



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**Instytut Badań Systemowych**

**ZARZĄDZANIE  
RYZYSKIEM  
INWESTYCYJNYM**  
wybrane zagadnienia

**Maciej Krawczak,  
Antoni Miklewski,  
Andrzej Jakubowski,  
Piotr Konieczny**





ZARZĄDZANIE RYZYKIEM INWESTYCYJNYM  
wybrane zagadnienia

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Bogdan KRAWIEC

Doc. dr hab. Leszek ZAREMBA

Publikacja finansowana przez  
KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu  
badawczego Nr 1 1H02D 003 14 nt. „Zarządzanie ryzykiem  
cenowym banku: krótkoterminowe prognozy cen rynkowych”

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN  
Warszawa 2000

ISBN 83-85847-52-9

ISSN 0208-8029

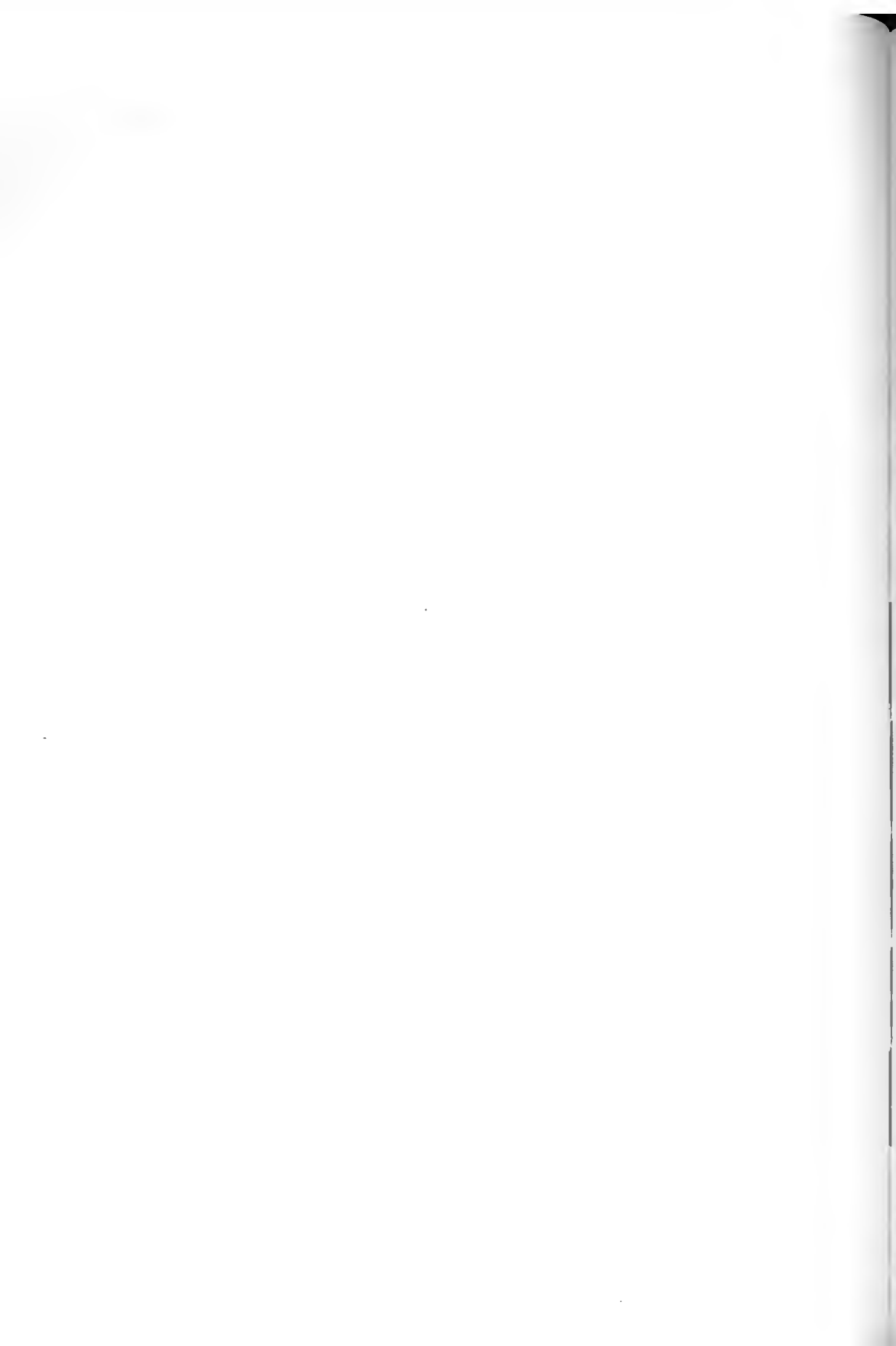
*Semia*

Bibl. podręcznik



444 30





## CZEŚĆ IV.

# ZASTOSOWANIE PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH W MODELOWANIU I PROGNOZOWANIU FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH NA PRZYKŁADZIE RYNKU POLSKIEGO

Spis treści rozdziału:

1. WSTĘP.....	151
2. PODSTAWOWE POJĘCIA TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH.....	151
3. BUDOWA FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH.....	154
4. WŁASNOŚCI FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH.....	156
5. MODEL FINANSOWYCH STÓP ZWROTU.....	162
6. EKONOMETRYCZNE MODELE ROZKŁADÓW ZMIENNYCH LOSOWYCH	163
7. LINIOWE MODELE STOCHASTYCZNE – MODELE KLASY ARIMA.....	172
8. MODELE KLASY ARCH.....	175
9. MODELE KLASY SV.....	182
10. IDENTYFIKACJA PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH.....	186
11. METODY ESTYMACJI MODELI PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH.....	189
12. ZAGADNIENIE AGREGACJI CZASOWEJ OSZACOWANYCH PARAMETRÓW.....	194
13. WYNIKI EMPIRYCZNEGO MODELOWANIA FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH.....	197
14. ZASTOSOWANIE PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH DO BUDOWY SCENARIUSZY ROZWOJOWYCH WYKORZYSTYWANYCH W KLASYFIKACJI RYZYKA STOPY PROCENTOWEJ.....	203
LITERATURA.....	207





## 1. Wstęp

Badania nad finansowymi szeregami czasowymi zapoczątkowane zostały w pracy Mandelbrot'a (1963). W pracy tej autor badał rozkłady stóp zwrotu skonstruowane na podstawie finansowych szeregów czasowych. Do najważniejszych wniosków płynących z jego pracy można zaliczyć stwierdzenie faktu iż, zaobserwowane rozkłady posiadają grube ogony oraz ich wariancja zmienia się w czasie. To właśnie te fakty, a w szczególności heteroscedastyczna wariancja, dały początek intensywnych prac badawczych nad modelowaniem finansowych szeregów czasowych.

Większość modeli teoretycznych zakłada, iż finansowe szeregi czasowe można w sposób dobry opisać modelem rozkładu normalnego. Clark (1973) wykazał nieprawdziwość tego założenia. Tłumacząc, iż z uwagi na fakt zmieniających z dnia na dzień się wielkości obrotów będących funkcją nowych informacji docierających na rynek wariancja stóp zwrotu finansowych szeregów czasowych nie jest stała w czasie.

Jednakże dopiero w 1982 r. powstał model empiryczny pozwalający na opisanie w sposób zadawalający opisanie zidentyfikowanych własności finansowych szeregów czasowych. Model ten został zbudowany przez Roberta Engle'a (1982) i określony przez niego jako model „Autoregressive Conditional Heteroscedasticity” (ARCH). Model ten stał się fundamentem całej rodziny modeli, które zostały zbudowane na jego bazie takich jak np.:

- Modele GARCH (Generalised ARCH);
- Modele IGARCH (Integrated GARCH);
- Modele EGARCH (Exponential GARCH).

Stephen Taylor (1986) zbudował inny model pozwalający na pomiar wariancji finansowych szeregów czasowych. Model ten nawiązywał do modelu opracowanego przez Clarka (1973) i został nazwany modelem stochastycznej wariancji (*Stochastic Variance SV model*). Tak samo jak model klasy ARCH model SV pozwala na uchwycenie własności finansowych szeregów czasowych. Dodatkowo przedstawia wariancję jako zmieniający się w czasie stacjonarny proces stochastyczny. Ta właśnie cech wyróżnia model SV od modeli ARCH, które opisują wariancję jako proces deterministyczny.

## 2. Podstawowe pojęcia teorii procesów stochastycznych

Podstawowym pojęciem w teorii procesów stochastycznych (Talaga, 1986) jest pojęcie funkcji losowej. Funkcja losowa  $\{X(t), t \in T\}$  jest

określona, jeżeli są dane odpowiednie dystrybuanty dowolnego zbioru wartości zmiennych losowych

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), \quad (1)$$

gdzie  $t_i \in T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dystrybuantę łączną ciągu zmiennych losowych (1) zapisujemy jako

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n]. \quad (2)$$

Funkcję losową  $\{X(t), t \in T\}$  określa się przez rodzinę rozkładów (2), które są rozkładami funkcji losowej o skończonych wymiarach.

Rodzina dystrybuant (2) musi spełniać tzw. warunki zgodności, które zapisuje się następująco

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+p}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, +\infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3)$$

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{i_1, i_2, \dots, i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \quad (4)$$

gdzie  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  jest dowolną permutacją wskaźników 1, 2, ..., n. Warunek (4) określa się jako warunek symetryczności. Oznacza on, że wartość dystrybuanty nie zależy od porządku, w jakim wymienia się zmienne losowe.

Funkcję losową  $\{X(t), t \in T\}$  dla rzeczywistych wartości  $t$ , oznaczających zmienną czasową, będziemy nazywać procesem stochastycznym. Zmienna  $t$  może być ciągła lub skokowa. Jeżeli zbiór argumentów  $t$  obejmuje tylko liczby całkowite, to mówimy, że mamy do czynienia z procesem stochastycznym z czasem dyskretnym.

Procesy stochastyczne dzielą się na stacjonarne (w węższym i szerszym tego słowa znaczeniu) i niestacjonarne. Proces stochastyczny jest stacjonarny w węższym sensie, jeżeli

$$F_{t_1+t, t_2+t, \dots, t_n+t}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5)$$

gdzie  $t_i + t \in T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , a  $t$  jest dowolną liczbą. Z (5) wynika, że wartość dystrybuanty nie zmienia się w czasie.

Stacjonarność procesu stochastycznego w szerszym sensie nie wymaga stabilności rozkładów, lecz tylko pewnych parametrów tych rozkładów.

Podstawowymi charakterystykami procesów stochastycznych są momenty zwykłe i centralne. Szczególną rolę w opisie procesu odgrywają momenty rzędu pierwszego i drugiego.

Moment zwykły pierwszego rzędu określamy następująco

$$m_t = E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t dF_t(x), \quad t = 0, \pm 1, \dots, \quad (6)$$

gdzie  $F_t(x)$  jest jednowymiarową dystrybuantą zmiennej losowej  $X_t$ . Moment pierwszego rzędu jest wartością przeciętną procesu stochastycznego dla dowolnej wartości  $t$ .

Moment zwykły drugiego rzędu procesu  $X_t$  dla danego  $t$  określa się jako

$$m_{tt} = E(X_t^2), \quad (7)$$

natomiast moment zwykły mieszany rzędu drugiego jako

$$m_{ts} = E(X_t X_s), \quad t, s = 0, \pm 1, \dots, \quad t \neq s. \quad (8)$$

Momenty centralne rzędu drugiego określone następująco

$$D^2(X_t) = E(X_t - m_t)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_t - m_t)^2 dF_t(x), \quad t = 0, \pm 1, \dots, \quad (9)$$

oraz

$$K(t, s) = E[(X_t - m_t)(X_s - m_s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_t - m_t)(x_s - m_s) dF_{ts}(x_t, x_s), \quad t, s = 0, \pm 1, \dots, \quad t \neq s \quad (10)$$

nazywamy odpowiednio wariancją i funkcją kowariancyjną procesu stochastycznego.

Dla procesu stacjonarnego wartość średnia i wariancja są stałe, niezależne od  $t$ , natomiast funkcja kowariancyjna zależy tylko od różnicy  $t - s$ .

### 3. Budowa finansowych szeregów czasowych

W badaniach ekonomicznych przez szereg czasowy rozumie się skończony zbiór par  $\{x_t, t\}$ , gdzie  $t = 1, 2, \dots, N$  i każdemu  $t$  przyporządkowana liczba  $x_t$ . Ekonomiczne szeregi czasowe, w tym również zmiennych finansowych, należy traktować jako realizacje ekonomicznych procesów stochastycznych z czasem dyskretnym.

Przed przystąpieniem do omówienia własności finansowych szeregów czasowych, a w dalszej części rozdziału ich modeli, przedstawię metodę budowy szeregów czasowych zmiennych finansowych, przy czym główny nacisk zostanie położony na budowę szeregów opisujących kształtowanie się rynkowych stóp procentowych, kursów walutowych oraz indeksów giełdowych.

Ogólnie rzecz biorąc inwestor jest w mniejszym stopniu zainteresowany nominalnym poziomem ceny (*stopy procentowej, kursu walutowego, indeksu giełdowego, itp.*) znacznie ważniejszą z jego punktu widzenia jest uzyskana z inwestycji względna (*dyskretna*) stopa zwrotu

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (11)$$

gdzie:

$p$  – oznacza szeroko rozumianą cenę.

Innym sposobem wyrażenia stopy zwrotu jest przedstawienie jej jako proces ciągły

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (12)$$

Można powiedzieć, że jeżeli stopa zwrotu (11) przedstawia jednodniową zmianę ceny to stopa (12) wyraża zwrot z inwestycji przy założeniu ciągłej kapitalizacji (*reinvestycji*).

Stopy zwrotu posiadają również lepsze własności statystyczne niż same ceny, które z reguły są istotnie skorelowane oraz niestacjonarne. Dodatkowych czynników przemawiającym na modelowanie stóp zwrotu jest ich większa w przeciwieństwie do samych cen porównywalność na różnych rynkach finansowych.

Stopa procentowa jest specyficzną formą ceny, gdyż może być przedstawiona w postaci rentowności bądź też w postaci cen zero-kuponowych instrumentów.

Założmy, iż relacja pomiędzy ceną zero-kuponowego instrumentu a obserwowaną stopą procentową jest następującej postaci:

$$P_t = \frac{1}{(1 + y_t)^N}. \quad (13)$$

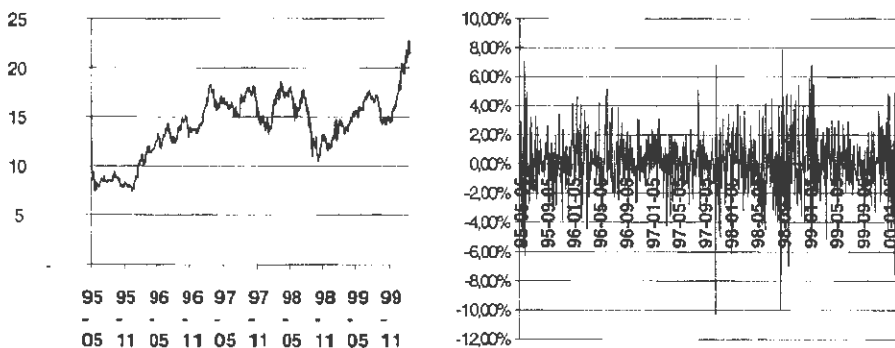
Bezpośrednią konsekwencją relacji (13) jest możliwość przedstawienia odchylenia standardowego zmiany ceny w funkcji odchylenia standardowego zmiany rentowności:

$$\sigma_{P_t} \approx N\sigma \left[ \ln \left( \frac{1 + y_t}{1 + y_{t-1}} \right) \right]. \quad (14)$$

Na rysunkach 1 – 3 zostały przedstawione trzy przykładowe szeregi czasowe zbudowane na podstawie dziennych obserwacji indeksu giełdowego (WIG), kursu dolara amerykańskiego w stosunku do złotówki (USD) oraz ceny miesięcznych pożyczek na rynku międzybankowym (WIBOR 1M) w okresie od maja 1995r. do lutego 2000.

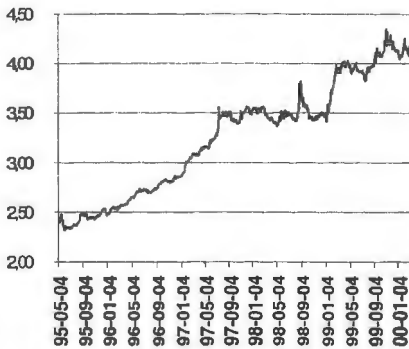
Analiza graficznej prezentacji szeregów czasowych zamieszczonych na rysunkach 1 – 3 pozwala postawić hipotezę o heteroscedastycznej wariancji procesów rządzących kształtowaniem się badanych zmiennych.

Szczegółowe omówienie własności finansowych szeregów czasowych zostało dokonane w dalszej części rozdziału.

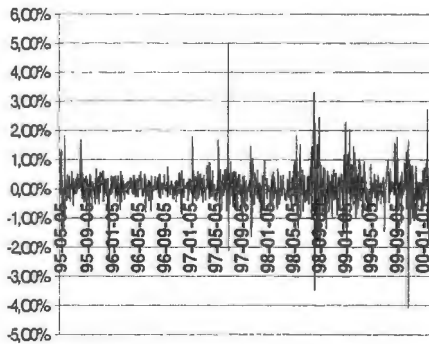


a) wartość indeksu giełdowego                      b) dzienne stopy zwrotu

Rysunek 1. Kształtowanie się indeksu giełdowego WIG w okresie maj 1995 – luty 2000 (źródło: opracowanie własne).

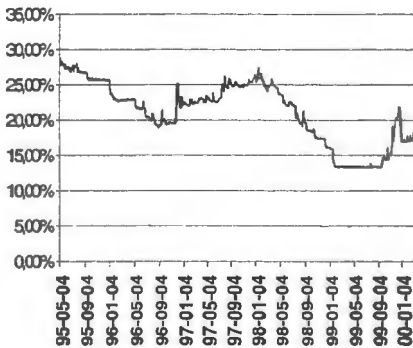


a) wartość kursu walutowego

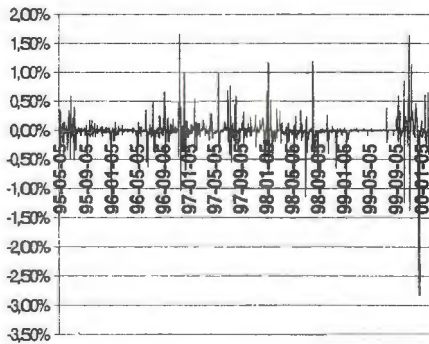


b) dzienne stopy zwrotu

Rysunek 2. Kształtowanie się kursu walutowego USD w okresie maj 1995 – luty 2000 (źródło: opracowanie własne).



a) wartość stopy procentowej



b) dzienne stopy zwrotu

Rysunek 3. Kształtowanie się stopy WIBOR 1M w okresie maj 1995 – luty 2000 (źródło: opracowanie własne).

#### 4. Własności finansowych szeregów czasowych

W tej części rozdziału zostaną omówione własności finansowych szeregów czasowych na przykładzie trzech zmiennych, tj. indeksu giełdowego WIG (WIG), kursu dolara amerykańskiego (USD) oraz jednomiesięcznej stawki WIBOR (WIBOR 1M). Zostanie przeprowadzone

porównanie stochastycznych własności tych szeregów z Gausowskim procesem białego szumu, który charakteryzuje się następującymi cechami:

- jest procesem stacjonarnym,
- charakteryzuje się brakiem autokorelacji,
- charakteryzuje się rozkładem normalnym.

W tabeli 1 przedstawiono wartości podstawowych statystyk opisowych charakteryzujących kształtowanie się analizowanych zmiennych.

Tabela 1 Podstawowe charakterystyki opisowe analizowanych zmiennych (źródło: obliczenia własne).

Szere	Liczba obserwacji	Średni	Median	Odchyleni standardo	Kurtoz	Skośność
WIG	1133	0,0757	0,1102	1,9089	2,70	- 0,25
US	1193	0,0459	0,0365	0,5722	10,76	0,30
WIBOR	1193	-	-	0,2280	32,90	- 0,87

Analiza wielkości zamieszczonych w tabeli 1 wskazuje, iż dzienne stopy zwrotu analizowanych instrumentów finansowych posiadają bardzo małe wartości średniej arytmetycznej i stosunkowo duże wartości odchylenia standardowego. Prawdopodobnie ta pozwala postawić hipotezę, iż w przypadku modelowania rozkładów stóp zwrotu w celach ich prognozowania należy skoncentrować się na ich wariancji, a nie na ich poziomie średnim.

W tabeli 2 i 3 przedstawiono zmiany odpowiednio w wartości średniej oraz odchyleniu standardowym obliczone dla każdego roku kalendarzowego.

Tabela 2 Wartości średniej arytmetycznej stóp zwrotu w poszczególnych latach (źródło: obliczenia własne).

Szereg	1995	1996	1997	1998	1999
WIG	-0,0853%	0,2600%	0,0090%	-0,0548%	0,1418%
USD	0,0160%	0,0622%	0,0814%	-0,0016%	0,0675%
WIBOR 1M	-0,0133%	-0,0115%	0,0137%	-0,0343%	0,0154%

Tabela 3 Wartości odchylenia standardowego stóp zwrotu w poszczególnych latach (źródło: obliczenia własne).

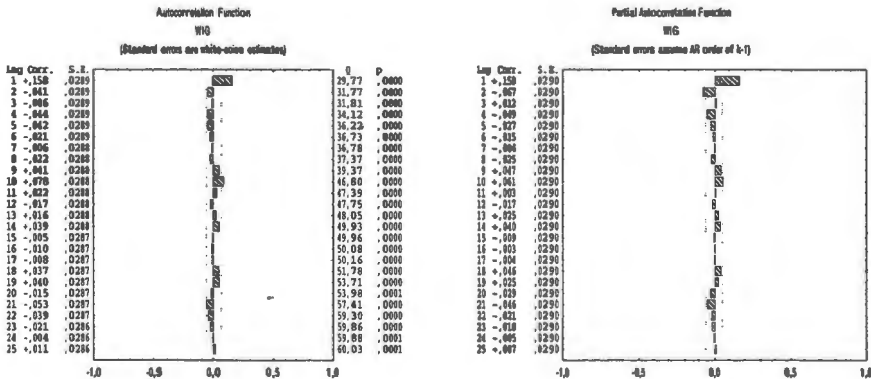
Szereg	1995	1996	1997	1998	1999
WIG	1,9272%	1,5500%	1,6520%	2,3326%	1,6919%
USD	0,4980%	0,2551%	0,5685%	0,6741%	0,6912%
WIBOR 1M	0,1438%	0,2518%	0,1648%	0,2076%	0,2528%

Proces białego szumu zakłada, że wariancja jest stała w czasie. Wyniki obliczeń zawarte w tabeli 3 wskazują, iż wszystkie trzy analizowane zmienne charakteryzują się zmienną wariancją, tj. charakteryzują się heteroscedastycznością.

W odkryciu kolejnej własności finansowych szeregów czasowych pomocna będzie analiza zamieszczona w tabeli 1 wartości miary kurtozy, tj. miary obrazującej stopień spłaszczenia rozkładu względem rozkładu normalnego, dla którego wartość kurtozy wynosi 3. Wysoka wartość tego parametru wskazuje na występowanie grubych ogonów w rozkładach analizowanych zmiennych.

Analizując wartości kurtozy analizowanych szeregów czasowych można stwierdzić, iż zarówno w przypadku kształtowania się kursu dolara (USD) jak i stopy procentowej (WIBOR 1M) mamy do czynienia z rozkładami posiadającymi znacznie grubsze ogony niż wzorcowy rozkład normalny. Jedynie rozkład stóp zwrotu obliczonych na podstawie indeksu giełdowego posiada zbliżone do normalnego ogony.

Na rysunkach 4 – 6 została przedstawiona struktura korelacyjna analizowanych szeregów czasowych (dla 50 opóźnień). Pionowe przerywane linie oznaczają 95% przedział ufności dla funkcji autokorelacyjnej przy hipotezie zerowej, że omawiane szeregi są gausowskim procesem białego szumu.

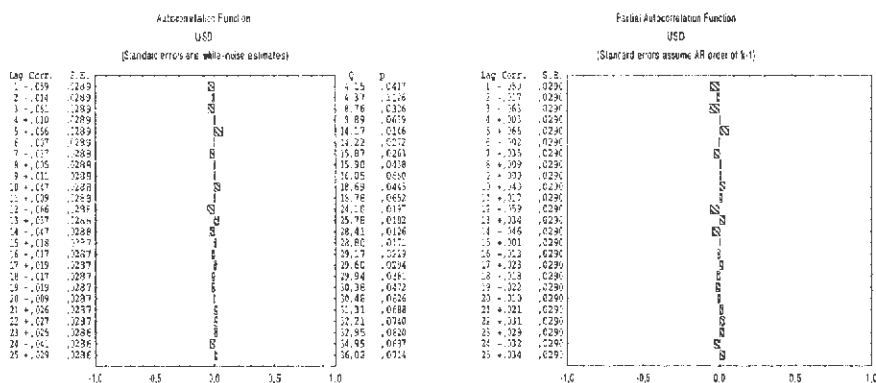


a) funkcja autokorelacji (WIG)

b) funkcja autokorelacji częściowej (WIG)

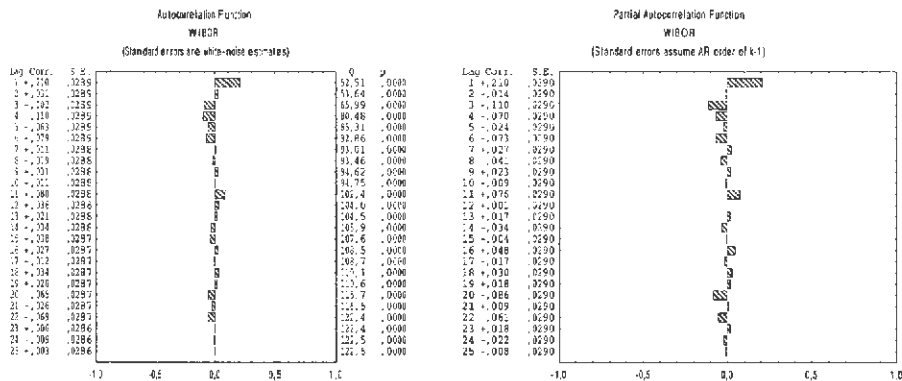
Rysunek 4 Funkcja autokorelacji oraz autokorelacji częściowej wyznaczona dla WIG (źródło: obliczenia własne).





a) funkcja autokorelacji (USD)      b) funkcja autokorelacji częściowej (USD)

Rysunek 5. Funkcja autokorelacji oraz autokorelacji częściowej wyznaczona dla US (źródło: obliczenia własne).



a) funkcja autokorelacji (WIBOR)      b) funkcja autokorelacji częściowej (WIBOR)

Rysunek 6. Funkcja autokorelacji oraz autokorelacji częściowej wyznaczona dla WIBOR (źródło: obliczenia własne).

Analizując, rysunki 4 – 6 można stwierdzić, iż żaden z omawianych szeregów czasowych nie charakteryzuje się istotną autokorelacją. Stąd można wnioskować, iż stopy zwrotu finansowych szeregów czasowych nie posiadają „pamięci” (przynajmniej liniowej). Jak wiemy proces białego

szumu charakteryzuje się brakiem autokorelacji zarówno liniowej jak i nieliniowej. Przeanalizujemy więc funkcje ACF wyznaczone dla kwadratów badanych stóp zwrotu.

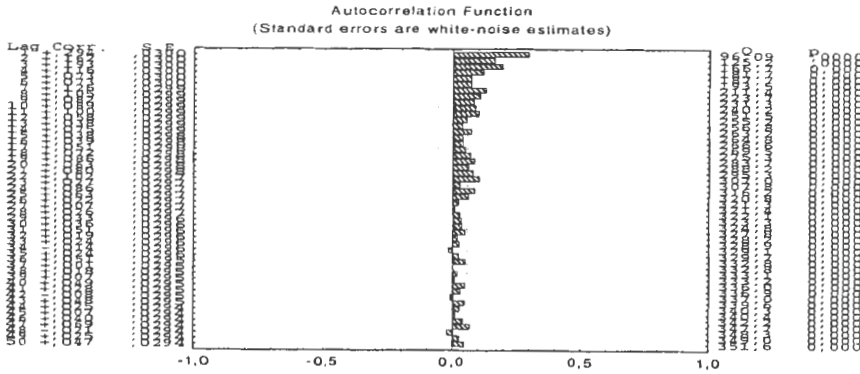
Analiza kształtu funkcji autokorelacyjnej wyznaczonej dla kwadratów stóp zwrotu (rysunek 7) wskazuje, iż wszystkie trzy analizowane szeregi są zautokorelowane, tj. nie są procesami gausowskiego białego szumu.

Podsumowując wyniki przeprowadzonych w tej części rozdziału rozważań można stwierdzić, iż finansowe szeregi czasowe charakteryzują się następującymi własnościami:

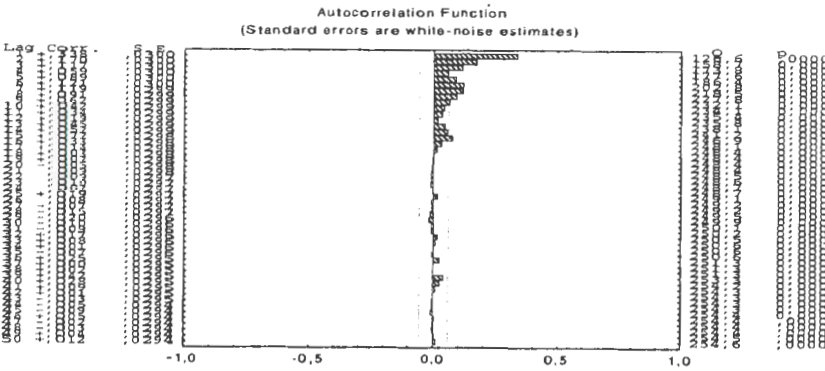
- a) rozkłady zmian cen instrumentów finansowych posiadają tendencję do długich i grubych „ogonów” (*ang. thick tail distributions*),
- b) występuje zjawisko skupiania się wariancji w wąskich pasmach czasu (*ang. clustering of variance*),
- c) występuje zjawisko dźwigni (*ang. leverage effect*), wyrażającej się w tendencji do występowania negatywnej korelacji zmian cen instrumentów finansowych ze zmianami w ich wariancji,
- d) podczas okresów zamknięcia rynków finansowych występuje zjawisko kumulacji informacji, które uzewnętrznia się w zwiększonej wariancji zmian cen w momencie otwarcia rynku; K. French i R. Roll (1986) wykazali na podstawie zmian indeksów giełdowych NYSE i AMEX z lat 1963 – 1982, że wariancja średnio jest 70 razy wyższa w pierwszych godzinach po otwarciu giełdy niż w okresach jej zamknięcia,
- e) wariancja zmian cen zwiększa się, w związku z występowaniem przewidzianych zdarzeń o charakterze ekonomicznym, politycznym, społecznym itp.

Z uwagi na te właściwości klasyczne modele procesów stochastycznych, omówione w dalszej części tego rozdziału, stanowią niewystarczające narzędzie ich modelowania. Dlatego też rozważania niniejszego rozdziału skoncentrujemy głównie na modelach umożliwiających uchwycenie zidentyfikowanych własności finansowych szeregów czasowych, tj. na klasie modeli ARCH oraz modelach stochastycznej wariancji.

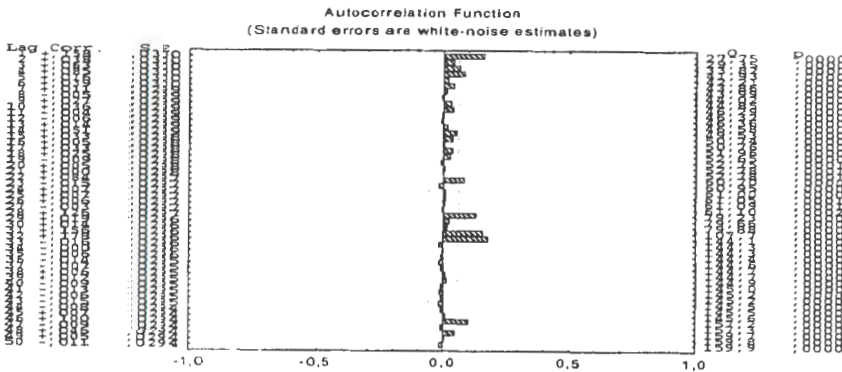
a) WIG



b) USD



c) WIBOR



Rysunek 1 Funkcja autokorelacji wyznaczona dla kwadratów stóp zwrotu (źródło: obliczenia własne).

## 5. Model finansowych stóp zwrotu

W poprzednim podrozdziale zostały przedstawione podstawowe własności finansowych szeregów czasowych. Zostało wykazane, że zarówno ich średnia jak i wariancja zmieniają się w czasie. Celem tego podrozdziału jak i następnych jest próba opisu tych zmian, przy czym punktem wyjścia będzie następujący model

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad (15)$$

gdzie:

$\mu_t$  jest deterministycznym bądź też stochastycznym procesem opisującym poziom średniej w czasie  $t$ ;

$\sigma_t \varepsilon_t$  jest deterministycznym bądź też stochastycznym procesem opisującym zmienność wokół średniej w czasie  $t$ ;

$\varepsilon_t$  jest zmienną losową o nadziei matematycznej równej zero i stacjonarnym rozkładzie;

$\sigma_t$  jest wariancją stóp zwrotu.

Przedstawiony model zakłada istnienie dwóch potencjalnych źródeł zmienności. Pierwsze związane jest z poziomem średniej natomiast drugie z wariancją.

Należy tutaj zaznaczyć, iż badania empiryczne wykazały dominującą rolę procesu wariancji nad procesem średniej w określaniu całkowitej zmienności finansowych szeregów czasowych (*por. Tabela 2 i 3*). Wobec czego w dalszej części rozdziału skoncentrujemy się na modelowaniu wariancji przy założeniu, że wartość średniej w sposób nie istotny różni się od zera bądź też szereg czasowy został skorygowany o jej wartość

$$y_t = r_t - \mu_t = \sigma_t \varepsilon_t. \quad (16)$$

Przed przystąpieniem do przedstawienia różnych stochastycznych modeli wykorzystywanych w opisie wariancji zostaną omówione podstawowe typy rozkładów zmiennych losowych, które stanowią ich bazę.

## 6. Ekonometryczne modele rozkładów zmiennych losowych<sup>1</sup>

Pierwszym rozkładem teoretycznym zmiennej losowej był typowy przedstawiciel rodziny rozkładów symetrycznych - rozkład normalny. W pierwszej połowie XIX w. uważano, że krzywa normalna jest krzywą idealną, do której powinny przybliżać się wszystkie inne rozkłady. Sytuacje, w których nie występowało to przybliżenie uważano za „dziwne” i wymagające szczególnego wyjaśnienia. Jednak już w drugiej połowie XIX w. zebrano wiele faktów świadczących o tym, że rozkład normalny nie jest rozkładem występującym częściej niż inne typy rozkładów, a nawet fakt jego występowania był zjawiskiem dość rzadko spotykanym wśród danych empirycznych. Pomimo tych odkryć rola rozkładu normalnego była nadal bardzo istotna, ponieważ posiada on szczególne znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej. Znaczenie to wiąże się z jego własnościami matematycznymi, które sprawiają, że jest on atrakcyjnym typem rozkładu ze względu na prowadzenie obliczeń. Jednakże jego teoretyczne i praktyczne znaczenie wynika głównie z faktu, że jest on rozkładem granicznym wielu innych rozkładów. Zaznaczeniu również podlega fakt, że przyjęcie założenia o normalności rozkładu jest podstawą stosowalności wielu metod statystycznych, w tym i tych wykorzystywanych w pomiarze ryzyka.

W literaturze znajdujemy kilka systemów klasyfikowania krzywych gęstości rozkładów zmiennej losowej. Do najbardziej popularnych zaliczamy system opracowany przez Pearsona. Do tego systemu należą najczęściej stosowane rozkłady teoretyczne, m. in.: normalny, beta, chi-kwadrat, gamma, wykładniczy, F-Fishera, prostokątny, t-Studenta, Pareto i odwrotnie normalny.

Dany typ rozkładu nazywamy *pearsonowskim* kiedy funkcja gęstości tego rozkładu spełnia równanie różniczkowe:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x-a)f}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \quad (17)$$

gdzie :

$$a = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} \quad (18)$$

<sup>1</sup> Szerokie omówienie pozostałych typów rozkładów znajduje się w pracy Forlicz S., *Rozkłady asymetryczne zmiennej losowej*, Prace naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1986.

$$b_0 = -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{A} \quad (19)$$

$$b_1 = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} \quad (20)$$

$$b_2 = -\frac{(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)}{A} \quad (21)$$

$$A = 10\mu_4\mu_2 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2. \quad (22)$$

W zależności od powyższych parametrów rozróżnia się siedem głównych typów rozkładów pearsonowskich. Ich cechy zawarte są w tabeli 4. W tabeli 5 natomiast przedstawiono krótką charakterystykę podstawowych rodzajów rozkładów zmiennej losowej ciągłej należących do rodziny rozkładów pearsonowskich.

Rozkład normalny, nazywany również rozkładem dzwonowym lub rozkładem Gaussa-Laplace'a, jest szeroko stosowany w statystyce. Funkcje gęstości oraz dystrybuanty tego rozkładu dane są wzorami:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}\right] \quad (23)$$

$$F(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\delta^2}} dt \quad (24)$$

Powszechność stosowania tego rozkładu tłumaczą własności, które czynią ten typ rozkładu atrakcyjnym. Do podstawowych własności rozkładu normalnego zaliczamy:

- rozkład ten jest opisany krzywą symetryczną i ma obszar zmienności od minus do plus nieskończoności,
- jeżeli znane są parametry rozkładu normalnego, tzn. wartość oczekiwana  $E(x)$  oraz odchylenie standardowe  $D(x)$ , oznacza to, że rozkład normalny jest całkowicie określony,
- maksimum funkcji gęstości rozkładu normalnego odpowiada wartości  $x=E(x)$
- punkty przegięcia krzywej rozkładu normalnego przypadają na wartości zmiennej równe  $x+D(x)$  oraz  $x-D(x)$ , co po standaryzacji zmiennej losowej  $X$  odpowiada jej poziomom  $-1$  oraz  $+1$ .

Tabela 1. Cechy rodziny rozkładów pearsonowskich (źródło: obliczenia własne).

Typ	Funkcja gęstości otrzymana po rozwiązaniu równania (15)	Przykładowy typ rozkładu
I	$f(x) = K(x - a_1)^{m_1} (a_2 - x)^{m_2}$ gdzie: $m_1 = \frac{a_1 + a}{b_2(a_2 - a_1)}$ $m_2 = \frac{-a - a_2}{b_2(a_2 - a_1)}$	Beta
II	$m_1 = m_2 = m$ $f(x) = K(x - a)^m$	Prostokątny
III	$b_2 = 0; b_1 \neq 0$ $f(x) = K(b_0 + b_1 x)^m e^{-\frac{x}{b_1}}$ $m = \left( \frac{b_0}{b_1} - a \right) \frac{1}{b_1}$	Gamma; Chi-kwadrat
IV	$f(x) = K \left[ c_0 + b_2 (x + c_1)^2 \right]^{-\frac{1}{2b_2}} e^{-\left( \frac{a - c_1}{b_2 c_0} \arctg \frac{x + c_1}{\sqrt{\frac{c_0}{b_2}}} \right)}$ $c_0 = b_0 - \frac{b_1^2}{2b_2}; c_1 = \frac{b_1}{2b_2}$	
V	$f(x) = K(x + c_1)^{\frac{1}{b_2}} e^{-\frac{a - c_1}{b_2(x + c_1)}}$	Walda
VI	$f(x) = K(x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2}$ $x > a_2; m_2 < -1; m_1 + m_2 < 0$	
VII	$b_1 = a = 0$ $b_0 > 0; b_2 > 0$ $f(x) = K(b_0 + b_2 x^2)^{-\frac{1}{2b_2}}$	Normalny; t-Studenta

Tabela 2. Charakterystykę podstawowych rodzajów rozkładów zmiennej losowej ciągłej (źródło: obliczenia własne).

Nazwa Rozkładu	Funkcja Gęstości Prawdopodobieństwa	Parametry Rozkładu	Postać graficzna
Beta	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt & \text{dla } a \leq x \leq b \end{cases}$ $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$	$E(X) = \frac{p}{p+q}$ $V(X) = \frac{pq}{[(p+q)^2(p+q+1)]}$	
Gamma	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\Gamma(p)} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x} dx$	$E(X) = \frac{p}{b}$ $V(X) = \frac{p}{b^2}$	
Normalny	$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}\right]$	$E(X) = \mu$ $V(X) = \delta^2$	



Tabela 5. cd.

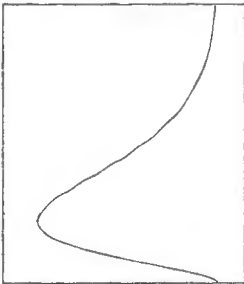
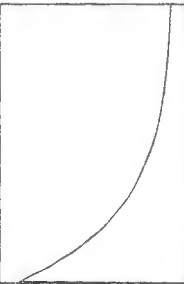
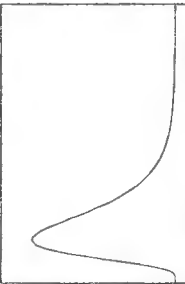



Nazwa Rozkładu	Funkcja Gęstości Prawdopodobieństwa	Parametry Rozkładu	Postać graficzna
Chi-kwadrat	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2^{0.5n} \Gamma(0.5n)} x^{0.5n-1} e^{-0.5x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$	$E(X) = n$ $V(X) = 2n$	
Wykładniczy	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$	
Logarytmicznie Normalny	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta x} \exp \left[ -\frac{(\ln x - m)^2}{2\delta^2} \right]$	$E(X) = e^{m+0.5\delta^2}$ $V(X) = e^{2m+\delta^2}$	

Tabela 5. cd.

Nazwa Rozkładu	Funkcja Gęstości Prawdopodobieństwa	Parametry Rozkładu	Postać graficzna
t-Studenta	$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k}\left(\frac{x^2}{k} + 1\right)^{\frac{k+1}{2}}}$	$E(X) = 0$ $V(X) = \frac{k}{k-2}$	
Pareto	$f(x) = \frac{a}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{a+1}$	$E(X) = \frac{ax_0}{a-1}$ $V(X) = \frac{ax_0^2}{(a-1)(a-2)}$	
Weibulla	$f(x) = bp x^{p-1} e^{-bx^p}$	$E(X) = b^{-\frac{1}{p}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ $V(X) = b^{-\frac{2}{p}} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{p}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{p}\right) \right]$	

Z własności tych wynika podstawowa reguła rozkładu normalnego zmiennej losowej ciągłej, zwana regułą trzech odchyłeń standardowych. Okazuje się, że z prawdopodobieństwem bliskim jedności należy oczekiwać, że realizacje zmiennej losowej  $X$  nie będą się różniły, in plus oraz in minus, od wartości oczekiwanej więcej aniżeli o trzy odchylenia standardowe tej zmiennej. Regułę trzech odchyłeń standardowych można zapisać jako:

$$P[E(x) - 3D(x)] < X < P[E(x) + 3D(x)] = 0.9973 \quad (25)$$

Z uwagi na swoje własności rozkład ten znajduje szerokie zastosowanie w modelowaniu stóp zwrotu finansowych szeregów czasowych.

Większość metod stosowanych w statystyce opartych jest na rozkładzie normalnym lecz jak już wcześniej zauważono, nie jest on często spotykany w badaniach zjawisk empirycznych. Wiele rozkładów empirycznych to asymetryczne, wielomodalne, bądź mające grubsze ogony niż rozkład normalny (*przykładem są finansowe szeregi czasowe*).

W celu wprowadzenia pojęcia mieszanki rozkładów (Jajuga, 1991) założmy, że rozpatrujemy zbiór obserwacji stanowiący próbę losową pochodzącą z pewnej populacji  $\Pi$ . Populacja ta może być podzielona na  $K$  podpopulacji, tzn.  $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \dots \cup \Pi_K$  przy czym  $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset; i, j = 1, 2, \dots, K; i \neq j$ . Oznaczmy przez  $x$  realizację zmiennej losowej  $X$ , a przez  $f_j(x) = p(x/j); j = 1, 2, \dots, K$  gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X$  w podpopulacji  $\Pi_j$ . Rozkład ten traktuje się jako rozkład warunkowy uzależniony od zdarzenia "wylosowanie podpopulacji  $\Pi_j$ ". Przyjmijmy, że  $P_j (j=1, \dots, K)$  to prawdopodobieństwo tego zdarzenia.

Oznaczając gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X$  w populacji  $\Pi$  przez  $f(x)$ , otrzymamy

$$f(x) = \sum_{j=1}^K P_j p(x/j) = \sum_{j=1}^K P_j f_j(x) \quad (26)$$

W ten sposób uzyskaliśmy określenie mieszanki rozkładów zmiennej losowej. Współczynniki  $P_j$  nazywane są wagami lub parametrami mieszającymi, a  $f_j(x)$  gęstościami rozkładów składowych mieszanki. Prostym przykładem mieszanki rozkładów jest kombinacja dwóch jednowymiarowych rozkładów normalnych. Jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x) = p_1 \left[ \frac{1}{\delta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\delta_1^2}} \right] + p_2 \left[ \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\delta_2^2}} \right] \quad (27)$$

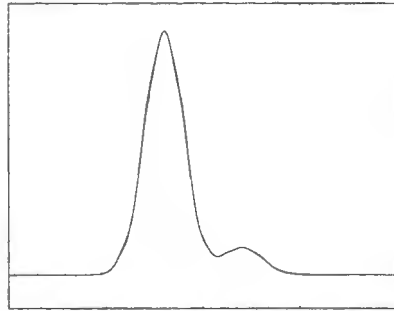
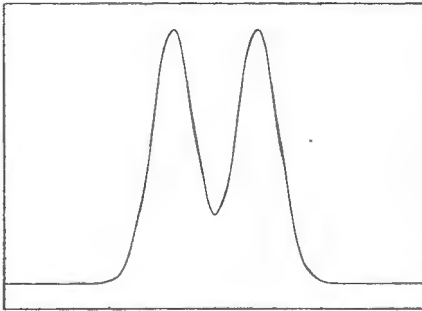
gdzie:

$p_1, p_2$  – wagi mieszające ( $p_1 + p_2 = 1$ )

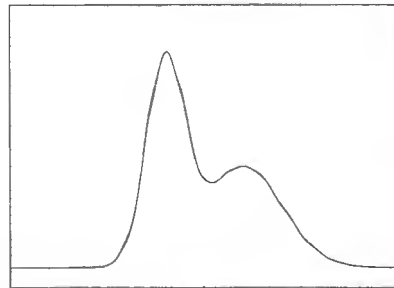
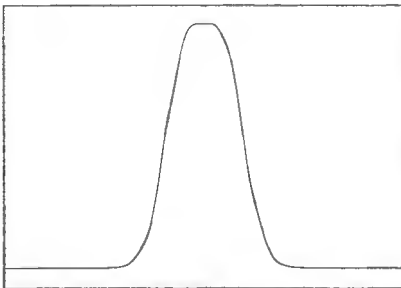
$\mu_1, \mu_2$  – średnie

$\sigma_1, \sigma_2$  – odchylenia standardowe.

W zależności od parametrów otrzymujemy różne postacie rozkładów. Na rysunku 8 przedstawiamy przykładowe wykresy funkcji gęstości mieszanki dwóch rozkładów normalnych przy założeniu różnych wartości parametrów.



$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0.5$	$p_1 = 0.9$	$p_2 = 0.1$
$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 2$	$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 2$
$\sigma_1 = 1$	$\sigma_2 = 1$	$\sigma_1 = 1$	$\sigma_2 = 1$

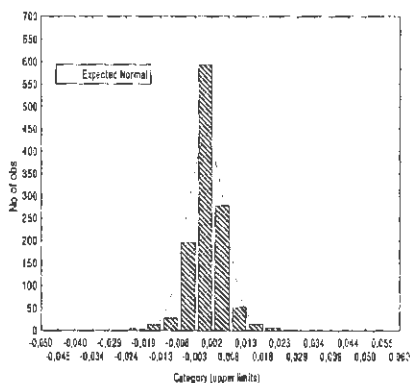
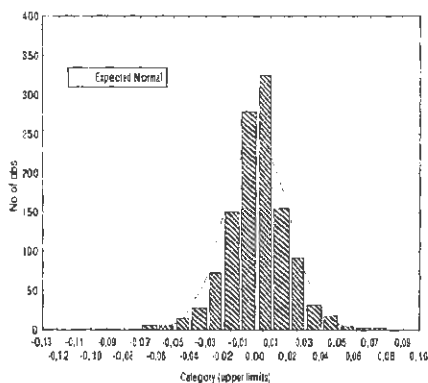


$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0.5$	$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0.5$
$\mu_1 = -1$	$\mu_2 = 1$	$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 2$
$\sigma_1 = 1$	$\sigma_2 = 1$	$\sigma_1 = 1$	$\sigma_2 = 2$

Rysunek 2. Przykładowe mieszanki dwóch rozkładów normalnych (źródło: obliczenia własne).

Z przedstawionych wykresów wynika, że mieszanki dwóch rozkładów normalnych mogą być przedstawione za pomocą krzywych o różnych kształtach. Mogą to być rozkłady zarówno jednomodalne jak i dwumodalne. Zwiększenie liczby składników mieszanki, a także przyjmowanie różnych parametrów rozkładów składowych daje bogaty zbiór rozkładów wielomodalnych i rozkładów asymetrycznych. Wszystko to sugeruje, że stosowanie mieszanek rozkładów w analizie rozkładów charakteryzujących się jednocześnie wielomodalnością i asymetrią może być konkurencyjne w stosunku do stosowania bardzo skomplikowanych procedur badawczych.

Ilustracją rozważań poświęconych typom rozkładów wykorzystywanych w analizie szeregów czasowych jest rysunek 9 przedstawiający kształt rozkładów dziennych stóp zwrotu wyznaczonych dla analizowanych szeregów czasowych, tj. indeksu giełdowego WIG, kursu dolara amerykańskiego.



a) WIG

b) USD

Rysunek 1. Rozkłady dziennych stóp zwrotu wyznaczonych na bazie indeksu giełdowego WIG, kursu walutowego USD (źródło: opracowanie własne).

Analiza rozkładów zamieszczonych na rysunku 9 wskazuje, iż tylko rozkład stóp zwrotu indeksu giełdowego WIG pozwala na przyjęcie założenia o rozkładzie normalnym. Pozostałe dwie analizowane cechy, charakteryzują się znacznie bardziej wysmukłymi rozkładami, tj. ich kurtoza znacznie przekracza wartość charakterystyczną dla rozkładu normalnego.

## 7. Liniowe modele stochastyczne – modele klasy ARIMA

Do opisu szerokiej klasy szeregów czasowych przydatny jest model postaci

$$\sum_{s=0}^p \delta_s Y_{t-s} = \sum_{k=0}^q \gamma_k \varepsilon_{t-k}, \quad \delta_0 = 1 \quad (28)$$

gdzie:  $\delta_s, \gamma_k$  – stałe rzeczywiste (wagi);  $\varepsilon_t$  – biały szum.

Jeżeli  $q = 0$ , to (28) nazywamy modelem autoregresji; jeśli  $p = 0$ , to mówimy o modelu średniej ruchomej; przy  $q > 0$  równanie (28) jest mieszanym modelem autoregresji i średniej ruchomej.

Model autoregresji (AR) wyraża bieżące wartości procesu za pomocą skończonej sumy poprzednich wartości procesu i wartości  $\varepsilon_t$ ,

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \delta_2 Y_{t-2} + \dots + \delta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (29)$$

Model autoregresji zawiera  $p + 2$  nieznanych parametrów, które można oszacować na podstawie obserwacji. Liczba  $p$  zwana jest rzędem autoregresji. Jeżeli operator autoregresji rzędu  $p$  określimy następująco

$$D(u) = 1 - \delta_1 u - \delta_2 u^2 - \dots - \delta_p u^p = 1 - \sum_{s=1}^p \delta_s u^s, \quad (30)$$

gdzie  $u$  – operator przesunięcia wstecznego to (29) zapiszemy

$$Y_t = D^{-1}(u) \varepsilon_t, \quad (31)$$

Procesy autoregresji mogą być stacjonarne i niestacjonarne. Proces AR jest stacjonarny, jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego

$$D(u) = 1 - \delta_1 u - \dots - \delta_p u^p = 0, \quad (32)$$

leżą poza okręgiem jednostkowym. Proces autoregresji rzędu pierwszego AR(1)

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (33)$$

jest stacjonarny, jeżeli

$$-1 < \delta_1 < 1. \quad (34)$$

Model średniej ruchomej (MA) ma postać

$$Y_t = \varepsilon_t - \gamma_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \gamma_q \varepsilon_{t-q} \quad (35)$$

lub

$$Y_t = C(u)\varepsilon_t, \quad (36)$$

gdzie  $C(u)$  – operator średniej ruchomej rzędu  $q$

$$C(u) = 1 - \gamma_1 u - \gamma_2 u^2 - \dots - \gamma_q u^q = 1 - \sum_{k=1}^q \gamma_k u^k. \quad (37)$$

Liczba  $q$  oznacza rząd średniej ruchomej.

Mieszany model autoregresji i średniej ruchomej (ARMA) ma postać

$$Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \dots + \delta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \gamma_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \gamma_q \varepsilon_{t-q}, \quad (38)$$

lub

$$D(u)Y_t = C(u)\varepsilon_t. \quad (39)$$

Proces mieszany autoregresji i średniej ruchomej rzędu  $(p, q)$  jest stacjonarny, jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego  $D(u) = 0$  leżą poza okręgiem jednostkowym.

Procesy niestacjonarne można przedstawić za pomocą uogólnionego operatora autoregresji  $F(u)$ , takiego, że  $r$  pierwiastków równania  $F(u) = 0$  jest równych jedności, a pozostałe leżą poza okręgiem jednostkowym<sup>1</sup>.

$$F(u) = D(u)(1-u)^r, \quad (40)$$

gdzie  $D(u)$  – stacjonarny operator autoregresji;  $F(u)$  – niestacjonarny operator autoregresji

---

<sup>1</sup> Proces niestacjonarny można opisać za pomocą modelu, w którym  $r$ -ta różnica procesu jest stacjonarna.

$$F(u) = \Delta^r D(u), \quad (41)$$

$$F(u) = 1 - \varphi_1 u - \varphi_2 u^2 - \dots - \varphi_{p+r} u^{p+r}, \quad (42)$$

$\Delta$  jest operatorem różnicy

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - u)Y_t, \quad (43)$$

$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} \text{ itd.} \quad (44)$$

Proces niestacjonarny można przedstawić następująco

$$F(u)Y_t = D(u)(1 - u)^r Y_t = C(u)\varepsilon_t, \quad (45)$$

czyli

$$D(u)Z_t = C(u)\varepsilon_t, \quad (46)$$

gdzie

$$Z_t = \Delta^r Y_t.$$

Model (46) nazywamy modelem autoregresji i scałkowanej średniej ruchomej (ARIMA).

Model ARIMA (p, r, q) w postaci równania różnicowego wygląda następująco

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \dots + \varphi_{p+r} Y_{t-p-r} - \gamma_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \gamma_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t. \quad (47)$$

Jeżeli  $r = 0$ , to model (45) opisuje proces stacjonarny.

Ponadto wyróżnia się modele scałkowanej średniej ruchomej rzędu (0, r, q), tj. modele IMA(0, r, q). Ogólna postać modelu IMA jest następująca

$$\Delta^r Y_t = C(u)\varepsilon_t. \quad (48)$$

Model ten jest prosty i powszechnie stosowany do opisu niestacjonarnych procesów.

Poza tym do opisu stacjonarnych ciągów zmiennych losowych wykorzystuje się modele, w których zakłada się wykładnicze rozkłady



brzegowe. Wyróżnia się wykładnicze modele autoregresji – EAR(p), wykładnicze modele średniej ruchomej – EMA(q) oraz wykładnicze modele mieszane autoregresji i średniej ruchomej – EARMA(p,q).

## 8. Modele klasy ARCH

Wprowadzenie przez R. Engla (1982) modeli klasy ARCH (ang. *AutoRegressive Conditional Heteroscedastic*) wynikało z podjęcia przez niego prób modelowania wariacji zwrotów z akcji giełdowych oraz wariacji stóp zwrotu innych instrumentów finansowych. Próby te przyniosły nadspodziewanie dobre rezultaty, czego konsekwencją był dynamiczny rozwój zastosowań tej klasy modeli. Dobre własności predyktywne modeli ARCH znalazły zastosowanie między innymi w modelach wycen opcji oraz innych instrumentów finansowych jak również w operacjach hedgingowych.

Przed przedstawieniem omawianego modelu zdefiniujemy główne pojęcia i określenia (Grzesiak, Konieczny, 1997).

W równaniu regresji  $Y_i = f(\mathbf{X}_i, \varepsilon_i)$  szereg  $\varepsilon_i$  będziemy nazywać homoskedastycznym, jeżeli jego wariancja jest stała po czasie, a heteroskedastycznym, jeżeli zależy od położenia chwil. W tym drugim przypadku można zapisać, że:

$$D^2(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (49)$$

Przyjmujemy, że  $\varepsilon_t$  są parami nieskorelowane, co oznacza, że  $E(\varepsilon\varepsilon^T) = s^2\Omega$ , gdzie  $\Omega$  jest macierzą o postaci:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

W ogólnym przypadku wariancja (49) jest funkcją czasu, wyrażoną w postaci  $\sigma_i^2 = \sigma^2 f_i(\theta)$ , a jej specjalne przypadki mogą być przykładowo następujące:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^2 &= \sigma^2 y_i^\alpha \\
 &= \sigma^2 y_i \\
 &= \sigma^2 y_i^2 \\
 &= \sigma^2 e^{\alpha^T \log X_i}
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Postać modelu heteroskedastycznego jest uzyskiwana bezpośrednio poprzez rozszerzenie modelu ARMA (Box, 1983; Talaga, Zieliński, 1986). Załóżmy, że posiadamy stacjonarny szereg czasowy  $\{Y_t\}$  z  $n$  obserwacjami. Możemy zapisać to jako  $Y_t = f(X_t, \varepsilon_t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $X_t$  jest wektorem zmiennych zależnych, a  $\varepsilon_t$  określa się z reguły pojęciem błędów. Zależność ta może być addytywna, bądź inna.

Niech  $I_t = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_{t-1}, \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{t-1}, X_0, \dots, X_{t-1}\}$  oznacza zbiór znanych i posiadanych informacji w badanym momencie  $t$ . Wielkości  $\varepsilon_t$  są bezwarunkowo heteroskedastyczne, ale warunkowo przy uzyskanych informacjach, homoskedastyczne.

### Definicja 1. Proces ARCH

Proces  $\{r_t\}$  nazywamy procesem ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedastic) rzędu  $q$  jeżeli

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

gdzie

$\varepsilon_t$  jest Gausowskim procesem białego szumu o średniej zero i jednostkowej wariancji;

$\sigma_t^2$  jest wariancją stóp zwrotu w czasie  $t$  warunkową na zbiorze informacji

$\Psi_t = (r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$  takich, że

$$V(r_t | \Psi_t) = \sigma_t^2 = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q r_{t-q}^2$$

$$\alpha_0 > 0 \text{ i } \alpha_i \geq 0, \forall i \geq 1$$

Najprostszy model pierwszego stopnia ARCH(1) dla  $\varepsilon_t$  ma postać:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\
 \sigma_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} \\
 u_t &\sim N(0,1) \\
 \varepsilon_t | \mathbf{I}_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2)
 \end{aligned}
 \quad , t = 1, 2, \dots, n, \tag{51}$$

Jeżeli rozważamy model regresji z resztami typu ARCH, wówczas można go zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \mathbf{b}^T \mathbf{X}_t + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\
 \sigma_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} \\
 y_t | \mathbf{I}_{t-1} &\sim N(\mathbf{b}^T \mathbf{X}_t, \sigma_t^2)
 \end{aligned}
 \quad , t = 1, 2, \dots, n, \tag{52}$$

Właściwością modelu (52) jest, że reszty  $\varepsilon_t$  są bezwarunkowo heteroskedastyczne, ale warunkowo homoskedastyczne, co oznacza:

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon_t) &= 0, \quad E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = 0, \quad E(y_t) = \mathbf{b}^T \mathbf{X}_t, \\
 D^2(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) &= D^2(y_t | y_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} \\
 D^2(\varepsilon_t) &= \alpha_0 + \alpha_1 D^2(\varepsilon_{t-1})
 \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że jeżeli proces oryginalny jest homoskedastyczny, to wariancja dana jest wzorem:

$$D^2(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}.$$

Z przedstawionych wyżej wyrażeń można wywnioskować, że jeśli  $\alpha_1 = 0$  to przedstawiony proces jest procesem „białego szumu”. Jeżeli  $\alpha_1$  jest duże, to wariancja ta jest zbieżna do nieskończoności.

Naturalnym rozszerzeniem modelu ARCH pierwszego stopnia jest stan, gdy reszty nie są zależne tylko od ostatniej poprzedzającej reszty, lecz również od ostatnich  $q$  reszt. Taki model zwany ARCH stopnia  $q$ -tego oznaczamy przez ARCH( $q$ ) i zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= u_t \sigma_t \\ \sigma_t &= \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}, \quad t = 1, 2, \dots, n \\ u_t &\sim N(0,1) \\ \varepsilon_t | \mathbf{I}_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \end{aligned} \quad (53)$$

Podobnie jak w przypadku modelu regresji ARCH(1), model regresji ARCH(q) można definiować jedynie wraz ze zmianą członu  $\varepsilon_t$ . Warunkowa wariancja dla  $\varepsilon_t$  na zbiorze  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  jest stała i wynosi  $\sigma^2$ . Równania te mogą przypominać nam modele autoregresyjne. Warunek stacjonarności dla wariancji modelu ARCH(q) jest też podobny do warunku stacjonarności dla procesu AR(q).

W procesie ARCH(q) z  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$  kowariancja jest stacjonarna, wtedy i tylko wtedy, gdy równania charakterystyczne mają wszystkie pierwiastki poza kołem jednostkowym. Stacjonarna wariancja może być w tym przypadku wyznaczona jako:

$$D^2(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}. \quad (54)$$

Oznaczając  $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ , model (53) można zapisać w postaci:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t \quad (55)$$

Ponieważ zachodzi  $E_{t-1}(v_t) = 0$ , stąd model (55) jest zbieżny z modelem AR(q) dla  $\varepsilon_t^2$ .

Alternatywnie model ARCH(q) można wyrazić jako model MA(q) ze zmieniającymi się w czasie parametrami:

$$\varepsilon_t = \omega + \alpha(L)\xi_{t-1}\varepsilon_{t-1} \quad (56)$$

gdzie  $\{\xi\}$  oznacza zmienną losową o średniej zero i jednostkowej wariancji.

W zastosowaniach empirycznych modeli klasy ARCH(q) częstym problemem jest potrzeba estymacji dużej liczby parametrów związanych z wysokim stopniem  $q$  tych modeli. W celu rozwiązania tego problemu T. Bollerslev (1986) zaproponował modyfikację modelu ARCH określając

nowo wprowadzony model jako GARCH(p,q) (ang. *Generalised AutoRegressive Conditional Heteroscedastic*).

### Definicja 2 Proces GARCH

Proces  $\{r_t\}$  nazywamy procesem GARCH (*Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedastic*) rzędu p i q jeżeli

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

gdzie

$\varepsilon_t$  jest Gausowskim procesem białego szumu o średniej zero i jednostkowej wariancji;

$\sigma_t^2$  jest wariancją stóp zwrotu w czasie t warunkową na zbiorze informacji

$$\Psi_t = (r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$$

takich, że

$$V(r_t | \Psi_t) = \sigma_t^2 = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q r_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p}$$

$$\alpha_0 > 0 \text{ i } \alpha_i \geq 0, \forall i \geq 1 \text{ i } \beta_j \geq 0, \forall j \geq 1.$$

Zapisując inaczej model GARCH można przedstawić

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta(L)\sigma_{t-1}^2 \quad (57)$$

Zapisując model w analogiczny sposób jak w (56) otrzymamy:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + [\alpha(L) + \beta(L)]\varepsilon_{t-1}^2 - \beta(L)v_{t-1} + v_t \quad (58)$$

czyli model klasy ARMA[max(p,q), p] dla  $\varepsilon_t^2$ . Model (58) posiada stacjonarną kowariancję, wtedy i tylko wtedy, kiedy pierwiastki równania  $\alpha(x) + \beta(x) = 1$  są mniejsze od jedności (Bollerslev, Engle, Nelson, 1993).

Modele klasy GARCH pozwalają na dobre odzwierciedlanie omawianych na wstępie właściwości finansowych szeregów czasowych z wyjątkiem efektu dźwigniowego, ponieważ warunkowa wariancja jest funkcją tylko siły opóźnionych reszt i nie uwzględnia ich znaków.

Rozwiązaniem tego problemu jest model EGARCH (ang. *Exponential GARCH*) wprowadzony przez D. Nelsona (1991).

**Definicja 3. Proces EGARCH**

Proces  $\{r_t\}$  nazywamy procesem EGARCH (Exponential Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedastic) rzędu  $p$  i  $q$  jeżeli

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

gdzie

$\varepsilon_t$  jest Gausowskim procesem białego szumu o średniej zero i jednostkowej wariancji;

$\sigma_t^2$  jest wariancją stóp zwrotu w czasie  $t$  warunkową na zbiorze informacji

$$\Psi_t = (r_1, h_1, r_2, h_2, \dots, r_{t-1}, h_{t-1}) \text{ takich, że}$$

$$\sigma_t = \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)$$

gdzie

$$h_t | \Psi_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

gdzie

$$g(\varepsilon_{t-1}) = \omega \varepsilon_{t-1} + \lambda (|\varepsilon_{t-1}| - E|\varepsilon_{t-1}|)$$

Warunkowa wariancja modelu EGARCH jest różna od warunkowej wariancji modelu ARCH ponieważ nie jest liniowa dla  $r_t^2$ . Funkcja  $g(*)$  pozwala aby składnik  $h_t$  reagował zarówno na wielkość jak i znak argumentów. Stąd zarówno wielkość jak i znak  $r_{t-1}$  oddziałuje na zmienność  $h_t$ .

Inną odmianą modelu GARCH stosowaną w przypadku gdy suma parametrów  $\alpha(1) + \beta(1) = 1$  jest model IGARCH.

**Definicja 4. Proces IGARCH**

Jeżeli proces  $\{r_t\}$  jest procesem GARCH rzędu  $p$  i  $q$  oraz  $\alpha(1) + \beta(1) = 1$  to  $\{r_t\}$  nazywamy procesem IGARCH (Integrated Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedastic) rzędu  $p$  i  $q$ .

Niech  $v_t = r_t^2 - h_t$  będzie stacjonarnym procesem losowym. Jeżeli  $r_t$  jest procesem GARCH( $p, q$ ) możemy zapisać  $r_t^2$  jako

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) r_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^q \beta_i v_{t-i} + v_t, \quad (59)$$

gdzie  $m = \max(p, q)$ ,  $\alpha_i = 0, \forall i > q$  i  $\beta_i = 0, \forall i > p$ . Stąd  $r_t^2$  jest procesem ARMA(m,p).

Przeanalizujmy podstawowe własności modeli klasy ARCH.

1. Średnia: Z definicji procesu ARCH wyraz  $\varepsilon_t$  jest Gausowskim procesem białego szumu o średniej zero i jednostkowej wariancji. Dodatkowo charakteryzuje się brakiem autokorelacji. Stąd

$$E r_t = E \sigma_t \varepsilon_t = E \sigma_t E \varepsilon_t = 0 \quad (60)$$

2. Wariancja: Warunkowa wariancja procesu ARCH wynosi  $E(r_t^2 | \Psi_t) = h_t$  i jest z natury zmienna w czasie. Bezwarunkowa wariancja procesu ARCH jest stała i wynosi

$$E(\sigma_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha(1)}. \quad (61)$$

Analogicznie bezwarunkowa wariancja procesu GARCH jest również stała i wynosi

$$E(\sigma_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha(1) - \beta(1)}. \quad (62)$$

3. Skośność: Z założenia, że zmienna losowa  $\varepsilon_t$  jest symetryczna wynika, że wszystkie nieparzyste jej momenty równe będą zero. Stąd wynika, iż skośność modelu ARCH jest równa zero.
4. Kurtოza: Kurtოza modelu ARCH(1) dana jest wzorem

$$\frac{E(r_t^4)}{E(r_t^2)^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}. \quad (63)$$

Wartość kurtოzy jest większa od trzech co świadczy o posiadaniu przez rozkład modelu grubszych od normalnego ogonów.

Inną klasą modeli pozwalającą na uchwycenie własności finansowych szeregów czasowych, o których była mowa na wstępie rozdziału jest rodzina modeli stochastycznej wariancji.

## 9. Modele klasy SV

Model stochastycznej wariancji (SV) został po raz pierwszy zaproponowany przez Taylora (1986). Jednakże dopiero prace Harveya, Ruitza, Shepharda (1994) dokonały jego popularyzacji.

### Definicja 5: Proces stochastycznej wariancji (SV)

*Proces  $\{r_t\}$  nazywamy procesem stochastycznej wariancji jeżeli*

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

gdzie:

$\varepsilon_t$  jest stacjonarnym procesem losowym o średniej zero i jednostkowej wariancji;

$\sigma_t^2$  jest zmiennością  $r_t$  w czasie  $t$  charakteryzującą się następującą relacją

$$\sigma_t = \exp\left(\frac{1}{2} h_t\right),$$

gdzie  $h_t$  jest stacjonarnym bądź też niestacjonarnym procesem stochastycznym.

Trzy punkty wynikają z definicji modelu SV. Po pierwsze model SV jest modelem z dyskretnym czasem. Po drugie model zakłada iż średni poziom szeregu stóp zwrotu w sposób nieistotny różni się od zera wobec czego pomija wartość średniej. Po trzecie traktuje zmienność jako stacjonarny bądź też niestacjonarny proces stochastyczny. W dalszej części podrozdziału omówimy dwa przykładowe procesy stochastyczne wykorzystywane w modelu SV, tj. proces autoregresywny oraz model błędzenia losowego.

### Proces autoregresywny

Proces autoregresywny definiuje  $h_t$  jako proces AR(p), przy czym najczęściej wykorzystywanym jest proces AR(1)

$$h_t = \alpha + \phi h_{t-1} + \eta_t, \quad (64)$$

gdzie

$\alpha$  i  $\phi$  to niezmiennie w czasie parametry modelu;

$\eta_t$  to stacjonarny proces Guasowski o średniej zero i wariancji  $\sigma_\eta^2$ .

Dwa założenia wynikają z powyższego sformułowania procesu autoregresywnego



1. model zakłada, że dwie zmienne losowe  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są niezależnymi procesami białego szumu o wariancjach odpowiednio 1 i  $\sigma_\eta^2$ ;
2. składnik  $h_t$  jest stacjonarny co nakłada warunek, że  $|\phi| < 1$ .

Z faktu, że  $h_t$  jest stacjonarne wynika, że  $\sigma_t$  jest również stacjonarna.

Przeanalizujmy podstawowe własności modeli SV na przykładzie modelu autoregresywnego.

1. Średnia: Z definicji modelu SV wynika, że składnik losowy  $\varepsilon_t$  jest zmienną losową o średniej zero. Dodatkowo z uwagi na fakt, iż obydwa czynniki losowe  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są niezależne to  $\sigma_t$  i  $\varepsilon_t$  są również niezależne. Dlatego średnia procesu wynosi zero i może zostać zapisana w następujący sposób

$$Er_t = E\sigma_t\varepsilon_t = E\sigma_t E\varepsilon_t = 0. \quad (65)$$

2. Wariancja: Wariancja modelu SV określona jest przez  $\sigma_t^2$ . Bezwarunkowa wariancja modelu SV wynosi

$$Er_t^2 = E\sigma_t^2 E\varepsilon_t^2 = E\sigma_t^2, \quad (66)$$

ponieważ  $E\varepsilon_t^2$  jest równy jedności. W celu wyznaczenia  $E\sigma_t^2$  należy określić rozkład  $\sigma_t^2$ . Ponieważ  $\sigma_t^2$  jest określona przez stochastyczny proces  $h_t$  rozkład tego procesu jest wystarczający do opisu rozkładu  $\sigma_t^2$ . Składnik  $h_t$  posiada bezwarunkowy rozkład normalny ponieważ  $\eta_t$  jest zmienną losową o rozkładzie normalnym

$$h_t = N\left(\frac{\alpha}{1-\phi}, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right), \quad (67)$$

gdzie  $\alpha, \phi, \sigma_\eta$  to parametry modelu (64). Ponieważ  $\sigma_t^2 = \exp h_t$ ,  $\sigma_t$  posiada rozkład logarytmiczno-normalny. Stąd bezwarunkowa wariancja modelu SV wynosi

$$Er_t^2 = \exp\left(\mu_h + \frac{1}{2}\sigma_h^2\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{1-\phi} + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi)^2}\right). \quad (68)$$

Bezwarunkowa wariancja modelu SV jest zawsze dodatnia. Jedyнным warunkiem nałożonym na parametry modelu wynikającym z wariancji procesu jest  $\phi \neq 1$ , gdyż dla  $\phi = 1$  bezwarunkowa wariancja procesu nie istnieje.

3. Skośność: Z założenia, że zmienna losowa  $\varepsilon_t$  jest symetryczna wynika, że wszystkie nieparzyste jej momenty równe będą zero. Stąd wynika, iż skośność modelu SV jest równa zero

$$Er_t^3 = E\sigma_t^3 E\varepsilon_t^3 = 0. \quad (69)$$

4. Kurtoza: Czwarty moment modelu SV dany jest wzorem

$$E(r_t^4) = E(\varepsilon_t^4)E(\sigma_t^4) = E(\varepsilon_t^4)E(\exp(2h_t)) = 3\exp(2\mu_h + 2\sigma_h^2) \quad (70)$$

Jeżeli kurtoza równa jest  $\frac{E(r_t^4)}{(Er_t^2)^2}$ , to kurtoza modelu SV wynosi

$$k = 3\exp(\sigma_h^2). \quad (71)$$

Z uwagi na fakt, iż wariancja  $h_t$  jest dodatnia to  $\exp(\sigma_h^2) > 1$  i kurtoza modelu SV jest zawsze większa od 3. Wynika stąd, że model SV posiada rozkład o grubszych od rozkładu normalnego ogonach, co jest zgodne ze zidentyfikowanymi na wstępie rozdziału własnościami finansowych szeregów czasowych.

### **Model błędzenia losowego**

Model zakłada, że składnik  $h_t$  posiada następującą postać

$$h_t = h_{t-1} + \eta_t, \quad (72)$$

gdzie

$\eta_t$  to stacjonarny proces Guasowski o średniej zero i wariancji  $\sigma_\eta^2$ .

Zakłada się dodatkowo, że  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są niezależne.

Najlepszym liniowym predyktorem modelu błędzenia losowego jest wykładniczo ważona średnia ruchoma (EWMA), która kładzie większą wagę na najświeższych obserwacjach

$$\hat{h}_T = \sum_{j=0}^{T-1} \omega_j h_{T-j}, \quad (73)$$

gdzie  $\omega_j$  są wagami o sumie równej jeden.

Ponieważ przeszłe wartości  $h_t$  nie są bezpośrednio obserwowalne nie mogą zostać wykorzystane do wyznaczenia wartości bieżącej  $h_t$ . Dlatego też suma jest zmodyfikowana w taki sposób aby  $\log r_t^2$  stanowiło estymator bieżącej wartości  $h_t$ .

Załóżmy, że  $\lambda$  jest stałą wygładzania taką, że  $0 \leq \lambda \leq 1$  to

$$\hat{h}_T = \lambda \sum_{j=0}^{T-1} (1-\lambda)^j \log r_{T-j}^2. \quad (74)$$

W miarę jak  $T$  rośnie suma wag zbliża się do jedności. Równanie ... można zapisać w innej formie

$$\hat{h}_t = (1-\lambda)\hat{h}_{t-1} + \lambda \log r_t^2. \quad (75)$$

Wartość nadziei matematycznej modelu wynosi zero jednakże wartość bezwarunkowej wariancji jest różna od modelu autoregresywnego. Bezwarunkowy rozkład składnika  $h_t$  jest dany

$$h_t \approx N(0, t\sigma_\eta^2). \quad (76)$$

Stąd bezwarunkowa wariancja modelu błędzenia losowego wynosi

$$Er_t^2 = E\sigma_t^2 E\varepsilon_t^2 = \exp\left(\frac{t}{2}\sigma_\eta^2\right). \quad (77)$$

Z (77) wynika, że zmienność stóp zwrotu wzrasta wraz z wydłużaniem się czasu, prawidłowość ta jest zdeterminowana niestacjonarnością procesu błędzenia losowego.

Analogicznie jak w modelu autoregresywnym skośność modelu błędzenia losowego wynosi zero. Podyktowane jest to faktem, że obydwa składniki losowe  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są niezależne i symetryczne.

Kurtoza modelu błędzenia losowego dana jest równaniem

$$k = 3 \exp(t\sigma_\eta^2). \quad (78)$$

Reasumując model błędzenia losowego posiada podobne własności do modelu autoregresywnego. Obydwa są procesami o średniej zero, symetrycznymi oraz charakteryzują się wyższą od normalnej wartością kurtozy. Podstawową cechą różniącą te dwa modele jest stacjonarność, tj. model autoregresywny jest stacjonarny natomiast model błędzenia losowego nie.

## 10. Identyfikacja procesów stochastycznych

Przedmiotem identyfikacji procesów stochastycznych jest określenie sposobu generowania szeregu czasowego. Identyfikacja polega na zastosowaniu odpowiednich procedur do wykrywania typu modelu. Jej zadaniem jest znalezienie odpowiedniej podklasy z ogólnej rodziny modeli ARIMA, ARCH czy też SV, która może być wykorzystana do opisu szeregów czasowych. Omówienie procesu identyfikacji rozpoczniemy od klasy modeli ARIMA (Talaga, Zieliński, 1986).

### Modele liniowe klasy ARIMA

Punktem wyjścia procesu identyfikacji jest określenie wartości  $p$ ,  $r$  i  $q$  oraz początkowych wartości parametrów  $c$  i  $d$ , tj. wektorów parametrów  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$  oraz  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ . W tym celu najpierw bierzemy skończoną różnicę  $Y_t$  tyle razy, ile potrzeba do zapewnienia stacjonarności. Podstawy do wyboru rzędów operatorów autoregresji  $p$  i średniej ruchomej  $q$  dostarczają charakterystyczne właściwości funkcji korelacyjnej oraz funkcji korelacji cząstkowej. Zachowanie się funkcji korelacyjnej oraz funkcji korelacji cząstkowej poszczególnych procesów stochastycznych jest następujące:

1. Proces AR – funkcja korelacyjna  $R(\tau)$  procesu AR( $p$ ) jest nieskończona. Składa się z sumy tłumionych funkcji wykładniczych i (lub) wykładniczo gasnących sinusoid. Funkcja korelacji cząstkowej  $R(\tau, \tau)$  jest skończona i urywa się po  $p$  opóźnieniach. Na przykład dla procesu AR(1):  $R(\tau)$  wykładniczo zanika wraz ze wzrostem opóźnienia przy parametrze dodatnim ( $\delta_1 > 0$ ), a zmienia znak przy parametrze ujemnym ( $\delta_1 < 0$ );  $R(\tau, \tau)$  urywa się po pierwszym opóźnieniu.
2. Proces MA – funkcja korelacyjna procesu MA( $q$ ) jest skończona, urywa się po  $q$  opóźnieniach. Funkcja korelacji cząstkowej jest nieskończona, monotonicznie malejąca. Przeważają w niej gasnące funkcje wykładnicze i (lub) wykładniczo gasnące sinusoidy. Dla procesu MA(1) funkcja korelacyjna urywa się po pierwszym opóźnieniu. Funkcja korelacji cząstkowej ma kształt tłumionej funkcji wykładniczej. Jeżeli  $\gamma_1 < 0$ , to  $R(\tau, \tau)$  oscyluje i zmienia znak, przy  $\gamma_1 > 0$  wszystkie wartości  $R(\tau, \tau)$  są ujemne.
3. Proces ARMA – funkcja korelacyjna procesu ARMA jest nieskończona i po pierwszych  $q - p$  opóźnieniach przedstawia gasnące funkcje wykładnicze i (lub) tłumione sinusoidy. Funkcja korelacji cząstkowej jest nieskończona i po pierwszych  $p - q$  opóźnieniach przeważają w niej tłumione funkcje wykładnicze i

(lub) zanikające wykładniczo sinusoidy. Na przykład funkcja korelacji cząstkowej procesu ARMA(1,1) składa się tylko z jednej głównej wartości  $R(1,1) = R(1)$  i zachowuje się podobnie jak  $R(\tau, \tau)$  dla procesu MA(1). Przy dodatniej wartości parametru  $\gamma_1 > 0$ ,  $R(\tau, \tau)$  monotonicznie gaśnie od wartości  $R(1)$ , a znak pokrywa się ze znakiem  $(\delta_1 - \gamma_1)$ . Przy ujemnej wartości  $\gamma_1 < 0$  w funkcji korelacji cząstkowej przeważa wykładniczo gasnący oscylujący wyraz, a znak  $R(\tau, \tau)$  określony jest przez znak  $(\delta_1 - \gamma_1)$ .

4. Proces ARIMA – jeżeli chodzi o proces autoregresji i scałkowanej średniej ruchomej to dla procesu ARIMA (1,r,0)  $R(\tau)$  zanika wykładniczo, a  $R(\tau, \tau)$  tylko dla  $R(1,1)$  nie równa się zero; dla procesu ARIMA(0,r,1)  $R(\tau)$  tylko dla  $R(1)$  nie równa się zero, a w funkcji  $R(\tau, \tau)$  dominuje spadek funkcji wykładniczych; dla procesu ARIMA (2,r,0) funkcje korelacji cząstkowej są różne od zera tylko w przypadku  $R(1,1)$  i  $R(2,2)$ , a funkcja korelacyjna przedstawia nałożenie się funkcji wykładniczych i gasnących sinusoid; dla procesu ARIMA(0,r,2) przebieg funkcji  $R(\tau)$  jest taki jak przebieg  $R(\tau, \tau)$  procesu ARIMA(2,r,0), natomiast przebieg funkcji korelacji cząstkowej jest taki jak przebieg funkcji korelacyjnej procesu ARIMA (2,r,0); funkcja korelacyjna  $R(\tau)$  i funkcja korelacji cząstkowej  $R(\tau, \tau)$  procesu ARIMA(1,r,1) zanika wykładniczo od pierwszego opóźnienia.

Przedstawiona powyżej graficzna metoda identyfikacji typu modelu klasy ARIMA może zostać uzupełniona metodą analityczną bazującą na tzw. kryterium informacyjnym. W metodzie tej proces identyfikacji dokonywany jest poprzez minimalizowanie wartości następujących funkcji

$$\ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2(p+q)}{n}, \quad (79)$$

$$\ln \hat{\sigma}^2 + \frac{(p+q) \ln n}{n}, \quad (80)$$

gdzie  $\hat{\sigma}^2$  jest wariancją szumu uzyskaną w procesie estymacji modelu metodą największej wiarygodności,  $n$  to długość szeregu czasowego.

Funkcja (79) nazywana jest kryterium informacyjnym Akaike (AIC), natomiast funkcja (80) nazywana jest kryterium informacyjne Bayesa (BIC).

Pierwsza część funkcji (79) i (80) może być interpretowana jako czynnik kary za niedoszacowanie modelu. Druga część funkcji (79) i (80) jest wprost proporcjonalna do liczby parametrów modelu i przedstawia karę za jego przeszacowanie.

### Modele nieliniowe klasy ARCH

Istotnym zagadnieniem w procesie modelowania i prognozowania zmienności finansowych szeregów czasowych jest możliwość stwierdzenia, że dany szereg charakteryzuje się heteroskedastyczną wariancją. Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w tym celu jest opracowany przez R. Engla w 1983r. test mnożników Lagrange'a (*test LM*). Założenia przyjęte w tym teście są bardzo proste do obliczeń i zastosowania. Jeżeli dane byłyby homoskedastyczne, to wariancja nie może być prognozowana a zmienność  $\varepsilon_t^2$  jest czysto losowa.

Hipoteza zerowa zakłada homoskedastyczność reszt modelu:

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t \quad (81)$$

$$\varepsilon_t | \mathbf{I}_{t-1} \in N(0, \sigma^2)$$

gdzie :

$x_t$  - zbiór słabo egzogenicznych i opóźnionych zmiennych objaśniających,  
 $\varepsilon_t$  - gaussowski proces „białego szumu”,  
 natomiast hipoteza alternatywna stwierdza, że reszty modelu (81) opisuje proces ARCH(q).

Sprawdzianem hipotezy jest statystyka  $TR^2$  gdzie  $R^2$  jest współczynnikiem determinacji funkcji regresji  $\varepsilon_t^2 = f(const., \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2)$ , a T oznacza długość szeregu czasowego. Statystyka ta posiada asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  z q stopniami swobody.

Test ten jest prosty w użyciu, co powoduje, że jest często stosowany. Jednakże należy mieć świadomość jego wad. Po pierwsze, jeżeli hipoteza modelowa (81) została błędnie określona, bądź też pominięto istotną zmienną objaśniającą, to jest wysoce prawdopodobne, że test ten zawiedzie w wykryciu procesu ARCH.

Drugim często stosowanym testem jest test Q wprowadzonym przez McLeod'a and Li w 1983r.:

$$Q(q) = N(N+2) \sum_{i=1}^q \frac{r(i; \hat{v}_i^2)}{(N-i)}, \quad (82)$$

gdzie

$$r(i; \hat{v}_i^2) = \frac{\sum_{t=i+1}^N (\hat{v}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{v}_{t-i}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^N (\hat{v}_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2}, \quad (83)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{v}_t^2. \quad (84)$$

Test ten stosowany jest do wykrywania efektów nieliniowych, np. typu GARCH obecnych w resztach modelu opisującego kształtowanie się analizowanego szeregu czasowego. Analogicznie jak w przypadku testu LM statystyka  $Q$  posiada asymptotyczny rozkład  $\chi^2$ .

Znacznie mocniejszym testem jest test BDS wprowadzony przez Brock'a, Dechert'a i Scheinkman'a (Engle, Nelson, 1993). Znalazł on szerokie zastosowanie w analizie finansowych szeregów czasowych, a jego konstrukcji poświęcono wiele opracowań (Bollerslev, 1986; Kupiec, 1995).

Należy zaznaczyć, że wyżej wymienione testy pozwolą jedynie na sprawdzenie czy szereg czasowy charakteryzuje się heteroscedastyczną wariancją. Natomiast nie pozwolą określić rzędu modelu, który dobrze opisuje zaobserwowane własności. Dlatego też procedura wyboru klasy modelu polegać będzie na heurystycznym badaniu oszacowanych hipotez modelowych, a następnie testowaniu otrzymanych wyników. Poprawnie określony model powinien usunąć heteroscedastyczność wariancji i pozostawić jedynie gausowski proces białego szumu.

## 11. Metody estymacji modeli procesów stochastycznych

Najczęściej stosowaną metodą estymacji modeli klasy ARCH jest metoda największej wiarygodności. Zastosowanie tej metody estymacji jest łatwe do implementacji w przypadku modeli klasy ARCH z uwagi na normalność warunkowego ich rozkładu

$$r_t | \Psi_t = N(0, h_t).$$

Stąd logarytm funkcji gęstości prawdopodobieństwa modelu ARCH dany jest wzorem

$$L(\Theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t(\Theta), \quad (85)$$

gdzie

$\Theta$  jest wektorem parametrów modelu wariancji  $h_t$ ,  
 $l_t(\Theta)$  dana jest wzorem

$$l_t(\Theta) = \text{const} - \frac{1}{2} \log(h_t) - \frac{r_t^2}{2h_t}. \quad (86)$$

Wektor oszacowanych parametrów  $\Theta$  uzyskuje się poprzez maksymalizowanie funkcji (86).

W praktyce w celu uzyskania wektora  $\Theta$  niezbędne jest zastosowanie algorytmu optymalizacyjnego. Do najczęściej stosowanych należy algorytm Berndt Hall Hall i Hausman (BHHH), który przy  $r$ -tym szacunku estymuje kolejny w następujący sposób

$$\hat{\Omega}^{r+1} = \hat{\Omega}^r + \left( \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\hat{\Omega}^r)}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial l_t(\hat{\Omega}^r)}{\partial \Omega} \right)^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\hat{\Omega}^r)}{\partial \Omega}, \quad (87)$$

gdzie

$\Omega$  jest wektorem parametrów modelu zmienności  $\Omega = (\phi, \sigma_\eta^2)$ ,

Procedura iteracyjna algorytmu (BHHH) przebiega do momentu, w którym następujący warunek zbieżności zostaje spełniony

$$\|\hat{\Omega}^{r+1} - \hat{\Omega}^r\| < \delta, \quad (88)$$

gdzie

$\delta$  jest wielkością arbitralną większą od zera,  
 $r$  jest numerem iteracji.

Z uwagi na fakt, iż często przyjęcie założenia o normalności warunkowego rozkładu stóp zwrotu jest nie praktyczne szacowanie modeli klasy ARCH odbywa się przy wykorzystaniu estymatora QML (*quasi-maximum likelihood*).



Estymatory QML dla modelu ARCH posiadają asymptotyczny rozkład normalny taki, że

$$\sqrt{T}(\hat{\Theta} - \Theta_0) \rightarrow N(0, A^{-1}BA^{-1}), \quad (89)$$

gdzie  $\Theta_0$  jest wektorem prawdziwych parametrów,

$$A = -E \left[ \frac{\partial^2 l(\Theta_0)}{\partial \Theta \partial \Theta^T} \right], \quad (90)$$

$$B = E \left[ \frac{\partial l(\Theta_0)}{\partial \Theta} \cdot \left( \frac{\partial l(\Theta_0)}{\partial \Theta} \right)^T \right], \quad (91)$$

$$l(\Theta) = \log f(x_i | \Theta). \quad (92)$$

Zgodnymi estymatorami A i B są estymatory zaproponowane przez Weiss'a (1986)

$$\hat{A} = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\partial l_i(\hat{\Theta})}{\partial \Theta \partial \Theta^T}, \quad (93)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{\partial l_i(\hat{\Theta})}{\partial \Theta} \left( \frac{\partial l_i(\hat{\Theta})}{\partial \Theta} \right)^T. \quad (94)$$

W przypadku, gdy założeniu o warunkowym rozkładzie normalnym jest prawdziwe to  $A = B$  i wyniki oszacowań metodą największej wiarygodności mogą zostać wykorzystane. Jednakże założenie to wydaje się być zbyt rygorystyczne, szczególnie w świetle przeprowadzonych na wstępie rozdziału rozważań o własnościach finansowych szeregów czasowych. Założenie to jest szczególnie kłopotliwe przy szacowaniu parametrów modeli klasy ARCH wyższego rzędu, ponieważ redukuje przestrzeń parametrów z której można budować funkcję optymalizacyjną.

Interesującym podejściem relaksującym wyżej omawiane założenie była procedura estymacyjna zaproponowana przez Lee i Hansena w 1994r. dla modeli klasy GARCH(1,1) i IGARCH(1,1). Procedura ta pozwala na to aby  $\alpha_1 + \beta_1$  były równe jedności lub nawet trochę większe od jedności. Zastosowali oni dwa estymatory QML. Pierwszy, lokalny estymator,  $\hat{\Theta}$  będący wartością wektora parametrów maksymalizujących funkcję celu w ograniczonej regionie  $\Theta_2$  przestrzeni parametrów  $\hat{\Theta}$  takim, że

$$\Theta_2 \subset \Theta. \quad (95)$$

Drugi  $\hat{\Theta}$  określony został jako globalny estymator QML.

W celu udowodnienia zgodności i asymptotycznej normalności tych estymatorów przyjęli oni następujące założenia

$$E(\varepsilon_t | \Psi_t) = 0, \quad (96)$$

$$E(\varepsilon_t^2 | \Psi_t) = 1, \quad (97)$$

$$E(\log(\alpha_1 \varepsilon_t^2) | \Psi_t) < 0, \quad (98)$$

$$E(\varepsilon_t^4 | \Psi_t) < k < \infty, \quad (99)$$

gdzie  $\Psi_t$  jest zbiorem dostępnej informacji w czasie  $t$ .

Pierwsze dwa założenia zapewniają istnienie dwóch pierwszych momentów szeregu  $r_t$ . Trzecie założenie zapewnia stacjonarność procesu, natomiast czwarte nakłada ograniczenie na czwarty moment oraz określa jego skończoność.

Wykorzystując trzy pierwsze założenia wykazali, iż  $\hat{\Theta}$  jest zgodnym estymatorem wektora parametrów  $\Theta_0$  bez względu na wartość  $\alpha_1 + \beta_1$ . Dodatkowo  $\hat{\Theta}$  jest również zgodnym estymatorem  $\Theta_0$  ale tylko w przypadku, gdy  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Należy zaznaczyć, iż nie rozszerzyli oni swojej propozycji do modeli GARCH wyższego rzędu.

W przypadku modeli SV można wyróżnić dwie główne metody estymacyjne. Pierwsza, opisywana wcześniej, to metoda QML. Druga, zaproponowana przez Jacquier's w 1994r., to MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*).

W celu skonstruowania funkcji prawdopodobieństwa niezbędnej do oszacowania modelu SV metodą QML, musi on zostać umieszczony w swojej przestrzeni. Rozważmy model AR(1) SV

$$r_t = \exp\left(\frac{1}{2} h_t\right) \varepsilon_t, \quad (100)$$

gdzie

$$h_t = \alpha + \phi h_{t-1} + \eta_t,$$

$$\eta_t = N(0, \sigma_\eta^2)$$

$\varepsilon_t$  jest zmienną losową o średniej zero i jednostkowej wariancji oraz  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są niezależne.

Model (100) może zostać zapisany w postaci

$$r_t^* = h_t + \xi_t, \quad (101)$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \eta_t, \quad (102)$$

gdzie

$$r_t^* \text{ jest równe } \log r_t^2 \text{ skorygowane o wartość średniej } \alpha^* = -1.27 + \frac{\alpha}{1-\phi},$$

Parametr  $\alpha^*$  może być oszacowany na podstawie wartości średniej wyznaczonej dla  $\log r_t^2$ . Stąd jeżeli założymy, iż parametr  $\alpha^*$  jest znany to można go usunąć z konstruowanej funkcji prawdopodobieństwa i skoncentrować się na estymacji parametrów  $\phi$  i  $\sigma_\eta^2$ .

W celu rozpoczęcia procesu szacowania parametrów modelu musi on zostać umieszczony w swojej przestrzeni, która tworzy relację pomiędzy obserwowanym szeregiem czasowym,  $r_t^*$ , a nie obserwowalnym wektorem,  $h_t$ , poprzez równanie pomiarowe.

Równania pomiarowe oraz przejścia dane są wzorami

$$r_t^* = Z_t h_t + \xi_t, \quad (103)$$

$$h_t = T_t h_{t-1} + \eta_t. \quad (104)$$

$Z_t$  nazywamy wektorem mierzącym, natomiast  $T_t$  nazywamy macierzą przejścia.

Kolejnym krokiem jest zastosowanie filtrów Kalmana w celu wyznaczenia jedno-okresowych błędów prognozy, a następnie sformułowaniu funkcjiprawdo-podobieństwa tych błędów.

Błędy prognozy dane są równaniem

$$\hat{\xi}_t = r_t^* - r_{t|t-1}^*. \quad (105)$$

Na podstawie (105) zbudujemy funkcję prawdopodobieństwa zawierającą wektor parametrów modelu SV,  $\Omega$ . Jednakże przed jej zbudowaniem należy rozwiązać problem konstrukcji składnika  $r_{t|t-1}^*$ , który może zostać przedstawiony jako

$$r_{i|t-1}^* = Z_t \hat{h}_{i|t-1} = \hat{h}_{i|t-1}, \quad (106)$$

gdzie  $\hat{h}_{i|t-1}$  jest szacunkiem  $h_i$  dokonany na podstawie wszystkich przeszłych informacji.

Niech  $\hat{P}_{i|t-1}$  oznacza macierz kowariancji  $\hat{h}_{i|t-1}$ , natomiast  $f_t$  niech oznacza wariancję  $r_{i|t-1}^*$ . Przy pomocy rekursywnego filtru Kalmana oszacujemy  $\hat{h}_{i|t-1}$  a przez to  $r_{i|t-1}^*$

$$\hat{h}_{i|t-1} = \phi \hat{h}_{i|t-1}, \quad (107)$$

$$\hat{P}_{i|t-1} = \phi^2 \hat{P}_{i|t-1} + \sigma_\eta^2, \quad (108)$$

$$\hat{h}_{i|t} = \hat{h}_{i|t-1} + \phi \frac{r_t^* - r_{i|t-1}^*}{f_t}, \quad (109)$$

$$\hat{P}_{i|t} = \hat{P}_{i|t-1} \left( 1 - \frac{\hat{P}_{i|t-1}}{f_t} \right), \quad (110)$$

$$f_t = \hat{P}_{i|t-1} + \frac{\pi^2}{2}. \quad (111)$$

Po zakończeniu iteracyjnego filtru Kalmana i otrzymaniu szacunku błędów prognozy można zbudować funkcją prawdopodobieństwa. Funkcja ta przyjmie postać

$$L(\Omega) = -\frac{1}{2} \left( T \log 2\pi + \sum_{i=1}^T \log f_t + \sum_{i=1}^T \frac{\hat{\xi}_t^2}{f_t} \right). \quad (112)$$

Wartość parametrów szacowana jest następnie poprzez maksymalizowanie wartości funkcji (112).

## 12. Zagadnienie agregacji czasowej oszacowanych parametrów

W celu umożliwienia pomiaru ryzyka dla różnych okresów czasu, konieczne jest zastosowanie metod określanych w ekonometrii – metodami agregacji czasowej (Diebold, Hickman, Inoue, Schuermann, 1997).

Problem agregacji czasowej sprowadza się do transformacji parametrów rozkładu zmian stóp zwrotu szacowanych na podstawie danych o wysokiej częstotliwości na ich odpowiedniki właściwe dla dłuższych okresów czasu. Transformacji tej można dokonać na dwojaki sposób. Poprzez modelowanie parametrów na podstawie danych gromadzonych w pożądanym interwałach czasu, bądź też poprzez proces skalowania.

Agregacja poprzez skalowanie możliwa jest tylko przy przyjęciu założenia, iż obserwowane zmiany stóp zwrotu charakteryzują się brakiem autokorelacji. Założenie to jest zgodne z teorią rynku efektywnego, która twierdzi, iż bieżący poziom ceny uwzględnia wszystkie aktualne informacje wobec czego zmiany ceny muszą następować w wyniku napływu nowych informacji, które nie są przewidywalne, a co za tym idzie są nieskorelowane. Dodatkowo musimy założyć, że rozkłady zmian stóp zwrotu są stałe w czasie.

Na podstawie tych założeń, można zapisać:

$$E(R_{t,z}) = E(R_{t-1}) + E(R_t) = 2E(R) \quad (113)$$

$$V(R_{t,z}) = V(R_{t-1}) + V(R_t) = 2V(R) \text{ ponieważ } Cov(R_{t-1}, R_t) = 0 \quad (114)$$

Zgodnie z powyższym założeniem zarówno wartość oczekiwana jak i wariancja są liniowymi funkcjami czasu. Odchylenie standardowe natomiast, skalowane jest pierwiastkiem czasu.

Należy zwrócić uwagę, że skoro odchylenie standardowe rośnie wraz z pierwiastkiem czasu a średnia jest liniową funkcją czasu to dominuje ona w dłuższych okresach. Wariancja natomiast jest dominująca w krótkich okresach.

Dokonywanie agregacji czasowej poprzez procedurę skalowania obarczone jest jednak bardzo ostrymi założeniami. Jak wykazano na wstępie niniejszego rozdziału, empiryczne własności finansowych szeregów czasowych nie spełniają wymaganych warunków. W rezultacie czego otrzymane oceny parametrów są niepoprawne i powodować będą błędy w pomiarze ryzyka.

Rozwiązaniem zaistniałego problemu może być szacowanie parametrów na podstawie obserwacji gromadzonych w odcinkach czasu właściwych dla okresu pomiarowego. Podstawową wadą tego rozwiązania jest konieczność dysponowania dostatecznie długimi szeregami obserwacji, co bardzo często jest nie możliwe do uzyskania na drodze bezpośredniej obserwacji. Dlatego też, jedną z częściej stosowanych technik jest procedura określana mianem *bootstrapping* (*RiskMetrics – Technical Document Fourth Edition*, 1996).

Polega ona na generowaniu rozkładu zmian stóp zwrotu w pożądanym horyzoncie czasu z obserwowalnych rozkładów zmian.

Alternatywnie, można zastosować procedurę agregacji czasowej związanej bezpośrednio z modelem procesu rządzącego kształtowaniem się agregowanego parametru. Drost i Nijman przedstawili metodę agregacji czasowej procesu GARCH. Pokazali, że na podstawie serii dziennych stóp zwrotu  $\{y_{(t)}\}_{t=1}^T$  podążającej za procesem GARCH(1,1) odpowiednie h-dzienne stopy zwrotu też podążają za procesem GARCH(1,1) z:

$$\sigma_{(h)}^2 = \omega_{(h)} + \beta_{(h)}\sigma_{(h)-1}^2 + \alpha_{(h)}y_{(h)-1}^2, \quad (115)$$

gdzie:

$$\omega_{(h)} = h\omega \frac{1 - (\beta - \alpha)^h}{1 - (\beta + \alpha)}, \quad (116)$$

$$\alpha_{(h)} = (\beta + \alpha)^h - \beta_{(h)}, \quad (117)$$

a  $|\beta_{(h)}| < 1$  jest rozwiązaniem równania kwadratowego:

$$\frac{\beta_{(h)}}{1 + \beta_{(h)}^2} = \frac{a(\beta + \alpha)^h - b}{a[1 + (\beta + \alpha)^{2h}] - 2b}, \quad (118)$$

gdzie:

$$a = h(1 - \beta)^2 + 2h(h - 1) \frac{(1 - \beta - \alpha)^2 (1 - \beta^2 - 2\beta\alpha)}{(K - 1)(1 - (\beta + \alpha)^2)} +$$

$$+ h \frac{[h - 1 - h(\beta + \alpha) + (\beta + \alpha)^h] [\alpha - \beta\alpha(\beta + \alpha)]}{1 - (\beta + \alpha)^2}, \quad (119)$$

$$b = [\alpha - \beta\alpha(\beta + \alpha)] \frac{1 - (\beta + \alpha)^{2h}}{1 - (\beta + \alpha)^2}, \quad (120)$$

a K jest miarą kurtozy serii  $y_t$ .

Procedura ta, jednakże związana jest silnie z rodzajem procesu rządzącego obserwowanymi szeregami czasowymi.

### 13. Wyniki empirycznego modelowania finansowych szeregów czasowych

Dotychczasowe rozważania teoretyczne zostaną zilustrowane przykładem empirycznego zastosowania modeli procesów stochastycznych do opisu kształtowania się dziennych stóp zwrotu wyznaczonych na podstawie kształtowania się indeksu giełdowego WIG, kursu dolara amerykańskiego oraz stopy procentowej WIBOR 1M.

Proces modelowania rozpoczniemy od identyfikacji tj. sprawdzenia tezy o heteroscedastycznej wariancji badanych szeregów czasowych.

W tabeli 6 zostały przedstawione wartości statystyki  $TR^2$  testu LM.

Tabela 1. Wyniki testu LM na heteroscedastyczność (źródło: obliczenia własne).

Zmienna	Statystyka LM
WIG	132.86
USD	131.65
WIBOR 1M	30.02

Wartość graniczna testu (dla poziomu istotności 5%) jest równa wartości statystyki chi-kwadrat z jednym stopniem swobody i wynosi 3.841. Stąd hipoteza zerowa jest odrzucona dla wartości testu większych od 3.841. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, iż wszystkie badane cechy charakteryzują się zmienną w czasie wariancją.

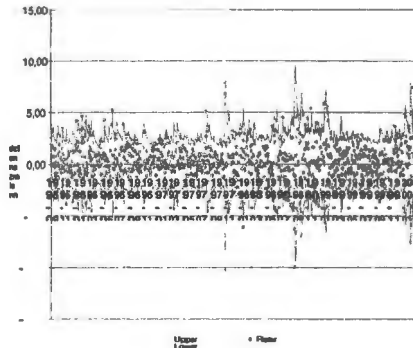
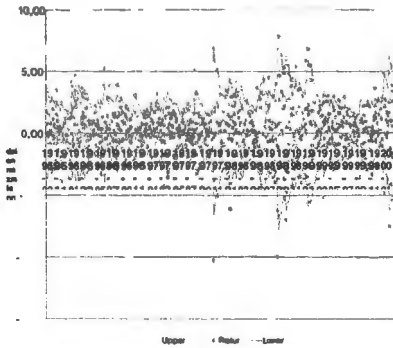
Kolejnym krokiem procesu modelowania jest postawienie hipotezy modelowej. Punktem wyjścia jest model GARCH(1,1). W tabeli 7 przedstawiono wyniki szacunków hipotezy modelowej uzyskanych omawianą wcześniej metodą QML.

Tabela 2. Wartość oszacowanych parametrów modelu GARCH(1,1) (źródło: obliczenia własne).

Zmienna	$\alpha_0$		$\alpha_1$		$\beta_1$	
	$\hat{\alpha}_0$	T	$\hat{\alpha}_1$	T	$\hat{\beta}_1$	t
WIG	$3.35 \cdot 10^{-5}$	5.16	0.23	35.06	0.69	25.14
USD	$4.29 \cdot 10^{-6}$	10.97	0.32	12.52	0.56	18.83
WIBOR 1M	$7.28 \cdot 10^{-9}$	35.08	0.69	22.34	0.30	17.91

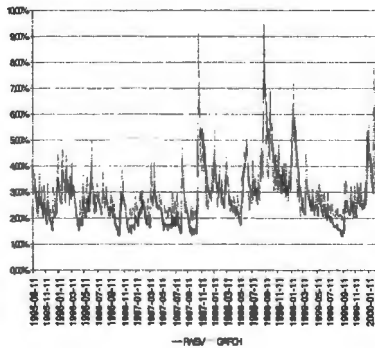
Wartość oszacowanych parametrów są bliskie jedności dla wszystkich badanych zmiennych co może wskazywać na konieczność zastosowania modelu IGARCH. Należy również zaznaczyć, iż wszystkie parametry są statystycznie istotne.

Na rysunkach 10 – 12 przedstawiono wyniki modelowania wariancji badanych szeregów czasowych oszacowanym modelem GARCH. Dla celów porównawczych zamieszczono szacunki wariancji modelem stochastycznej wariancji (RWSV).



a) Modelowanie wariancji rynkowych stóp zwrotu modelem RWSV

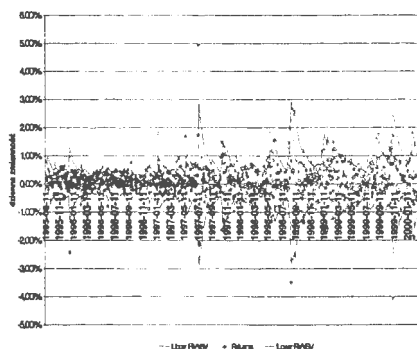
b) Modelowanie wariancji rynkowych stóp zwrotu modelem GARCH(1,1)



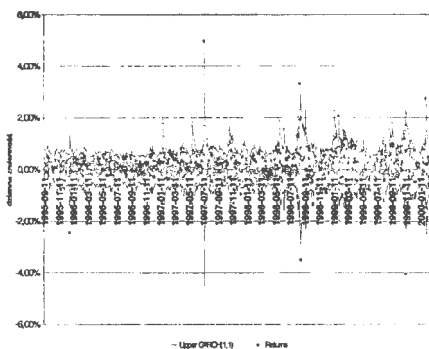
c) Porównanie wariancji rynkowych stóp zwrotu oszacowanych modelem RWSV i GARCH(1,1)

Rysunek 1. Wyniki modelowania wariancji stóp zwrotu (WIG) modelem RWSV i GARCH(1,1) (źródło: obliczenia własne).

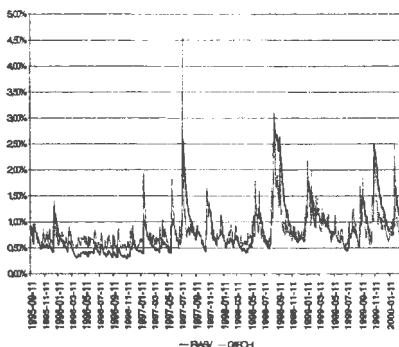




a) Modelowanie wariancji rynkowych stóp zwrotu modelem RWSV

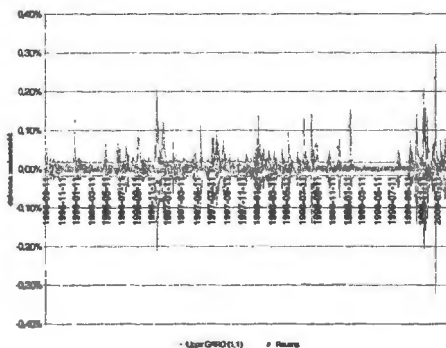
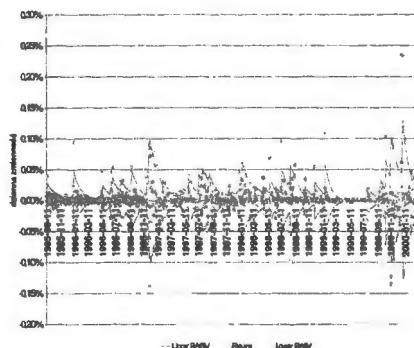


b) Modelowanie wariancji rynkowych stóp zwrotu modelem GARCH(1,1)



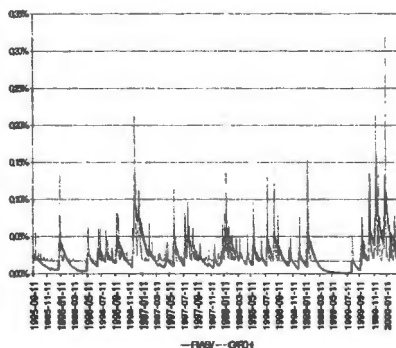
c) Porównanie wariancji rynkowych stóp zwrotu oszacowanych modelem RWSV i GARCH(1,1)

Rysunek 2. Wyniki modelowania wariancji stóp zwrotu (USD) modelem RWSV i GARCH(1,1) (źródło: obliczenia własne).



a) Modelowanie wariancji rynkowych stóp zwrotu modelem RWSV

b) Modelowanie wariancji rynkowych stóp zwrotu modelem GARCH(1,1)



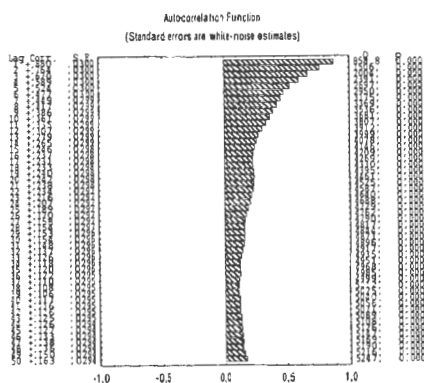
c) Porównanie wariancji rynkowych stóp zwrotu oszacowanych modelem RWSV i GARCH(1,1)

Rysunek 3. Wyniki modelowania wariancji stóp zwrotu (WIBOR 1M) modelem RWSV i GARCH(1,1) (źródło: obliczenia własne).

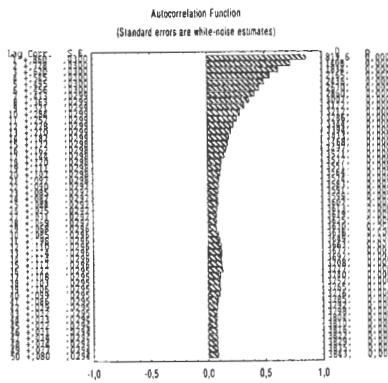
Analiza wyników modelowania wariancji badanych szeregów czasowych modelem GARCH i RWSV wskazuje na duże ich podobieństwo. Przy czym należy zaznaczyć, iż oszacowana wariancja jest bardziej zmienna w przypadku modelu GARCH niż w modelu RWSV. Przeanalizujemy otrzymane wyniki pod względem ich jakości opisu badanych szeregów czasowych.

Funkcja autokorelacyjna oszacowanych modeli warunkowej wariancji jest duża i jest istotnie różna od zera nawet dla opóźnień rzędu 100 (zob.

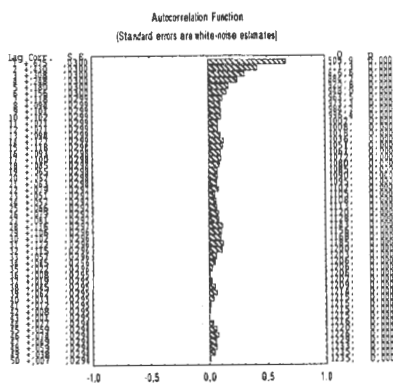
Rysunek 13). Jednakże funkcja autokorelacji wyznaczona dla zestandaryzowanych stóp zwrotu oszacowaną warunkową wariancją nie istotnie różni się od zera co wskazuje na występowanie gausowskiego procesu białego szumu (zob. Rysunek 14).



a) WIG

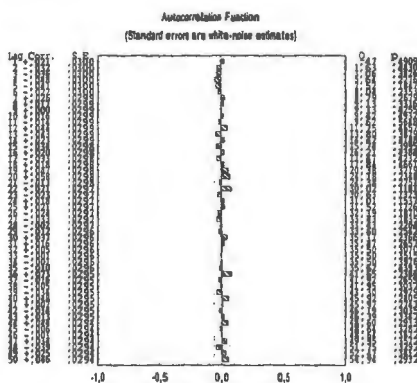


b) USD

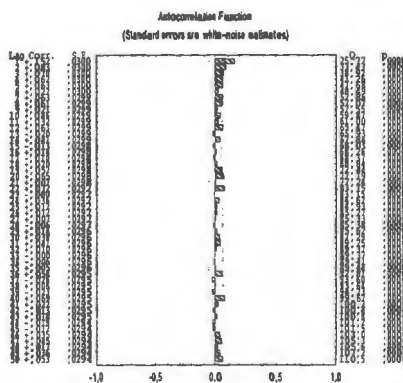


c) WIBOR 1M

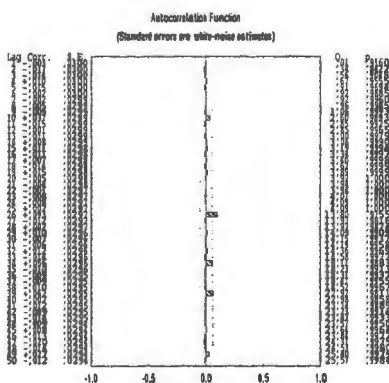
Rysunek 4. Funkcja autokorelacyjna oszacowanej wariancji modelem GARCH(1,1) (źródło: obliczenia własne).



a) WIG



b) USD



c) WIBOR 1M

Rysunek 5. Funkcja autokorelacyjna stóp zwrotu skorygowanych o wariancję oszacowaną modelem GARCH(1,1) (źródło: obliczenia własne).

Wartość statystyki Box-Ljung'a dla niestandardyzowanych stóp zwrotu wartości indeksu WIG wynosiła 96 natomiast po standaryzacji spadła do 0.47. Stąd możemy zaakceptować hipotezę, iż proces GARCH(1,1) jest odpowiednim modelem dla stóp zwrotu indeksu giełdowego WIG. Analogicznie w przypadku kursu dolara amerykańskiego i stawki WIBOR 1M redukcja wartości statystyki Box-Ljung'a była znacząca, tj. odpowiednio z 96.08 do 25.76 i 505.94 do 0.1. Otrzymany wynik również pozwala przyjąć hipotezę, iż model GARCH(1,1) pozwala na opis kształtowania się wariancji dziennych stóp zwrotu wyznaczonych dla kursu dolara amerykańskiego i stawki WIBOR 1M.

Reasumując otrzymane wyniki należy stwierdzić, iż zarówno model GARCH jak i RWSV w sposób zadawalający opisują kształtowanie się analizowanych zmiennych. Jak już wspomniano szacunki zmienności uzyskiwane z modelu GARCH są znacznie bardziej zmienne niż te otrzymane z modelu SV. Spowodowane jest to faktem, iż w modelu GARCH zmienność zależy bezpośrednio od kwadratów stóp zwrotu z okresów poprzednich podczas gdy w przypadku modelu SV tak nie jest. Różnica ta pozwala stwierdzić, iż w modele klasy ARCH są lepiej przystosowane do modelowania i prognozowania wariacji stóp zwrotu dla krótkich okresów czasu (*ze względu na szybki stopień reakcji na napływ nowych informacji*) natomiast modele klasy SV posiadają cech pozwalające na otrzymywanie dokładniejszych prognoz o dłuższych horyzontach.

#### 14. Zastosowanie procesów stochastycznych do budowy scenariuszy rozwojowych wykorzystywanych w kwantyfikacji ryzyka stopy procentowej

Przykładowym zastosowaniem, modeli procesów stochastycznych finansowych szeregów czasowych jest budowa scenariuszy rozwojowych.

Na podstawie oszacowanych parametrów modelu procesu rządzącego zmianami stóp procentowych oraz przyjętej hipotezy modelowej dotyczącej kształtowania się stopy procentowej można wygenerować scenariusze wykorzystywane później w procesie pomiaru ryzyka stopy procentowej. Procedurę tę prześledzimy na przykładzie dwóch modeli:

- a) geometrycznego modelu ruchów Browna,
- b) modelu dynamiki stóp procentowych Cox'a, Ingresoll'a i Ross'a (1985).

Model ruchów Browna zakłada, że innowacje w cenach aktywów są niezależne w czasie, występuje brak autokorelacji, a co za tym idzie małe ruchy w cenie mogą być przedstawione następująco:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dz, \quad (121)$$

gdzie:  $dz$  – jest liczbą losową o rozkładzie normalnym ze średnią zero i wariancją  $dt$ .

Parametry  $\mu_t$  i  $\sigma_t$ , tj. parametr dryftu oraz zmienności w momencie  $t$ , mogą ulegać zmianom w czasie. Ich ewolucja w czasie może być modelowana za pomocą modeli klasy ARCH.

W praktyce proces o nieskończenie małych przyrostach  $dt$  aproksymowany jest poprzez dyskretne zmiany  $\Delta t$ . Oznaczmy przez  $t$  moment bieżący,  $T$  moment docelowy, a przez  $\tau = T - t$  horyzont

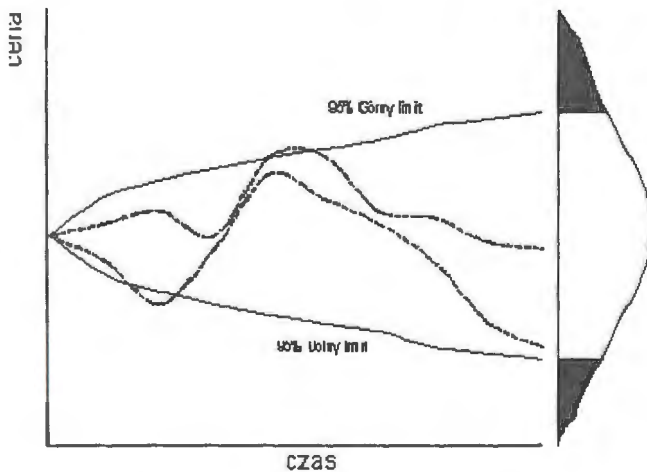
pomiarowy. W celu wygenerowania serii liczb losowych  $S_{t+i}$  na przedziale  $\tau$ , dokonuje się podziału  $\tau$  na  $n$  elementów takich, że  $\Delta t = \frac{\tau}{n}$ .

Sumując  $\frac{dS}{S}$  przez skończony przedział czasu, otrzymamy

$$\Delta S_t = S_{t-1} (\mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}), \quad (122)$$

gdzie:  $\varepsilon$  - jest zmienną losową o rozkładzie  $N(0,1)$ .

Na podstawie równania (122) buduje się ścieżki cenowe, wykorzystywane w pomiarze ryzyka rynkowego, w tym i ryzyka stopy procentowej. Na rysunku 15 przedstawiono graficznie opisywaną procedurę.



Rysunek 6 Procedura budowy ścieżek cenowych (źródło: opracowanie własne).

Geometryczny model ruchów Browna stanowi wystarczające narzędzie modelowania zachowań niektórych finansowych wielkości, jednakże nie pozwala na modelowanie cen krótkoterminowych instrumentów o stałej stopie zwrotu, których ceny zbiegają się do wartości nominalnej wraz ze zbliżaniem się ich zapadalności (Finger, 1996; Konieczny, 1998).

Innym podejściem modelowania dynamiki stóp procentowych jest model

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz, \quad (123)$$

który został wykorzystany przez Coxa, Ingresolla i Rossa do modelowania struktury czasowej stóp procentowych. Model (123) posiada tę zaletę, iż zgodny jest z zaobserwowanymi empirycznie własnościami stóp procentowych, tj. ich oscylacji wokół długoterminowej średniej (*ang. mean reversion*), proporcjonalności wariancji procesu do poziomu stóp procentowych (*wariancja procesu maleje wraz ze zbliżaniem się stóp procentowych do zera*).

Utworzenie scenariusza kształtowania się stopy procentowej jest zagadnieniem stosunkowo prostym w przypadku generowania cen pojedynczego instrumentu. W sytuacji, gdy tworzymy wielowymiarowe scenariusze powstaje problem związany z generowaniem liczb losowych  $y$  o a priori określonym współczynniku korelacji. Problem ten można rozwiązać wykorzystując techniki matematyczne np. dekompozycję Choleskiego (*RiskMetrics – Technical Document Fourth Edition, 1996*).

Inną metodą budowy scenariuszy jest metoda oparta na subiektywnej ocenie badacza. Metoda ta pozwala na uchwycenie niemierzalnych zjawisk oraz ich wpływ na kształtowanie się stopy procentowej. Powstaje jednak zagadnienie translacji subiektywnych oczekiwań co do kształtowania się parametrów na ich statystyczne oceny. Szczególne znaczenie tutaj ma subiektywna korekta korelacji pomiędzy obserwowanymi zmianami stóp procentowych, gdyż zmiana jednego ze współczynników pociąga za sobą konieczność przebudowania całej macierzy korelacji.

W celu arbitralnego korygowania współczynników korelacji rozważmy zbiór  $n$  aktywów z ich macierzą korelacji  $C$ . Niech  $I$  będzie podzbiorem  $\{1, 2, \dots, n\}$  oznaczającym aktywa, których korelacje mają zostać zmienione, a  $m$  niech oznacza rozmiar tego podzbioru. Załóżmy dalej, że  $\Theta$  jest liczbą z przedziału od 0 do 1.

Zapiszmy średnią zmianę stopy procentowej dla  $m$  elementów podzbioru  $I$ :

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i \in I} R_i \quad (124)$$

Nowe zmienne losowe  $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_n$  dane są:

$$\hat{R}_i = \begin{cases} (1 - \Theta)R_i + \Theta\bar{R} & \text{dla } i \in I \\ R_i & \text{dla } i \notin I \end{cases} \quad (125)$$

Alternatywnie, nowe zmienne losowe można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\hat{R} = AR \quad (126)$$

gdzie

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 - \Theta + \frac{\Theta}{m} & \text{dla } i = j, i \in I \\ \frac{\Theta}{m} & \text{dla } i = j, i \notin I \\ \frac{\Theta}{m} & \text{dla } i \neq j, i \in I, j \in I \\ 0 & \text{dla } i \neq j, i \notin I, j \notin I \end{cases} \quad (127)$$

Kowariancja zmian stóp procentowych dana jest wzorem

$$\hat{\Sigma} = ACA' \quad (128)$$

W celu wyznaczenia nowej macierzy  $\hat{C}$  należy znormalizować macierz  $\hat{\Sigma}$ . W tym celu zdefiniujemy macierz  $S$  jako:

$$\hat{S}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ \frac{1}{\sqrt{\Sigma_{ij}}} & \text{dla } i \neq j \\ 0 & \end{cases} \quad (129)$$

macierz  $\hat{C}$  otrzymamy:

$$\hat{C} = \hat{S}\hat{\Sigma}\hat{S} \quad (130)$$

Nowo utworzona macierz  $\hat{C}$  jest dodatnio zdefiniowana dla wartości  $\Theta$  mniejszych od jedności. Parametr ten pozwala na arbitralne korygowanie macierzy korelacji.

Omówione w niniejszym podrozdziale metody budowy parametrów wykorzystywanych w ocenie ryzyka stopy procentowej koncentrują się na próbie ekstrapolacji obserwowanych zjawisk w przyszłość. Alternatywą tego podejścia jest zdobywająca coraz większe uznanie metoda polegająca na szacowaniu tych parametrów na podstawie obserwowanych cen instrumentów pochodnych (ang. Implied Volatility models).



## Literatura

1. Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, vol.31, 1986
2. Bollerslev T., Engle R. F., Nelson D. B., *Arch Models*, University of California, Discussion Paper 93-49, San Diego, November 1993
3. Box G.E.P, *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa 1983
4. Chow G. C., *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1995.
5. Clark P., *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative process*, Econometrica, 41, 1973
6. Cox J.C., Ingresoll J.E., Ross S.A., *A theory of term structure of interest rates.*, Econometrica March 1985
7. Danielsson J., *Stochastic Volatility in assets prices: Estimation with simulated maximum likelihood*, Journal of Econometrics 64, 1994, s. 375 – 400
8. Danielsson J., de Vries C., *Extreme Returns, Tail Estimation, and Value-at-Risk*, Working Papers, London School of Economics and Institute of Economic Studies at University of Iceland, Lipiec 1997
9. Diebold F., Hickman A., Inoue A., Schuermann T., *Converting 1-day volatility to h-day volatility: Scaling by  $\sqrt{h}$  is worse than you think.*, Working Papers, University of Pennsylvania, 1997
10. Engle R.F., *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation*, Econometrica, 50, 1982r., s. 987 – 1008
11. Finger C., *Accounting for “pull to par” and “roll down” for RiskMetrics™ cashflows*, RiskMetrics™ Monitor, Third quarter 1996
12. Forlicz S., *Rozkłady asymetryczne zmiennej losowej*, Prace naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 1986.
13. French K., Roll R., *Stock return variances*, Journal of Financial Economics 17/86.
14. Ghysels E., Harvey A., Renault E., *Stochastic Volatility*, Scientific Series CIRANO, Montreal, listopad 1995
15. Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A., *Modele ekonometryczne w procesie prognozowania*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1981
16. Grzesiak S., Konieczny P., *Prognozowanie zmienności cen lokat międzybankowych z użyciem modeli GARCH*, Toruń 1997
17. Harvey A., Ruitz E., Shephard N., *Multivariate stochastic variance models*, Review of Economic Studies 61, 1994
18. Jajuga K., *Niektóre własności mieszanki dwóch rozkładów normalnych*, Prace naukowe AE we Wrocławiu, Wrocław 1991

19. Konieczny P., *Ocena ryzyka cenowego skarbowych papierów wartościowych z wykorzystaniem metody Value at Risk*, Gazeta Bankowa grudzień 1998
20. Lee S., Hansen B.E., *Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator*, *Econometric Theory* 10, 1994
21. Mandelbrot B., *The variation of certain speculative prices*, *Journal of Business* 36, 1963, s. 394 – 419.
22. Nelson D., *Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach*, *Econometrica*, vol.59, 1991
23. *RiskMetrics – Technical Document Fourth Edition*, J.P. Morgan, New York 1996
24. Talaga L., Zieliński Z., *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa, 1986r.
25. Taylor S.J., *Modelling financial time series*, John Wiley and Sons Ltd., 1986r.
26. Vasicek O.A., *An equilibrium characterization of term structure.*, *Journal of Financial Economics*, November 1977



## Zarządzanie ryzykiem inwestycji ,

Maciej Krawczak,  
Antoni Miklewski,  
Andrzej Jakubowski,  
Piotr Konieczny

Rozwój rynków finansowych doprowadził do sytuacji, w której jednym z najistotniejszych celów w banku staje się zarządzanie ryzykiem cenowym. Analizując ryzyko cenowe banku, działającego w warunkach polskich, wydaje się, że najważniejsze stają się krótkoterminowe prognozy cen rynkowych (np. stóp procentowych, kursów walutowych itd.). Bezpieczne zarządzanie ryzykiem cenowym oraz krótkoterminowe prognozowanie cen stają się w Polsce jednymi z najważniejszych elementów polityki banków.

W książce przedstawiono:

- modele struktury terminowej stóp procentowych,
- zagadnienia zarządzania portfelem obligacji,
- metodę value at risk,
- procesy stochastyczne w modelowaniu i prognozowaniu szeregów czasowych,
- analizę i predykcję szeregów czasowych z wykorzystaniem elementów sztucznej inteligencji i teorii informacji.

**ISBN 83-85847-52-9**

---

---

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa  
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: [bibliote@ibspan.waw.pl](mailto:bibliote@ibspan.waw.pl)