}$$

(iii) $G_\delta = P + RF_\delta = (I_n + \Delta RX)^{-1}(P - RX)$ *jest macierzą stabilną,* $\lambda(G_\delta) \subset \mathcal{D}_\Delta$, *gdzie*

$$F_\delta = -(I_n + \Delta XR)^{-1}X(I_n + \Delta P)\,. \ \square$$

Uwaga 4.4 (Suchomski [406]). Trójce (P, Q, R) z regularną macierzą P przyporządkować można macierz $M_\Delta \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ o podziale $(n+n)\times(n+n)$

$$M_\Delta = W^{-1}U = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + \Delta RI_P Q & -RI_P \\ -I_P Q & -I_P P^T \end{bmatrix}.$$

Macierz ta, będąc macierzą regularną, jest także *uogólnioną macierzą Hamiltona*. Zachodzi bowiem $I_{-nn}^{-1}M_\Delta^T I_{-nn} = -(I_n + \Delta M_\Delta)^{-1}M_\Delta$, gdzie

$$I_{-mn} = \begin{bmatrix} 0_{m\times n} & -I_m \\ I_n & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(n+m)}.$$

Ponieważ $I_{-nn}^{-1}(I_n + \Delta M_\Delta^T)I_{-nn} = (I_n + \Delta M_\Delta)^{-1}$, zatem $I_n + \Delta M_\Delta$ jest macierzą *symplektyczną* (macierzą J_n*−ortogonalną*; Bunse-Gerstner *et al.* [48]). Jeżeli $\lambda \in \lambda(M_\Delta)$, to także $\lambda^\star$, $\lambda^\sim$ oraz $(\lambda^\sim)^\star$ są wartościami własnymi M_Δ. $\square$

Niech $\mathcal{X}_-(M_\Delta)$ oznacza stabilną niezmienniczą podprzestrzeń macierzy M_Δ. Aby $\dim(\mathcal{X}_-(U, W)) = n$, potrzeba i wystarcza, by rozważana macierz nie miała wartości własnych należących do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Przyjmijmy zatem, że $\mathcal{X}_-(M_\Delta)$ jest podprzestrzenią $n-$wymiarową, zaś kolumny macierzy $\bar{X} = [\, X_1^T \ \ X_2^T \,]^T \in \mathbb{R}^{(n+n)\times n}$ stanowią jej dowolną bazę. Niech $\mathrm{dom}(\delta Ric)$ oznacza teraz zbiór złożony z tych wszystkich uogólnionych macierzy Hamiltona M_Δ, dla których $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą nieosobliwą. W takim przypadku, kładąc $\delta Ric(M_\Delta) = X_2X_1^{-1}$, definiujemy odwzorowanie $\delta Ric : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Lemat 4.7 (o dyskretnym równaniu Riccatiego (III); Suchomski [406]). *Niech* $M_\Delta \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ *oraz* $X = X_2 X_1^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Wówczas:*

(i) $X = \delta Ric(M_\Delta)$ *jest jednoznacznie wyznaczoną symetryczną macierzą;*

(ii) $I_n + \Delta XR$ *jest macierzą nieosobliwą oraz* X *spełnia równanie* δARE *dane wzorem (4.5) lub wzorami równoważnymi:*

$$\begin{aligned} XP + (I_n + \Delta XR)I_P Q - (XR - P^T)I_P X &= 0_{n\times n} \\ (I_n + \Delta XR)I_P(X - \Delta Q) - X(I_n + \Delta P) &= 0_{n\times n}; \end{aligned}$$

(iii) $P - RI_P(X - \Delta Q)$ *jest macierzą stabilną.*

Dowód. (i) Ponieważ X_1 jest z założenia macierzą nieosobliwą, przeto $\mathrm{Im}\,\bar{X} = \mathrm{Im}[\ I_n \quad X^T\ ]^T$. Gdyby zatem dla pewnej macierzy $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zachodziła równość $\mathrm{Im}\,\bar{X} = \mathrm{Im}[\ I_n \quad Y^T\ ]^T$, wówczas $Yx = Xx$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Co oznacza, że $Y = X$. Aby udowodnić, że X jest macierzą symetryczną, wystarczy pokazać, że $X_1^T X_2$ jest macierzą symetryczną. Jest to równoważne temu, że $\bar{X}^T I_{-nn} \bar{X} = 0_{n\times n}$. Z symplektyczności macierzy $I_n + \Delta M_\Delta$ wynika, że $(I_n + \Delta\Lambda^T)\bar{X}^T I_{-nn}\bar{X}(I_n + \Delta\Lambda) = \bar{X}^T I_{-nn}\bar{X}$, przy czym $M_\Delta \bar{X} = \bar{X}\Lambda$, gdzie $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest pewną stabilną macierzą. Na tej podstawie wnioskujemy, że $(\bar{X}^T I_{-nn}\bar{X})\Lambda + \Lambda^T(\bar{X}^T I_{-nn}\bar{X}) + \Delta\Lambda^T(\bar{X}^T I_{-nn}\bar{X})\Lambda = 0_{n\times n}$. Równość tę interpretujemy jako równanie Lapunowa z niewiadomą $\bar{X}^T I_{-nn}\bar{X}$. Ponieważ $\lambda(\Lambda) \subset \mathcal{D}_\Delta$, zatem jedynie $\bar{X}^T I_{-nn}\bar{X} = 0_{n\times n}$ spełnia to równanie. (ii) Z równości $M_\Delta \bar{X} = \bar{X}\Lambda$ wynika, że

$$M_\Delta \begin{bmatrix} I_n \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ X \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1}. \tag{4.6}$$

Mnożąc powyższe lewostronnie przez $[\ -X \quad I_n\ ]$, otrzymujemy pierwszą z podanych postaci równania δARE. Na tej podstawie wyznaczamy drugą postać tego równania. Zakładając osobliwość $I_n + \Delta XR$, głosimy istnienie takiego wektora $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$, dla którego $x^T(I_n + \Delta XR) = 0_{1\times n}$. Mamy zatem równość $x^T X(I_n + \Delta P) = 0_{1\times n}$, którą dla regularnej macierzy P zapisujemy jako $x^T X = 0_{1\times n}$. Musimy przeto przyjąć, że $x = 0_n$. Sprzeczność ta oznacza, że $I_n + \Delta XR$ jest macierzą nieosobliwą. *Lemat o odwracaniu macierzy* zastosowany do równoważnego równania Riccatiego

$$(I_n + \Delta P^T)(I_n + \Delta XR)^{-1}X(I_n + \Delta P) - X - \Delta Q = 0_{n\times n} \tag{4.7}$$

prowadzi do (4.5). (iii) Mnożąc lewostronnie (4.6) przez $[\ I_n \quad 0_{n\times n}\ ]$, wykazujemy podobieństwo macierzy $P - RI_P(X - \Delta Q)$ oraz Λ. □

Niech $(U, W) \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$. Przyjmijmy, że P, Q oraz R podlegają addytywnym zaburzeniom $\varepsilon\bar{P}$, $\varepsilon\bar{Q}$ oraz εR, odpowiednio. Zakłada się przy tym, że $\bar{Q}$ oraz $\bar{R}$ są macierzami symetrycznymi, a ponadto $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Wskaźnik uwarunkowania równania Riccatiego δARE (4.5) definiujemy jako

$$\kappa(P, Q, R) = \frac{\|\nabla X(P, Q, R)\|}{\|X\|_F}, \quad \|X\|_F \neq 0$$

gdzie

$$\|\nabla X(P, Q, R)\| = \sup_{\left\|(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})\right\|_F \neq 0} \frac{\left\|\nabla_\varepsilon X\left(\|P\|_F \bar{P}, \|Q\|_F \bar{Q}, \|R\|_F \bar{R} \,\middle|\, P, Q, R\right)\right\|_F}{\left\|(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R})\right\|_F}.$$

Wskaźnik $\kappa_q(P_q, Q_q, R_q)$ uwarunkowania równania Riccatiego (4.4) wprowadza się w analogiczny sposób.

Lemat 4.8 (o uwarunkowaniu dyskretnego równania Riccatiego (II); Suchomski [397, 400]). *Dla dostatecznie małych wartości okresu próbkowania zachodzi:*

$$\begin{aligned}
\kappa(P, Q, R) &= \frac{\|(F_P, F_Q, F_R)\|_2}{\|X\|_F}, \quad \|X\|_F \neq 0 \\
\frac{\kappa_q(P_q, Q_q, R_q)}{\kappa(P, Q, R)} &= \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\left\|(\|I_n + \Delta P\|_F \hat{F}_P, \Delta F_Q, \Delta F_R)\right\|_2}{\|(F_P, F_Q, F_R)\|_2}
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_P &= H_\delta^{-1}\left[I_n \otimes (I_n + \Delta G_\delta^T)X + ((I_n + \Delta G_\delta^T)X \otimes I_n)S_n\right] \\
F_P &= \|P\|_F \hat{F}_P \\
F_Q &= \|Q\|_F H_\delta^{-1} \\
F_R &= -\|R\|_F H_\delta^{-1}(F_\delta^T \otimes F_\delta^T)
\end{aligned}$$

oraz

$$H_\delta = G_\delta^T \otimes I_n + I_n \otimes G_\delta^T + \Delta G_\delta^T \otimes G_\delta^T$$

zaś

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j^T \otimes e_j e_i^T \,. \,\square$$

W każdym nieosobliwym przypadku dla dostatecznie małych wartości okresu próbkowania Δ mamy zatem $\kappa_q(P_q, Q_q, R_q) \propto \Delta^{-1} \cdot \kappa(P, Q, R)$.

Na podstawie *lematów 4.3, 4.6* oraz *4.7* wnioskujemy o możliwości zastosowania efektywnych deflacyjnych technik opartych na uogólnieniach metody Schura (Arnold i Laub [10], Bunse-Gerstner *et al.* [48], Kenney *et al.* [218], Laub [258, 259], Pappas *et al.* [317], Petkov *et al.* [322], Van Dooren [444]) do numerycznego rozwiązywania dyskretnych równań Riccatiego sformułowanych w dziedzinie operatora δ (Suchomski [397]). Szczególnie godna polecenia jest numerycznie stabilna metoda znana jako *inverse-free generalized Schur method* (Datta [78], Van Dooren [444, 447]). Warto także wskazać na ostatnio opracowane metody iteracyjnego udokładniania rozwiązań równań Riccatiego, korzystające w głównej mierze ze schematu Newtona (Datta [78], Guo i Laub [159]). Specjalnie dobrane zbiory numerycznych danych służących do analizy dokładności oraz stabilności różnych metod rozwiązywania ciągłych oraz dyskretnych równań Riccatiego przedstawiono w (Abels i Benner [1], Benner *et al.* [27, 28], Petkov *et al.* [325]).

Uwaga 4.5 (Suchomski)**.** Niech $M_\Delta = W^{-1}U \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ oraz $X = \delta Ric(M_\Delta)$. Macierz M_Δ jest podobna do macierzy

$$\begin{bmatrix} P - RI_P(X - \Delta Q) & -RI_P \\ 0_{n\times n} & (XR - P^T)I_P \end{bmatrix}$$

zatem $\lambda(M_\Delta) = \lambda(P - RI_P(X - \Delta Q)) \cup \lambda((XR - P^T)I_P)$. Ponieważ $\lambda(P - RI_P(X - \Delta Q)) \subset \mathcal{D}_\Delta$, przeto $\lambda((XR - P^T)I_P) \subset -\bar{\mathcal{D}}_\Delta$. Oznacza to, że wszystkie wartości własne macierzy $(XR - P^T)I_P$ są 'silnie' niestabilne. Stabilizowalność pary (P, R) jest koniecznym warunkiem tego, aby $M_\Delta \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$.

Niech M_Δ będzie uogólnioną macierzą Hamiltona dla $Q = 0_{n\times n}$. $M_\Delta \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ tylko wtedy, gdy P nie ma wartości własnych należących do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Niech $\lambda \in \lambda(P)$, zaś $x \neq 0_n \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor własny skojarzony z λ. Zachodzi zatem $(\lambda I_n - (XR - P^T)I_P)Xx = 0_n$, $X = \delta Ric(M_\Delta)$. Dla $\lambda \in \mathcal{D}_\Delta$, wobec niestabilności macierzy $(XR - P^T)I_P$, mamy $x \in \mathrm{Ker}\, X$. Na tej podstawie wnioskujemy, że $\mathrm{Ker}\, X$ jest stabilną niezmienniczą podprzestrzenią macierzy (odwzorowania) P, zaś rząd X jest równy liczbie wartości własnych macierzy P należących do $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$. $\square$

Uwaga 4.6 (Suchomski [406])**.** Uogólnioną macierz Hamiltona można zdefiniować jako regularną macierz $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, dla której $I_{-nn}^{-1}\tilde{M}^T I_{-nn} = -(I_n + \Delta\tilde{M})^{-1}\tilde{M}$. Dokonując podziału $(n+n)\times(n+n)$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix}$$

oraz zakładając regularność podmacierzy $\tilde{M}_{22}$, dochodzimy do przekonania, że

$$\tilde{M} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{R}\tilde{P}^{-T}\tilde{Q} - I_n & -\tilde{R}\tilde{P}^{-T} \\ -\tilde{P}^{-T}\tilde{Q} & \tilde{P}^{-T} - I_n \end{bmatrix}$$

gdzie $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest pewną nieosobliwą macierzą, $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz $\tilde{R} = \tilde{R}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Macierz $\tilde{P}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $\tilde{P} = I_n + \Delta P$, w której $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest odpowiednią regularną macierzą. Kładąc $\tilde{Q} = Q$ oraz $\tilde{R} = \Delta^2 R$, gdzie $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uzyskujemy

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} P + \Delta R I_P Q & -\Delta R I_P \\ -\Delta^{-1} I_P Q & -I_P P^T \end{bmatrix}.$$

W przypadku, w którym istnieją rozwiązania równań

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\tilde{X} & I_n \end{bmatrix} \tilde{M} \begin{bmatrix} I_n & \tilde{X} \end{bmatrix}^T &= 0_{n\times n} \\ \begin{bmatrix} -X & I_n \end{bmatrix} M_\Delta \begin{bmatrix} I_n & X \end{bmatrix}^T &= 0_{n\times n} \end{aligned}$$

zachodzi $X = \Delta\tilde{X}$. Ponadto $\lambda(M_\Delta) = \lambda(M_{11} + M_{12}X) \cup \lambda(M_{22} - XM_{12})$.
□

O właściwościach uogólnionych macierzy Hamiltona mówią także dwa poniższe lematy, których proste dowody pominięto.

Lemat 4.9 (o podobnych uogólnionych macierzach Hamiltona; Suchomski). *Niech $M_{\Delta 0} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ będzie uogólnioną macierzą Hamiltona. Macierz $M_\Delta = TM_{\Delta 0}T^{-1} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, gdzie $T \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ oznacza dowolną macierz symplektyczną, jest uogólnioną macierzą Hamiltona.* □

Lemat 4.10 (o translacji oraz kongruencji rozwiązań równań Riccatiego; Suchomski). *Niech $M_{\Delta 0} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ będzie uogólnioną macierzą Hamiltona, $M_{\Delta 0} \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ oraz $X_0 = \delta Ric(M_{\Delta 0})$. Macierz $M_\Delta = TM_{\Delta 0}T^{-1} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, gdzie $T \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$:*

$$\begin{aligned} &a)\quad T = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \\ T_0 & I_n \end{bmatrix}, \quad T_0 = T_0^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ &b)\quad T = \begin{bmatrix} T_0^{-1} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & T_0^T \end{bmatrix}, \quad T_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det T_0 \neq 0 \end{aligned}$$

jest uogólnioną macierzą Hamiltona, $M_\Delta \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$, zaś $X = \delta Ric(M_\Delta)$. Zachodzi:

$$\begin{aligned} &a)\quad X = X_0 + T_0 \\ &b)\quad X = T_0^T X_0 T_0\,. \ \square \end{aligned}$$

4.2 Wrażliwość równań Lapunowa

Rozważmy następujące dyskretne równanie Lapunowa (Steina)

$$P_q^T X_q P_q - X_q + Q_q = 0_{n\times n} \tag{4.8}$$

z niewiadomą $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, gdzie P_q, $Q_q = Q_q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zakładając, że $P_q = I_n + \Delta P$, przy czym $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, rozpatrzymy dwa zbiory macierzy Q_q:

$$\begin{array}{ll} (L1) & Q \\ (L2) & \Delta^2 \cdot Q \end{array}$$

gdzie $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. W obu przypadkach mamy do czynienia z dyskretnym równaniem Lapunowa o postaci

$$P^T X + XP + \Delta P^T XP + Q = 0_{n\times n} \tag{4.9}$$

gdzie $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Stosownie do założonej parametryzacji:

$$\begin{array}{ll} (L1) & X = \Delta \cdot X_q \\ (L2) & X = \Delta^{-1} \cdot X_q\,. \end{array}$$

Jeżeli $\lambda(P) \subset \mathcal{D}_\Delta$ oraz $Q \geq 0$, wtedy $X \geq 0$; gdy zaś $Q > 0$, wtedy $X > 0$. Para macierzy (P, Q), gdzie $\lambda(P) \subset \mathcal{D}_\Delta$ oraz $Q \geq 0$, jest parą obserwowalną wtedy i tylko wtedy, gdy $X > 0$. Z kolei, jeżeli $X > 0$ oraz $Q \geq 0$, wtedy $\lambda(P) \subset \bar{\mathcal{D}}_\Delta$; gdy zaś $X > 0$ oraz $Q > 0$, wtedy $\lambda(P) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Ponadto, jeżeli $X \geq 0$, $Q \geq 0$ oraz (P, Q) jest parą wykrywalną, wtedy $\lambda(P) \subset \mathcal{D}_\Delta$. W dalszych rozważaniach niezbędny będzie następująco zdefiniowany wskaźnik *separacji* (*odstępu*) między macierzami P^T oraz P (Suchomski [403])

$$\mathrm{sep}_\delta(P^T, P) = \min_{X\neq 0} \frac{\|P^T X + XP + \Delta P^T XP\|_F}{\|X\|_F}\,.$$

Zauważmy, że $\mathrm{sep}_\delta(P^T, P) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_i + \lambda_j + \Delta\lambda_i\lambda_j \neq 0$, $\forall \lambda_i, \lambda_j \in \lambda(P)$. Rozważając dyskretne równania Lapunowa odnoszące się do modeli wywiedzionych dla operatora q, korzystamy z definicji

$$\mathrm{sep}_q(P_q^T, P_q) = \min_{X\neq 0} \frac{\|P_q^T XP_q - X\|_F}{\|X\|_F}\,.$$

Niech $X = X(P, Q)$ będzie rozwiązaniem równania (4.9). Przyjmijmy, że P oraz Q podlegają addytywnym zaburzeniom $\varepsilon\bar{P}$ oraz $\varepsilon\bar{Q}$, odpowiednio.

Zakładamy przy tym, że $\bar{Q}$ jest macierzą symetryczną oraz $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Wskaźnik uwarunkowania rozważanego równania Lapunowa, służący ocenie wrażliwości jego rozwiązania $X(P,Q)$ na wpływ 'małych' zaburzeń macierzy (P,Q), definiujemy jako

$$\kappa_L(P,Q) = \frac{\|\nabla X(P,Q)\|}{\|X\|_F}$$

gdzie

$$\|\nabla X(P,Q)\| = \sup_{\|(\bar{P},\bar{Q})\|_F \neq 0} \frac{\left\|\nabla_\varepsilon X\left(\|P\|_F\bar{P}, \|Q\|_F\bar{Q} \,|\, P,Q\right)\right\|_F}{\left\|(\bar{P},\bar{Q})\right\|_F}.$$

Lemat 4.11 (o uwarunkowaniu dyskretnego równania Lapunowa; Suchomski [403]). *Wskaźnik uwarunkowania $\kappa_L(P,Q)$ równania Lapunowa (4.9) ma postać*

$$\kappa_L(P,Q) = \frac{\|(F_P, F_Q)\|_2}{\|X\|_F}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_P &= \|P\|_F H_\delta^{-1}(I_n \otimes (I_n + \Delta P^T)X + ((I_n + \Delta P^T)X \otimes I_n)S_n) \\ F_Q &= \|Q\|_F H_\delta^{-1} \end{aligned}$$

oraz

$$H_\delta = P^T \otimes I_n + I_n \otimes P^T + \Delta P^T \otimes P^T.$$

Dla dostatecznie małych wartości okresu próbkowania Δ mamy $\kappa_{L_q}(P_q, Q_q) \propto \Delta^{-1} \cdot \kappa_L(P,Q)$, gdzie $\kappa_{L_q}(P_q,Q_q)$ orzeka o uwarunkowaniu równania Lapunowa (4.8) sformułowanego dla operatora q. Ponadto, $\mathrm{sep}_\delta(P^T, P) = \sigma_{\min}(H_\delta)$. □

Rozwiązując równanie (4.9) za pomocą komputera o skończonej precyzji $\bar{\epsilon}$, musimy się liczyć z tym, że elementy macierzy P oraz Q 'faktycznie' podlegających przetwarzaniu obarczone są błędami reprezentacji (zaokrąglenia) rzędu $\bar{\epsilon}\|P\|_F$ oraz $\bar{\epsilon}\|Q\|_F$, odpowiednio. Pewne oszacowanie kresu górnego względnego błędu zaburzonego rozwiązanie $\tilde{X}$ równania (4.9) podaje poniższy lemat.

Lemat 4.12 (o dokładności rozwiązania dyskretnego równania Lapunowa; Suchomski [403]). *Niech* $\lambda_i + \lambda_j + \Delta\lambda_i\lambda_j \neq 0$, $\forall\lambda_i, \lambda_j \in \lambda(P)$. *Jeżeli* $Q \neq 0_{n\times n}$ *oraz*

$$\frac{2\bar{\epsilon}\|P\|_F + \Delta(2\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}^2)\|P\|_F^2}{\mathrm{sep}_\delta(P^T, P)} \equiv \lambda_\delta < 1$$

wtedy

$$\frac{\|\tilde{X} - X\|_F}{\|X\|_F} \leq \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \lambda_\delta} \cdot \bar{\kappa}_L(P)$$

gdzie

$$\bar{\kappa}_L(P) = \frac{4\|P\|_F + \Delta(3 + \bar{\varepsilon})\|P\|_F^2}{\mathrm{sep}_\delta(P^T, P)}. \ \square$$

Podobne rozumowanie stosujemy do równania Lapunowa (4.8). Niech zatem $\lambda_i\lambda_j \neq 1$, $\forall\lambda_i, \lambda_j \in \lambda(P_q)$, a ponadto $Q_q \neq 0_{n\times n}$ oraz

$$\frac{(2\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}^2)\|P_q\|_F^2}{\mathrm{sep}_q(P_q^T, P_q)} \equiv \lambda_q < 1$$

wówczas

$$\frac{\|\tilde{X}_q - X_q\|_F}{\|X_q\|_F} \leq \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \lambda_q} \cdot \kappa_{L_q}(P_q)$$

gdzie

$$\bar{\kappa}_{L_q}(P_q) = \frac{1 + (3 + \bar{\epsilon})\|P_q\|_F^2}{\mathrm{sep}_q(P_q^T, P_q)}.$$

Dla założonej parametryzacji (*L1* oraz *L2*) rozważanych dyskretnych równań Lapunowa obowiązuje równość $\mathrm{sep}_q(P_q^T, P_q) = \sigma_{\min}(H_q) = \Delta\mathrm{sep}_\delta(P_\delta^T, P_\delta)$.

Lemat 4.13 (o porównaniu dokładności rozwiązań dyskretnych równań Lapunowa; Suchomski [403]). *Dla dostatecznie małego okresu próbkowania* Δ *mamy*

$$\frac{\bar{\kappa}_{L_q}(P_q)}{\bar{\kappa}_L(P)} \approx \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1 + (3 + \bar{\epsilon})n}{4\|P\|_F}. \ \square$$

Wielkości $\kappa_L(P)$ oraz $\bar{\kappa}_{L_q}(P_q)$ mogą służyć także jako dogodne wskaźniki wrażliwości rozważanych dyskretnych równań Lapunowa: wnioski wywiedzione na podstawie *lematów 4.11* oraz *4.13* są zgodne.

Warto podkreślić, że analogiczne spostrzeżenie – dotyczące dyskretnych równań Riccatiego – nasuwa się po rozważeniu wskaźników uwarunkowania tych równań innych niż te, które badano w *podrozdziale 4.1* (Datta [78], Higham *et al.* [180], Konstantinov *et al.* [231], Sima *et al.* [361], Sun [422, 423]).

Zmodyfikowany algorytm Bartelsa–Stewarta

Znanych jest wiele numerycznych metod rozwiązywania ciągłych oraz dyskretnych równań Lapunowa (Sylvestera) (Datta [78], Gajic i Qureshi [122], Golub i Van Loan [139], Higham [177]). Analiza różnych aspektów wrażliwości rozwiązań takich równań na zaburzenia wejściowych danych stanowiła przedmiot wielu prac (Datta [78], Gahinet *et al.* [124], Hewer i Kenney [173], Higham [175, 177], Konstantinov *et al.* [231], Petkov *et al.* [323]). Studium wstecznego błędu rozwiązań ciągłych równań Lapunowa znajdziemy w (Higham [175, 177]). Z kolei, w (Ghavimi i Laub [134]) pokazano w jaki sposób, stosując metodę linearyzacji, wyznaczyć przybliżenie wstecznego błędu dyskretnego (q) równania Lapunowa. Zestawy numerycznych danych przeznaczonych do badania dokładności oraz stabilności różnych algorytmów rozwiązywania ciągłych oraz dyskretnych równań Lapunowa omówiono w (Kresner *et al.* [247], Petkov *et al.* [324]). Utrwalone jest trafne przekonanie, że algorytm Bartelsa–Stewarta [22] numerycznego rozwiązywania równań Lapunowa charakteryzuje się najkorzystniejszymi cechami, jeśli chodzi o dokładność oraz stabilność wyników (Golub i Van Loan [139], Higham [177], Laub *et al.* [260]). Dyskretną wersję tego algorytmu dano w (Barraud [20]). Algorytm Bartelsa–Stewarta w swej podstawowej formie opiera się na przekształceniu macierzy równania Lapunowa do (górnej) postaci Schura. Znane są także wersje tego algorytmu, w których stosuje się (górną) postać Hessenberga (Golub *et al.* [138]) oraz pomocniczą faktoryzację Cholesky'ego (Hammarling [163]).

Niżej przedstawiamy pewną modyfikację algorytmu Bartelsa–Stewarta, dostosowującą ten algorytm do zadania wyznaczania rozwiązania dyskretnego równania Lapunowa danego wzorem (4.9). Wstępny krok tego algorytmu (Suchomski [403]) polega na przekształceniu równania (4.9) do równoważnej postaci $\hat{P}^T\hat{X} + \hat{X}\hat{P} + \Delta\hat{P}^T\hat{X}\hat{P} + \hat{Q} = 0_{n\times n}$, w której macierz $\hat{P} = U^TPU \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest dolną rzeczywistą macierzą Schura

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & & & 0 \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hat{P}_{p1} & \hat{P}_{p2} & \cdots & \hat{P}_{pp} \end{bmatrix}$$

o podmacierzach $\hat{P}_{ii}$ stopnia pierwszego lub drugiego, $\hat{Q} = U^TQU$, $\hat{X} = U^TXU \in \mathbb{R}^{n\times n}$, zaś $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest odpowiednią ortogonalną macierzą wynikającą z zastosowanej metody rozkładu QR. Zakładając, że podział macierzy $\hat{Q}$ oraz $\hat{X}$ odpowiada podziałowi macierzy $\hat{P}$, otrzymujemy następujący algorytm.

Algorytm 4.1 (rozwiązywania równania Lapunowa; Suchomski [403]).
Dla $l = 1, 2, \ldots, p$
dla $k = l, l+1, \ldots, p$:
- podstaw

$$\hat{Q}_{kl} \leftarrow \sum_{i=1}^{k-1} \hat{P}_{ik}^T \hat{X}_{il} + \sum_{i=1}^{l-1} \hat{X}_{ki} \hat{P}_{il} + \tilde{Q}_{kl}$$
$$+\Delta \left(\sum_{i=1}^{k-1} \hat{P}_{ik}^T \sum_{j=1}^{l} \hat{X}_{ij} \hat{P}_{jl} + \hat{P}_{kk} \sum_{j=1}^{l-1} \hat{X}_{kj} \hat{P}_{jl} \right),$$

- wyznacz $\hat{X}_{kl}$ z równania

$$\hat{P}_{kk}^T \hat{X}_{kl} + \hat{X}_{kl} \hat{P}_{ll} + \Delta \hat{P}_{kk}^T \hat{X}_{kl} \hat{P}_{ll} = -\hat{Q}_{kl},$$

- podstaw $\hat{X}_{lk} \leftarrow \hat{X}_{kl}^T$.

Rozwiązanie: $X = U\hat{X}U^T$. □

Wyznaczenie podmacierzy $\hat{X}_{kl}$ wymaga rozwiązania równania Sylvestera zdefiniowanego dla operatora δ. Ponieważ równanie to jest stopnia co najwyżej drugiego, jego rozwiązanie nie jest zadaniem złożonym i sprowadza się do zastosowania standardowej metody eliminacji Gaussa (Demmel [84]).

W podanych formułach opisujących wskaźniki uwarunkowania dyskretnych równań Riccatiego oraz Lapunowa wykorzystujemy iloczyny Kroneckera odpowiednich macierzy. Powoduje to, że nawet dla względnie małych wartości n otrzymujemy zadania numeryczne o dużym wymiarze. Wiedza o 'dokładnej' wartości danego wskaźnika uwarunkowania nie musi być jednak niezbędna, w praktyce nierzadko wystarczy bowiem znajomość racjonalnego oszacowania ('rzędu') tego wskaźnika. Wszystkie numeryczne wyniki prezentowane w niniejszej pracy opierają się na możliwie 'dokładnych' ocenach zdefiniowanych wskaźników – w obliczeniach stosowano procedury systemu MATLAB, a także algorytmy w języku FORTRAN dostępne w pakietach LAPACK i LINPACK (Anderson *et al.* [4]) oraz bibliotece SLICOT (Van Huffel *et al.* [448]). Wyznaczanie przybliżonych wartości odpowiednich indukowanych norm opisano w (Byears [52], Gudmundsson *et al.* [158], Kågström i Poromaa [208, 209], Kågström i Westin [210], Kenney i Laub [217], Kenney *et al.* [218], Petkov *et al.* [324]); warto tu także wymienić przykładową efektywną procedurę xLACON z pakietu LAPACK (Anderson *et al.* [4], Higham [177], Higham *et al.* [180]).

Przykład 4.1 (uwarunkowanie dyskretnych równań Lapunowa; Suchomski [403]). Niech $\lambda(A) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Rozwiązaniem dyskretnego równania Lapunowa $AX + XA^T + \Delta AXA^T + BB^T = 0_{n\times n}$ jest gramian sterowalności pary macierzy $(A,\, B)$. W przypadku pary $(A,\, C)$ mamy do czynienia z równaniem $A^TX + XA + \Delta A^TXA + C^TC = 0_{n\times n}$, którego rozwiązaniem jest gramian obserwowalności (Suchomski [397, 403]). Analiza odpowiednich gramianów stanowi podstawę między innymi efektywnych metod upraszczania (redukcji rzędu) modeli obiektów dynamicznych opisanych trójką macierzy $(A,\, B,\, C)$ (por. np. Suchomski [392]).

Przyjmijmy obiekt czasu ciągłego

$$G_\rho(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -50 & -79 & -33 & -5 & 1 \\ \hline 50 & 15 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

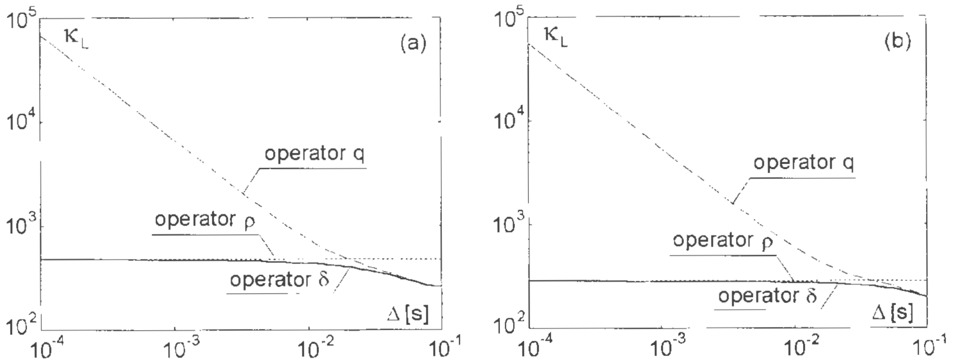
Właściwości rozważanych równań Lapunowa sformułowanych dla dyskretnych modeli tego obiektu ocenimy, porównując odpowiednie wskaźniki pokazane na rys. 4.1 oraz 4.2. Jak widzimy, dla dostatecznie małych wartości okresu próbkowania Δ ujawnia się przewaga podejścia, w którym posługujemy się modelami związanymi z operatorem δ. Opinię tę potwiedzają wnioski wypływające z wykresów danych na rys. 4.3. Wykresy te ilustrują funkcję $\bar{\varepsilon} = \|X - \tilde{X}\|_F / \|X\|_F$ błędu rozwiązania danego równania Lapunowa, przy czym X oznacza 'dokładne' rozwiązanie, zaś $\tilde{X}$ jest rozwiązaniem uzyskanym dla stosownego modelu o elementach zaburzonych addytywnymi błędami o gaussowskim rozkładzie z zerową wartością średnią oraz odchyleniem standardowym $\sigma = 10^{-5}$. $\square$

Równania Lapunowa dla kanonicznej sterowalnej pary $(A,\, b)$

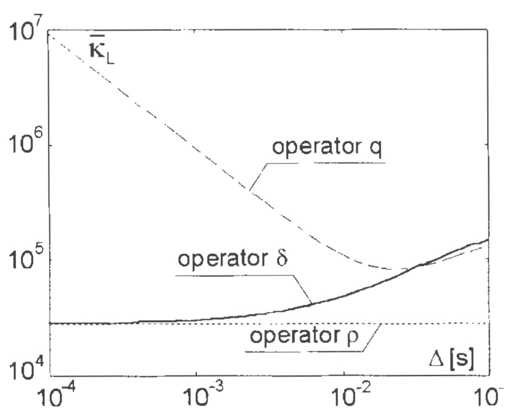
Rozważmy parę $(A,\, b)$ o sterowalnej kanonicznej postaci, w której macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą Frobeniusa, zaś wektor $b \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem jednostkowym:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

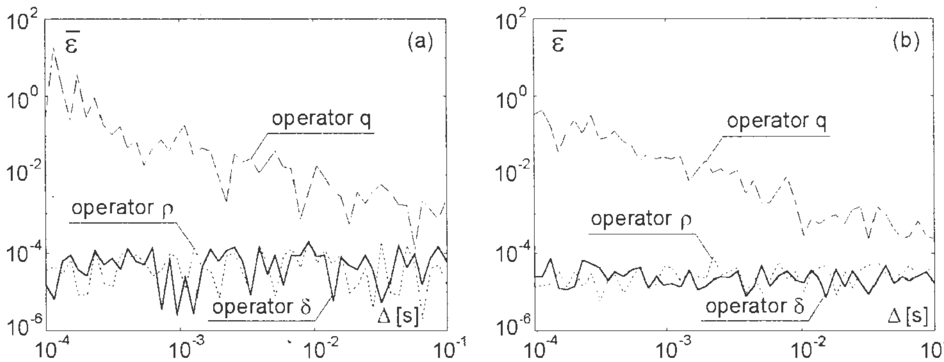
Ciągłe równanie Lapunowa $AX + XA^T + bb^T = 0_{n\times n}$ ma jednoznaczne symetryczne rozwiązanie $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X^T$, wtedy i tylko wtedy, gdy



Rys. 4.1. Przykład 4.1. Wskaźniki uwarunkowania równań Lapunowa: a) gramian sterowalności, b) gramian obserwowalności.



Rys. 4.2. Przykład 4.1. Wskaźniki uwarunkowania równań Lapunowa.



Rys. 4.3. Przykład 4.1. Funkcje błędu rozwiązań równań Lapunowa: a) gramian sterowalności, b) gramian obserwowalności.

$\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, $\forall \lambda_i, \lambda_j \in \lambda(A)$ (Barnett [19], Datta [78], Gantmacher [125], Petkov *et al.* [323]). W przypadku stabilnej macierzy A rozwiązanie takie (gramian sterowalności systemu $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$; Curran [77], Sreeram i Agathoklis [375], Xiao *et al.* [476]) zawsze istnieje, a ponadto $X > 0$.

Lemat 4.14 (o postaci rozwiązania ciągłego równania Lapunowa dla sterowalnej kanonicznej pary (A, b); Suchomski [393]). *Rozwiązanie X ciągłego równania Lapunowa $AX + XA^T + bb^T = 0_{n\times n}$ dla sterowalnej kanonicznej pary (A, b) ma postać symetrycznej macierzy Xiao:*

(*i*) *dla $n = 2m$, $m \geq 1$, $X \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$*

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_m & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & (-1)^{m-1}\alpha_{m+1} \\ -\alpha_2 & 0 & \cdots & (-1)^{m-2}\alpha_{m+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (-1)^{m-2}\alpha_m & \cdots & 0 & -\alpha_{2m-1} \\ (-1)^{m-1}\alpha_m & 0 & \cdots & \alpha_{2m-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{m-1}\alpha_{m+1} & \cdots & 0 & \alpha_{2m} \end{bmatrix};$$

(*ii*) *dla $n = 2m+1$, $m \geq 0$, $X \in \mathbb{R}^{(2m+1)\times(2m+1)}$*

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{m}\alpha_{m+1} \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & (-1)^{m-1}\alpha_{m+1} & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{m-1}\alpha_{m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{m-1}\alpha_m & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{2m} \\ 0 & (-1)^{m-1}\alpha_{m+1} & \cdots & \alpha_{2m} & 0 \\ (-1)^{m}\alpha_{m+1} & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2m+1} \end{bmatrix}.$$

Wektor $a_\alpha = [\ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n\ ]^T \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem układu liniowych równań $A_\alpha a_\alpha = b_\alpha$ z macierzą Hurwitza:

$$
\begin{aligned}
A_\alpha &= \begin{bmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-3} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n} \\
b_\alpha &= [\ 0 \ \cdots \ 0 \ 1/2\ ]^T, \quad b_\alpha \in \mathbb{R}^n .
\end{aligned}
$$

Dla stabilnej macierzy A zachodzi $\alpha_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Dyskretne równanie Lapunowa $AXA^T - X + bb^T = 0_{n\times n}$ ma jednoznaczne symetryczne rozwiązanie $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X^T$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_i\lambda_j \neq 1$, $\forall \lambda_i, \lambda_j \in \lambda(A)$ (Datta [78], Petkov *et al.* [323]). W przypadku stabilnej macierzy A rozwiązanie takie (gramian sterowalności systemu $qx(t) = Ax(t) + bu(t)$; Bitmead i Weiss [31]) zawsze istnieje, a ponadto $X > 0$.

Lemat 4.15 (o postaci rozwiązania dyskretnego równania Lapunowa dla sterowalnej kanonicznej pary (A, b); Suchomski [393]). *Rozwiązanie $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dyskretnego równania Lapunowa $AXA^T - X + bb^T = 0_{n\times n}$ dla sterowalnej kanonicznej pary (A, b) ma postać symetrycznej macierzy Toeplitza*

$$
X = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_1 \end{bmatrix},
$$

przy czym $a_\beta = [\ \beta_1 \ \cdots \ \beta_n\ ]^T \in \mathbb{R}^n$ spełnia równanie $A_\beta a_\beta = b_\beta$, gdzie:

$$
A_\beta = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} +
$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 \\ 0 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0^2 & -a_0a_1 & -a_0a_2 & \cdots & -a_0a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A_\beta \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$b_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad b_\beta \in \mathbb{R}^n .$$

Dla stabilnej macierzy A zachodzi $\beta_1 > 0$. □

Uwaga 4.7 (Suchomski [393]). Rozwiązanie równania Lapunowa $AX + XA^T + \Delta AXA^T + bb^T = 0_{n\times n}$ dla sterowalnej kanonicznej pary (A, b) – czyli gramian sterowalności systemu $\rho x(t) = Ax(t) + bu(t)$ – nie ma tak prostej 'struktury' jak podane wyżej rozwiązania równań Lapunowa dla modeli czasu ciągłego oraz dyskretnego (q). Spostrzeżenie to dobrze ilustruje pewną niedogodność podejścia, w którym wykorzystuje się operator δ: odpowiednie równania Riccatiego oraz Lapunowa mają w tym przypadku bardziej złożoną postać, co z reguły utrudnia wywodzenie właściwości stosownych rozwiązań (do tego aspektu modelowania związanego z operatorem δ powrócimy jeszcze w *rozdziale 5.* oraz *6.*). □

4.3 Ocena odpornej stabilności

Rozważmy zastosowanie równań Lapunowa do oceny zakresu niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność zamkniętego układu sterowania takim obiektem. W tym celu zakładamy, że:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= (A + \tilde{A})x(t) + (B + \tilde{B})u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= (C + \tilde{C})x(t) \end{aligned}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ oraz $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ wyznaczają nominalny model danego obiektu, zaś $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ oraz $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$ są odchyłkami odpowiednich elementów od ich wartości nominalnych. Sygnał sterujący u uzyskuje się w oparciu o algorytm sterowania w układzie zamkniętym ze sprzężeniem od wyjściowego sygnału y sterowanego obiektu:

$$\begin{aligned} \delta\hat{x}(t) &= A\hat{x} + Bu(t) + K_x(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n \\ u(t) &= -K_u\hat{x}(t) \end{aligned}$$

przy czym macierze wzmocnień $K_x \in \mathbb{R}^{n\times q}$ oraz $K_u \in \mathbb{R}^{p\times n}$ wyznacza się na podstawie szczegółowych kryteriów optymalizacji obserwatora oraz regulatora. Temu typowemu algorytmowi sterowania odpowiada przykładowo rozwiązanie problemu LQG z obserwatorem w postaci filtru Kalmana. Także metody sterowania optymalnego ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$ (zob. *rozdział 6.*) wiodą do rozwiązań podporządkowanych powyższemu schematowi.

Niezależnie od zasady syntezy (optymalizacji) sterowania przyjmujemy, że rozważany układ zamknięty jest nominalnie stabilny: $\lambda(A - BK_u) \subset \mathcal{D}_\Delta$ oraz $\lambda(A - K_xC) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Niech $\bar{x} = [\ x^T\ \ x_e^T\ ]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ oznacza wektor stanu zamkniętego układu sterowania, gdzie $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ jest błędem oceny stanu $x(t)$ obiektu na podstawie przyjętego nominalnego modelu tego obiektu. Ewolucję odpowiedniego autonomicznego układu zamkniętego opisuje równanie $\delta\bar{x}(t) = \bar{N}\bar{x}(t)$, w którym $\bar{N} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ jest macierzą o następującej blokowej postaci

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} A + \tilde{A} - (B + \tilde{B})K_u & (B + \tilde{B})K_u \\ \tilde{A} - \tilde{B}K_u - K_x\tilde{C} & A - K_xC + \tilde{B}K_u \end{bmatrix}.$$

Układ ten będzie odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda(\bar{N}) \subset \mathcal{D}_\Delta$ dla wszystkich dopuszczalnych odchyłek $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ oraz $\tilde{C}$. Aby wykazać stabilność macierzy $\bar{N}$ dla ustalonych $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ oraz $\tilde{C}$, wystarczy udowodnić istnienie takich dodatnio określonych macierzy $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $P = P^T$, $P > 0$ oraz $Q \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Q = Q^T$, $Q > 0$, dla których spełnione jest równanie Lapunowa

$$\bar{N}^TP + P\bar{N} + \Delta\bar{N}^TP\bar{N} = -Q. \tag{4.10}$$

Ze względu na zakładaną stabilność macierzy $A - BK_u$ oraz $A - K_xC$ następujące pomocnicze równania Lapunowa:

$$(A - BK_u)^TP_u + P_u(A - BK_u) + \Delta(A - BK_u)^TP_u(A - BK_u) = -I_n$$
$$(A - K_xC)^TP_x + P_x(A - K_xC) + \Delta(A - K_xC)^TP_x(A - K_xC) = -I_n$$

mają jednoznaczne, symetryczne oraz dodatnio określone rozwiązania $P_u \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_u = P_u^T$, $P_u > 0$ oraz $P_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_x = P_x^T$, $P_x > 0$. Wykorzystanie macierzy P_u oraz P_x w równaniu Lapunowa (4.10) istotnie upraszcza dalsze rozważania (Suchomski [394]). Załóżmy przeto, że $P = P(\eta) = \mathrm{diag}\,(\eta P_u, P_x)$, gdzie $\eta \in \mathbb{R}$ jest pewnym dodatnim skalującym współczynnikiem, umożliwiającym optymalizację (maksymalizację wartości) ocen norm dopuszczalnych zaburzeń nominalnego modelu obiektu. Zachodzi zatem $P(\eta) > 0$, $\forall \eta > 0$. Przyjmujemy podział $(n + n) \times (n + n)$ macierzy Q

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

Lemat o dodatniej określoności blokowej macierzy (Albert [2], Kreindler i Jameson [246], Saberi *et al.* [348]) zastosowany do Q pozwala na sformułowanie podwójnego wystarczającego warunku dodatniej określoności tej macierzy: $Q_{22} > 0$ oraz $Q_{22\nabla} > 0$, gdzie $Q_{22\nabla} = Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest dopełnieniem Schura podmacierzy Q_{22}. Jak łatwo sprawdzić

$$\begin{aligned} Q_{22} &= Q_{22}(\tilde{B},\Delta,\eta) = I_n - (\tilde{B}K_u)^T P_x - P_x\tilde{B}K_u \\ &\quad - \Delta((A-K_xC)^T P_x\tilde{B}K_u + (\tilde{B}K_u)^T P_x(A-K_xC) \\ &\quad + (\tilde{B}K_u)^T P_x\tilde{B}K_u + \eta((B+\tilde{B})K_u)^T P_u(B+\tilde{B})K_u)\,. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $\mathcal{B}_M(\rho) = \{M \in \mathbb{R}^{n_M\times m_M} : \|M\|_2 < \rho\}$ otwartą kulę o promieniu $\rho > 0$. Niech $\eta_0(\Delta) \in \mathbb{R}$ będzie taką wartością współczynnika η, że

$$\underset{\eta<\eta_0(\Delta)}{\forall}\ \underset{\rho_0(\Delta,\eta)}{\exists}\ \underset{\tilde{B}\in\mathcal{B}_B(\rho_0(\Delta,\eta))}{\forall}\ Q_{22}(\tilde{B},\Delta,\eta) > 0\,.$$

Ze wzoru opisującego podmacierz Q_{22} wynika, że

$$\eta_0(\Delta) = \frac{1}{\Delta\,\|K_u^T B^T P_u B K_u\|_2}\,.$$

Mamy ponadto

$$\rho_0(\Delta,\eta) = \frac{-b_1(\Delta,\eta) + \sqrt{b_1^2(\Delta,\eta) + 4b_0(\Delta,\eta)b_2(\Delta,\eta)}}{2b_2(\Delta,\eta)}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_0(\Delta,\eta) &= 1 - \Delta\eta\|K_u^T B^T P_u B K_u\|_2 \\ b_1(\Delta,\eta) &= 2\|K_u\|_2\|P_x\|_2 + 2\Delta\|K_u\|_2(\|P_x\|_2\|A-K_xC\|_2 + \eta\|P_uBK_u\|_2) \\ b_2(\Delta,\eta) &= \Delta\|K_u\|_2^2(\|P_x\|_2 + \eta\|P_u\|_2)\,. \end{aligned}$$

Niech $\rho_{B0} = \rho_0(\Delta,\eta)|_{\Delta\to 0}$. Zgodnie z oczekiwaniem, tak zdefiniowana asymptotyczna wielkość nie zależy od współczynnika η i wynosi (Suchomski [394])

$$\rho_{B0} = \frac{1}{2\|K_u\|_2\|P_x\|_2}\,.$$

Podkreślenia wymaga także fakt, że w przypadku modelu, w którym niepewność nie dotyczy macierzy B, to znaczy gdy $\tilde{B} = 0_{n\times m}$, wymaganie $Q_{22} > 0$ zawsze można spełnić, przyjmując dostatecznie małą wartość $\eta < \eta_0(\Delta)$.

Rozważmy drugi cząstkowy warunek odpornej stabilności – czyli żądanie, aby dla wszystkich dopuszczalnych odchyłek od nominalnego modelu obiektu

$Q_{22\nabla} > 0$. Ogólną charakterystykę metody wyznaczania ocen maksymalnych norm takich odchyłek omówimy na przykładzie zaburzenia $\tilde{A}$ macierzy stanu nominalnego modelu. Macierz $Q_{22\nabla} = Q_{22\nabla}(\tilde{A}, \Delta, \eta)$ przedstawiamy w postaci $Q_{22\nabla}(\tilde{A}, \Delta, \eta) = \eta I_n - H_A(\tilde{A}, \Delta, \eta)$, gdzie $H_A(\tilde{A}, \Delta, \eta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Załóżmy, że zdefiniowano taką funkcję $h_A : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$, dla której $h_A(\|\tilde{A}\|_2, \Delta, \eta)$ majoryzuje normę macierzy $H_A(\tilde{A}, \Delta, \eta)$. Oznacza to, że dla ustalonego okresu próbkowania Δ, dowolnej dopuszczalnej odchyłki $\tilde{A}$ oraz stosownych wartości skalującego współczynnika $\eta < \eta_0(\Delta)$ obowiązuje nierówność $\|H_A(\tilde{A}, \Delta, \eta)\|_2 < h_A(\|\tilde{A}\|_2, \Delta, \eta)$. Okazuje się, że

$$h_A(\|\tilde{A}\|_2, \Delta, \eta) - \eta = f_{A_0}(\Delta, \eta) + f_{A_1}(\Delta, \eta) \cdot \|\tilde{A}\|_2 + f_{A_2}(\Delta, \eta) \cdot \|\tilde{A}\|_2^2$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
f_{A_0}(\Delta, \eta) &= \eta \left(\frac{\eta(\|P_u B K_u\|_2 + \Delta \|(A - BK_u)^T P_u B K_u\|_2)^2}{1 - \Delta \eta \|K_u^T B^T P_u B K_u\|_2} - 1 \right) \\
f_{A_1}(\Delta, \eta) &= 2\eta(\|P_u\|_2 + \Delta \|P_u(A - BK_u)\|_2) \\
&\quad + 2\eta(\|P_u B K_u\|_2 + \Delta \|(A - BK_u)^T P_u B K_u\|_2) \\
&\quad \times \frac{\|P_x\|_2 + \Delta(\|P_x(A - K_x C)\|_2 + \eta \|P_u B K_u\|_2)}{1 - \Delta \eta \|K_u^T B^T P_u B K_u\|_2} \\
f_{A_2}(\Delta, \eta) &= \frac{(\|P_x\|_2 + \Delta(\|P_x(A - K_x C)\|_2 + \eta \|P_u B K_u\|_2))^2}{1 - \Delta \eta \|K_u^T B^T P_u B K_u\|_2} \\
&\quad + \Delta(\|P_x\|_2 + \eta \|P_u\|_2) .
\end{aligned}$$

Ocena zakresu niestrukturalizowalnych zaburzeń $\tilde{A}$ macierzy stanu nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność odpowiedniego układu zamkniętego, sprowadza się zatem do poszukiwania takiego, możliwie 'dużego', promienia $\rho_A(\Delta, \eta)$, dla którego przy pewnej wartości $\eta < \eta_0(\Delta)$ zachodzi $h_A(\|\tilde{A}\|_2, \Delta, \eta) < \eta$, $\forall \|\tilde{A}\|_2 < \rho_A(\Delta, \eta)$. Spełnienie tego warunku oznacza bowiem, że $Q_{22\nabla} > 0$, $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A(\Delta, \eta))$. Tak postępując, w pierwszej kolejności musimy określić dopuszczalny zakres zmienności skalującego współczynnika η. Niech $\eta_A(\Delta) < \eta_0(\Delta)$ oznacza taką liczbę, dla której

$$\forall_{\eta < \eta_A(\Delta)} \quad \exists_{\rho_A(\Delta, \eta)} \quad \forall_{\tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A(\Delta, \eta))} \quad h_A(\|\tilde{A}\|_2, \Delta, \eta) < \eta .$$

Ponieważ $f_{A_2}(\Delta, \eta) > 0$, zatem współczynnik $f_{A_0}(\Delta, \eta)$ musi być ujemny. Na tej podstawie otrzymujemy

$$\eta_A(\Delta) = \frac{1}{(\|P_u B K_u\|_2 + \Delta \|(A - BK_u)^T P_u B K_u\|_2)^2 + \Delta \|K_u^T B^T P_u B K_u\|_2} .$$

Stąd

$$\rho_A(\Delta,\eta) = \frac{-f_{A_1}(\Delta,\eta) + \sqrt{f_{A_1}^2(\Delta,\eta) - 4f_{A_0}(\Delta,\eta)f_{A_2}(\Delta,\eta)}}{2f_{A_2}(\Delta,\eta)}.$$

W dalszej kolejności należy wyznaczyć optymalną wartość $\eta_A^\star(\Delta)$ skalującego współczynnika η

$$\eta_A^\star(\Delta) = \arg \max_{0<\eta<\eta_A(\Delta)} \rho_A(\Delta,\eta)$$

dla której promień $\rho_A(\Delta,\eta)$ osiąga maksymalną wartość

$$\rho_A^\star(\Delta) = \rho_A(\Delta, \eta_A^\star(\Delta)).$$

Wymagane przekształcenia są elementarne, chociaż bardzo nużące, o czym łatwo się przekonać, analizując wyrażenia opisujące współczynniki f_{A_0}, f_{A_1} oraz f_{A_2}. Aby uniknąć wydłużania wywodu, w dalszej części tego podrozdziału podano odpowiednie lematy dotyczące tylko asymptotycznych ($\Delta \to 0$) oszacowań dopuszczalnych odchyłek. Tak postawione zadanie można rozwiązać za pomocą algebraicznych procedur sparametryzowanych wartością skalującego współczynnika η (Suchomski [394]).

Ocena odporności w przypadku niepewności dotyczącej jednego elementu modelu sterowanego obiektu

Niżej przedstawiamy lematy odnoszące się do odchyłek od nominalnego modelu $(A,\ B,\ C)$ sterowanego obiektu dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego. Zakładamy przy tym, że niestrukturalizowalna niepewność dotyczy tylko jednego elementu tego modelu – co jest równoznaczne z wyróżnieniem trzech przypadków niepewnych modeli: $(A+\tilde{A},\ B,\ C)$, $(A,\ B+\tilde{B},\ C)$ oraz $(A,\ B,\ C+\tilde{C})$. Uzyskane wyniki stanowią podstawę oceny odpornej stabilności w bardziej złożonych przypadkach, w których niepewność obejmuje większą liczbę elementów nominalnego modelu obiektu.

Lemat 4.16 (o odpornej stabilności układu sterowania obiektem o modelu z zaburzoną macierzą A; Suchomski [394]). *W przypadku niestrukturalizowalnego zaburzenia $\tilde{A}$ nominalnego modelu sterowanego obiektu obowiązują następujące oszacowania wskaźników odpornej stabilności układu zamkniętego:*

(*i*) *przedział $E_A = (0, \eta_A)$ wartości współczynnika skalującego η, gdzie*

$$\eta_A = \frac{1}{\|P_u B K_u\|_2^2},$$

(*ii*) *optymalna wartość współczynnika skalującego*

$$\eta_A^\star = \frac{\|P_x\|_2}{2\|P_uBK_u\|_2(2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2 + \|P_u\|_2)},$$

(*iii*) *maksymalna spektralna norma dopuszczalnej odchyłki* $\tilde{A}$

$$\rho_A^\star = \frac{1}{2(2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2 + \|P_u\|_2)}. \ \square$$

Lemat 4.17 (o odpornej stabilności układu sterowania obiektem o modelu z zaburzoną macierzą B; Suchomski [394]). *W przypadku niestrukturalizowalnego zaburzenia* $\tilde{B}$ *nominalnego modelu sterowanego obiektu obowiązują następujące oszacowania wskaźników odpornej stabilności układu zamkniętego:*

(*i*) *przedział* $E_B = (0, \eta_B)$ *wartości współczynnika skalującego* η, $\eta_B = \eta_A$,

(*ii*) *promień* $\rho_B(\eta)$, $\forall\eta \in E_B$, *określa się jako* $\rho_B(\eta) = \min\{\rho_{B0}, \bar{\rho}_B(\eta)\}$, *przy czym*

$$\bar{\rho}_B(\eta) = \frac{-f_{B_1}(\eta) + \sqrt{f_{B_1}^2(\eta) - 4f_{B_0}(\eta)f_{B_2}(\eta)}}{2f_{B_2}(\eta)}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
f_{B_0}(\eta) &= \eta(\eta\|P_uBK_u\|_2^2 - 1) \\
f_{B_1}(\eta) &= 2\eta\|K_u\|_2(\|P_x\|_2 + \|P_u\|_2 + \|P_uBK_u\|_2(\|P_x\|_2 + \eta\|P_u\|_2)) \\
f_{B_2}(\eta) &= \|K_u\|_2^2(\|P_x\|_2 - \eta\|P_u\|_2)^2,
\end{aligned}$$

(*iii*) *optymalny współczynnik skalujący* $\eta_B^\star = \arg\max_{\eta\in E_B} \bar{\rho}_B(\eta)$ *przyjmuje wartość jedynego dodatniego rzeczywistego pierwiastka równania* $\beta_0 + \beta_1\eta + \beta_2\eta^2 + \beta_3\eta^3 = 0$, *w którym:*

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= -\|P_x\|_2^3 \\
\beta_1 &= \|P_x\|_2^2(4\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2^2 - \|P_u\|_2) \\
\beta_2 &= \|P_x\|_2(2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2 + \|P_u\|_2)(2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2 + \|P_u\|_2 \\
&\quad + 4\|P_uBK_u\|_2((\|P_x\|_2 + \|P_u\|_2)\|P_uBK_u\|_2 + \|P_u\|_2)) \\
\beta_3 &= (2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2 + \|P_u\|_2)^2(1 + 2\|P_uBK_u\|_2)^2\|P_u\|_2,
\end{aligned}$$

(*iv*) *maksymalna spektralna norma odchyłki* $\tilde{B}$ *dopuszczalnej ze względu na stabilność układu zamkniętego* $\rho_B^\star = \rho_B(\eta_B^\star)$. $\square$

Uwaga 4.8 (Suchomski [394]). Spełnione są nierówności: $\beta_0 < 0$, $\beta_2 > 0$ oraz $\beta_3 > 0$. Oznacza to, że $\eta_B^\star$ jest jedynym dodatnim rzeczywistym pierwiastkiem podanego równania trzeciego stopnia. Ze względu na złożoną postać współczynników tego równania nie przytaczmy tu jawnej postaci rozwiązania $\eta_B^\star$, a w konsekwencji także jawnego wyrażenia na odpowiednie oszacowanie $\rho_B^\star$. Stosowne informacje znaleźć można w wyżej cytowanej pracy. □

Lemat 4.18 (o odpornej stabilności układu sterowania obiektem o modelu z zaburzoną macierzą C; Suchomski [394]). *W przypadku niestrukturalizowalnego zaburzenia $\tilde{C}$ nominalnego modelu sterowanego obiektu obowiązują następujące oszacowania wskaźników odpornej stabilności układu zamkniętego:*

(*i*) *przedział $E_C = (0, \eta_C)$ wartości współczynnika skalującego η, $\eta_C = \eta_A$,*

(*ii*) *optymalna wartość współczynnika skalującego*

$$\eta_C^\star = \frac{1}{4\|P_u B K_u\|_2^2},$$

(*iii*) *maksymalna spektralna norma dopuszczalnej odchyłki $\tilde{C}$*

$$\rho_C^\star = \frac{1}{4\|P_x K_x\|_2 \|P_u B K_u\|_2}. \; \square$$

Ocena odporności w przypadku niepewności dotyczącej dwóch elementów modelu sterowanego obiektu

Prostota uzyskanych ocen maksymalnych spektralnych norm dopuszczalnych niestrukturalizowalnych zaburzeń $\tilde{A}$ oraz $\tilde{C}$ nominalnego modelu sterowanego obiektu – wynikająca z faktu, że w obu tych przypadkach macierz Q_{22} jest macierzą jednostkową – skłania do poszukiwania odpowiednich oszacowań dla bardziej złożonego przypadku, w którym wymienione odchyłki występują łącznie. Dążymy zatem do wyznaczenia takiego możliwie 'dużego' podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{q\times n}$, że dla każdej pary $(\tilde{A}, \tilde{C})$ należącej do tego podzbioru odpowiedni zamknięty układ sterowania będzie układem stabilnym.

Niech $h_{AC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)$ oznacza pewną funkcję, dobraną w ten sposób, aby majoryzować spektralną normę macierzy $H_{AC}(\tilde{A}, \tilde{C}, \eta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zdefiniowanej równością: $Q_{22\nabla} = Q_{22\nabla}\,(\tilde{A}, \tilde{C}, \eta) = \eta I_n - H_{AC}(\tilde{A}, \tilde{C}, \eta)$. Dla odpowiednio określonych dziedzin odchyłek $\tilde{A}$ oraz $\tilde{C}$ (otwartych kul $\mathcal{B}_A(\rho_A)$

oraz $\mathcal{B}_C(\rho_C)$), a także przedziału zmienności skalującego współczynnika η, zachodzi $\|H_{AC}(\tilde{A},\tilde{C},\eta)\|_2 < h_{AC}(\|\tilde{A}\|_2,\|\tilde{C}\|_2,\eta)$. Dla ustalonej odchyłki $\tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A)$ różnicę $h_{AC}(\|\tilde{A}\|_2,\|\tilde{C}\|_2,\eta) - \eta$ przedstawić można w postaci następującej funkcji argumentu $\|\tilde{C}\|_2$ (Suchomski [394])

$$h_{AC}(\|\tilde{A}\|_2,\|\tilde{C}\|_2,\eta)-\eta = f_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2,\eta)+f_{AC_1}(\|\tilde{A}\|_2,\eta)\cdot\|\tilde{C}\|_2+f_{AC_2}\cdot\|\tilde{C}\|_2^2$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2,\eta) &= g_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2) + g_{AC_1}(\|\tilde{A}\|_2)\cdot\eta + g_{AC_2}\cdot\eta^2 \\ f_{AC_1}(\|\tilde{A}\|_2,\eta) &= 2\|P_xK_x\|_2(\eta\|P_uBK_u\|_2 + \|P_x\|_2\|\tilde{A}\|_2) \\ f_{AC_2} &= \|P_xK_x\|_2^2 \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned} g_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2) &= \|P_x\|_2^2\|\tilde{A}\|_2^2 \\ g_{AC_1}(\|\tilde{A}\|_2) &= 2(\|P_u\|_2 + \|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2)\|\tilde{A}\|_2 - 1 \\ g_{AC_2} &= \|P_uBK_u\|_2^2 . \end{aligned}$$

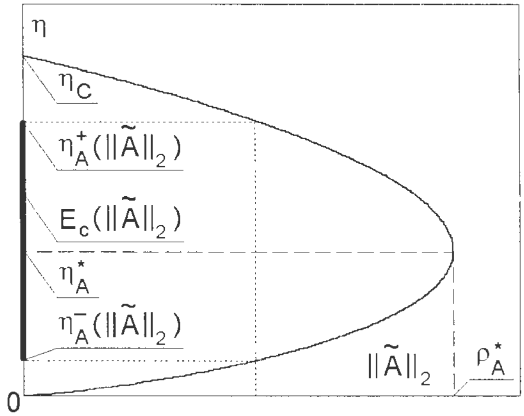
Zdefiniujmy zbiór $E_C(\|\tilde{A}\|_2) \subset \mathbb{R}$, $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A)$, dopuszczalnych wartości skalującego współczynnika η, żądając aby

$$\underset{\eta\in E_C(\|\tilde{A}\|_2)}{\forall}\quad \underset{\rho_C(\|\tilde{A}\|_2,\eta)}{\exists}\quad \underset{\tilde{C}\in\mathcal{B}_C(\rho_C(\|\tilde{A}\|_2,\eta))}{\forall}\quad h_{AC}(\|\tilde{A}\|_2,\|\tilde{C}\|_2,\eta) < \eta .$$

Ponieważ $f_{AC_2} > 0$, zatem zbiór ten określony jest przez warunek $f_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2,\eta) < 0$. Ponadto $g_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2) \geq 0$, $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A)$, oraz $g_{AC_2} > 0$. Rozpatrując nierówność $f_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2,\eta) < 0$, zauważamy, że promień ρ_A, będący kresem górnym oszacowań norm takich odchyłek $\tilde{A}$, dla których $E_C(\|\tilde{A}\|_2) \neq \emptyset$, wyznaczyć można z równania $g_{AC_1}^2(\|\tilde{A}\|_2) - 4g_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2)g_{AC_2} = 0$, gdzie $\|\tilde{A}\|_2 = \rho_A$. Zatem $\rho_A = \rho_A^\star$. Wynika stąd, że $E_C(\|\tilde{A}\|_2)$ jest otwartym przedziałem $E_C(\|\tilde{A}\|_2) = (\eta_A^-(\|\tilde{A}\|_2), \eta_A^+(\|\tilde{A}\|_2))$, którego kresy

$$\eta_A^{\pm}(\|\tilde{A}\|_2) = \frac{-g_{AC_1}(\|\tilde{A}\|_2) \pm \sqrt{g_{AC_1}^2(\|\tilde{A}\|_2) - 4g_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2)g_{AC_2}}}{2g_{AC_2}}$$

są dodatnimi pierwiastkami równania $f_{AC_0}(\|\tilde{A}\|_2,\eta) = 0$. W przypadku, w którym $\|\tilde{A}\|_2 = 0$, mamy $E_C(\|\tilde{A}\|_2) = E_C$, zaś dla $\|\tilde{A}\|_2 \to \rho_A^\star$ zachodzi $\eta_A^{\pm}(\|\tilde{A}\|_2) \to \eta_A^\star$. Powyższe spostrzeżenia zilustrowano na rys. 4.4.



Rys. 4.4. Zbiór $E_C(\|\tilde{A}\|_2)$ dopuszczalnych wartości skalującego współczynnika η.

Niech $\tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A^\star)$ będzie dowolną odchyłką. Ustalając $\eta \in E_C(\|\tilde{A}\|_2)$, otrzymujemy ocenę $\rho_C(\|\tilde{A}\|_2, \eta)$ spektralnej normy dopuszczalnej odchyłki $\tilde{C}$

$$\rho_C(\|\tilde{A}\|_2, \eta) = \frac{-\eta\|P_uBK_u\|_2 - \|P_x\|_2\|\tilde{A}\|_2 + \sqrt{\eta(1 - 2\|P_u\|_2\|\tilde{A}\|_2)}}{\|P_xK_x\|_2}.$$

Poszukując maksimum funkcji $\rho_C(\|\tilde{A}\|_2, \eta)$ ze względu na $\eta \in E_C(\|\tilde{A}\|_2)$, znajdujemy optymalną wartość $\eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)$ skalującego współczynnika η, a następnie wyznaczamy oszacowanie $\rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2) = \rho_C(\|\tilde{A}\|_2, \eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2))$ maksymalnej spektralnej normy dopuszczalnej odchyłki $\tilde{C}$.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzić można dla dowolnej ustalonej odchyłki $\tilde{C} \in \mathcal{B}_C(\rho_C^\star)$, otrzymując w ten sposób optymalną wartość $\eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$ skalującego współczynnika η, której odpowiada oszacowanie $\rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$ maksymalnej spektralnej normy dopuszczalnej odchyłki $\tilde{A}$.

Lemat 4.19 (o odpornej stabilności układu sterowania obiektem o modelu z zaburzonymi macierzami A oraz C; Suchomski [394]). *W przypadku niestrukturalizowalnego zaburzenia $(\tilde{A}, \tilde{C})$ nominalnego modelu sterowanego obiektu obowiązują następujące oszacowania wskaźników odpornej stabilności. Dla dowolnej odchyłki $\tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A^\star)$ mamy:*

(*i*) *optymalną wartość $\eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2) \in E_C(\|\tilde{A}\|_2)$ skalującego współczynnika η*

$$\eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2) = \frac{1 - 2\|P_u\|_2\|\tilde{A}\|_2}{4\|P_uBK_u\|_2^2},$$

(ii) maksymalną spektralną normę dopuszczalnej odchyłki $\tilde{C}$

$$\rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2) = \frac{1 - 2(\|P_u\|_2 + 2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2)\|\tilde{A}\|_2}{4\|P_xK_x\|_2\|P_uBK_u\|_2}.$$

Dla dowolnej odchyłki $\tilde{C} \in \mathcal{B}_C(\rho_C^\star)$ mamy:

(i) optymalną wartość $\eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2) \in E_A(\|\tilde{C}\|_2)$ skalującego współczynnika η

$$\eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2) = \frac{\|P_x\|_2 + 2\|P_u\|_2\|P_xK_x\|_2\|\tilde{C}\|_2}{2\|P_uBK_u\|_2(\|P_u\|_2 + 2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2)},$$

(ii) maksymalną spektralną normę dopuszczalnej odchyłki $\tilde{A}$

$$\rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2) = \frac{1 - 4\|P_xK_x\|_2\|P_uBK_u\|_2\,\|\tilde{C}\|_2}{2(\|P_u\|_2 + 2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2)}. \ \square$$

Uwaga 4.9 (Suchomski [394]). Zachodzi $\eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)|_{\|\tilde{A}\|_2=0} = \eta_C^\star$ oraz $\rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)|_{\|\tilde{A}\|_2=0} = \rho_C^\star$. Ponadto, dla $\|\tilde{A}\|_2 \to \rho_A^\star$ mamy $\eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2) \to \eta_A^\star$ oraz $\rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2) \to 0$. Wyróżnione funkcje $\eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)$ oraz $\rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)$, $\forall\tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A^\star)$, są malejącymi afinicznymi funkcjami argumentu $\|\tilde{A}\|_2$. Podobnymi cechami charakteryzują się odpowiednie wielkości zdefiniowane dla $\|\tilde{C}\|_2$. Zachodzi bowiem: $\eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)|_{\|\tilde{C}\|_2=0} = \eta_A^\star$ oraz $\rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)|_{\|\tilde{C}\|_2=0} = \rho_A^\star$, zaś przy $\|\tilde{C}\|_2 \to \rho_C^\star$ mamy: $\eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2) \to \eta_C^\star$ oraz $\rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2) \to 0$. Funkcje $\eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$ oraz $\rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$, $\forall\tilde{C} \in \mathcal{B}_C(\rho_C^\star)$, są malejącymi afinicznymi funkcjami argumentu $\|\tilde{C}\|_2$. Z powyższych rozważań wynika, że punkty $(0,\,0)$, $(0,\,\rho_A^\star)$ oraz $(0,\,\rho_C^\star)$ wyznaczają taki wypukły zbiór $Q_{AC} \subset \mathbb{R}^2$, że dla każdej ograniczonej odchyłki $(\tilde{A},\,\tilde{C})$, dla której $(\|\tilde{A}\|_2,\,\|\tilde{C}\|_2) \in Q_{AC}$, zamknięty układ sterowania pozostaje układem stabilnym. Obowiązuje przy tym nierówność $\eta_A^\star < \eta_C^\star$. Ponadto

$$\rho_A^\star < \frac{1}{4\|P_x\|_2\|P_xBK_u\|_2} \le \frac{\|K_x\|_2}{4\|P_xK_x\|_2\|P_uBK_u\|_2}.$$

Na tej podstawie otrzymujemy oszacowanie $\rho_A^\star < \rho_C^\star\|K_x\|_2$, z którego wynika, że dla $\|K_x\|_2 < 1$ zachodzi $\rho_A^\star < \rho_C^\star$. $\square$

Ocena odporności w przypadku niepewności dotyczącej wszystkich elementów modelu sterowanego obiektu

Zakładając, że mamy do czynienia z przypadkiem, w którym występują niestrukturalizowalne odchyłki $(\tilde{A},\,\tilde{B},\,\tilde{C})$ wszystkich elementów nominalnego modelu obiektu, wyznaczymy oceny maksymalnych spektralnych norm takich odchyłek, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego. Niech $h_{ABC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{B}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)$ będzie funkcją majoryzującą spektralną normę macierzy $H_{ABC}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \eta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zdefiniowanej równością: $Q_{22\nabla} = Q_{22\nabla}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \eta) = \eta I_n - H_{ABC}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \eta)$. Dla odpowiednio określonych otwartych kul $\mathcal{B}_A(\rho_A)$, $\mathcal{B}_C(\rho_C)$ oraz $\mathcal{B}_B(\rho_{B0})$, a także pewnego przedziału zmienności współczynnika η, zachodzi zatem $\|H_{ABC}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \eta)\|_2 < h_{ABC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{B}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)$. Przy ustalonych $(\tilde{A}, \tilde{C}) \in \mathcal{B}_A(\rho_A) \times \mathcal{B}_C(\rho_C)$ mamy (Suchomski [394])

$$h_{ABC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{B}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) - \eta =$$

$$= \frac{f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) + f_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) \cdot \|\tilde{B}\|_2 + f_{ABC_2}(\eta) \cdot \|\tilde{B}\|_2^2}{1 - 2\|K_u\|_2\|P_x\|_2 \cdot \|\tilde{B}\|_2}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) &= g_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) + g_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \cdot \eta \\
&\quad + g_{ABC_2} \cdot \eta^2 \\
f_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) &= 2\eta\|K_u\|_2(\|P_x\|_2 + \|P_u\|_2 \\
&\quad + \|P_u B K_u\|_2(\|P_x\|_2 + \eta\|P_u\|_2)) \\
&\quad + 2\|K_u\|_2\|P_x\|_2(\|P_x\|_2 - \eta\|P_u\|_2)\|\|\tilde{A}\|_2 \\
&\quad + 2\|K_u\|_2\|P_x K_x\|_2(\|P_x\|_2 + \eta\|P_u\|_2)\|\tilde{C}\|_2 \\
f_{ABC_2}(\eta) &= \|K_u\|^2(\|P_x\| - \eta\|P_u\|)^2
\end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned}
g_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) &= (\|P_x\|_2\|\tilde{A}\|_2 + \|P_x K_x\|_2\|\tilde{C}\|_2)^2 \\
g_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) &= 2(\|P_u\|_2 + \|P_x\|_2\|P_u B K_u\|_2)\|\tilde{A}\|_2 \\
&\quad + 2\|P_x K_x\|_2\|P_u B K_u\|_2\|\tilde{C}\|_2 - 1 \\
g_{ABC_2} &= \|P_u B K_u\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Należy podkreślić, że ρ_A oraz ρ_C traktujemy tu jako wielkości znane. Ponadto zakładamy efektywne wykorzystanie odpowiedniej (mniejszej) kuli zawartej w $\mathcal{B}_B(\rho_{B0})$. Niech zatem $E_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \subset \mathbb{R}$, $\forall(\tilde{A}, \tilde{C}) \in \mathcal{B}_A(\rho_A) \times \mathcal{B}_C(\rho_C)$, oznacza zbiór dopuszczalnych wartości współczynnika η

$$\underset{\eta \in E_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)}{\forall} \quad \underset{\rho_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) \leq \rho_{B0}}{\exists} \quad \underset{\tilde{B} \in \mathcal{B}_B(\rho_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta))}{\forall}$$

$$h_{ABC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{B}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) < \eta .$$

Jak widać, $f_{ABC_2}(\eta) \geq 0$, $\forall \eta$. Ponadto, w przypadku $f_{ABC_2}(\eta) = 0$ zachodzi $f_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) > 0$, $\forall (\tilde{A}, \tilde{C}) \in \mathcal{B}_A(\rho_A) \times \mathcal{B}_C(\rho_C)$. Wynika stąd, że dla ustalonych dopuszczalnych $\|\tilde{A}\|_2$ oraz $\|\tilde{C}\|_2$ zbiór $E_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)$ wyznaczyć mozna na podstawie prostego warunku $f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) < 0$, $\forall \eta \in E_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)$. Z kolei, dla takich samych dopuszczalnych odchyłek mamy $g_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \geq 0$, a ponadto zachodzi także $g_{ABC_2} > 0$. Traktując warunek $f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) < 0$ jako nierówność ze względu na η, widzimy, że na promienie ρ_A oraz ρ_C, będące kresami górnymi oszacowań norm takich odchyłek $\tilde{A}$ oraz $\tilde{C}$, dla których $E_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \neq \emptyset$, nałożone jest ograniczenie

$$2(\|P_u\|_2 + 2\|P_x\|_2\|P_uBK_u\|_2) \cdot \rho_A + 4\|P_xK_x\|_2\|P_uBK_u\|_2 \cdot \rho_C = 1$$

wynikające z równości $g^2_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) - 4g_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)g_{ABC_2} = 0$, gdzie $\|\tilde{A}\|_2 = \rho_A$ oraz $\|\tilde{C}\|_2 = \rho_C$. Ponadto $f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) = h_{AC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) - \eta$.

Z powyższych ustaleń wynika, że $\forall \tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A^\star)$ obowiązuje równość $\rho_C = \rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)$, zaś $\forall \tilde{C} \in \mathcal{B}_C(\rho_C^\star)$ mamy $\rho_A = \rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$. Na tej podstawie stwierdzamy, że $E_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)$ jest otwartym przedziałem $(\eta^-_{AC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2), \eta^+_{AC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)) \subset \mathbb{R}$, którego kresy są dodatnimi pierwiastkami równania $f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) = 0$ (Suchomski [394]).

Dla dowolnej odchyłki $\tilde{A} \in \mathcal{B}_A(\rho_A^\star)$ przy $\|\tilde{C}\|_2 \to \rho_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)$ obserwujemy, że $\eta^\pm_{AC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \to \eta_C^\star(\|\tilde{A}\|_2)$. Z kolei, $\forall \tilde{C} \in \mathcal{B}_C(\rho_C^\star)$ dla $\|\tilde{A}\|_2 \to \rho_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$ obserwujemy, że $\eta^\pm_{AC}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \to \eta_A^\star(\|\tilde{C}\|_2)$. Jako promień $\rho_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)$ przyjmujemy wielkość $\min\{\rho_{B0}, \bar{\rho}_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)\}$, gdzie $\bar{\rho}_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)$ jest dodatnim pierwiastkiem równania (Suchomski [394])

$$f_{ABC_0}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) + f_{ABC_1}(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta) \cdot \bar{\rho}_B + f_{ABC_2}(\eta) \cdot \bar{\rho}_B^2 = 0\,.$$

Optymalną wartość $\eta_B^\star(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)$ współczynnika η otrzymamy, wyznaczając minimum funkcji $\bar{\rho}_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta)$. Ocena $\rho_B^\star(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)$ maksymalnej spektralnej normy dopuszczalnej odchyłki $\tilde{B}$ przyjmuje zatem postać $\rho_B^\star(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) = \rho_B(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2, \eta_B^\star(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2))$.

Lemat 4.20 (o optymalnej wartości współczynnika skalującego η w przypadku oceny odpornej stabilności układu sterowania obiektem o modelu z zaburzonymi elementami (A, B, C); Suchomski [394]). *Dla niestrukturalizowalnego zaburzenia $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ nominalnego modelu sterowanego obiektu optymalna wartość $\eta_B^\star(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2)$ skalującego współczynnika η, $\forall (\tilde{A}, \tilde{C}) \in \mathcal{B}_A(\rho_A) \times \mathcal{B}_C(\rho_C)$, spełnia równanie*

$$\beta_0(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) + \beta_1(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \cdot \eta + \beta_2(\|\tilde{A}\|_2, \|\tilde{C}\|_2) \cdot \eta^2 + \beta_3(\|\tilde{A}\|_2) \cdot \eta^3 = 0\,.$$

Ze szczegółowymi (bardzo złożonymi) wzorami opisującymi współczynniki tego równania można się zapoznać w cytowanej wyżej pracy. □

Przykład 4.2 (ocena zapasu stabilności układu optymalnego w sensie zadania LQG; Suchomski [394]). Standardowo sformułowany problem syntezy liniowego regulatora przy kwadratowym wskaźniku jakości oraz gaussowskich obiektowych zakłóceniach i szumach obserwacji (LQG) opiera się na założeniu, że znany jest dokładny model obiektu oraz dostępne są dokładne stochastyczne charakterystyki sygnałów występujących w tym modelu (Anderson i Moore [5], Lewis [272], Whittle [467]). Rozwiązaniem odpowiedniego zadania optymalizacji jest regulator dopasowany do nominalnego modelu sterowanego obiektu: regulator taki w przypadku bezbłędnego modelowania zapewnia układowi zamkniętemu nominalną stabilność oraz żądane właściwości dynamiczne (nominalną jakość). W ogólności nie jest to jednak odporna stabilność – co oznacza, że nawet 'mała' niedokładność modelu obiektu może w pewnych przypadkach prowadzić do niestabilnego układu zamkniętego (Chen i Dong [58], Doyle [92], Soroka i Shaked [373, 374]).

Dążąc do zapewnienia układom LQG odpornej stabilności, zaproponowano szereg metod syntezy, w których obok nominalnego modelu uwzględnia się także charakterystyki niepewności opisu sterowanych obiektów:

(i) metody, w których transmitancje sygnałowych torów układu sterowania wstępnie ukształtowane według kryteriów metody LQG podlegają dodatkowej optymalizacji ze względu na wymagania wrażliwościowe (*Loop Transfer Recovery, LTR*; Saberi *et al.* [347], Stein i Athans [377]),

(ii) metody, w których do syntezy sterowania LQG z niepewnym modelem stosuje się teorię strukturalnych wartości osobliwych (Doyle [93]),

(iii) metody, w których norma $\mathcal{H}_\infty$ stanowi podstawę definicji funkcji celu odpornego sterowania (Green i Limebeer [153], Zhou *et al.* [487]).

Nominalny model sterowanego obiektu z czasem ciągłym zapisany zgodnie z notacją Itô ma postać równania stanu oraz obserwacji (Chui i Chen [63], Jazwinski [201], Sage i Melsa [349]):

$$\begin{aligned} dx_0(t) &= Ax_0(t)dt + Bu(t)dt + d\tilde{w}_0(t), \quad x_0(t) \in \mathbb{R}^n \\ d\tilde{y}(t) &= Cx_0(t)dt + d\tilde{v}_0(t) \end{aligned}$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor stanu, $u \in \mathbb{R}^p$ jest sygnałem sterującym, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^q$ jest sygnałem obserwacji, $d\tilde{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ jest infinitezymalnym przyrostem procesu Wienera $\tilde{w}_0 \in \mathbb{R}^n$ opisanym momentami $\mathrm{E}[d\tilde{w}_0] = 0_n$ oraz

$\mathrm{E}\left[d\tilde{w}_0 d\tilde{w}_0^T\right] = Q_w dt$, $Q_w \in \mathbb{R}^{n\times n}$, zaś $d\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}^q$ oznacza infinitezymalny przyrost procesu Wienera $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}^q$ o momentach $\mathrm{E}\left[d\tilde{v}_0\right] = 0_q$ i $\mathrm{E}\left[d\tilde{v}_0 d\tilde{v}_0^T\right] = Q_v dt$, $Q_v \in \mathbb{R}^{q\times q}$. O procesach $\tilde{w}_0$ oraz $\tilde{v}_0$ zakłada się, iż są wzajemnie niezależne, ponadto przyjmuje się, że Q_w jest macierzą dodatnio półokreśloną ($Q_w \geq 0$), zaś Q_v – macierzą dodatnio określoną ($Q_v > 0$). Macierze rozważanego modelu mają zatem wymiary: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ oraz $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$.

Minimalnowariancyjne oszacowanie $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ procesu x_0 oblicza się, stosując filtr Kalmana–Bucy (Brown i Hwang [45], Chui i Chen [63], Kalman *et al.* [211])

$$d\hat{x}_0(t) = A\hat{x}_0(t)dt + Bu(t)dt + K_x(t)\left[d\tilde{y}(t) - C\hat{x}_0(t)dt\right], \quad \hat{x}_0(t_0)$$

gdzie $K_x(t) = M_x(t)C^T Q_v^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ jest wzmocnieniem tego filtru, przy czym macierz $M_x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stanowi rozwiązanie różniczkowego równania Riccatiego $\dot{M}_x(t) = AM_x(t) + M_x(t)A^T - M_x(t)C^T Q_v^{-1} C M_x(t) + Q_w$, w którym jako początkowy warunek $M_x(t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ przyjmuje się pewne przybliżenie kowariancji błędu oceny stanu $x_0(t_0)$. Zakładając, że ocenę $\hat{x}_0(t)$ stanu $x_0(t)$ w chwili t wyznacza się na podstawie obserwacji prowadzonych w nieograniczonym przedziale czasu $(-\infty, t]$, otrzymujemy równanie stacjonarnego filtru Kalmana–Bucy

$$d\hat{x}_0(t) = A\hat{x}_0(t)dt + Bu(t)dt + K_x\left[d\tilde{y}(t) - C\hat{x}_0(t)dt\right], \quad \hat{x}_0(t_0)$$

o wzmocnieniu $K_x = M_x C^T Q_v^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times q}$ zależnym od rozwiązania $M_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ algebraicznego ciągłego równania Riccatiego

$$AM_x + M_x A^T - M_x C^T Q_v^{-1} C M_x + Q_w = 0_{n\times n}\,. \tag{4.11}$$

Definiując funkcjonał kosztów

$$J(u(\cdot)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\mathrm{E}\left[\int_0^T \left(x_0^T(t)Q_x x_0(t) + u^T(t)Q_u u(t)\right)dt\right]$$

w którym $Q_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczną macierzą dodatnio półokreśloną ($Q_x \geq 0$), zaś $Q_u \in \mathbb{R}^{p\times p}$ jest symetryczną macierzą dodatnio określoną ($Q_u > 0$), postawić można problem syntezy sterowania $u^\star(t)$ minimalizującego ten funkcjonał (Anderson i Moore [5], Saberi *et al.* [348], Whittle [467]). Rozwiązaniem tak sformułowanego problemu LQG jest prawo sterowania $u^\star(t) = -K_u\hat{x}_0(t)$, w którym $K_u = Q_u^{-1}B^T M_u \in \mathbb{R}^{p\times n}$ jest macierzą sprzężenia zwrotnego, zaś macierz $M_u \in \mathbb{R}^{n\times n}$ otrzymuje się z algebraicznego równania Riccatiego

$$A^T M_u + M_u A - M_u B Q_u^{-1} B^T M_u + Q_x = 0_{n\times n}\,. \tag{4.12}$$

Przyjmijmy, że w dalszych rozważaniach obowiązują dwa standardowe zestawy założeń (Bitmead i Gevers [30], Willems i Gallier [472]). Na pierwszy zestaw składają się dwa założenia: para $(A,\ R_x)$, gdzie $Q_x = R_x^T R_x$, jest wykrywalna oraz para $(A,\ B)$ jest stabilizowalna. Z założeń tych wynika, że równanie (4.11) ma jednoznaczne, stabilizujące, symetryczne i dodatnio półokreślone rozwiązanie $M_u = M_u^T$, $M_u \geq 0$ (w przypadku, w którym para $(A,\ R_x)$ jest obserwowalna, macierz M_u jest macierzą dodatnio określoną, $M_u > 0$). Drugi zestaw założeń ma postać: para $(A,\ R_w)$, gdzie $Q_w = R_w R_w^T$, jest stabilizowalna, zaś para $(A,\ C)$ jest wykrywalna. Z założeń tego zestawu wynika, że równanie (4.12) ma jednoznaczne, stabilizujące, symetryczne i dodatnio półokreślone rozwiązanie $M_x = M_x^T$, $M_x \geq 0$ (w przypadku, w którym para (A, R_w) jest sterowalna, macierz M_x jest macierzą dodatnio określoną, $M_x > 0$). Dalej przyjmujemy zatem, że $A - BK_u$ oraz $A - K_x C$ są macierzami stabilnymi.

Matematyczny rygoryzm powyższych sformułowań (niezbędny do poprawnego zdefiniowania właściwości rozpatrywanych sygnałów) osłabiono wszędzie tam, gdzie notacyjne uproszczenia nie prowadzą do nieporozumień. Postępując w ten sposób, stochastycznym równaniom różniczkowym przyporządkowujemy model (Anderson i Moore [5], Kushner [252], Skogestad i Postlethwaite [363]):

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0(t) &= Ax_0(t) + Bu(t) + w_0(t) \\
y(t) &= Cx_0(t) + v_0(t)
\end{aligned}
$$

w którym procesy $w_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz $v_0 \in \mathbb{R}^q$ są wzajemnie niezależnymi białymi szumami ($d\tilde{w}_0(t) = w_0(t)dt$ oraz $d\tilde{v}_0(t) = v_0(t)dt$) o zerowych wartościach średnich oraz macierzach kowariancyjnych $\mathrm{E}[w_0(t)w_0(\tau)^T] = Q_w\delta(t-\tau)$ i $\mathrm{E}[v_0(t)v_0(\tau)^T] = Q_v\delta(t-\tau)$. 'Rzeczywisty' obiekt sterowania opisany jest modelem z niepewnością o addytywnym charakterze:

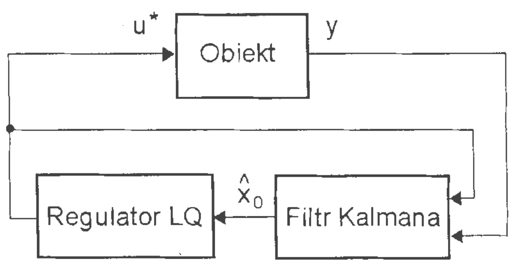
$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A + \tilde{A})x(t) + (B + \tilde{B})u(t) + w(t) \\
y(t) &= (C + \tilde{C})x(t) + v(t)
\end{aligned}
$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor stanu, $u \in \mathbb{R}^p$ jest sygnałem sterującym, $y \in \mathbb{R}^q$ jest sygnałem obserwacji, procesy $w \in \mathbb{R}^n$ oraz $v \in \mathbb{R}^q$ oznaczają zakłócenia obiektowe oraz obserwacji, zaś macierze $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ oraz $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ są odchyłkami od odpowiednich elementów $(A,\ B,\ C)$ nominalnego modelu obiektu. Sterowanie $u = u^{\star}$, wyznaczone w oparciu o ten model, podawane jest na rzeczywisty obiekt, co prowadzi do układu zamkniętego o schemacie danym na rys. 4.5. Ewolucję stanu $\bar{x}(t)$ tego układu opisuje równanie

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{N}\bar{x}(t) + \hat{N}\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

w którym macierz $\hat{N} \in \mathbb{R}^{2n\times(n+q)}$ ma postać

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times q} \\ I_n & -K_x \end{bmatrix}.$$



Rys. 4.5. Przykład 4.2. Schemat układu sterowania.

Równanie (4.13) jest niejednorodnym stochastycznym równaniem różniczkowym z wymuszeniem w postaci białego szumu. Ponieważ omawiane równanie jest liniowe i oddziaływanie wymuszenia ma charakter addytywny, interesujące nas cechy rozwiązania $\bar{x}$ są takie same jak odpowiednie właściwości uzyskane na podstawie rachunku Itô zastosowanego do stochastycznego równania

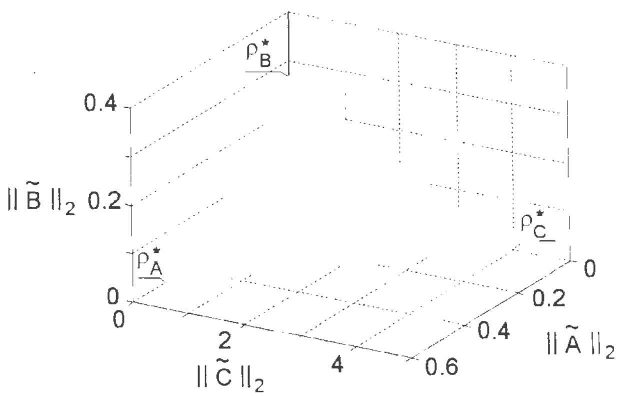
$$d\bar{x}(t) = \bar{N}\bar{x}(t)dt + \hat{N}\begin{bmatrix} d\tilde{w}(t) \\ d\tilde{v}(t) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

w którym występują infinitezymalne przyrosty odpowiednich procesów Wienera $[\ d\tilde{w}(t)^T \quad d\tilde{v}(t)^T\ ]^T = [\ w(t)dt^T \quad v(t)dt^T\ ]^T$. Rozwiązywanie równania (4.14) nie wymaga całkowania w sensie Itô (Arnold [9], Schuss [355], Sobczyk [365]), zaś do zapewnienia stabilności rozwiązania $\bar{x}$ potrzeba i wystarcza, aby wartości własne macierzy $\bar{N}$ należały do otwartej lewej półpłaszczyzny płaszczyzny zespolonej – co jest równoważne żądaniu asymptotycznej stabilności układu modelowanego czysto deterministycznym równaniem różniczkowym $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{N}\bar{x}(t)$.

Numeryczny eksperyment dotyczy obiektu opisanego poniższym nominalnym modelem zaczerpniętym z (Davison i Ferguson [79]):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 \\ 2/3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -3/4 & -1/2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze kowariancyjne $Q_w \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ i $Q_v \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz macierze wagowe $Q_x \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ i $Q_u \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mają postać: $Q_w = BB^T$, $Q_v = I_2$, $Q_x = C^T C$, $Q_u = I_2$. Rozwiązując rozważany problemu LQG, wyznaczamy macierze wzmocnień filtru Kalmana–Bucy K_x oraz regulatora K_u, a następnie macierze P_u oraz P_x. Na tej podstawie obliczamy wartości spektralnych norm: $\|K_u\|_2 = 1.14913$, $\|K_x\|_2 = 0.41870$, $\|P_u\|_2 = 0.61483$, $\|P_x\|_2 = 0.57405$, $\|P_x K_x\|_2 = 0.15970$ oraz $\|P_u B K_u\|_2 = 0.40194$. Mamy zatem $E_A = E_B = E_C = (0,\ 6.18971)$. Optymalne wartości skalującego współczynnika η, wyznaczone na podstawie *lematów 4.16* oraz *4.18*, wynoszą: $\eta_A^\star = 0.66347$ oraz $\eta_C^\star = 1.54743$. Prowadzi to do odpowiednich oszacowań spektralnych norm dopuszczalnych pojedynczych odchyłek $\tilde{A}$ i $\tilde{C}$: $\rho_A^\star = 0.46455$ oraz $\rho_C^\star = 3.89463$. Dla odchyłki $\tilde{B}$ mamy $\rho_{B0} = 0.75797$. Optymalna wartość skalującego współczynnika η równa się w tym przypadku $\eta_B^\star = 0.29567$, czemu odpowiada $\rho_B^\star = 0.26365 < \rho_{B0}$. Na rys. 4.6 zobrazowano obszar wyznaczony dopuszczalną niepewnością wszystkich elementów modelu sterowanego obiektu. Szczegółową dyskusję różnych aspektów rozważanego przykładu znajdziemy w (Suchomski [394]). □



Rys. 4.6. Przykład 4.2. Obszar odpowiadający dopuszczalnym odchyłkom $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

Zakończenie

Praca dotyczyła problemów syntezy algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym. Próbując wskazać najważniejsze przyczynki, które zdaniem autora wnosi niniejsza praca, należałoby – konsekwentnie wiążąc poniższe sformułowania z przyjętym sposobem modelowania sterowanych obiektów opartym na operatorze δ – wymienić co następuje.

(*1*) Opracowano analityczne formuły nastawiania korektorów Youli–Kučery o niskim rzędzie, służące zapewnieniu odpornej stabilności oraz odpornego zachowania się nominalnie stabilnych układów sterowania wyznaczonych zgodnie z metodą rozmieszczania biegunów oraz układów sterowania predykcyjnego. Zdefiniowano dwie rodziny diofantycznych równań niezbędnych przy rozwiązywaniu zadań syntezy algorytmów sterowania na podstawie zasady rozmieszczania biegunów.

(*2*) Podano oszacowanie wstecznego oraz względnego błędu rozwiązania problemu rozmieszczania biegunów dla ściśle strukturalizowalnych zaburzeń liniowego zadania wynikającego z odpowiednich równań diofantycznych.

(*3*) Przedstawiono numerycznie stabilną metodę oceny stopnia największego wspólnego dzielnika wielomianów dyskretnego modelu sterowanego obiektu.

(*4*) Opracowano metodę strojenia algorytmów predykcyjnego sterowania, mającą postać analitycznych formuł wywiedzionych z właściwości odpowiednio sparametryzowanych rodzin prototypowych wielomianów.

(*5*) Badając wrażliwość rozwiązań dyskretnych równań Riccatiego oraz dyskretnych równań Lapunowa na zaburzenia odpowiednich macierzowych pęków, wykazano, że w przypadku nieosobliwych zadań przy dostatecznie małej wartości okresu próbkowania równania przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia q charakteryzują się istotnie gorszym uwarunkowaniem w stosunku do równań wynikających z zastosowania operatora δ. Ujawniono także istnienie klasy osobliwych zadań, dla których taka przewaga modeli związanych z operatorem δ nie występuje.

(*6*) Dla typowych struktur algorytmów optymalnego sterowania pokazano w jaki sposób, wykorzystując odpowiednio zdefiniowane równania Lapunowa, wyznaczyć zakres niestrukturalizowalnych zaburzeń nominalnego modelu sterowanego obiektu, dopuszczalnych ze względu na stabilność układu zamkniętego.

(*7*) Zbadano właściwości $J-$bezstratnych stabilizujących koniugatorów.

(*8*) Sformułowano konieczne i wystarczające warunki istnienia różnych $J-$bezstratnych faktoryzacji modeli (macierzy) rozproszenia, w tym także uogólnionych $J-$bezstratnych faktoryzacji macierzy, które mają zera należące do $\partial\mathcal{D}_\Delta$. Szczegółowo przeanalizowano właściwości czynników takich faktoryzacji.

(*9*) Ukazano podstawowe strukturalne cechy szerokiej klasy optymalnych algorytmów sterowania, które uzyskuje się, biorąc pod uwagę zalecenia wynikające z teorii przestrzeni $\mathcal{H}_\infty$. Podano wystarczające warunki istnienia wymiernych rozwiązań o ściśle właściwej postaci, a także zwrócono uwagę na ograniczony zakres ich stosowalności.

(*10*) Omówiono szereg algorytmów odpornego sterowania oraz estymacji stanu, w tym ogólną postać algorytmu wyprowadzonego z metody rozmieszczania biegunów.

Rozdział 6., poświęcony problemom syntezy liniowych układów optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$, stanowi merytorycznie najistotniejszą część pracy. Łatwo wszakże zauważyć, że motyw kształtowania charakterystyk układów dynamicznych (sterowania oraz estymacji) w oparciu o wskazania formułowane z wykorzystaniem normy $\mathcal{H}_\infty$ wielokrotnie pojawiał się także w innych miejscach tej pracy.

Problemy oraz zadania tu podjęte nie wypełniają całości obszaru zasługującego na penetrację. Jeden z rozpoczętych i interesujących wątków wiąże się z pytaniem o możliwość zbudowania numerycznie stabilnego algorytmu syntezy regulatora według normy $\mathcal{H}_\infty$ na podstawie rozszerzonego modelu danego obiektu. Okazuje się, że w przypadku takich modeli, badając konieczne i wystarczające warunki istnienia odpowiednich $J-$bezstratnych faktoryzacji, a także definiując dodatkowe strukturalne wymagania nakładane na unimodularne czynniki tych faktoryzacji, po raz kolejny przekonujemy się o korzyściach, jakie daje reprezentacja rozważanych równań Riccatiego w postaci stosownych macierzowych pęków (Suchomski [412]). Inny problem, o którym tylko wspomniano w toku prowadzonych rozważań, dotyczy algorytmów syntezy odpornych adaptacyjnych układów sterowania z Q–parametrami zmieniającymi się w czasie (Suchomski [411]).

Na zakończenie warto jeszcze wymienić dwa tematy, które będąc rozwinięciem problematyki poruszonej w niniejszej pracy, stanowią o aktualnych fascynacjach jej autora. Są to problemy syntezy numerycznie odpornych algorytmów sterowania nieliniowymi obiektami o nieskończeniewymiarowych modelach oraz zagadnienia związane z adekwatnym modelowaniem w czasie dyskretnym niepewności charakterystyk obiektów opisanych różniczkowymi inkluzjami.

Literatura

[1] J. Abels, P. Benner: CAREX (DAREX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Riccati equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 14 (16), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.

[2] A. Albert: Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudo inverses, *SIAM Journ. Applied Math.*, 1969, 17 (2), 434-440.

[3] B.D.O. Anderson: From Youla-Kučera to identification, adaptive and nonlinear control, *Automatica*, 1998, 34 (12), 1485-1506.

[4] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenny, D. Sorensen: *LAPACK users' guide*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[5] B.D.O. Anderson, J.B. Moore: *Optimal control. Linear quadratic methods*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.

[6] P. Ansay, V. Wertz: Model uncertainties in GPC: a systematic two-step design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, FR-A-B-3.

[7] P. Ansay, M. Gevers, V. Wertz: Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter, *European Journ. Control*, 1998, 4 (1), 64-70.

[8] K. Arent, I.M.Y. Mareels, J.W. Polderman: The pole-zero cancellation problem in adaptive control: a solution for minimum phase systems by approximate models, *European Journ. Control*, 1998, 4 (3), 320-332.

[9] L. Arnold: *Stochastic differential equations. Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.

[10] W.F. Arnold, A.J. Laub: Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations, *Proc. IEEE*, 1984 , 72 (12), 1746-1754.

[11] K.J. Åström: Limitations on control system performance, *European Journ. Control*, 2000, 6 (1), 2-20.

[12] K.J. Åström, P. Hagander, J. Sternby: Zeros of sampled systems, *Automatica*, 1984, 20 (1), 31-38.

[13] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA., 1989.

[14] K.J. Åström, B. Wittenmark: *Computer-controlled systems*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1997.

[15] E.W. Bai, Z. Ding: Zeros of sampled data systems represented by FIR models, *Automatica*, 2000, 36 (1), 121-123.

[16] E.W. Bai, Y.Q. Wu: Limiting zero distribution of sampled systems, *Automatica*, 2002, 38 (5), 843-851.

[17] G.A. Baker: *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York, San Fransisco, 1975.

[18] G.A. Baker, P. Graves-Morris, P.A. Carruthers: *Padé approximants*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981.

[19] S. Barnett: *Matrices in control theory*, Van Nostrand Rainhold Company, London, 1971.

[20] A.Y. Barraud: A numerical algorithm to solve $A^TXA - X = Q$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1977, AC-22 (5), 883-885.

[21] R.H. Bartels, A.R. Conn, C. Charalambous: On Cline's direct method for solving overdetermined linear systems in the l_∞ sense, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1978, 15 (2), 255-270.

[22] H. Bartels, G.W. Stewart: Algorithm 432. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, *Comm. Assoc. Computing Mach.*, 1972, 15 (9), 820-826.

[23] F.L. Bauer: Optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1963, 5 (1), 73-87.

[24] F.L. Bauer: Remarks on optimally scaled matrices, *Numer. Math.*, 1969, 13 (1), 1-3.

[25] B. Beckermann, G. Labahn: A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials, *Journ. Symbolic Comput.*, 1998, 26 (6), 691-714.

[26] B. Benhammouda: Rank-revealing 'top-down' *ULV* factorizations, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1997, SFB393/97-02, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[27] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic Riccati equations. I: continuous-time case, II: discrete-time case, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1995, 95-22, 95-23, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[28] P. Benner, A.J. Laub, V. Mehrmann: Benchmarks for the numerical solution of algebraic Riccati equations, *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17 (5), 18-28.

[29] A. Berman, R.J. Plemmons: *Nonegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[30] R.R. Bitmead, M. Gevers: Riccati difference and differential equations: convergence, monotonicity and stability, *w* S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[31] R.R. Bitmead, H. Weiss: On the solution of discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (3), 481-482.

[32] Å. Björck: *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[33] Å. Björck: Component-wise perturbation analysis and error bounds, *BIT*, 1991, 31, 238-244.

[34] T. Bleile, P. Boucher, D. Dumur: Delta-operator generalized predictive cascade control, *Proc. 3rd European Control Conf ECC'95*, Rome, Italy, 4, 1995, 2857-2862.

[35] M.J. Błachuta: On zeros of pulse transfer functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1999, AC-44 (6), 1229-1234.

[36] J. Bognar: *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974.

[37] D.L. Boley: Computing rank-deficiency of rectangular matrix pencils, *Systems and Control Letters*, 1987, 9, 207-214.

[38] D.L. Boley, W.S. Lu: Measuring how far a controllable system is from an uncontrollable one, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (3), 249-251.

[39] P. Boucher, D. Dumur, R. Neumann: Control axis using delta-operator generalized-predictive control, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993 2, 937-940.

[40] T.L. Boullion, P.L. Odell: *Generalized inverse matrices*, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York, 1971.

[41] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[42] R.D. Braatz: Internal model control, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[43] G.E. Bredon: *Topology and geometry*, Springer Verlag, New York, 1993.

[44] W.S. Brown: On Euclid's algorithm and the computation of polynomial greatest common divisors, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1971, 18 (4), 476-504.

[45] R.G. Brown, P.Y.C. Hwang: *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

[46] J.R. Bunch: The weak and strong stability of algorithms in numerical linear algebra, *Linear Algebra Appl.*, 1987, 88/89, 49-66.

[47] J.R. Bunch, C.P. Nielsen: Updating the singular value decomposition, *Numer. Math.*, 1978, 31 (2), 111-129.

[48] A. Bunse-Gerstner, R. Byers, V. Mehrmann: A chart of numerical methods for structured eigenvalue problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (2), 419-453.

[49] P.A. Businger: Matrices which can be optimally scaled, *Numer. Math.*, 1968, 12, 346-348.

[50] P.A. Businger, G.H. Golub: Linear least squares solutions by Householder transformations, *Numer. Math.*, 1965, 7 (3), 269-276.

[51] M. Busłowicz: *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk, Politechnika Białostocka, Warszawa, Białystok, 2000.

[52] R. Byers: A LINPACK-style condition estimator for the equation $AX - XB^T = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (10), 926-928.

[53] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model predictive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[54] T.F. Chan, D.E. Foulser: Effectively well-conditioned linear systems, *SIAM Journ. Sci. Statist. Comput.*, 1988, 9 (6), 963-969.

[55] S. Chandrasekaran, I.C.F. Ipsen: On the sensitivity of solution components in linear systems of equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1995, 16 (1), 93-112.

[56] B.M. Chen: *Robust and $\mathcal{H}_\infty$ control*, Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 2000.

[57] C.T. Chen: *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*, Saunders College Publishing, Philadelphia, San Diego, 1993.

[58] B.S. Chen, T.Y. Dong: LQG Optimal control system design under plant perturbation and noise uncertainty: a state-space approach, *Automatica*, 1989, 25 (3), 431-436.

[59] S. Chen, J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne: Optimising stability bounds of finite-precision controller structures for sampled-data systems in the $\delta-$operator domain, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (6), 517-526.

[60] H.W. Cheng, S.S.T. Yau: More explicit formulas for the matrix exponential, *Linear Algebra Appl.*, 1997, 262, 131-163.

[61] P. Chin, R.M. Corless: Optimization strategies for the approximate GCD problem, *Proc. Int. Symp. Symbolic and Algebraic Computation ISSAC*, Rostock, Germany, 1998, 228-235.

[62] A. Chotai, P. Young, P. McKenna, W. Tych: Proportional-integral-plus (*PIP*) design for delta (δ) operator systems. Part 2: MIMO systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (1), 149-168.

[63] C.K. Chui, G. Chen: *Kalman filtering with real-time applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[64] D.W. Clarke: Self-tuning control, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[65] D.W. Clarke, C. Mohtadi: Properties of generalized predictive control, *Automatica*, 1989, 25 (6), 859-876.

[66] D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs: Generalized predictive control - Part I. The basic algorithm, *Automatica*, 1987, 23 (1), 137-148.

[67] T.F. Coleman, Y. Li: A global and quadratically convergent method for linear l_∞ problems, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1992, 29 (4), 1166-1186.

[68] E.G. Collins Jr., W.M. Haddad, V. Challeboina: Robustness analysis in the delta-domain using fixed-structure multipliers, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 3286-3291.

[69] E.G. Collins Jr., T. Song: A delta operator approach to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (4), 315-320.

[70] J.B. Conway: *Functions of one complex variable*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1978.

[71] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A generalized eigenproblem solution for singular $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ problems, *Control and Dynamic Systems*, 1992 50 (2), 331-394.

[72] R.B. Copeland, M.G. Safonov: Zero cancelling compensation for singular control problems and their application to the inner-outer factorization problem, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1992, 2 (2), 139-164.

[73] R.B. Copeland, M.G. Safonov: A zero compensation approach to singular $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$, *Int. Journ. Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5 (2), 71-106.

[74] C.L. Cox, W.F. Moss: Backward error analysis for a pole assignment algorithm, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (4), 446-456.

[75] S. Cristea, C. De Prada: Predictive control system with slow and fast dynamics using the delta operator, *Proc. CIDIC Seminar. Theory and Applic. Model-based Predictive Control*, Brussel, Belgium, 1996.

[76] C.G. Cullen, C.A. Hall: On determining whether two polynomials are relatively prime, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (4), 369-370.

[77] P.F. Curran: Lyapunov's matrix equation with system matrix in companion form, *Int. Jouurn. Control*, 1993, 57 (6), 1509-1516.

[78] B.N. Datta: *Numerical methods for linear control systems*, Elsevier Academic Press, Amsterdam, Boston, 2004.

[79] E.J. Davison, I.J. Ferguson: The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using parameter optimization methods, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (1), 93-110.

[80] H. Demircioglu: Constrained continuous-time generalised predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Applic,*, 1999, 146 (5), 470-476.

[81] H. Demircioglu, D.W. Clarke: CGPC with guaranteed stability properties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1992, 139 (4), 371-380.

[82] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Continuous-time generalised predictive control (CGPC), *Automatica*, 1991, 27 (1), 55-74.

[83] H. Demircioglu, P.J. Gawthrop: Multivariable continuous-time generalised predictive control (MCGPC), *Automatica*, 1992, 28 (4), 697-713.

[84] J.W. Demmel: *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[85] J.W. Demmel, M. Gu, S. Eisenstat, Slapničar, K. Veselič, Z. Drmač: Computing the singular value decomposition wilh relative accuracy, *LAPACK working note*, 1997, 119, CS-97-348. SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[86] M.C.F. de Oliveira, P.J. Fleming: Effective mapping of continuous-time controllers to their equivalents, *Electronics Letters*, 1990, 26 (9), 562-564.

[87] P. Devilde, H. Dym: Lossless chain scattering matrices and optimum linear prediction: the vector case, textitCircuit Theory Appl., 1981, 9 (2), 135-175.

[88] I.S. Dhillon: Relaible computation of the condition number of a tridiagonal matrix in $\mathcal{O}(n)$ time, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 776-796.

[89] C. De Prada, S. Cristea, A.G. Kuznetsov: Stability guarantee in predictive control delta domain, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 3b-07-3, I, 397-402.

[90] C.A. Desoer, M. Vidyasagar: *Feedback systems: input-output properties*, Academic Press, New York, 1975.

[91] J. Douglas, M. Athans: Multivariable poles, zeros, and pole-zero cancellations, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[92] J.C. Doyle: Guaranteed margins for LQG regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (4), 756-757.

[93] J.C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1982, 129 (6), 242-250.

[94] C.J. Doyle, B.A. Francis, A.R. Tannenbaum: *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

[95] J.C. Doyle, A. Packard, K. Zhou: Review of LFTs, LMIs and μ, *Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control*, Brighton, England, 1991, 1227-1232.

[96] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis: State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, 34 (8), 831-847.

[97] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[98] D. Dumur, P. Boucher: New predictive techniques: control axis solutions, *Proc. 3rd Conf. on Control Applications*, Glasgow, Scotland, UK, 1994, 1663-1668.

[99] D. Dumur, P. Boucher, E. Pope, C. Holtan: PREDATOR: a delta identification and autotuned predictive control software toolbox, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2845-2850.

[100] G.E. Dullerud, F. Paganini: *A course in robust control theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, 2000.

[101] W. Ebert: Optimal filtered predictive control - a delta operator approach, *Systems and Control Letters*, 2001, 42, 69-80.

[102] M. El-Khoury, O.D. Crisalle: Relative zero location for second-order sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1551-1552.

[103] E. Elmroth, F. Gustavson, I. Jonsson, B. Kågström: Recursive blocked algorithms and hybrid data structures for dense matrix library software, *SIAM Review*, 2004, 46 (1), 3-45.

[104] L. Elsner, C. He: An algorithm for computing the distance to uncontrollability, *Systems and Control Letters*, 1991, 17, 453-464.

[105] A. Emami-Naeini, P. Van Dooren: Computation of zeros of linear multivariable systems, *Automatica*, 1982, 18 (4), 415-430.

[106] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Numerical univariate polynomial GCD, *w* J. Renegar, M. Shub, S. Smale (Eds.): *The mathematics of numerical analysis, Lect. appl. math.*, 32, Amer. Math. Soc., 1996.

[107] I.Z. Emiris, A. Galligo, H. Lombardi: Certified approximate univariate GCDs, *Journ. Pure Appl. Algebra*, 1997, 117/118, 229-251.

[108] F.W. Fairman: *Linear control theory, the state space approach*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.

[109] G. Favier, D. Dubois: A review of k-step-ahead predictors, *Automatica*, 1990, 26 (1), 75-84.

[110] A. Feintuch: *Robust control theory in Hilbert space*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1998.

[111] V. Feliu, J.A. Cerrada: Analysis and design of minimum-phase zeros of sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (6), 1397-1416.

[112] A. Feuer, R.H. Middleton: Conditioning of LMS algorithms with fast sampling, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995 , AC-43 (8), 1978-1981.

[113] R.D. Fierro, P.C. Hansen, P.S.K. Hansen: UTV tools: MATLAB templates for rank-revealing *UTV* decompositions, *Numer. Algorithms*, 199, 20 (1), 165-194.

[114] M. Fikar, S. Engell: Receding horizon predictive control based upon the Youla-Kučera parameterisation, *European Journ. Control*, 1997, 3 (2), 304-316.

[115] M. Fikar, M. Morari, J. Mikleš: On Youla-Kučera parameterisation approach to predictive control, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CP-12-5.

[116] B.A. Francis: *A course in $\mathcal{H}_\infty$ control theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

[117] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (6), 555-565.

[118] J.S. Freudenberg, D.P. Looze: A sensitivity tradeoffs for plants with time delay, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 99-104.

[119] J.S. Freudenberg, R.H. Middleton, J.H. Braslavsky: Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems, *Int. Journ. Control*, 1995, 61 (6), 1387-1421.

[120] Y. Fu, G.A. Dumont: Choice of sampling to ensure minimum-phase behaviour, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 560-563.

[121] P.A. Fuhrmann: *A polynomial approach to linear algebra*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1996.

[122] Z. Gajic, M. Qureshi: *Lyapunov matrix equation in system stability and control*, Academic Press, New York, 1995.

[123] P.M. Gahinet, A.J. Laub: Computable bounds for the sensitivity for the algebraic Riccati equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1461-1480.

[124] P.M. Gahinet, A.J. Laub, C.S. Kenney, G.A. Hewer: Sensitivity of the stable discrete-time Lyapunov equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1209-1217.

[125] F.R. Gantmacher: *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

[126] P.J. Gawthrop: *Continuous-time self-tuning control; vol. 1: design*, Research Studies Press, Letchworth, U.K., 1987.

[127] C.E. Garcia, M. Morari: Internal model control. A unifying review and some new results, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1982, 21 (2), 308-323.

[128] P.J. Gawthrop, H. Demircioglu, I.I. Siller-Alcala: Multivariable continuous-time generalised predictive control: a state-space approach to linear and non-linear systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1998, 145 (3), 241-250.

[129] P.J. Gawthrop, R.W. Jones, D.G. Sbarbaro: Emulator-based control and internal model control: complementary approaches to robust control design, *Automatica*, 1996, 32 (8), 1223-1227.

[130] Y. Genin, P. Van Dooren, T. Kailath, J. Delosme, M. Morf: On $\Sigma-$lossless transfer functions and related questions. *Linear Algebra Appl.*, 1983, 50, 251-275.

[131] R. Gessing: About some properties of discrete-time transfer functions for small sampling periods, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993,3, 1699-1702.

[132] R. Gessing: Whether the delta operator models are really better for small sampling periods, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-We-M21 .

[133] M. Gevers, G. Li: *Parametrizations in control, estimation and filtering problems*, Springer Verlag, London, 1993.

[134] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Residual bounds for discrete-time Lyapunov equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (7), 1244-1249.

[135] A.R. Ghavimi, A.J. Laub: Backward error, sensitivity and refinement of computed solutions of algebraic Riccati equations, *Numer. Algebra Appl.*, 1995, 2 (1), 29-49.

[136] K.C. Goh, M.G. Safonov: The extended $j\omega-$axis eigenstructure of a Hamiltonian matrix pencil, *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 1897-1902.

[137] G.H. Golub, V. Klema, G.W. Stewart: Rank degeneracy and least squares problems, *Stanford Univ. Tech. Report*, 1976, STAN-CS-76-559, Computer Sci. Depart., Stanford, CA.

[138] G.H. Golub, S. Nash, C.F. Van Loan: A Hessenberg-Schur method for the problem $AX + XB = C$, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1974, AC-24 (6), 909-913.

[139] G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 1996.

[140] R.M. Goodall, B.J. Donoghue: Very high sample rate digital filters using the δ operator realisation, *IEE Proc., Circuit Device Syst.*, 1993, 140 (3), 199-206.

[141] G.C. Goodwin, R. Lozano Leal, D.Q. Mayne, R.H. Middleton: Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control, *Automatica*, 1986, 22 (2), 199-207.

[142] G.C. Goodwin, R.H. Middleton, H.V. Poor: High-speed digital signal processing and control, *Proc. IEEE*, 1992, 80 (2), 240-259.

[143] G.C. Goodwin, M. Salgado: Frequency domain sensitivity functions for continuous time systems under sampled data control, *Automatica*, 1994, 30 (8), 1263-1270.

[144] G.C. Goodwin, M.M Seron: Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1997, AC-42 (9), 1240-1251.

[145] G.C. Goodwin, A.R. Woodyatt, R.H. Middleton, J. Shim: Fundamental limitations due to $j\omega-$axis zeros in SISO systems, *Automatica*, 1999, 35 (5), 857-863.

[146] R. Gorez, V. Wertz, K.Y. Zhu: On a generalised predictive control algorithm, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (5), 369-377.

[147] H. Górecki: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*, WNT, Warszawa, 1971.

[148] H. Górecki: *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.

[149] A. Graham: *Kronecker products and matrix calculus with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1981.

[150] J. F. Grcar: Optimal sensitivity analysis of linear least squares, *Lawrence Berkeley National Laboratory Techn. Report*, 2002, LBNL-52434.

[151] M. Green: $\mathcal{H}_\infty$ controller synthesis by $J-$lossless coprime factorisation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (3), 522-547.

[152] M. Green, K. Glover, D.J.N. Limebeer, J.C. Doyle: A spectral factorization approach to $\mathcal{H}_\infty$control, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (6), 1350-1371.

[153] M. Green, D.J.N. Limebeer: *Linear robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[154] M.J. Grimble: *Robust industrial control*, Prentice Hall International, New York, London, 1994.

[155] M.J. Grimble: Generalised predictive control: an introduction to the advantages and limitations, *Int. Journ. Systems Science*, 1992, 23 (1), 85-98.

[156] M. Gu: Backward perturbation bounds for linear least squares problems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 20 (2), 363-372.

[157] D.W. Gu, M.C. Tsai, S.D. O'Young, I. Postlethwaite: State-space formulae for discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ optimization, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (5), 1683-1723.

[158] T. Gudmundsson, C. Kenney, A.J. Laub: Scaling of the discrete-time algebraic Riccati equation to enhance stability of the Schur solution method, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (4), 513-518.

[159] C.H. Guo, A.J. Laub: On a Newton-like method for solving algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2000, 21 (2), 694-698.

[160] T. Hagiwara: Analytic study of the intrinsic zeros of sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1996, AC-41 (2), 261-263.

[161] T. Hagiwara, T. Yuasa, M. Araki: Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds, *Int. Journ. Control*, 1993, 58 (6), 1325-1346.

[162] M.E. Halpern: Modified pole-assignment controller for plant models with exact or near pole-zero cancellation, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (3), 189-195.

[163] S.J. Hammarling: Numerical solution of the stable, nonnegative definite Lyapunov equation, *IMA Journ. Numer. Anal.* 1982, 2, 303-323.

[164] P.C. Hansen, P.Y. Yalamov: Computing symmetric rank-revealing decompositions via triangular factorization, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2002, 23 (2), 443-458.

[165] S. Hara, H. Katori, R. Kondo: The relationship between real poles and real zeros in SISO sampled data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 632-635.

[166] S. Hara, R. Kondo, H. Katori: Properties of zeros in digital control systems with computational time delay, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (2), 493-511.

[167] S. Hara, T. Sugie: Inner-outer factorization for strictly proper functions with $j\omega-$axis zeros, *Systems Control Letters*, 1991, 16 (2), 179-185.

[168] S. Hara, T. Sugie, R. Kondo: $\mathcal{H}_\infty$ control problem with $j\omega-$axis zeros, *Automatica*, 1992, 28 (1), 55-70.

[169] B. Hassibi, A.H. Sayed, T. Kailath: *Indefinite-quadratic estimation and control. A unified approach to $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ theories*, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[170] J.W. Helton, O. Merino: *Classical control using $\mathcal{H}_\infty$ methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

[171] H.V. Henderson, S.S. Searle: The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review, *Linear and Multilinear Algebra*, 1981, 9, 271-288.

[172] M.A. Hersh: The zeros and poles of delta operator systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (3), 557-575.

[173] G.A. Hewer, C.S. Kenney: The sensitivity of the stable Lyapunov equation, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1988, 26 (2), 321-344.

[174] N.J. Higham: Computing error bounds for regression problems, *Contemporary Math.*, 1990, 112, 195-210.

[175] N.J. Higham: Perturbation theory and backward error for $AX - XB = C$, *BIT*, 1993, 33 (1), 124-136.

[176] N.J. Higham: A survey of componentwise perturbation theory in numerical linear algebra, Proc. Symposia in Applied Math., American Math. Soc., 1994, 48, 49-77.

[177] N.J. Higham: *Accuracy and stability of numerical algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[178] N.J. Higham: Notes on accuracy and stability of algorithms in numerical numerical linear algebra, *Numer. Anal. Report*, 1998, 333, The Univ. of Manchester.

[179] D.J. Higham, N.J. Higham: Backward error and condition of structured linear systems, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1992, 13 (1), 162-175.

[180] N.J. Higham, M. Konstantinov, V. Mehrmann, P. Petkov: The sensitivity of computational control problems, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 28-43.

[181] R.D. Hocken, S.V. Salehi, J.E. Marshall: Time-delay mismatch and the performance of predictor control schemes, *Int. Journ. Control*, 1983, 38 (2), 433-447.

[182] A.S. Hodel: Recent applications of the Lyapunov equation in control theory, *w* R. Beauvens, P. de Groen (Eds.): *Iterative methods in linear algebra*, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[183] R.A. Horn, C.R. Johnson: *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1991.

[184] M. Hou, A.C. Pugh, G.E. Hayton: Generalized transfer functions and input-output equivalence, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (5), 1163-1178.

[185] Y.S. Hung: $\mathcal{H}_\infty$ optimal control. Part 1. Model matching, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (4), 1291-1330.

[186] Y.S. Hung, D. Chu: A simple and unified approach for analyzing discrete-time algebraic Riccati equation and spectral factorisation related to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem, *Technical Report*, 1995, University of Hong Kong.

[187] Y.S. Hung, D. Chu: (J, J')−lossless factorisation for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (3), 517-533.

[188] Y.S. Hung, D. Chu: Relationships between discrete-time and continuous-time algebraic Riccati inequalities, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 270, 287-313.

[189] Y.S. Hung, D. Chu: On extended (J, J')–lossless factorisation, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 271, 117-138.

[190] P. A. Iglesias, K. Glover: State-space approach to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 1991, 54 (5), 1031-1073.

[191] V. Ionescu, C. Oarã, M. Weiss: General matrix pencil techniques for the solution of algebraic Riccati equations: a unified approach, *IEEE Trans.Automatic Control*, 1997, AC-42 (8), 1085-1097.

[192] P.A. Ioannou, J. Sun: *Robust adaptive control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996.

[193] V. Ionescu, M. Weiss: On computing the stabilizing solution of the discrete-time Riccati equation, *Linear Algebra Appl.*, 1992, 174, 229-238.

[194] V. Ionescu, M. Weiss: Two-Riccati formulae for the discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem, Int. Journ. Control, 1993, 57 (1), 141-195.

[195] R. Isermann: *Digital control systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[196] R. Isermann: *Digital control systems. Vol. 1: fundamentals, deterministic control*, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[197] M. Ishitobi: Conditions for stable zeros of sampled systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, AC-37 (10), 1558-1561.

[198] M. Ishitobi: Stable zeros of sampled low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1485-1498.

[199] M. Ishitobi: Criteria for stability of zeros of sampled systems, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1994, 141(6), 396-402.

[200] M. Ishitobi: Stable zeros of a discrete systems obtained by sampling a continuous-time plant with a time delay, *Int. Journ. Control*, 1994, 59 (4), 1053-1062.

[201] A.H. Jazwinski: *Stochastic processes and filtering theory*, Academic Press, New York, 1970.

[202] J. Ježek: Polynomial equations, conjugacy and symmetry, *w* K.J. Hunt (Ed.): *Polynomial methods in optimal control and filtering*, Peter Peregrinus Ltd, London, 1993.

[203] J.C. Johnson, C.L. Phillips: An algorithm for the computation of the integral of the state transition matrix, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1971, AC-16 (2), 204-205.

[204] P.T. Kabamba: Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 772-783.

[205] T. Kaczorek: *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Waraszawa, 1996.

[206] T. Kailath: *Linear systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[207] T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi: *Linear estimation*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 2000.

[208] B. Kågström, P. Poromaa: LAPACK-style algorithms and software for solving the generalized Sylvester equation and estimating the separation between regular matrix pairs, *Report UMINF*, 1993, 93.23, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.

[209] B. Kågström, P. Poromaa: Computing eigenspaces with specified eigenvalues of a regular matrix pair (A, B) and condition estimation: Theory, algorithms and software, *Report UMINF*, 1994, 94.04, Institute of Information processing, University of Umeå, Umeå, Sweden.

[210] B. Kågström, L. Westin: Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (7), 745-751.

[211] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib: *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

[212] N. Karcanias, M. Mitrouli: A matrix pencil based numerical method for the computation of GCD of polynomials, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, AC-39 (5), 977-981.

[213] R. Karlson, B. Waldén: Estimation of optimal backward perturbation bounds for the linear least squares, *BIT*, 1997, 37 (4), 862-869.

[214] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[215] J. Kautsky, N.K. Nichols, P. Van Dooren: Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. Journ. Control*, 1985, 41 (5), 1129-1155.

[216] C. Kenney, G. Hewer: The sensitivity of the algebraic and differential Riccati equations, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1990, 28 (1), 50-69.

[217] C. Kenney, A.J. Laub: Condition estimates for matrix functions, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1989, 10 (1), 191-209.

[218] C. Kenney, A.J. Laub, M. Wette: A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers, *Systems Control Letters*, 1989, 12 (2), 241-250.

[219] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick: *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa, 1992.

[220] H. Kimura: Conjugation, interpolation and model matching in $\mathcal{H}_\infty$, *Int. Journ. Control*, 1989, 49 (1), 269-307.

[221] H. Kimura: Generalized chain-scattering approach to $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *w* S.P. Bhattcharyya, L.H. Keel (Eds.): *Control of uncertain dynamic systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, 21-38.

[222] H. Kimura: $(J, J')-$lossless factorisation using conjugations of zero and pole extractions, *w* S. Hosoe (Ed.): *Robust control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[223] H. Kimura: $(J, J')-$lossless factorization based on conjugation, *Systems Control Letters*, 1992, 19 (1) 95-109.

[224] H. Kimura: Chain scattering representation, $J-$lossless factorization and $\mathcal{H}_\infty$ control, *Journ. Math. Systems Estimation Control*, 1995, 5 (2), 203-255.

[225] H. Kimura: *Chain-scattering approach to $\mathcal{H}_\infty$ control*, Birkhaüser, Boston, Basel, 1997.

[226] H. Kimura, Y. Lu, R. Kawatani: On the structure of $\mathcal{H}_\infty$ control systems and related extensions, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 653-667.

[227] H. Kimura, F. Okunishi: Chain-scattering approach to control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 151-171.

[228] R. Kondo, S. Hara: On cancellation in $\mathcal{H}_\infty$ optimal controllers, *Systems and Control Letters*, 1989 13 (2), 205-210.

[229] W. Kongprawechnon, H. Kimura: $J-$lossless conjugation and factorization for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1996, 65 (5), 867-884.

[230] W. Kongprawechnon, H. Kimura: J-lossless factorization and $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1998, 70 (3), 423-446.

[231] M. Konstantinov, D.W. Gu, V. Mehrmann, P. Petkov: *Perturbation theory for matrix equations*, Elsevier Press, Amsterdam, 2003.

[232] B. Kouvaritakis, M. Cannon, J.A. Rossiter: Recent developments in generalized predictive control for continuous-time systems, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (2), 164-173.

[233] B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang: Stable generalises predictive control: an algorithm with guaranteed stability, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (2), 349-362.

[234] Z. Kowalczuk, P. Suchomski, A. Marcińczyk: Discrete-time and continuous-time generalised predictive controllers with anticipated filtration: tuning rules, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1996, 6 (4), 707-732.

[235] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Anticipated filtering approach to generalised predictive control, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3591-3596.

[236] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, K, 301-306.

[237] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Numerically robust computer aided Markov-equivalent CGPC design, *Proc. IFAC Symp. Comp. Aided Contr. Syst. Design*, Gent, Belgium, April 1997, 365-370.

[238] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Robust predictive control based on overparameterised delay models, *Proc. 2nd IFAC Symp. Robust Control Design*, Budapest, Hungary, 1997, 525-530.

[239] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Dyskretne uogólnione sterowanie predykcyjne z filtracją antycypacyjną, *Studia z Automatyki i Informatyki*, Poznań, 1997, 22, 41-52.

[240] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Two-degree-of-freedom stable GPC design, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 243-248.

[241] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Continuous-time generalised predictive control of delay systems, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1999, 146 (1), 65-75.

[242] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Control of delay plants via continuous-time GPC principle, *Control and Cybernetics*, 1999, 28 (2), 291-314.

[243] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Analytical design of stable continuous-time generalised predictive control, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 53-100.

[244] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Robust CGPC design via simple Youla parameterisation, *Proc. 5th European Control Conf. ECC'99*, Karlsruhe, Germany, 1999, CA-12-2.

[245] Z. Kowalczuk, P. Suchomski: Simple stable discrete-time generalised predictive control with anticipated filtration of control error, *Control and Cybernetics*, 2002, 31 (1), 17-41.

[246] E. Kreindler, A. Jameson: Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, AC-17 (1), 147-148.

[247] D. Kresner, V. Mehrmann, T. Penzl: CTLEX (DTLEX) - a collection of benchmark examples for continuous-time (discrete-time) Lyapunov equations, *SLICOT Working Note*, 1999, 6 (7), Katholieke Univ., Leuven, Belgium.

[248] V. Kučera: Stability of discrete linear feedback system, *Proc. 6th IFAC World Congress*, Boston, 1975, 44.1.

[249] V. Kučera: Diophantine equations in control - a survey, *Automatica*, 1993, 29 (6), 1361-1375.

[250] V. Kučera: A tutorial on $\mathcal{H}_2$ control theory: the continuous time case, *w* M.J. Grimble, V. Kučera: *Polynomial methods for control systems design*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[251] B.C. Kuo: *Digital control systems*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1980.

[252] H. Kushner: *Introduction to stochastic control*, Holt, Rinehart, Winston, Inc., New York, 1971.

[253] A.G. Kuznetsov, R.O. Bowyer, D.W. Clark: Estimation of multiple order models in the δ domain, *Int. Journ. Control*, 1999, 72 (7/8), 629-642.

[254] H. Kwakernaak: Robust control and $\mathcal{H}_\infty$–optimization, *Automatica*, 1993, 29 (2), 255-273.

[255] H. Kwakernaak: Symmetries in control system design, *w* A. Isidori (Ed.): *Trends in control. A European perspective*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 17-51.

[256] P. Lancaster, L. Rodman: *Algebraic Riccati equations*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[257] I.D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad: *Adaptive control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[258] A.J. Laub: A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, AC-24 (6), 913-921.

[259] A.J. Laub: Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations, *in* S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[260] A.J. Laub, R.V. Patel, P.M. Van Dooren: Numerical and computational issues in linear control and system theory, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[261] D.L. Laughlin, K.G. Jordan, M. Morari: Internal model control and process uncertainty: mapping uncertainty regions for SISO controller design, *Int. Journ. Control*, 1986, 44 (6), 1675-1698.

[262] D.L. Laughlin, D.E. Rivera, M. Morari: Smith predictor design for robust performance, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 477-504.

[263] M.B. Lauritsen: Delta-domain predictive control and identification for control, *Ph.D. Thesis (Lyngby: Technical University of Denmark, Institute of Mathematical Modelling*, 1997.

[264] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard: Delta-operator predictive control, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 884-889.

[265] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Emulator-based GPC in the delta-domain, *Technical University Denmark Techn. Report.* 1994, IMM-Rep-1994-24, Inst. Math. Modelling, Lyngby, Danmark.

[266] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Optimal prediction in the delta-domain, *Proc. 3rd European Control Conf. ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 2851-2856.

[267] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: Generalized predictive control in the delta-domain, *Proc. the American Control Conf.*, Seatle, WA, 1995, 5, 3709-3713.

[268] M.B. Lauritsen, M. Rostgaard, N.K. Poulsen: GPC using a delta-domain emulator-based approach, *Int. Journ. Control*, 1997, 68 (1), 219-232.

[269] C.L. Lawson, R.J. Hanson: *Solving least squares problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 1995.

[270] P.H. Lee, H. Kimura, Y.C. Soh: On the lossless and $J-$lossless embedding theorems in $\mathcal{H}_\infty$, *Systems and Control Letters*, 1996, 29 (1), 1-7.

[271] M.A. Lelić, M.B. Zarrop: Generalized pole-placement self-tuning controller, part I, basic algorithms, *Int. Journ. Control*, 1987, 46 (2), 547-568.

[272] F.L. Lewis: *Optimal estimation*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986.

[273] Q. Li, H.H. Fan: On properties of information matrices of delta-operator based adaptive signal processing algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1997, SP-45 (10), 2454-2467.

[274] G. Li, M. Gevers: Roundoff noise minimization using delta-operator realizations, *IEEE Trans. Signal Processing*, 1993, SP-41 (2), 629-637.

[275] G. Li, M. Gevers: Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (5), 803-807.

[276] K.Z. Liu, T. Mita: Conjugation and $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time systems, *Int. Journ. Control*, 1989, 50 (4), 1435-1460.

[277] G.P. Liu, R.J. Patton: *Eigenstructure assignment for control system design*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1998.

[278] D.P. Looze, J.S. Freudenberg: Limitations of feedback properties imposed by open-loop right half plane poles, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (6), 736-739.

[279] D.H. Luecking, L.A. Rubel: *Complex analysis, a functional analysis approach*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1984.

[280] J.M. Maciejowski: *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, Reading, MA., 1989.

[281] A.N. Malyshev, M. Sadkane: Computation of optimal backward perturbation bounds for large sparse linear least squares problems, *BIT*, 2002, 41 (4), 739-747.

[282] A.A. Marouf, S.A.K. Al-Assadi: Computer-aided discretization of continuous data control systems, *Computer Aided Design*, 1985, 17 (4), 169-178.

[283] Math Works: *Using MATLAB*, The Math Works Inc., Natick, MA, 2002.

[284] A.R. McIntosh, S.L. Shah, D.G. Fisher: Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control, *Canadian Journ Chem. Eng.*, 1991, 69, 97-110.

[285] V. Mehrmann: A step toward a unified treatment of continuous and discrete time control problems, *Linear Algebra Appl.*, 1996, 241-243, 749-779.

[286] V. Mehrmann, H. Xu: An analysis of the pole placement problem. I. The single-input case, *Electr. Trans. Numer. Anal.*, 1996, 4, 89-105.

[287] V. Mehrmann, H. Xu: Choosing poles so that the single-input pole placement problem is well-conditioned, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (3), 664-681.

[288] V. Mehrmann, H. Xu: Numerical methods in control: from pole assignment via linear quadratic to $\mathcal{H}_\infty$ control, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1999, SFB393/99-12, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[289] D. Megias, J. Serrano, C. De Prada: Uncertainty treatment in GPC: design of T polynomial, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-A-B-1.

[290] C.D. Meyer: *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[291] R.H. Middleton: Trade-offs in linear control system design, *Automatica*, 1991, 27 (2), 281-192.

[292] R.H. Middleton: Trade-offs in linear filter design, *Automatica*, 1991, 31 (10), 1367-1376.

[293] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, AC-31 (11), 1015-1021.

[294] R.H. Middleton, G.C. Goodwin: *Digital control and estimation*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.

[295] L. Mirkin: On discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ problem with a strictly proper controller, *Int. Journ. Control*, 1997, 66 (6), 747-765.

[296] C. Moler, C.F. Van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*, 1978, 20 (4), 801-836.

[297] M. Morari, E. Zafiriou: *Robust process control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[298] K.S. Narandra, A.M. Annaswamy: *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[299] C.P. Neuman: Transformations between delta and forward shift operator transfer function models, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 295-296.

[300] C.P. Neuman: Properties of the delta operator model of dynamic physical systems, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, SMC-23 (1), 296-301.

[301] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Delta-operator generalized predictive control (DGPC), *Proc. 31st Conf. Decision and Control*, Tucson, Arizona, 1992, 2224-2225.

[302] R. Neumann, D. Dumur, P. Boucher: Application of delta-operator generalised predictive control (DGPC) *Proc. 32th Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2499-2504.

[303] B.M. Ninness, G.C. Goodwin: The relationship between discrete time and continuous time linear estimation, *w* N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[304] M.T. Noda, T. Sasaki: Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations, *Journ. Comput. Appl. Math.*, 1991, 38, 335-351.

[305] J. Nowakowski, P. Suchomski: O specyfikacji dyskretnej transmitancji wzorcowej układu regulacji cyfrowej, *Pomiary, Automatyka, Kontrola*, 1990, 36 (4), 71-73.

[306] J. Nowakowski, P. Suchomski: On a method of mapping of continuous-time control SISO systems to their discrete equivalents, *Archives of Control Sciences*, 1992, 37 (3-4), 269-283.

[307] J. Nowakowski, P. Suchomski: Mapping of continuous-time control SISO systems to their equivalents with stable discrete controllers, *Int. Journ. Systems Science*, 1994, 25 (1), 193-200.

[308] W. Oettli, W. Prager: Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.*, 1964, 6, 405-409.

[309] K. Ogata: *Discrete-time control systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[310] M.L. Overton: *Numerical computing with IEEE floating point arithmetic*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

[311] S.D. O'Young, B.A. Francis: Sensitivity tradeoffs for multivariable plants, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, AC-30 (7), 625-632.

[312] S.D. O'Young, I. Postlethwaite, D.W. Gu: A treatment of $j\omega-$axis model-matching transformation zeros in the optimal $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, AC-34 (5), 551-553.

[313] A. Packard, J.C. Doyle: The complex structured singular value, *Automatica*, 1993, 29 (1) 71-109.

[314] Z.J. Palmor: Time-delay compensation - Smith predictor and its modifications, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[315] V.J. Pan: Numerical computation of a polynomial GCD and extensions, *INRIA Techn. Report*, 1996, Sophia-Antipolis, France.

[316] P. Pandey: On scaling an algebraic Riccati equation, *Proc. of the American Control Conf.*, San Francisco, CA, 1993, 1583-1587.

[317] T. Pappas, A.J. Laub, N.R. Sandell: On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, AC-25 (4), 631-641.

[318] K.M. Passino, P.J. Antsaklis: Inverse stable low-pass systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 47 (6), 1905-1913.

[319] R.V. Patel, A.J. Laub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra techniques for systems and control*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1993.

[320] R.A. Paz, J.V. Madanić: $\mathcal{H}_\infty$ control in discrete time: state feedback control and norm bounds, *Int. Journ. Control*, 1992, 55 (2), 1405-1424.

[321] J.M. Peña: On the Skeel condition number, growth factor and pivoting strategies for Gaussian elimination, *Proc. SIAM Conf. Applied Linear Algebra*, Williamsburg, VA, 2003, CP2, http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings/penaj.pdf.

[322] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M.Konstantinov: On the numerical properties of the Schur approach for solving the matrix Riccati equation, *Systems and Control Letters*, 1987, 9 (2) 197-201.

[323] P.H. Petkov, N.D. Christov, M.M.Konstantinov: *Computational methods for linear control systems*, Prentice Hall International, New York, London, 1991.

[324] P.H. Petkov, D.W. Gu, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: Condition and error estimates in the solution of Lyapunov and Riccati equations, *NICONET Report*, 2000, 1, Katholieke Univ., Leuven, Belgium.

[325] P.H. Petkov, M.M. Konstantinov, V. Mehrmann: DGRSVX and DMSRIC: Fortran 77 subroutines for solving continuous-time matrix algebraic Riccati equations with condition and accuracy estimates, *TU Chemnitz-Zwickau Techn. Report*, 1998, SFB393/98-16, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz-Zwickau, Germany.

[326] A.W. Pike, M.J. Grimble, M.A. Johnson, A.W. Ordys, S. Shakoor: Predictive control, *w* W.S. Levine (Ed.): *The control handbook*, CRC Press, IEEE Press, Boca Raton, FL, 1996.

[327] H.V. Poor: Delta-operator based signal processing: fast algorithms for rapidly sampled data, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 872-877.

[328] K. Premaratne, R. Salvi, N.R. Habib, J.P. LeGall: Delta-operator formulated discrete-time approximations of continuous-time systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, AC-39 (3), 581-585.

[329] A.C. Pugh, L. Tan: A generalized chain-scattering representation and its algebraic system properties, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, AC-45 (5), 1002-1007.

[330] K.R. Ralev, P.H. Bauer: Limit cycles elimination in delta-operator systems, *IEEE Trans. Circuits Systems, I*, 2000, CAS-47 (5), 769-772.

[331] A.C.M. Ran, R. Vreugdenhill: Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems, *Linear Algebra Appl.*, 1988, 99, 63-83.

[332] G. P. Rao, N.K. Sinha: Continuous-time models and approaches, *w* N.K. Sinha, G.P. Rao (Eds.): *Identification of continuous-time systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[333] K.S. Rattan: Digitalization of existing continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, AC-29 (3), 282-285.

[334] K.S. Rattan: Compensating for computational delay in digital equivalent of continuous control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, AC-34 (8), 895-899.

[335] J. Rice: A theory of condition, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1966, 3 (2), 287-310.

[336] J.L. Rigal, J.Gaches: On the compatibility of a given solution with the data of a linear system, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1967, 14 (3), 543-548.

[337] B.D. Robinson, D.W. Clarke: Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1991, 138 (1) 2-8.

[338] J.A. Romagnoli, M.N. Karim, O.E. Agamennoni, A. Desages: Controller design for model-plant parameter mismatch, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1988, 135 (2), 157-164.

[339] E. Ronco, T. Arsan, P.J. Gawthrop: Open-loop intermittent feedback control: Practical continuous-time GPC, *IEE Proc., Control Theory and Applic.*, 1999, 146 (5), 426-434.

[340] J.A. Rossiter, L. Chisci, A. Lombardi: Stabilizing predictive control algorithms in the presence of common factors, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Th-E-B-5.

[341] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen: A state-space approach to the emulator-based GPC design, *Systems and Control Letters*, 1996, 28, 291-301.

[342] M. Rostgaard, M.B. Lauritsen, N.K. Poulsen, O. Ravn: ML estimation using delta based state space models, *Proc. of the 1994 SYSID Conference*, Copenhagen, Denmark, 1994, 3, 655-661.

[343] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: General predictive control using the delta operator, *Proc. 32nd Conf. Decision and Control*, San Antonio, TX, 1993, 2, 1769-1774.

[344] M. Rostgaard, N.K. Poulsen, O. Ravn: A rapprochement between discrete-time operators, *Proc. 2nd European Control Conf. ECC'93*, Groningen, The Netherlands, 1993, 1, 426-431.

[345] S.M. Rump: Structured perturbations. Part I: normwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 1-30.

[346] S.M. Rump: Structured perturbations. Part II: componentwise distances, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 2004, 25 (1), 31-56.

[347] A. Saberi, B.M. Chen, P. Sannuti: *Loop Transfer Recovery: analysis and design*, Springer Verlag, London, Berlin, 1993.

[348] A. Saberi, P. Sannuti, B.M. Chen: *$\mathcal{H}_2$ optimal control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1995.

[349] A. Sage, J. Melsa: *Estimation theory with applications to communications and control*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.

[350] M.G. Safonov: Imaginary-axis zeros in multivariable $\mathcal{H}_\infty-$optimal control, *w* R.F. Curtain (Ed.): *Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*, NATO ASI Series, 34, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

[351] M. Salgado, R. Middleton, G.C. Goodwin: Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1988, 135 (1), 28-34.

[352] C. Scherer: $\mathcal{H}_\infty-$control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 123-142.

[353] C. Scherer: $\mathcal{H}_\infty-$optimization without assumption on finite or infinite zeros, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 143-166.

[354] A. Schönhage: Quasi-GCD computations, *Journ. Complexity*, 1985, 1, 118-137.

[355] Z. Schuss: *Theory and applications of stochastic differential equations*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1980.

[356] J. Sefton, K. Glover: Pole/zero cancellations in the general $\mathcal{H}_\infty$ problem with reference to a two-block design, *Systems and Control Letters*, 1990, 14 (3), 295-306.

[357] M.M. Seron, J.H. Braslavsky, G.C. Goodwin: *Fundamental limitations in filtering and control*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[358] A. Shapiro: Optimally scaled matrices, necessary and sufficient conditions, *Numer. Math.*, 1982, 39 (2), 239-245.

[359] A. Shapiro: Optimal block diagonal l_2-scaling of matrices, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1985, 22 (1), 81-94.

[360] J. Shi, M.J. Gibbard: Discrete systems' models based on simple performance specifications in the time, frequency or complex z-domains, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (2), 517-527.

[361] V. Sima, P. Petkov, S. Van Huffel: Efficient and reliable algorithms for condition estimation of Lyapunov and Riccati equations, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, MTNS-2000*, Perpignan, France, June 19-23, 2000, (CD-ROM).

[362] R.D. Skeel: Scaling for numerical stability in Gaussian elimination, *Journ. Assoc. Computing Mach.*, 1979, 26 (3), 493-526.

[363] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable feedback control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, New York, 1996.

[364] O.J.M. Smith: A controller to overcome dead time, *ISA Journ.* 1959, 6 (2), 28-33.

[365] K. Sobczyk: *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers Group, London, Dordrecht, 1991.

[366] T. Söderström: Convergence properties of the generalized least squares identification method, *Automatica*, 1974, 10 (6), 617-626.

[367] T. Söderström: Test of pole-zero cancellation in estimated models, *Automatica*, 1975, 11 (5), 537-541.

[368] T. Söderström: On zero locations for sampled stochastic systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, AC-35 (11), 1249-1253.

[369] T. Söderström, H. Fan, B. Carlson, M. Mossberg: Some approaches on how to use the delta operator when identifying continuous-time processes, *Proc. 36th Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, 890-895.

[370] T. Söderström, P. Stoica: *System identification*, Prentice Hall International, Hemel Hemstead, U.K., 1989.

[371] R. Soeterboek: *Predictive control, a unified approach*, Prentice Hall International, New York, London, 1992.

[372] T. Song: Robust control and estimation for discrete-time systems with applications to finite word length design and robust detection, *Ph.D. Thesis*, FAMU-FSU College of Engineering, The Florida State University, 1999.

[373] E. Soroka, U. Shaked: On the robustness of LQ regulators, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1984, AC-29 (7), 664-665.

[374] E. Soroka, U. Shaked: On the stability robustness of the continuous-time LQG optimal control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985 , AC-30 (10), 1039-1043.

[375] V. Sreeram, P. Agathoklis: Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1991, 138 (6), 529-534.

[376] W. Stadler: A survey of multicriteria optimization of the vector maximum problem, *Journ. Optimization Theory Appl.*, 1979, 29 (1), 1-52.

[377] G. Stein, M. Athans: The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (2), 105-114.

[378] G.W. Stewart: Perturbation theory for the singular value decomposition, *UMIACS - Techn. Report*, 1990, TR-90-124.

[379] G.W. Stewart: Updating a rank revealing ULV decomposition, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1993, 14 (2), 494-499.

[380] G.W. Stewart: Determining rank in the presence of error, *w* M.S. Moonen, G.H. Golub, B.L.R. DeMoor (Eds.): *Linear algebra for large scale and real-time applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[381] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. I: basic decompositions*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

[382] G.W. Stewart: *Matrix algorithms, vol. II: eigensystems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

[383] G.W. Stewart, J. Sun: *Matrix perturbation theory*, Academic Press, London, 1990.

[384] P. Stoica, T. Söderström: Common factor detection and estimation, *Upsala Univ. Techn. Report*, Systems Control Group, Dept. Technology, Upsala, Sweden, 1996.

[385] A. Stoorvogel: *The $\mathcal{H}_\infty$ control problem. A state space approach*, Prentice Hall, Inc., New York, 1992.

[386] A. Stoorvogel: The discrete time $\mathcal{H}_\infty$ control problem with measurement feedback, *SIAM Journ. Control Optim.*, 1992, 30 (1), 182-202.

[387] A. Stoorvogel, A. Saberi: The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality, *Linear Algebra Appl.*, 1998, 274, 317-365.

[388] A. Stoorvogel, A. Saberi, B.M. Chen: The discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem with strictly proper measurement feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, 39 (9), 1936-1939.

[389] P. Suchomski: Weighted mixed sensitivity synthesis in $\mathcal{H}_\infty$ by $J-$lossless coprime factorisation, *Proc. XVII-th National Conf. Circuit Theory and Electronic Circuits*, Polanica-Zdrój, Poland, 1994, 131-136.

[390] P. Suchomski: $J-$lossless coprime factorisation approach to weighted mixed sensitivity suboptimal synthesis in $\mathcal{H}_\infty$, *Proc. 2nd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'95*, Międzyzdroje, Poland, 1995, 1, 211-216.

[391] P. Suchomski: An approach to suboptimal $\mathcal{H}_\infty$ control via $J-$lossless coprime factorisation, *Proc. 3rd Int. Symp. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96*, Międzyzdroje, Poland, 1996, 2, 401-406.

[392] P. Suchomski: A recursive method for model order reduction of discrete-time systems via $q-$Markov covariance equivalent realisations, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 1996, 23 (1/2), 127-135.

[393] P. Suchomski: Structural properties of solutions of continuous-time and discrete-time matrix Lyapunov equations in controllable form, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1999, 146 (5), 477-483.

[394] P. Suchomski: Stability robustness bounds for LQG continuous-time control systems with unstructured uncertainties, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2000, 36 (3), 401-440.

[395] P. Suchomski: Robust PI and PID controller design in delta domain, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (5), 350-354.

[396] P. Suchomski: A $J-$lossless factorisation approach to $\mathcal{H}_\infty$ control in delta domain, *Proc. 6th European Control Conf. ECC'01*, Porto, Portugal, 2001, FR-IS01-18, 3422-3427.

[397] P. Suchomski: Numerical conditioning of delta-domain Lyapunov and Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2001, 148 (6), 497-501.

[398] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: phase advance and phase lag controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2001, 41 (3), 503-549.

[399] P. Suchomski: Conditioning of $J-$lossless factorisations for $\mathcal{H}_\infty-$control in delta domain, *Proc. 7th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2001*, Międzyzdroje, 2001, 211-216.

[400] P. Suchomski: A $J-$lossless coprime factorisation approach to $\mathcal{H}_\infty$ control in delta domain, *Automatica*, 2002, 38 (10), 1807-1814.

[401] P. Suchomski: Robust design in delta domain for SISO plants: PI and PID controllers, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2002, 42 (1), 49-69.

[402] P. Suchomski: A dual $J-$lossless factorisations for suboptimal $\mathcal{H}_\infty$ estimation in delta domain, *Proc. 15th Trien. World Congress of the IFAC*, Barcelona, Spain, 2002, T-Fr-M05-4.

[403] P. Suchomski: Numerically robust delta-domain solutions to discrete-time Lyapunov equations, *Systems and Control Letters*, 2002, 47 (4), 319-326.

[404] P. Suchomski: $J-$lossless and extended $J-$lossless factorisations approach for $\delta-$domain $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 2003, 76 (8), 794-809.

[405] P. Suchomski: Robust pole placement in delta domain for SISO plants, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 483-512.

[406] P. Suchomski: $J-$lossless factorisations for robust $\mathcal{H}_\infty-$control in delta-domain, *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2003, 43 (4), 525-555.

[407] P. Suchomski: Numerically reliable $\mathcal{H}_\infty-$synthesis of estimators based on $J-$lossless factorisations, *Proc. 13th IFAC Symp. System Identification SYSID*, Rotterdam, the Netherlands, 2003, 1072-1077.

[408] P. Suchomski: Remarks about numerical conditioning of discrete-time Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 2003, 149 (5), 449-456.

[409] P. Suchomski: Numerically robust synthesis of discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ estimators based on $J-$lossless factorisations, *Control and Cybernetics*, 2003, 32 (4), 761-802.

[410] P. Suchomski: Structural properties of discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ solutions based on $J-$lossless factorisations, artykuł zgłoszony do *Systems and Control Letters*, 2004.

[411] P. Suchomski: Robust adaptive pole placement in $\mathcal{H}_\infty$, *Proc. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*, Katholieke Univ., Leuven, Belgium, MA4.5, July 5-9, 2004, (CD-ROM).

[412] P. Suchomski: Numerically robust solutions to $\mathcal{H}_\infty$ control problems for augmented plants, artykuł zgłoszony do *Systems Analysis Modelling Simulation*, 2004.

[413] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Markov-equivalent continuous-time GPC design, *Proc. 4th European Control Conf. ECC'97*, Brussels, Belgium, July 1997, Fr-M-B-1.

[414] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Robust performance and stability of control systems - A unifying survey, *Proc. 4th Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'97*, Międzyzdroje, 1997, 1, 187-194.

[415] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: GPC tuning conditioning, *Proc. IFAC Workshop Adaptive Control and Signal Processing*, Glasgow, Scotland, 1998, 249-254.

[416] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Analytical stable CGPC design for minimum-phase systems, *Int. Journ. Control*, 2000, 73 (17), 1605-1620.

[417] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Analytical design of stable delta-domain generalized predictive control, *Int. Journ. Optimal Control Appl. and Methods*, 2002, 23, 239-273.

[418] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Pre-arrangement of solvability, complexity, stability and quality of GPC systems, *Int. Journ. Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16, 177-191.

[419] P. Suchomski, Z. Kowalczuk: Robust $\mathcal{H}_\infty$−optimal synthesis of FDI systems, *w* J. Korbicz, J.M. Kościelny, Z Kowalczuk, W. Cholewa (Eds.): *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004, 261-298.

[420] T. Sugie, S. Hara: $\mathcal{H}_\infty$−suboptimal control problem with boundary constraints, *Systems and Control Letters*, 1989, 13 (1), 93-99.

[421] J.G. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear LS problem with multiple right-hand sides, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1996, 16 (1), 1-11.

[422] J.G. Sun: Perturbation theory for algebraic Riccati equations, *SIAM Journ. Matrix Anal. Appl.*, 1998, 19 (1), 39-65.

[423] J.G. Sun: Condition numbers of algebraic Riccati equations in the Frobenius norm, *Linear Algebra Appl.*, 2002, 350, 237-261.

[424] H.K. Sung, S. Hara: Properties of sensitivity and complementary sensitivity functions in single-input single-output digital control systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (6), 2429-2439.

[425] Y. Sung, M. Kung: Lower finite word-length effect on state space digital filter by δ operator realisation, *Int. Journ. Electron.*, 1993, 75 (6), 1135-1141.

[426] Z. Świder: *Realizacje cyfrowe algorytmów sterowania i filtracji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2003.

[427] D. Tabak: Digitalization of control systems, *Computer Aided Design*, 1971, 3 (2), 13-18.

[428] M. Tahk, J.L. Speyer: Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1987, AC-32 (9), 793-801.

[429] K. Takaba, T. Katayama: Discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ algebraic Riccati equation and parametrization of $\mathcal{H}_\infty$ filters, *Int. Journ. Control*, 1996, 64 (6), 1129-1149.

[430] L. Tan, A.C. Pugh: Non-standard $\mathcal{H}_\infty$ control problem: a generalized chain-scattering representation approach, *Int. Journ. Control*, 2002, 75 (11), 775-783.

[431] A. Tesfaye, M. Tomizuka: Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, AC-40 (4), 743-747.

[432] M.C. Tsai, I. Postlethwaite: On J–lossless co-prime factorizations and $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1991, 1 (1), 47-68.

[433] M.C. Tsai, C.S. Tsai: Formulation of the $\mathcal{H}_\infty$ control problem by using chain scattering matrix description, *Proc. of the American Control Conf.*, Chicago, 1992, 1870-1871.

[434] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A chain scattering-matrix description approach to $\mathcal{H}_\infty$ control, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (9), 1416-1421.

[435] M.C. Tsai, C.S. Tsai: A transfer matrix framework approach to the synthesis of $\mathcal{H}_\infty$ controllers, *Int. Journ. Robust Nonlin. Control*, 1995, 5 (2), 155-173.

[436] M.C. Tsai, C.S. Tsai, Y.Y. Sun: On discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control: a J—-lossless coprime factorization approach, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1993, AC-38 (7), 1143-1147.

[437] H. Unbehauen, B. Göhring: Tests for determining model order in parameter estimation, *Automatica*, 1974, 10 (3), 233-244.

[438] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Constrained predictive control using a time varying Youla parameter: a state space approach, *Proc. 3rd European Control Conf., ECC'95*, Rome, Italy, 1995, 4, 3235-3240.

[439] T.J.J. Van den Boom, R.A.J. De Vries: Robust predictive control using a time varying Youla parameter, *Int. Journ. Applied Math. and Computer Science*, 1999, 9 (1), 101-128.

[440] Van der Sluis: Condition numbers and equilibration of matrices, *Numer. Math.*, 1969, 14 (1), 14-23.

[441] Van der Sluis: Condition, equilibration and pivoting in linear algebraic systems, *Numer. Math.*, 1970, 15 (1), 74-86.

[442] Van der Sluis: Stability of the solutions of linear least squares problems, *Numer. Math.*, 1975, 23 (3), 241-254.

[443] P.M. Van Dooren: The computation of Kroneckers canonical form of a singular pencil, *Linear Algebra Appl.*, 1979, 27, 103-141.

[444] P.M. Van Dooren: A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equations, *SIAM Journ. Sci. Stat. Comput.*, 1981, 2 (2), 121-135.

[445] P.M. Van Dooren: The generalized eigenstructure problem in linear system theory, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26, 1, 111-129.

[446] P.M. Van Dooren: Structured linear algebra problems in digital signal processing, *w* G.H. Golub, P.M. Van Dooren (Eds.): *Numerical linear algebra, digital signal processing and parallel algorithms*, NATO ASI Series, 70, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[447] P.M. Van Dooren: The basic developing numerical algorithms, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 18-27.

[448] S. Van Huffel, V. Sima, A. Varga, S. Hammarling, F. Delebecque: High-performance numerical software for control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 60-76.

[449] C.F. Van Loan: Computing integrals involving the matrix exponential, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1978, AC-23 (3), 395-404.

[450] A. Varga: Computation of Kronecker-like forms of a system pencil: applications, algorithms and software, *Proc. IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control System Design, CACSD96*, Dearborn, MI, 1996, 77-82.

[451] A. Varga: Numerical awareness in control, *IEEE Control Systems Magazine*, 2004, 24 (1), 14-17.

[452] M. Vidyasagar: *Control system synthesis - A Factorisation approach*, MIT Press, Cambridge, MA., 1985.

[453] M. Vidyasagar, H. Schneider, B.A. Francis: Algebraic and topological aspects of feedback stabilization, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, AC-27 (4), 880-894.

[454] B. Waldén, R. Karlson, J. Sun: Optimal backward perturbation bounds for the linear least squares problem, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1996, 2 (3), 271-286.

[455] B. Wahlberg: Limit results for sampled systems, *Int. Journ. Control*, 1988, 48 (3), 1267-1283.

[456] B. Wahlberg: The effects of rapid sampling in system identification, *Automatica*, 1990, 26 (1), 167-170.

[457] D.J. Walker: Relationship between three discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ algebraic Riccati equation solutions, *Int. Journ. Control*, 1990, 52 (4), 801-809.

[458] Z.Q. Wang, S. Skogestad: Robust control of time-delay systems using the Smith predictor, *Int. Journ. Control*, 1993, 57 (6), 1405-1420.

[459] R.C. Ward: Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate, *SIAM Journ. Numer. Anal.*, 1977, 14 (3), 600-610.

[460] G.A. Watson: An algorithm for optimal l_2 scaling of matrices, *IMA Journ. Numer. Anal.*, 1991, 11 (4), 481-492.

[461] P. Wedin: Perturbation theory for pseudo-inverses, *BIT*, 1973, 13 (2), 217-232.

[462] M. Wei; Perturbation of the least squares problem, *Linear Algebra Appl.*, 1990, 141, 177-182.

[463] A. Weinmann: *Uncertain models and robust control*, Springer Verlag, Wien, 1991.

[464] S.R. Weller: Comments on 'Zeros of discretized continuous systems expressed in the Euler operator - an asymptotic analysis', *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, AC-43 (9), 1308-1310.

[465] S.R. Weller, R.H. Middleton: On the role of sampling zeros in robust sampled-data control design, *Techn. Report Dept. Electrical and Computer Eng.*, EE9807, University of Newcastle, Australia, 1998.

[466] P.E. Wellstead, M.B. Zarrop: *Self-tuning systems*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1991.

[467] O.P. Whittle: *Optimal control*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1996.

[468] M. Wicks, R.A. DeCarlo: Computing the distance to an uncontrollable system, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, AC-36 (1), 39-49.

[469] J.H. Wilkinson: *Rounding errors in algebraic processes*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.

[470] J.H. Wilkinson: *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.

[471] D. Williamson: *Digital control and implementation, finite wordlength considerations*, Prentice Hall International, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1991.

[472] J.L. Willems, F.M. Gallier: The infinite horizon and the receding horizon LQ-problems with partial stabilization constraints, *w* S. Bittani, A.J. Laub, J.C. Willems (Eds.): *The Riccati equation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[473] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: Shift and delta operator realisations for digital controllers with finite word length considerations, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 2000, 147 (6), 664-672.

[474] J. Wu, S. Chen, G. Li, R.H. Istepanian, J. Chu: An improved closed-loop stability measures for finite-precision digital controller realizations, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2001, AC-46 (7), 1162-1166.

[475] J. Wu, R.H. Istepanian, J. Chu, J.F. Whidborne, S. Chen, J. Hu: Stability issues of finite precision controller structures using the delta operator for sampled data systems, *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, 9d-02-3, Q, 417-422.

[476] C.S. Xiao, Z.M. Feng, X.M. Shan: On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms, *IEE Proc., Control Theory and Appl.*, 1992, 139 (3), 286-290

[477] X. Xin, T. Mita: Inner-outer factorization for non-square proper functions with infinite and finite $j\omega-$axis zeros, *Int. Journ. Control*, 1998, 71 (1), 145-161.

[478] I. Yaesh, U. Shaked: A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: $\mathcal{H}_\infty$−linear control and filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, 36 (11), 1264-1271.

[479] T.W. Yoon, D.W. Clarke: Observer design in receding-horizon control, *Int. Journ. Control*, 1985, 61 (1), 171-191.

[480] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, H.A. Jabr: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part I: the single-input case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (1), 3-14.

[481] D.C. Youla, H.A. Jabr, J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers; part II: the multivariable case, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, AC-21 (2), 319-338.

[482] E. Zafiriou, M. Morari: Digital controllers for SISO systems: a review and a new algorithm, *Int. Journ. Control*, 1985, 42 (4), 855-876.

[483] G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximation inverses, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26 (2) 301-320.

[484] G. Zames, B.A. Francis: Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1983, AC-28 (5), 585-601.

[485] J. Zhang: Property analysis of GPC based coefficient mapping, *Proc. 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA, June-July 1996, C, 457-462.

[486] K. Zhou, J.C. Doyle: *Essentials of robust control*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1998.

[487] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover: *Robust and optimal control*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1996.

Sterowanie odporne polega na zapewnieniu układowi sterowania wymaganej stabilności oraz jakości w warunkach występowania niepewności w modelu sterowanego obiektu dynamicznego. Przedmiotem pracy są zagadnienia związane z syntezą liniowych algorytmów odpornego sterowania w czasie dyskretnym obiektami czasu ciągłego. Skupiono się na algorytmach wynikających z metod przestrzeni H_∞. Wskazano na znaczenie analizy uwarunkowania zadania syntezy (optymalizacji) sterowania oraz na rolę oceny numerycznych błędów proponowanych algorytmów. Omówiono sposoby polepszania uwarunkowania poprzez zastosowanie modelowania opartego na operatorze *delta*.

W pracy wykazano przydatność łańcuchowych macierzy rozproszenia modelowanego obiektu, udowodniono szereg twierdzeń odnoszących się do J-bezstratnych faktoryzacji takich macierzy, a także omówiono strukturę algorytmów sterowania optymalnych ze względu na normę H_∞.

Teoretyczne rozważania zilustrowano numerycznymi przykładami dotyczącymi zadań odpornego sterowania oraz estymacji stanu. Przykłady te obejmują między innymi: metodę rozmieszczania biegunów, sterowanie predykcyjne, a także sterowanie optymalne ze względu na kwadratowy wskaźnik jakości oraz ze względu na normę H_∞.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-94-4

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl