



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**ZARZĄDZANIE
RYZYKIEM
INWESTYCYJNYM**
wybrane zagadnienia

**Maciej Krawczak,
Antoni Miklewski,
Andrzej Jakubowski,
Piotr Konieczny**





ZARZĄDZANIE RYZYKIEM INWESTYCYJNYM
wybrane zagadnienia

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Bogdan KRAWIEC

Doc. dr hab. Leszek ZAREMBA

Publikacja finansowana przez
KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu
badawczego Nr 1 1H02D 003 14 nt. „Zarządzanie ryzykiem
cenowym banku: krótkoterminowe prognozy cen rynkowych”

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 2000

ISBN 83-85847-52-9

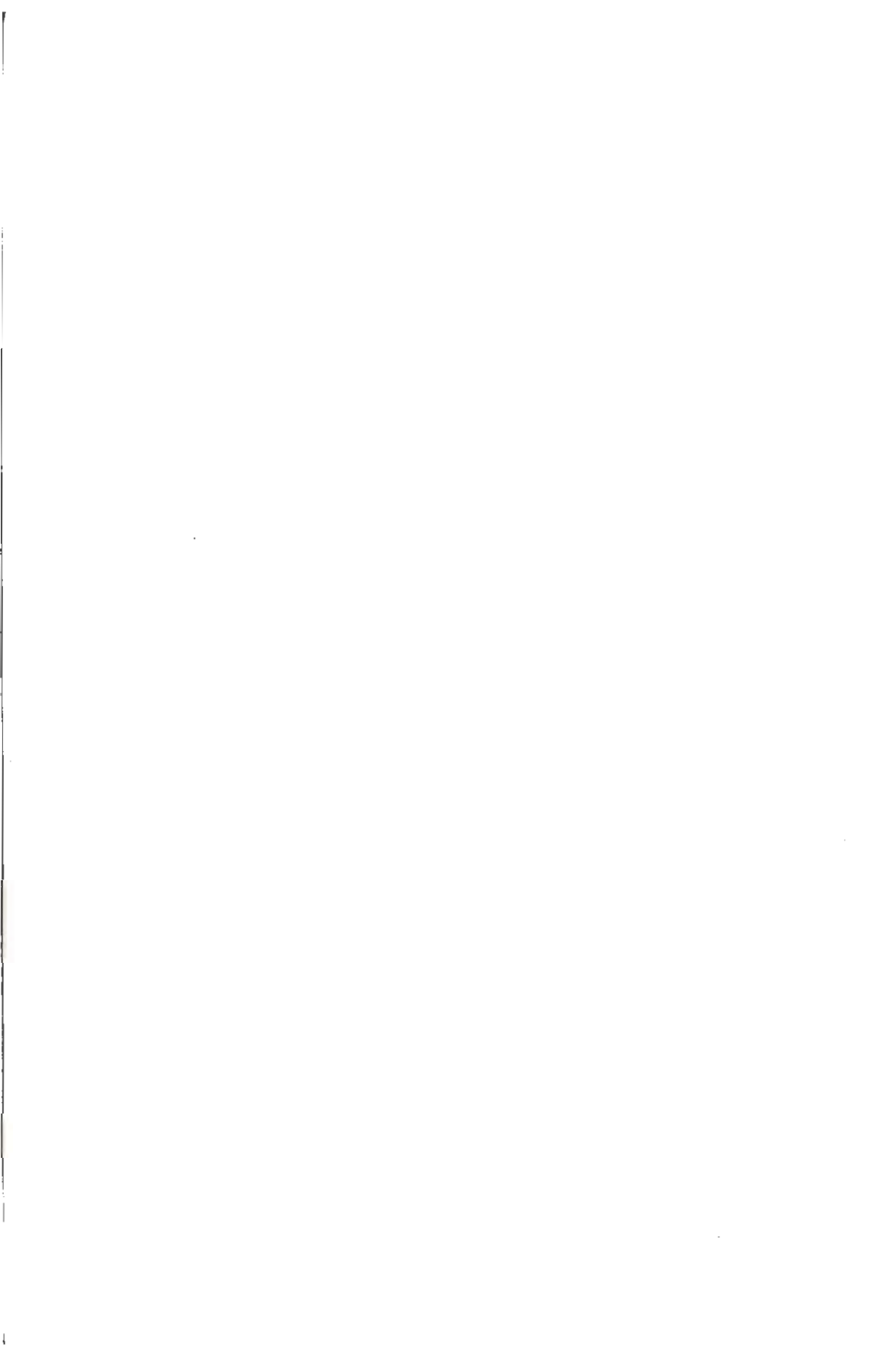
ISSN 0208-8029

Semia

Bibl. podręcznik



444 30



CZEŚĆ I.

MODELE STRUKTURY TERMINOWEJ STÓP PROCENTOWYCH

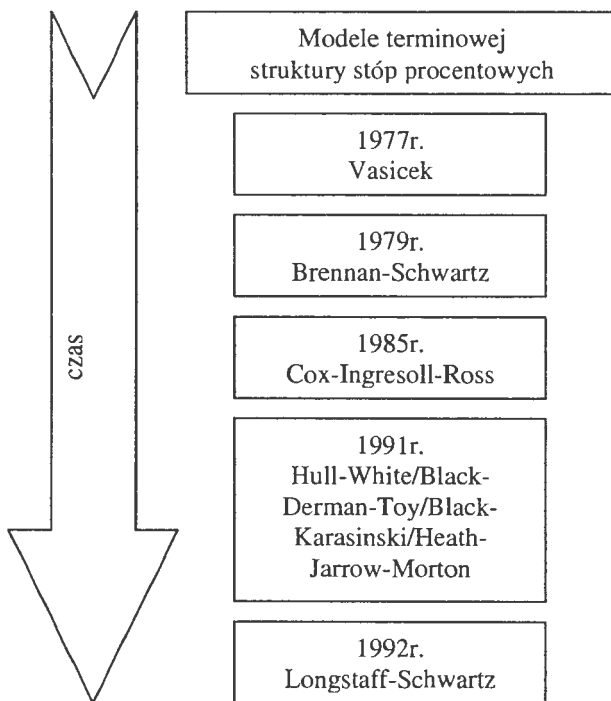
Spis treści rozdziału:

1. WSTĘP.....	17
2. PODSTAWOWE POJĘCIA WYKORZYSTYWANE W MODELACH TERMINOWEJ STRUKTURY STÓP PROCENTOWYCH.....	20
3. PRZEGLĄD MODELI TERMINOWEJ STRUKTURY STÓP PROCENTOWYCH.....	23
3.1. Modele jednoczynnikowe.....	24
Model Vasicek'a.....	24
Model CIR.....	28
Inne modele jednoczynnikowe.....	30
3.2. Modele wieloczynnikowe.....	31
Model Fong'a i Vasicek'a.....	31
Model Bennan'a i Schwartz'a.....	32
Model Richard'a.....	33
3.3. Inne dynamiczne modele terminowej struktury stóp procentowych.....	35
3.3.1 Modele równowagi ogólnej – model CIR.....	35
3.3.2 Modele arbitrażowe – model Ho-Lee.....	37
3.3.3 Modele martyngałowe.....	40
Model Heath-Jarrow-Mortona.....	42
LITERATURA.....	44

I. WSTĘP

Jednym z najważniejszych czynników zewnętrznych generujących ryzyko stopy procentowej jest jej struktura terminowa (Sławiński, 1996). Dzisiejszy stan wiedzy w zakresie problematyki terminowej struktury stóp procentowych nie ogranicza się do trzech, szeroko znanych klasycznych teorii (Abken, 1990; Sławiński, 1996), tj. teorii oczekiwań, segmentacji rynków (*preferowanych habitatów*) i naturalnych preferencji. Są one fundamentem, na którym zbudowano liczne nowe propozycje, wykorzystujące m.in. teorię wyceny opcji, założenia o równowadze rynku finansowego oraz stochastyczne modele procesów dyfuzji.

Diagram 1 przedstawia najważniejsze wydarzenia tworzące historię rozwoju modeli terminowej struktury stóp procentowych.



(Źródło: opracowanie własne na podstawie: C. Smithson, *Extended family*, Risk, December 1997).

W 1977 r. Oldrich Vasicek (Vasicek, 1977) zaproponował pierwszy model terminowej struktury stóp procentowych bazujący na pojęciu

arbitrażu. Model jego na podstawie przyjętego założenia dotyczącego procesu stochastycznego rządzącego kształtowaniem się krótkoterminowej stopy procentowej pozwalał na wycenę instrumentów finansowych przy założeniu braku możliwości arbitrażowych w ekonomii.

W 1979 r. Michael Brennan i Eduardo Schwartz (Brennan i Schwartz, 1980) rozszerzyli zaproponowane przez Vasicek'a podejście arbitrażowe budując model dwuczynnikowy, tj. model w którym terminowa struktura stóp procentowych opisywana jest przez dwa procesy rządzące kształtowaniem się krótko- i długoterminowej stopy procentowej. Model ten znalazł zastosowanie w modelu wyceny obligacji oraz instrumentów pochodnych opartych na obligacjach zaproponowanym w 1990r. przez John'a Hulla i Alana White'a (Hull i White, 1990).

W przeciwieństwie do modeli arbitrażowych Vasiceka i Brennan-Schwartza model zaproponowany w 1985 r. przez Johna Cox'a, Jonathan'a Ingresoll'a i Stephen'a Ross'a (Cox, Ingresoll i Ross, 1985) był modelem równowagi ogólnej, wykorzystujący wielkości makroekonomiczne do zbudowania najpierw modelu równowagi gospodarczej, a następnie wyznaczeniu terminowej struktury stóp procentowych.

Francis Longstaff i Eduardo Schwartz rozszerzyli model Cox-Ingresoll-Ross'a do modelu dwuczynnikowego w 1992 r. Model ten bazował nie tylko na kształtowaniu się krótkoterminowej stopy procentowej ale również wykorzystywał jej zmienność.

Reasumując należy zwrócić uwagę na fakt, że tradycyjny podział na modele terminowej struktury stóp procentowych oraz modele wyceny instrumentów pochodnych zaciera się. Istnieją dwie główne przyczyny stymulujące obserwowane zmiany. Pierwsza wynika z samego stosowanego aparatu matematycznego, który jest zbieżny w obydwu klasach modeli. Druga, istotniejsza, związana jest z metodologicznym podejściem do wyceny instrumentów pochodnych opartych na stopie procentowej.

Przykładem łączenia się tych dwóch klas modeli jest model terminowej struktury czasowej stóp procentowych Ho-Lee (Leippold i Wiener, 1998) będący jednocześnie modelem wyceny opcji. Model ten bazuje na stochastycznym opisie zmian w krzywej dochodowości na podstawie informacji zawartej w jej bieżącym kształcie przy założeniu braku możliwości arbitrażowych.

Innymi modelami terminowej struktury stóp procentowych będącymi jednocześnie modelami wyceny instrumentów pochodnych były modele:

- Black-Derman-Toy z 1991 r.
- Black-Kasiński z 1991r.
- Heath-Jarrow-Morton z 1992 r.
- Brace-Gątarek-Musiela z 1995 r.

Z uwagi na fakt, iż klasyczne teorie terminowej struktury stóp procentowych tj. teoria oczekiwań, segmentacji rynków (*preferowanych habitatów*) i naturalnych preferencji posiadają bogatą literaturę zrezygnowano z dokonywania ich dokładnego opisu. Natomiast podsumowanie ich głównych tez zawarto w tabeli 1.

Tabela 1 Podsumowanie tez klasycznych teorii stóp procentowych

Kryteria porównawcze	Teoria segmentacji	Teoria oczekiwań	Teoria naturalnych preferencji
Podstawowa determinanta kształtu terminowej struktury stóp procentowych	Popyt i podaż instrumentów finansowych na oddzielnych rynkach	Oczekiwane przyszłe krótkoterminowe stopy procentowe	Oczekiwane przyszłe krótkoterminowe stopy procentowe oraz preferencje czasowe podmiotów gospodarujących
Zmienne decyzyjne uwzględniane przez podmioty gospodarujące			
a) dochód	Nie	Tak	Tak
b) zmiany cen instrumentów finansowych	Tak	Nie	Tak
c) zmiany stopy reinwestycji	Tak	Nie	Tak
Stopień substytucyjności instrumentów finansowych	Brak substytucyjności	Doskonała substytucyjność	Ograniczona substytucyjność
Stopy terminowe w stanie równowagi	Brak formuły	Równe oczekiwanym stopom procentowym	Równe oczekiwanym stopom procentowym powiększonym o premie terminu

(Źródło: Jackowicz K. Ryzyko stopy procentowej a problemy teorii stóp procentowych. Próba nowej definicji i systematyki., Bank i Kredyt, VII/VIII 1996, s. 25).

**2. PODSTAWOWE POJĘCIA WYKORZYSTYWANE
W MODELACH TERMINOWEJ STRUKTURY STÓP PROCENTOWYCH**

Stopy procentowe oraz ich własności dynamiczne reprezentują najbardziej skomplikowaną dziedzinę nowoczesnej teorii finansów. Dlatego też rozważania nad modelami opisującymi ich strukturę czasową zostaną poprzedzone zaprezentowaniem podstawowych pojęć i definicji wykorzystywanych w dalszej części rozdziału.

Struktura czasowa stóp procentowych może być przedstawiona przy pomocy cen obligacji, stóp procentowych czy też terminowych stóp procentowych.

W dalszej części rozdziału przyjęto następujące oznaczenia:

- t : oznacza chwilę obecną,
- T : oznacza datę zapadalności obligacji,
- $\tau = T - t$: reprezentuje czas życia obligacji.

Niech $P(t, T)$ oznacza cenę w czasie t obligacji dającej prawo do uzyskania jednostki pieniężnej w czasie T , natomiast $R(t, T)$ oznacza stopę zwrotu w czasie t uzyskiwaną z obligacji z terminem zapadalności T . Stąd:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1)$$

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T). \quad (2)$$

Funkcja $R(t, t + \tau)$ przedstawia strukturę terminową stóp procentowych w czasie t zwaną inaczej krzywą dochodowości. Natychmiastowa stopa procentowa $r(t)$ odgrywa istotną rolę we wszystkich modelach opisujących krzywą dochodowości.

$$r(t) = R(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T). \quad (3)$$

Natychmiastowa stopa procentowa nazywana jest również stopą wolną od ryzyka z uwagi na fakt, iż reprezentuje gwarantowany dochód z inwestycji pomiędzy chwilami t i $t+dt$.

Innym sposobem określenia terminowej struktury stóp procentowych jest wykorzystanie pojęcia terminowej stopy procentowej. Terminowa stopa procentowa (*o ciągłej kapitalizacji*) określona jest:

$$f(t, T) = \frac{-\frac{\partial P(t, T)}{\partial T}}{P(t, T)} = \frac{-\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (4)$$

Terminowa stopa procentowa (4) reprezentuje gwarantowaną stopę zwrotu (wyznaczoną w chwili t) dla inwestycji pomiędzy czasem T i $T+dt$. Inaczej $f(t, T)$ może być określona jako krańcowa stopa zwrotu uzyskiwana z inwestycji pomiędzy czasem T i $T+dt$.

Rozwiązując równanie (4) można przedstawić cenę obligacji w funkcji terminowych stóp procentowych:

$$\log P(t, T) - \log P(t, t) = \int_t^T \frac{\partial \log P(t, s)}{\partial s} ds = \int_t^T -f(t, s) ds, \quad (5)$$

jeżeli $P(t, t) = 1$ to

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right). \quad (6)$$

Z definicji terminowej stopy procentowej otrzymujemy natychmiastową stopę procentową

$$r(t) = f(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T). \quad (7)$$

Tradycyjne modele terminowej struktury stóp procentowych bazujące na założeniu braku możliwości arbitrażowych wykorzystują natychmiastowe stopy procentowe do opisu kształtu krzywej dochodowości. Nowocześniejsze podejścia preferują stopy dyskontowe lub terminowe.

Większość modeli terminowej struktury stóp procentowych jest w dużym stopniu zbliżona do siebie. Z reguły punktem wyjścia jest przyjęcie założenia, iż stopa procentowa określona jest poprzez równanie procesu dyfuzji

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dB, \quad (8)$$

gdzie B jest procesem Wiener'a.

Zakładając, iż cena obligacji dyskontowej jest funkcją bieżącej stopy procentowej r , czasu t oraz terminu zapadalności T to na podstawie twierdzenia Ito (Izmailov i Shay, 1999) możemy zapisać

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dt. \quad (9)$$

Podstawiając za dr otrzymujemy

$$dP = P_r [\mu dt + \sigma dB] + P_t dt + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr} dt = \left(\mu P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr} \right) dt + \sigma P_r dB. \quad (10)$$

Dzieląc równanie przez dt oraz biorąc wartość oczekiwaną otrzymujemy

$$E\left(\frac{dP}{dt}\right) = \mu P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr}. \quad (11)$$

Doszliśmy do momentu, w którym modele modelem równowagi ogólnej zakładają, iż wartość wyrażenia (11) musi być równa iloczynowi ceny obligacji i bieżącej wolnej od ryzyka stopy procentowej powiększonej o premię za ponoszone ryzyko. Oznaczając tę premię przez λ otrzymamy

$$E\left(\frac{dP}{dt}\right) = r(1 + \lambda)P = \mu P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr}, \quad (12)$$

lub inaczej

$$0 = \mu P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr} - r(1 + \lambda)P. \quad (13)$$

Często stosowaną procedurą wyznaczenia premii za ryzyko jest procedura przedstawiona przez Merton'a w 1973 r.

Zakłada ona, iż relacja premii za ryzyko związanej z danym aktywem do jego odchylenia standardowego jest stała w przypadku gdy funkcja użyteczności danego inwestora jest logarymiczna

$$\frac{E[R_i] - r}{\sigma_{R_i}} = \frac{\lambda}{\sigma_{R_i}} = k, \quad (14)$$

gdzie

$E[R_i]$ oznacza wartość oczekiwaną stopy zwrotu z aktywa i ,

σ_{R_i} oznacza odchylenie standardowe stopy zwrotu z aktywa i.

Dla obligacji dyskontowej stopa zwrotu dana jest wzorem

$$E[R_i] = \frac{P + dP}{P} = 1 + \frac{dP}{P}. \quad (15)$$

Na podstawie twierdzenia Ito odchylenie standardowe stopy zwrotu wynosi

$$\sigma_{R_i} = \frac{r\sigma(r,t)}{P} P_r. \quad (16)$$

Stąd

$$\lambda = \frac{kr\sigma(r,t)}{P} P_r. \quad (17)$$

Dotychczasowe rozważania doprowadziły do możliwości zapisania podstawowego równania stanowiącego punkt wyjścia omawianych w dalszej części rozdziału modeli terminowej struktury stóp procentowych, różniących się głównie przyjętą metodą jego rozwiązania. Równanie to ma postać

$$0 = \mu P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr} - r(1 + \lambda)P \quad (18)$$

lub inaczej

$$0 = \mu P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2} P_{rr} - rP - kr\sigma(r,t)P_r. \quad (19)$$

3. PRZEGLĄD MODELI TERMINOWEJ STRUKTURY STÓP PROCENTOWYCH

Przeгляд modeli terminowej struktury stóp procentowych przeprowadzony zostanie w podziale na modele jedno- i dwuczynnikowe. Należy zaznaczyć, iż z uwagi na bardzo liczną rodzinę modeli krzywej dochodowości oraz szybkie powstawanie nowych odmian, rozważania niniejszego rozdziału skoncentrowane zostaną na omówieniu najważniejszych modeli. Przy czym kryterium selekcji oparto na stopniu aplikacyjności modelu do zastosowań praktycznych (*przedstawiono modele,*

które znajdują zastosowanie) oraz występowaniu cech charakterystycznych wyróżniających dany model na tle innych.

3.1. Modele jednoczynnikowe

W modelach jednoczynnikowych podstawową zmienną egzogeniczną jest natychmiastowa stopa procentowa. Modele te z reguły bazują na następującym autoregresywnym równaniu:

$$dr(t) = \kappa(\mu - r)dt + \sigma(\cdot)dW(t). \quad (20)$$

W modelu (20) natychmiastowa stopa procentowa dąży do długoterminowej średniej μ z prędkością określoną przez parametr κ .

W literaturze wyróżniono trzy różne specyfikacje zmienności natychmiastowej stopy procentowej

$$\sigma(\cdot) = \sigma \quad (\text{Vasicek 1977}) \quad (21)$$

$$\sigma(\cdot) = \sigma\sqrt{r} \quad (\text{CIR 1985}) \quad (22)$$

$$\sigma(\cdot) = \sigma r \quad (\text{Courtadon 1982}). \quad (23)$$

Rozwiązania analityczne znane jest tylko dla specyfikacji (21) i (22). Stąd propozycja (23) nie znalazła zastosowania w praktyce i nie zostanie omówiona na kartach niniejszego rozdziału.

Model Vasicek'a (Vasicek, 1977; Benninga i Wiener, 1998)

Obok modelu zaproponowanego przez Mertona w 1970r. model ten był pierwszym modelem bazującym na założeniu braku występowania możliwości arbitrażowych. Podstawową zaletą tego modelu jest jego prostota wynikająca z założenia, że proces $\{r(t)\}$ jest procesem gausowskim. Podstawową wadą jest możliwość generowania ujemnych stóp procentowych.

Model Vasicek'a wykorzystuje proces Ornstein'a-Uhlenbeck'a do opisu natychmiastowej stopy procentowej

$$dr = \kappa(\mu - r)dt + \sigma dB, \quad (24)$$

gdzie

μ - długoterminowej średniej,

$\kappa > 0$ - prędkość dążenia stopy procentowej do długoterminowej średniej,

σ - odchylenie standardowe

Niech $v(t, s, r)$ oznacza wartość bieżącą wyznaczoną w chwili t jednostki pieniężnej płatnej w chwili $s > t$ przy bieżącej wartości natychmiastowej stopy procentowej r . Stąd podstawowe równanie (19) przyjmuje postać

$$0 = \kappa(\mu - r)P_r + P_t + \frac{\sigma^2}{2}P_{rr} - rP - \kappa\sigma P_r. \quad (25)$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$P(r, t, T) = \text{Exp} \left[\frac{1}{\kappa} (1 - E^{-\kappa(T-t)}) (R(\infty) - r) - (T-t)R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - \text{Exp}[-\kappa(T-t)])^2 \right], \quad (26)$$

gdzie

$$R(\infty) = \mu + \frac{\sigma q}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \quad (27)$$

oznacza stopę zwrotu z obligacji zero-kuponowej z nieskończonym terminem zapadalności

$$R(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} - \frac{\log P(t, T)}{T}. \quad (28)$$

q oznacza wskaźnik Sharp'a, tj. rynkową cenę ryzyka wyznaczoną na podstawie stosunku dodatkowej stopy zwrotu oraz odchylenia standardowego.

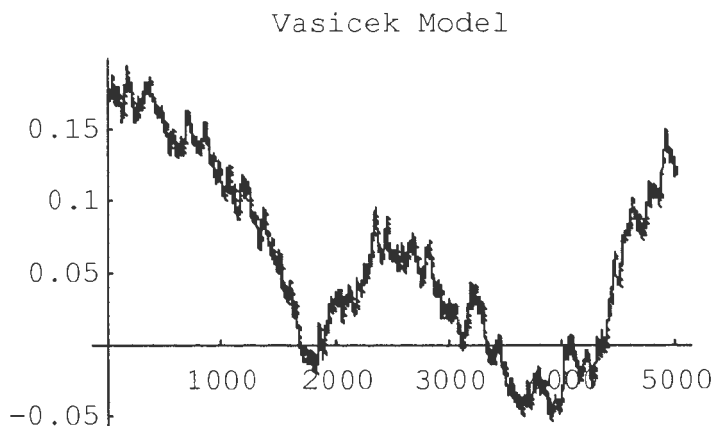
W celu ilustracji działania modelu Vasicek'a przeprowadzimy symulację generowanej przez ten model stopy procentowej. W tym celu zapiszmy podstawowy model Vasicek'a w postaci dyskretnej, przyjmując za jednostkę czasu Δt

$$\Delta r = \kappa(\mu - r)\Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t}. \quad (29)$$

Należy zaznaczyć, iż w przeciwieństwie do modeli wyceny akcji, które są multiplikatywne, modele terminowej struktury stopy procentowej są addytywne

$$r_{t+\Delta} = r_t + \Delta r = r_t + \kappa(\mu - r_t)\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t}. \quad (30)$$

Na rysunku 1 zamieszczono wynik przeprowadzonej symulacji (5000 okresów) przeprowadzonej przy następujących założeniach: $\kappa = 2\%$, $\mu = 10\%$, $\sigma = 20\%$, $\delta_t = 0.0001$ (jednostka czasu równa około 1 godziny).



Rysunek 1. Wynik symulacji stopy procentowej uzyskanej jako realizacja modelu Vasicek'a (źródło: opracowanie własne).

Jak już wspomniano na wstępie opisu modelu Vasicek'a otrzymane wyniki symulacji, zamieszczone na rysunku 1, wskazują na fakt, iż analizowany model pozwala na występowanie negatywnych stóp procentowych. Dodatkowo, proces Vasicek'a może prowadzić do otrzymania negatywnej wartości oczekiwanej stóp procentowych

$$E_t r(T) = \mu + (r(t) - \mu)e^{-\kappa(T-t)}, \quad (31)$$

$$Var_t r(T) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}). \quad (32)$$

Wyrażenie (31) przyjmuje wartości ujemne dla $r(t) < 0$.

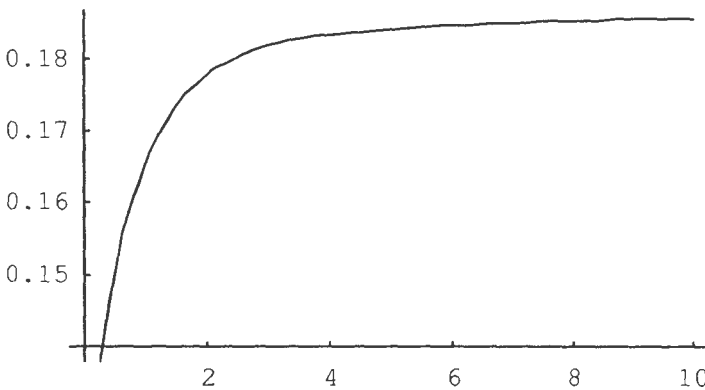
Jakkolwiek, generowanie ujemnych wartości w przypadku modelowania realnych stóp procentowych nie budzi zastrzeżeń natury merytorycznej to możliwość otrzymania ujemnych stóp nominalnych jest nie do zaakceptowania.

Model Vasicek'a będąc modelem jednoczynnikowym dokonuje opisu kształtu krzywej dochodowości przy pomocy krótkoterminowej stopy

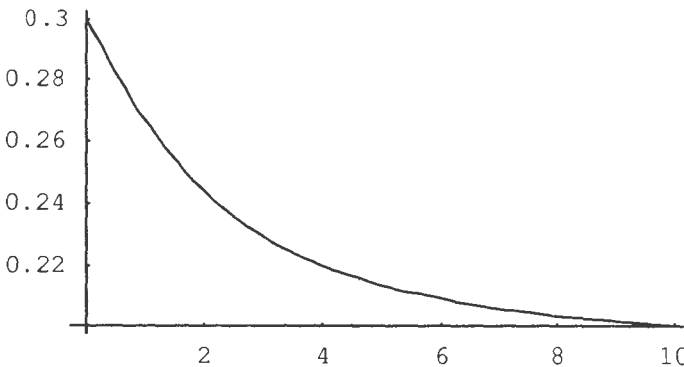
procentowej. Załóżmy, że bieżąca krótkoterminowa stopa procentowa wynosi r . Stąd cena obligacji dyskontowej dla $t = 0$ wynosi

$$P(r,0,T) = \text{Exp} \left[\frac{1}{K} (1 - E^{-\kappa T}) (R(\infty) - r) - TR(\infty) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - \text{Exp}[-\kappa T])^2 \right]. \quad (33)$$

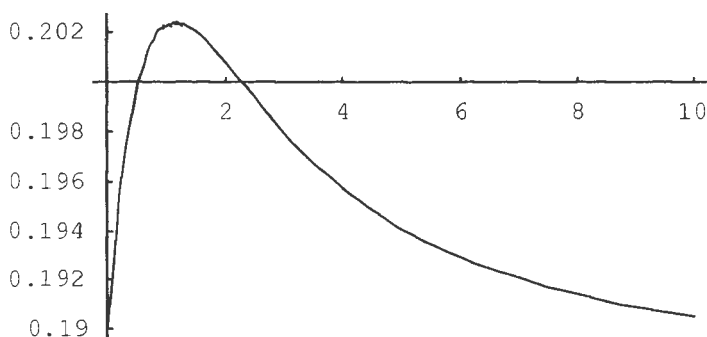
Oznacza to, że stopa procentowa r_t określona jest przez $\text{Log}[P(r,0,T)/T]$ co pozwala na zbudowanie całej krzywej dochodowości. Na rysunku 2 – 4 przedstawiono kształty krzywych dochodowości, które są możliwe do uzyskania z modelu Vasicek'a.



Rysunek 2 Kształt krzywej dochodowości zbudowanej na podstawie modelu Vasicek'a – normalny przebieg krzywej dochodowości (źródło: opracowanie własne).



Rysunek 3 Kształt krzywej dochodowości zbudowanej na podstawie modelu Vasicek'a – inwersyjny przebieg krzywej dochodowości (źródło: opracowanie własne).



Rysunek 4. Kształt krzywej dochodowości zbudowanej na podstawie modelu Vasicek'a – krzywa dochodowości z „garbem” (źródło: opracowanie własne).

Model CIR (Cox, Ingresoll i Ross, 1985)

Model CIR (Cox-Ingresoll-Ross) został opublikowany w 1985r. Model ten zakłada następującą postać procesu rządzącego stopą procentową

$$dr = \kappa(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dB, \quad (34)$$

gdzie

$\kappa > 0$ – prędkość dążenia stopy procentowej do długoterminowej średniej

μ – długoterminowa średnia,

r – bieżąca krótkoterminowa stopa procentowa

Oznaczmy przez $P(r, t, T)$ cenę obligacji w czasie $0 < t < T$. Na podstawie twierdzenia Ito otrzymujemy

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{r\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dt. \quad (35)$$

Podstawiając za dr otrzymujemy

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} (\kappa(\mu - r)dt + \sigma\sqrt{r}dB) + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{r\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dt. \quad (36)$$

Dzieląc przez dt i biorąc wartość oczekiwaną otrzymamy

$$E\left[\frac{dP}{P}\right] = \kappa(\mu - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{r\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}. \quad (37)$$

Prawa strona równania jest proporcjonalna do stopy procentowej wolnej od ryzyka oraz do skorygowanej o ryzyko elastyczności cenowej obligacji. Oznaczając przez k kowariancję zmian stopy procentowej w stosunku do portfela otrzymujemy

$$E\left[\frac{dP}{dt}\right] = rP(1 + kP_r P). \quad (38)$$

Stąd otrzymujemy podstawowe równanie modelu CIR

$$rP(1 + kP_r P) = \kappa(\mu - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{r\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}. \quad (39)$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$P(r, t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}, \quad (40)$$

gdzie

$$A(t, T) = \left[\frac{2\eta e^{(\kappa - \eta)(T-t)/2}}{(\kappa + \eta)(e^{\eta(T-t)} - 1) + 2\eta} \right]^{2\kappa\mu/\sigma^2}, \quad (41)$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\eta(T-t)} - 1)}{(\kappa + \eta)(e^{\eta(T-t)} - 1) + 2\eta}, \quad (42)$$

i

$$\eta = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \quad (43)$$

Model CIR przyjmuje logarytmiczno-normalny rozkład cen o następujących parametrach

$$\frac{dP}{P} = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dB,$$

gdzie

$$\mu(r, t) = r(1 - kB(t, T)), \quad (44)$$

$$\sigma(r, t) = -B(r, T)\sigma\sqrt{r}. \quad (45)$$

Wraz z wydłużaniem się terminu zapadalności, stopa zwrotu w modelu CIR zmierza do

$$R(r, t, \infty) = \frac{2\kappa\mu}{\kappa + k + \varphi}, \quad (46)$$

gdzie k jest rynkową ceną ryzyka, a

$$\varphi = \sqrt{(\kappa + l)^2 + 2\sigma^2}. \quad (47)$$

Inne modele jednoczynnikowe

W tym podrozdziale przedstawimy w skrócie inne modele jednoczynnikowe. W 1978r Dothan zaproponował model krótkoterminowej stopy procentowej, który nie uwzględniał czynnika determinującego jej dążenie do długoterminowej średniej (*ang. mean reversion*)

$$dr(t) = \sigma dB(t). \quad (48)$$

Model ten posiada mechanizmy zabezpieczające przed generowaniem ujemnych stóp procentowych jednakże osiąga to poprzez nałożenie ograniczenia, które w przypadku gdy stopa procentowa osiąga wartość zero zatrzymują ją na tym poziomie. Eliminuje w ten sposób jej własności stochastyczne.

Innym interesującym podejściem są modele nieliniowe. W 1989r. Geaglehole i Tenney zaproponowali aby modelować $r(t)$ jako kwadratowy proces Ornstein'a-Uhlenbeck'a, tj. $r(X) = X^2$, gdzie

$$dX(t) = (m - \kappa X)dt + \sigma dB(t). \quad (50)$$

Jeżeli przez λX oznaczymy rynkową cenę ryzyka to cena obligacji przyjmuje postać

$$P(t, T) = \exp[A(\tau) + B(\tau)X(t) + C(\tau)X^2(t)]. \quad (51)$$

Model ten posiada dwie istotne zalety. Po pierwsze, model generuje tylko dodatnie stopy procentowe. Po drugie, pozwala na uzyskanie zróżnicowanych kształtów krzywej dochodowości.

3.2. Modele wieloczynnikowe

Modele jednoczynnikowe pozwalają na uzyskanie ograniczonego zbioru kształtów krzywej dochodowości. Dodatkowo, z uwagi iż wszystkie bazują na własnościach dynamicznych krótkoterminowej stopy procentowej jako podstawowego źródła niepewności generowane przez nie stopy zwrotu są doskonale skorelowane w krótkich okresach czasu. Prowadzi to do niedostatecznej zdolności opisu rzeczywistości. Dlatego też podjęte zostały prace nad budową modeli wieloczynnikowych.

W dalszej części rozdziału przedstawione zostaną trzy przykładowe modele wieloczynnikowe.

Model Fong'a i Vasicek'a

W dotychczas rozważanych modelach zakładano, iż warunkowa wariancja $r(t)$ jest stała (Vasicek) bądź też zależna od $r(t)$ (CIR). Badania empiryczne wykazały, iż jest inaczej, tj. warunkowa wariancja jest zmienna w czasie¹.

W 1991 r. Fong i Vasicek zaproponowali model, który pozwala uwzględnić empirycznie stwierdzoną zmienność wariancji finansowych szeregów czasowych. Ich model przyjmuje następującą postać

$$dr(t) = \kappa(\mu - r)dt + \sqrt{v}dZ_1(t), \quad (52)$$

$$dv(t) = \gamma(\bar{v} - v)dt + \xi\sqrt{v}dZ_2(t), \quad (53)$$

gdzie

$$E(dZ_1dZ_2) = \rho. \quad (54)$$

Pierwsze równanie jest jednoczynnikowym modelem Vasicek'a ze stochastyczną wariancją. Natomiast v podąża za kwadratowym procesem CIR. Oznacza to, że warunkowa wariancja $V(t)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie podczas gdy $r(t)$ może przyjąć zarówno dodatnie jak i ujemne wartości. Dodatkowo zakładają oni, że rynkowa cena ryzyka dana jest odpowiednio przez $\lambda_1 v^{1/2}$ i $\lambda_2 v^{1/2}$.

Twierdzą oni, że wynikająca z ich modelu cena obligacji dana jest równaniem

$$P(t, T) = \exp[A(\tau) + B(\tau)r(t) + C(\tau)v(t)]. \quad (55)$$

Dla omawianego modelu asymptotyczna stopa procentowa jest stała. Zbudowana na podstawie modelu krzywa dochodowości jest elastyczna pod

¹ Na przykład opisywana modelem procesu z rodziny ARCH.

względem możliwych do przyjęcia kształtów, począwszy od monotonicznie rosnących, malejących skończywszy na wielomodalnych.

Model Bennan'a i Schwartz'a (Brennan i Schwartz, 1980)

W 1982 r. Brennan i Schwartz zbudowali dwu-czynnikowy model terminowej struktury stóp procentowych przyjmując za czynniki krótkoterminową stopę procentową (r) oraz stopę zwrotu z obligacji annuitetowej bez terminu zapadalności o ciągłym kuponie (*ang. yield to maturity*) (l).

Kształtowanie się $r(t)$ i $l(t)$ opisują równania

$$dr(t) = \kappa[(\mu_1 + l) - r]dt + \sigma_1 r dZ_1(t), \quad (56)$$

$$dl(t) = \mu_2(\cdot)dt + \sigma_2 l dZ_2(t) \quad (57)$$

gdzie

$$E[dZ_1 dZ_2] = \rho dt. \quad (58)$$

Wybór parametrów wskazuje, iż zarówno $r(t)$ jak i $l(t)$ przyjmują tylko wartości dodatnie.

Podstawowe równanie różnicowe tego modelu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_1^2 r^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial l} \rho \sigma_1 \sigma_2 r l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial l^2} \sigma_2^2 l^2 + \frac{\partial P}{\partial r} (\kappa \mu_1 + \kappa(l - r) - \lambda_1 \sigma_1 r) + \\ & + \frac{\partial P}{\partial l} (\mu_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot) \sigma_2 l) + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Kolejnym krokiem budowy modelu jest wyeliminowanie $\mu_2(\cdot)$ oraz $\lambda_2(\cdot)$ z równania (59). Możemy założyć, bez utraty ogólności, że kupon c został znormalizowany do 1 i cena obligacji V wynosi $V = 1^{-1}$. Stąd cena V zależy tylko od l i musi spełniać następujące równanie różnicowe

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} \sigma^2(\cdot) + \frac{\partial V}{\partial l} (\mu_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot) \sigma_2(\cdot)) + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + 1 = 0. \quad (60)$$

Z uwagi na fakt, iż znana jest funkcyjna relacja $V = V(l, t)$ można podstawić (59) do (60) i rozwiązać dla $\mu_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot) \sigma_2(\cdot)$. Dodatkowo dla analizowanej obligacji prawdą jest

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (61)$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = -l^{-2}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l^2} = 2l^{-3}. \quad (63)$$

Stąd

$$\mu_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot)\sigma_2(\cdot) = l^2 \left(\frac{\sigma_2^2}{l} + 1 - \frac{r}{l} \right) = l^2 + l\sigma_2^2 - rl, \quad (64)$$

i równanie (59) można zapisać w następującej postaci

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_1^2 r^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial l} \rho \sigma_1 \sigma_2 r l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial l^2} \sigma_2^2 l^2 + \frac{\partial P}{\partial r} (\kappa \mu_1 + \kappa(l-r) - \lambda_1 \sigma_1 r) + \\ & + \frac{\partial P}{\partial l} (l^2 + l\sigma_2^2 - rl) + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Cena obligacji $P(t, T)$ musi spełniać równanie (65) uwzględniając warunek graniczny $P(T, T) = 1$. Podstawową wadą modelu Brennan'a i Schwartz'a jest to, że nie można rozwiązać równania (65) na drodze analitycznej, a jedynie na drodze numerycznej.

Model Richard'a

W 1978 r. Richard zaproponował model w którym źródła niepewności związane z kształtowaniem się terminowej struktury stóp procentowych oparł na oczekiwanej natychmiastowej realnej stopie procentowej $R(t)$ oraz oczekiwanej natychmiastowej stopie inflacji $\pi(t)$. Zmienne te opisują następujące kwadratowe procesy

$$dR(t) = \kappa_1(\mu_1 - R)dt + \sigma_1 \sqrt{R} dZ_1(t), \quad (66)$$

$$d\pi(t) = \kappa_2(\mu_2 - \pi)dt + \sigma_2 \sqrt{\pi} dZ_2(t). \quad (67)$$

Poziom ceny oznaczmy przez $I(t)$, a jego dynamikę opisuje następujące stochastyczne równanie różnicowe

$$dI(t) = \pi I(t)dt + \sigma_1 \sqrt{\pi} I(t) dZ_3(t), \quad \sigma_1 < 1. \quad (68)$$



Zakłada się, iż ceny obligacji nie zależą od $I(t)$, a zależą tylko od $R(t)$ i $\pi(t)$.

Bazując na tych założeniach oraz twierdzeniu Ito można wykazać, iż cena obligacji spełnia następujące równanie

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu(t,T)dt + \sigma_1(t,T)dZ_1(t) + \sigma_2(t,T)dZ_2(t). \quad (69)$$

Natomiast natychmiastowa stopa procentowa $r(t)$ dana jest wzorem

$$r(t) = R(t) + \pi(t) - \sigma_1^2 \pi(t) = R(t) + \pi(t)(1 - \sigma_1^2). \quad (70)$$

Z uwagi na założenie $\sigma_1 < 1$ $r(t)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Należy zaznaczyć, iż założenia modelu są wyjątkowo restrykcyjne, gdyż nie ma ekonomicznych przesłanek aby zarówno $R(t)$ jak i $\pi(t)$ przyjmowały tylko wartości dodatnie (np. eliminuje zjawisko deflacji).

Rozwiązawszy problem sformułowania $r(t)$ możemy teraz przystąpić do wyprowadzenia równania opisującego kształtowanie się cen obligacji. Załóżmy, iż rynkowa cena ryzyka przyjmuje postać

$$\lambda_1(\cdot) = \left(\frac{\lambda_1}{\sigma_1} \right) R^{1/2}, \quad (71)$$

$$\lambda_2(\cdot) = \left(\frac{\lambda_2}{\sigma_1} \right) \pi^{1/2}. \quad (72)$$

Dodatkowo założmy, iż $\{Z_1(t)\}$ oraz $\{Z_2(t)\}$ są niezależnymi procesami Wiener'a. Na bazie tych założeń podstawowe równanie różnicowe przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial E^2} \sigma_1^2 R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi^2} \sigma_2^2 \pi + \frac{\partial P}{\partial R} (\kappa_1 (\mu_1 - R) - \lambda_1 R) + \\ & + \frac{\partial P}{\partial \pi} (\kappa_2 (\mu_2 - \pi) - \lambda_2 \pi) + \frac{\partial P}{\partial t} - (R + \pi(1 - \sigma_1^2))P = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

które musi zostać rozwiązane przy warunku brzegowym $P(T,T) = 1$. Rozwiązaniem (73) jest

$$P(t,T) = P_R(t,T)P_\pi(t,T), \quad (74)$$

gdzie $P_R(t, T)$ jest rozwiązaniem następującego równania

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_R}{\partial E^2} \sigma_1^2 R + \frac{\partial P_R}{\partial R} (\kappa_1 (\mu_1 - R) - \lambda_1 R) + \frac{\partial P_R}{\partial t} - R P_R = 0, \quad (75)$$

z warunkiem granicznym $P_R(T, T) = 1$ oraz $P_\pi(t, T)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_\pi}{\partial \pi^2} \sigma_2^2 \pi + \frac{\partial P_\pi}{\partial \pi} (\kappa_2 (\mu_2 - \pi) - \lambda_2 \pi) + \frac{\partial P_\pi}{\partial t} - \pi (1 - \sigma_1^2) P_\pi = 0 \quad (76)$$

z warunkiem granicznym $P_\pi(T, T) = 1$.

Ceny uzyskane przy pomocy modelu Richarda są produktem dwóch jednoczynnikowych modeli typu CIR z natychmiastowymi stopami procentowymi $R(t)$ i $\pi'(t) = (1 - \sigma_1^2) \pi(t)$. Stąd krzywa dochodowości jest sumą dwóch niezależnych krzywych dochodowości, z których każda może przyjmować różne kształty. Pozwala to na uzyskanie różnorodnych kształtów krzywej dochodowości przy pomocy modelu Richard'a.

3.3. Inne dynamiczne modele terminowej struktury stóp procentowych

Dotychczasowe rozważania koncentrowały się na przedstawieniu klasycznych dynamicznych modeli terminowej struktury stóp procentowych. W tej części rozdziału omówione zostaną metody alternatywne bazujące na równaniach równowagi ogólnej oraz pojęciu arbitrażu cenowego. Podejścia te różnią się od siebie przyjętymi założeniami. W modelach równowagi ogólnej ryzyko oraz natychmiastowa stopa procentowa określona jest przez funkcję użyteczności inwestora. Natomiast w modelach arbitrażowych ustalane są arbitralnie jako zmienne egzogeniczne.

3.3.1. Modele równowagi ogólnej – model CIR

Klasycznym modelem równowagi ogólnej jest model opracowany przez Cox-Ingross-Ross'a w 1985 r (*model w wersji jednoczynnikowej został opisany w podrozdziale 3.1; tutaj została przedstawiona jego wersja zbudowana na bazie założeń właściwych dla modeli równowagi ogólnej*). Model ten bazuje na następujących założeniach

1. W gospodarce dostępne jest tylko jedno dobro, które jest jednocześnie narzędziem określenia bogactwa i cen. To samo dobro jest wykorzystywane w celach konsumpcyjnych, inwestycyjnych oraz produkcyjnych.

2. W gospodarce występuje jeden reprezentatywny inwestor.
3. Rynek jest zawsze w stanie równowagi.
4. Inwestorzy posiadają logarytmiczną funkcję użyteczności postaci $U(C) = \log(C)$.
5. Istnieje tylko jedna zmienna stanu podążająca za kwadratowym procesem

$$dX(t) = \Theta(\zeta - X)dt + \sqrt{X}\xi'd\varpi(t).$$
6. Istnieje tylko jeden proces produkcyjny, którego stopa zwrotu rządzona jest przez równanie

$$d\eta(t) = \eta\alpha Xdt + \eta\sqrt{X}s'd\varpi(t).$$

Natychmiastowa stopa procentowa równa jest oczekiwanej stopie zwrotu z produkcji pomniejszonej o wariancję tej stopy zwrotu. Obydwa momenty są proporcjonalne do zmiennej stanu, a przez to do r . Stąd natychmiastową stopę procentową można opisać

$$dr(t) = kdX(t) \equiv \kappa(\mu - r)dt + \sqrt{r}\xi'd\varpi(t) \equiv \kappa(\mu - r)'dt + \sigma\sqrt{r}dZ(t), \quad (77)$$

gdzie $\{Z(t)\}$ jest jednowymiarowym procesem Wiener'a.

Z uwagi na założenie logarytmicznej funkcji użyteczności rynkowa cena ryzyka dla X upraszcza się do

$$\phi_X = G(X, t)S'(X, t)a^* = \sqrt{X}\xi's'\sqrt{X} \equiv \lambda r. \quad (78)$$

Równanie (78) przedstawia kowariancję pomiędzy stopą zwrotu uzyskaną z optymalnej inwestycji bogactwa i zmianami w zmiennej stanu X . Po dokonaniu zamiany zmiennej stanu X na r otrzymamy równanie różnicowe postaci

$$\frac{\partial F^2}{\partial r^2} \sigma^2 r + \frac{\partial F}{\partial r} (\kappa(\mu - r) - \lambda r) + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0. \quad (79)$$

Otrzymane równanie (79) jest tożsame z równaniem (39) przedstawionym w podrozdziale 3.1 wobec czego nie będziemy powtarzać jego rozwiązania.

Pomimo tego, iż otrzymane równanie jest tożsame z tym właściwym dla prostego modelu jednoczynnikowego istnieje pomiędzy nimi istotna różnica. W podejściu równowagi ogólnej stopa procentowa wyrażona jest w ujęciu realnym z uwagi na fakt, iż obligacje dają stopę zwrotu, płatną w dniu zapadalności, wyrażoną w fizycznych jednostkach dobra. Fakt ten stwarza

wiele problemów w empirycznych zastosowaniach tego modelu, gdyż prawie wszystkie obligacje posiadają nominalne stopy zwrotu.

Model CIR nie jest jedynym przedstawicielem rodziny modeli bazujących na równowadze ogólnej. Innymi modelami tej rodziny są model Sundaresan'a z 1984r. czy też model Longstaff'a z 1989r.

3.3.2. Modele arbitrażowe – model Ho-Lee

Model Ho-Lee (Ho i Lee, 1986; Leippold i Wiener, 1998) został po raz pierwszy opublikowany w 1986 r. Jest to pierwszy model, który pozwala na dopasowanie modelowej krzywej dochodowości do empirycznej w czasie początkowym t . Oznacza to, że w początkowym czasie t teoretyczne ceny zero-kuponowych obligacji równe są tym uzyskanym na podstawie modelu. Model ten stał się prekursorem serii modeli, które znalazły szerokie zastosowanie w praktyce, takich jak model Hull'a-White'a z 1990 r. czy też model Heath-Jarrow-Morton'a z 1992 r.

Podstawową cechą modelu Ho-Lee jest fakt, iż opisuje dynamiczne własności krzywej dochodowości jako całości, a nie poprzez zmiany w natychmiastowej stopy procentowej, tj. pojedynczego punktu na krzywej dochodowości.

Model Ho-Lee bazuje na następujących założeniach:

- zakłada się brak kosztów transakcyjnych i podatkowych,
- wszystkie aktywa są doskonale podzielne,
- obrót aktywami odbywa się w czasie dyskretnym,
- rynek jest kompletny, tj. dla każdego terminu T istnieje obligacja o odpowiednim terminie zapadalności.

Budowa modelu Ho-Lee składa się z trzech etapów. Po pierwsze, należy skonstruować funkcję perturbacyjną. Po drugie należy wyznaczyć neutralne z punktu widzenia ryzyka prawdopodobieństwa. Po trzecie, należy określić warunki niezależności niezbędne do zbudowania dwustopniowego drzewa. Algorytm modelu Ho-Lee został przedstawiony na rysunku 5.

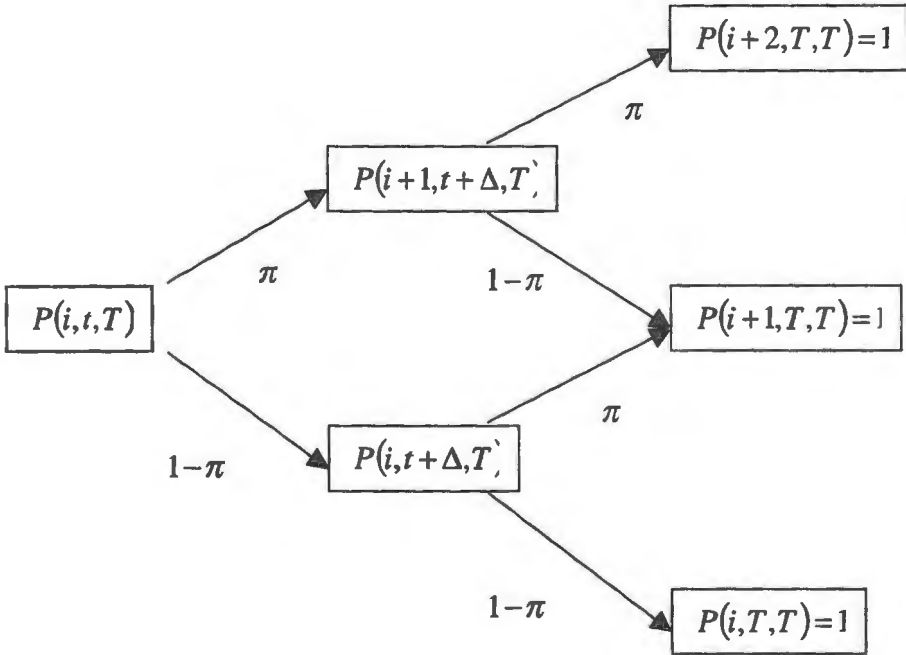
W świecie pozbawionym niepewności ceny obligacji opisuje równanie

$$P(i, t, T) = P(i+1, t, T) = \frac{P(i+1, t-\Delta, T)}{P(i+1, t-\Delta, t)}. \quad (80)$$

Wprowadźmy czynnik niepewności poprzez dodanie funkcji perturbacyjnej

$$P(i, t, T) = \frac{P(i, t-\Delta, T)}{P(i, t-\Delta, t)} h^d(t, T), \quad (81)$$

$$P(i+1, t, T) = \frac{P(i, t - \Delta, T)}{P(i, t - \Delta, t)} h^u(t, T). \quad (82)$$



Rysunek 5. Algorytm modelu Ho-Lee (źródło: opracowanie własne).

Z uwagi na fakt, iż w dniu zapadalności obligacji jej cena równa jest jej wartości nominalnej funkcje perturbacyjne spełniają warunek

$$h^u(T, T) = h^d(T, T) = 1. \quad (83)$$

W celu uzyskanie neutralnych z punktu widzenia prawdopodobieństw zastosujemy podejście wykorzystane w modelu Cox'a-Ross'a-Rubinstein'a. Wybierzemy dwie zero-kuponowe obligacje o różnych terminach zapadalności w celu skonstruowania portfela V . Następnie zainwestujemy jedną jednostkę pieniężną w zero-kuponową obligację o terminie zapadalności T i ξ jednostek pieniężnych w inną zero-kuponową obligację o terminie zapadalności $S < T$. Wartość portfela w górnym stanie $i + 1$ (górną gałąź drzewa na rysunku 5) w czasie $t < S < T$ wynosi

$$V(i+1, t, T, S) = P(i+1, t, T) + \xi P(i+1, t, S) \\ = \frac{P(i, t - \Delta, T)h^u(t, T) + \xi P(i, t - \Delta, S)h^u(t, S)}{P(i, t - \Delta, t)},$$

podczas gdy w dolnym stanie portfel ma wartość

$$V(i, t, T, S) = P(i, t, T) + \xi P(i, t, S) \\ = \frac{P(i, t - \Delta, T)h^d(t, T) + \xi P(i, t - \Delta, S)h^d(t, S)}{P(i, t - \Delta, t)}.$$

Następnie musimy wyznaczyć taką wartość ξ aby inwestycja w portfel była pozbawiona ryzyka w okresie $[t - \Delta, t]$. Stąd ξ^* musi spełniać warunek

$$\xi^* = \frac{P(i, t - \Delta, T)(h^u(t, T) - h^d(t, T))}{P(i, t - \Delta, S)(h^u(t, S) - h^d(t, S))}. \quad (84)$$

W celu wyłączenia możliwości wystąpienia arbitrażu stopa zwrotu z portfela $V^*(i, t - \Delta, T, S)$ musi być równa stopie zwrotu z obligacji zero-kuponowej, tj. $\frac{1}{P(i, t - \Delta, t)}$. Stąd otrzymujemy

$$\pi h^d(t, T) + (1 - \pi)h^u(t, T) = 1, \quad (85)$$

dla wszystkich $t, T, t \leq T$.

Stała π może być interpretowana jako ekwiwalentna miara prawdopodobieństwa, lub dokładniej neutralne ze względu na ryzyko prawdopodobieństwo.

Ostatnim etapem budowy modelu Ho-Lee jest określenie warunków niezależności niezbędnych do zbudowania dwustopniowego drzewa. Można je zbudować z następującego układu równań

$$P(i+1, t+2\Delta, T) = \frac{P(i, t, T)}{P(i, t, t+2\Delta)} \frac{h^u(t+\Delta, T)h^d(t+2\Delta, T)}{h^u(t+\Delta, t+2\Delta)}, \quad (86)$$

$$P(i+1, t+2\Delta, T) = \frac{P(i, t, T)}{P(i, t, t+2\Delta)} \frac{h^d(t+\Delta, T)h^u(t+2\Delta, T)}{h^d(t+\Delta, t+2\Delta)}. \quad (87)$$

Równania (86) i (87) oznaczają, iż dojście do końca drzewa powinno być możliwe do wykonania każdą z dróg, tj. niezależne od wybranej drogi.

Po rozwiązaniu układu równań ze względu na funkcję perturbacyjną otrzymujemy następujący warunek niezależności w modelu Ho-Lee

$$\frac{h^u(t + \Delta, T)h^d(t + 2\Delta, T)}{h^u(t + \Delta, t + 2\Delta)} = \frac{h^u(t + 2\Delta, T)h^d(t + \Delta, T)}{h^d(t + \Delta, t + 2\Delta)}. \quad (88)$$

W celu zakończenia budowy modelu Ho-Lee połączymy omawiane wcześniej trzy kroki w równanie różnicowe pierwszego stopnia, którego rozwiązaniem jest

$$h^u(t, T) = \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{T-1}}, \quad (89)$$

$$h^d(t, T) = \frac{\delta^{T-1}}{\pi + (1 - \pi)\delta^{T-1}}. \quad (90)$$

Funkcja perturbacyjna zależy od czasu do zapadalności. Rozwiązując ze względu na δ otrzymamy

$$\delta = \left(\frac{h^d(t, t + \Delta)}{h^u(t, t + \Delta)} \right)^{\frac{1}{\Delta}}, \quad 0 < \delta < 1. \quad (91)$$

Równanie (91) jest jądrem modelu Ho-Lee. Należy zaznaczyć, iż z równania (91) wynika, iż model Ho-Lee jest w stanie generować tylko monotoniczne krzywe dochodowości dla wszystkich możliwych wyjściowych jej kształtów.

3.3.3. Modele martyngałowe

Technika martyngałowa została stworzona w 1979r. przez Harrisona i Keppa oraz Harrisona i Pliska w 1981 r. Stanowi ona alternatywę do wcześniej opisywanych modeli arbitrażowych pozwalając na ogólniejszą pozbawioną arbitrażu wycenę instrumentów finansowych.

Założmy, iż inwestor dokonuje ciągłego obrotu n aktywami. Wektor $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ zawiera ceny tych aktywów i $P(t)$ spełnia następujące równanie

$$dP(t) = \mu_p(P, t)dt + \sigma_p(P, t)dW(t), \quad (92)$$

gdzie

$\mu_p(t)$ jest wektorem o wymiarach $n \times 1$,

$\sigma_p(t)$ jest macierzą parametrów dyfuzji o wymiarach $n \times m$ ($n > m$),

$\{W(t)\}$ jest m-wymiarowym procesem Wienera.

Założmy, że pierwsze aktywo stanowi zakumulowaną wartość rachunku pieniężnego, tj.

$$P_1(t) = M(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right). \quad (93)$$

Ponieważ natychmiastowa stopa procentowa dla kolejnego okresu jest znana z góry, lokalne zmiany $M(t)$ są deterministyczne i $dM(t) = rM(t)dt$. Pozostałe $n-1$ aktywów mogą przyjąć postać dowolnego instrumentu finansowego.

Strategia handlowa to dynamiczna zasada alokacji zainwestowanego bogactwa w n aktywów. Inaczej mówiąc, jest to stochastyczny proces wag portfela, który oznaczmy przez $\Theta(t)$. Strategia handlowa określana jest mianem samo-finansującej się w okresie $[t, T]$ jeżeli generuje przepływ gotówki (*wpływ/wypływ*) tylko w czasie t i T . Stąd, dla każdego czasu $t < s \leq T$ wartość portfela dana jest wzorem

$$\Theta(s)'P(s) = \Theta(t)'P(t) + \int_t^s \Theta(v) dP(v) \equiv \Theta(t)'P(t) + G(t, s). \quad (94)$$

Proces $G(t, s)$ nazywać będziemy procesem przyrostowym generowanym przez samo-finansującą się strategię handlową $\{\Theta(t)\}$.

$\Theta(t)'P(t)$ jest wstępną inwestycją (*wypływem środków pieniężnych*), natomiast $\Theta(T)'P(T)$ jest kwotą otrzymaną w czasie likwidacji portfela T . Strategia handlowa jest strategią arbitrażową jeżeli

$$\Theta(t)'P(t) < 0 \text{ i } \Theta(T)'P(T) \geq 0, \quad (95)$$

lub

$$\Theta(t)'P(t) \leq 0 \text{ i } \Theta(T)'P(T) > 0. \quad (96)$$

Ponieważ $\Theta(T)$ i $P(T)$ są zmiennymi stochastycznymi (w czasie t), to wyrażenie $\Theta(T)'P(T) \geq 0$ można interpretować w następujący sposób: dla każdego $\omega \in \Omega$, $\Theta(\omega, T)'P(\omega, T) \geq 0$, tj. przepływ pieniężny jest nieujemny dla każdego stanu natury. Stąd równanie (95) przedstawia strategię powodującą wpływ środków bez zobowiązań (*ang. free lunch*).

To czy okazje arbitrażowe występują czy też nie zależy od stochastycznego procesu $P(t)$. W celu eliminacji arbitrażu nałożymy warunki na równanie (92). Jednakże zamiast pracować bezpośrednio z równaniem (92) rozważmy proces deflacyjny $B(t) = \frac{P(t)}{Y(t)}$, gdzie $\{Y(t)\}$ jest ściśle dodatnim procesem. $Y(t)$ nazywany jest deflatorem spełniającym stochastyczne równanie różnicowe

$$dY(t) = \mu_Y(Y, t)dt + \sigma_Y(Y, t)' dW(t). \quad (97)$$

Należy zwrócić uwagę iż proces Wienera w równaniu (97) jest taki sam jak w równaniu (92). Stąd można zapisać równanie $B(t)$ w postaci

$$dB(t) = \mu_B(P, Y, t)dt + \sigma_B(P, Y, t)dW(t), \quad (98)$$

gdzie $\mu_B(\cdot)$ i $\sigma_B(\cdot)$ mogą zostać wyznaczone z parametrów dryftu i dyfuzji równań (92) i (97) przy zastosowaniu twierdzenia Ito.

Jeżeli strategia handlowa jest samo-finansująca się ze względu na $P(t)$ to również proces $\{B(t)\}$ jest samo-finansujący.

Definicja 1: *Ekwiwalentna miara martyngałowa to miara prawdopodobieństwa Q określona na zbiorze (Ω, F) która spełnia następujące warunki*

1. P (wyjściowa miara prawdopodobieństwa) i Q posiadają te same zbiory zerowe, tj. dla wszystkich $E \subseteq F$ $P(E) = 0$ wtedy i tylko wtedy jeżeli $Q(E) = 0$.
2. Pochodna Radona-Nikodyma $\rho = dQ/dP$ spełnia warunek $E(\rho^2) < \infty$.
3. Proces $\{B(t)\}$ ze względu na Q jest martyngałem z filtrem F_t , tj. $E_t^Q(B(s)) \equiv E^Q(B(s)|F_t) = B(t)$.

Jeżeli proces cenowy $\{B(t)\}$ spełnia warunki ekwiwalentnej miary martyngałowej to na podstawie powyższych warunków zapewniamy eliminację arbitrażu.

Model Heath-Jarrow-Morton (Heath, Jarrow i Morton, 1992)

Model Heath-Jarrow-Morton (HJM) powstał w 1992r. na bazie relacji pomiędzy terminowymi stopami procentowymi a cenami zero-kuponowych obligacji

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds} \quad (99)$$

Podstawowym składnikiem tego modelu jest rodzina terminowych stóp procentowych o kapitalizacji ciągłej $f(t, s)$, $0 \leq t \leq s \leq T$ zbudowana na bazie ekwiwalentnej miary martyngałowej Q postaci

$$f(t, s) = f(0, s) + \int_0^t \sigma_f(v, s) \int_v^s \sigma_f(v, u) du dv + \int_0^t \sigma_f(v, s) dW_v, \quad (100)$$

gdzie W_t , $0 \leq t \leq T$ jest wielowymiarowym procesem Wienera zdefiniowanym na filtrowanej przestrzeni prawdopodobieństwa.

W modelu HJM krótkoterminowa stopa procentowa określona jest następującym równaniem

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma_f(v, t) \int_v^t \sigma_f(v, u) du dv + \int_0^t \sigma_f(v, t) dW_v. \quad (101)$$

Z definicji krótkoterminowa stopa procentowa jest procesem gausowskim w przypadku gdy $\sigma_f(t, s)$, $0 \leq t \leq s \leq T$ jest deterministyczną funkcją t i s . Natomiast, gdy $\sigma_f(t, s) = 0$ dla wszystkich t i s to stopa procentowa jest procesem deterministycznym.

Dla celów praktycznych model HJM może zostać zapisany w następującej sekwencji czynności:

1. Należy określić zmienności $\sigma(t, T)$.
2. Należy wyznaczyć parametr dryftu $\alpha(t, T)$ na podstawie

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds.$$

3. Należy uzyskać informacje o bieżącej (rynkowej) strukturze terminowych stóp procentowych $\{f^*(0, T), T \geq 0\}$.

4. Należy przekształcić terminowe stopy procentowe do postaci

$$f(t, T) = f^*(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dV(s).$$

5. Ceny obligacji uzyskuje się z następującego równania

$$p(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t, s) ds\right\}.$$

Model HJM znalazł szerokie zastosowanie w wycenie finansowych instrumentów zarówno kasowych jak i pochodnych opartych na stopie procentowej. Zawarta w modelu myśl stanowiła punkt wyjścia budowy innych nowoczesnych modeli terminowej struktury stóp procentowych. Konstrukcja modelu HJM stanowi również dowód tezy, postawionej na wstępie rozdziału, iż w nowoczesnym świecie finansów różnice pomiędzy modelami terminowej struktury stóp procentowych oraz modelami wyceny instrumentów pochodnych zacierają się.

LITERATURA

1. Abken P.A., *Innovations in Modeling the Term Structure of Interest Rates*, „Economic Review” July/August 1990, s. 2 – 27.
2. Benninga S., Wiener Z., *Term Structure of Interest Rates*, Tel-Aviv University, Tel-Aviv 1998r.
3. Björk T., *Interest Rate Theory*, Stockholm School of Economics, Stockholm 1996.
4. Brennan M.J., Schwartz E.S., *Conditional predictions of bond prices and returns*, Journal of finance, May 1980.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A., *A theory of term structure of interest rates*, Econometrica March 1985.
6. Heath D., Jarrow R., Morton A., *Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology*, Econometrica 60, 1992, str. 77 – 105.
7. Ho T., Lee S., *Term structure and pricing interest rate contingent claims*, Journal of Finance 41, 1986, str. 1011 – 1029.
8. Hull J., White A., *Pricing interest rate derivative securities*, Financial Studies 3, 1990, str. 573 – 592.
9. Hull J., White A., *Numerical procedures for implementing term structure models I: single-factor models*, Journal of Derivatives, Fall, 1994, str. 7 – 16.
10. Izmailov A., Shay B., *Is Ito calculus oversold?*, Risk Magazine February 1999r.
11. Merton R., *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*, Econometrica 41, 1973, str. 867 – 886.
12. McCafferty S., *Aggregate Demand and interest rates: A macroeconomic approach to the term structure*, Economic Inquiry, October 1986, s. 521-533.
13. Jackowicz K. *Ryzyko stopy procentowej a problemy teorii stóp procentowych. Próba nowej definicji i systematyki*, Bank i Kredyt, VII/VIII 1996, s. 25.

14. Kellison S.G., *The Theory of Interest*, Georgia State University, 1991r.
15. Konieczny P., *Ekonometryczne prognozowanie krzywej dochodowości rynku międzybankowego w Niemczech.*, Bank i Kredyt XII 1996r.
16. Krugman P., Miller M., *Exchange rate targets and currency bands*, Centre for Economic Policy Research, Cambridge 1992.
17. Leippold M., Wiener Z., *Valuation and hedging of interest rate derivatives with the Ho-Lee Model*, Swiss Institute of Banking and Finance, Gallen, Switzerland, 1998r.
18. Sławiński A., *Krzywa dochodowości.*, Bank i Kredyt, XI/96.
19. Vasicek O.A., *An equilibrium characterization of term structure*, Journal of Financial Economics, November 1977.



Zarządzanie ryzykiem inwestycji ,

Maciej Krawczak,
Antoni Miklewski,
Andrzej Jakubowski,
Piotr Konieczny

Rozwój rynków finansowych doprowadził do sytuacji, w której jednym z najistotniejszych celów w banku staje się zarządzanie ryzykiem cenowym. Analizując ryzyko cenowe banku, działającego w warunkach polskich, wydaje się, że najważniejsze stają się krótkoterminowe prognozy cen rynkowych (np. stóp procentowych, kursów walutowych itd.). Bezpieczne zarządzanie ryzykiem cenowym oraz krótkoterminowe prognozowanie cen stają się w Polsce jednymi z najważniejszych elementów polityki banków.

W książce przedstawiono:

- modele struktury terminowej stóp procentowych,
- zagadnienia zarządzania portfelem obligacji,
- metodę value at risk,
- procesy stochastyczne w modelowaniu i prognozowaniu szeregów czasowych,
- analizę i predykcję szeregów czasowych z wykorzystaniem elementów sztucznej inteligencji i teorii informacji.

ISBN 83-85847-52-9

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl