



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**WIELOKRYTERIALNE DECYZJE
KOOPERACYJNE**

**METODY
WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO**

Lech Krus

Warszawa 2011



**POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH**

**Seria: BADANIA SYSTEMOWE
Tom 70**

**Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum**

Warszawa 2011

Rada redakcyjna serii: BADANIA SYSTEMOWE

Prof. Olgierd Hryniewicz - przewodniczący

Prof. Jakub Gutenbaum – redaktor naczelny

Prof. Janusz Kacprzyk

Prof. Tadeusz Kaczorek

Prof. Roman Kulikowski

Prof. Marek Libura

Prof. Krzysztof Malinowski

Prof. Zbigniew Nahorski

Prof. Marek Niezgódka

Prof. Roman Słowiński

Prof. Jan Studziński

Prof. Stanisław Walukiewicz

| |
|------------------------|
| Prof. Andrzej Weryński |
|------------------------|

Prof. Antoni Żochowski



**POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH**

Lech Kruś

**WIELOKRYTERIALNE DECYZJE
KOOPERACYJNE
METODY WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO**

Warszawa 2011

**Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 2011**

Dr inż. Lech Kruś
Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk
Newelska 6, 01-447 Warszawa
email: krus@ibspan.waw.pl

Recenzenci:

Prof. dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski

Prof. dr hab. inż. Andrzej P. Wierzbicki

Skład: Lech Kruś i Urszula Kruś

Wydawca:

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk
Newelska 6, 01-447 Warszawa
www.ibspan.waw.pl

ISSN 0208-8029

ISBN 9788389475381

Wprowadzenie

W pracy rozważa się sytuacje decyzyjne, w których jest kilku decydentów negocjujących warunki możliwej współpracy. Problem dotyczy podziału efektów współpracy, przy czym każdy decydent ma swój odrębny, zestaw celów, które chciałby osiągnąć i kieruje się swoimi preferencjami. Cele te są w ogólnym przypadku konfliktowe, zarówno w przypadku każdego decydenta jak i między decydentami. Każdy decydent ma określony wektor kryteriów mierzących poziomy osiągnięcia jego celów, przy czym wartości tych kryteriów zależą od decyzji wszystkich decydentów. Sytuacje takie nazywane są sytuacjami kooperacyjnymi z wielokryterialnymi wypłatami decydentów. Zakłada się, że można zbudować model matematyczny opisujący taką sytuację decyzyjną a w szczególności pozwalający wyznaczyć wielokryterialne wypłaty decydentów w zależności od podejmowanych przez nich decyzji.

Praca dotyczy problemów metodologicznych związanych ze wspomaganiami procesu decyzyjnego w takich sytuacjach przy wykorzystaniu modeli matematycznych. Przedstawia się podstawy teoretyczne i metody, które mogą być wykorzystane w konstrukcji systemów komputerowych wsparcia decyzyjnego.

Cechą charakterystyczną rozpatrywanych w pracy problemów w przypadku wielokryterialnych wypłat jest to, że każdy decydent ma do czynienia z pewnym zbiorem tzw. niezdominowanych rozwiązań, przy czym zbiory rozwiązań decydentów są wzajemnie współzależne. Zbiory niezdominowanych rozwiązań są na ogół niemożliwe do zapisania w formie analitycznej i przedstawienia decydom w takiej formie do analizy. Możliwe jest natomiast wyznaczenie pewnej skończonej liczby punktów należących do tych zbiorów przy zastosowaniu metod obliczeniowych.

W uzupełnieniu do rozwijanych w pracy podstaw teoretycznych i metod wspomaganie decyzji kooperacyjnych, rozpatruje się również zagadnienia budowy i zastosowania systemów komputerowych nie tylko do wspomaganie analizy decyzyjnej dokonywanej indywidualnie przez każdego decydenta z uwzględnieniem jego preferencji, ale także do wspomaganie procesu mediacji, w trakcie którego generowane są propozycje mediacyjne.

Dla przypadku pojedynczego decydenta rozwinięte zostały metody wielokryterialnego wspomaganie decyzji. Istnieje już obecnie bardzo wiele prac przeglądowych i monografii poświęconych metodom wielokryterialnego podejmowania decyzji. np. (Branke, Deb, Miettinen, Słowiński 2008), (Wierzbicki, Makowski, Vessels 2000), (Kaliszewski 1994, 2006), (Chankong, Haimes 1983), (Cohon, 1985), (Galas, Nykowski, Żółkiewski 1987), (Hwang, Masud, 1979), (Sawaragi, Nakayama, Tanino 1985), (Steuer 1986), (Yu 1985), (Zeleny 1982). Proponowane w tych pracach podejścia mają na celu umożliwienie decydentowi wyboru ze zbioru rozwiązań niezdominowanych rozwiązania zgodnego z jego preferencjami, przy zastosowaniu pewnej procedury przeglądania tego zbioru. Wykorzystywane są przy tym różne metody obliczeniowe.

Wśród stosowanych podejść na szczególną uwagę zasługują metody stosujące pojęcie tzw. funkcji osiągnięcia, wykorzystujących poziomy aspiracji czy punkty referencyjne, sprecyzowane przez decydenta, por. (Wierzbicki, 1982, 1986, Wierzbicki i inni 2000). W metodach tego typu stosowana jest interakcyjna procedura, w trakcie której decydent może coraz lepiej poznawać zbiór rozwiązań niezdominowanych, wyznaczając przy pomocy systemu komputerowego niektóre rozwiązania z tego zbioru. Odpowiednio dobierając punkty referencyjne może także kierować sposobem przeglądania tego zbioru i wybrać ostateczne rozwiązanie zgodnie ze swoimi preferencjami.

W przypadku kilku decydentów zagadnienie jest bardziej złożone, ponieważ istnieje wiele indywidualnych zbiorów rozwiązań niezdominowanych i zbiory te są współzależne. Decydenci mają zwykle różne cele, których osiągnięcie jest mierzone za pomocą kryteriów i mają różne preferencje. Rozwiązaniem całego problemu jest wariant, który zostanie zaakceptowany przez wszystkich decydentów. Decydenci mogą być w różnej tzw. *pozycji przetargowej*. Każdy z nich może mieć inny wpływ na wyniki współpracy. Wspomaganie procesu decyzyjnego rozumiane jest w tym przypadku jako wspomaganie decydentów w procesie analizy umożliwiającej lepsze rozumienie ich pozycji przetargowej, a także jako wspomaganie procesu negocjacji, tzn. pomoc w znalezieniu akceptowalnego przez nich wszystkich rozwiązania.

Istnieje obecnie wiele prac poświęconym analizie procesów negocjacji a także ich formalnemu opisowi, np. prace (Barclay, Peterson 1976), (Raiffa 1982), (Axelrod 1985), (Wierzbicki 1985, 1987, 1990), (Kersten, Szapiro 1986), (Kersten i inni 1988, 1991), Sebenius (1992, 2007). Idee komputerowego wspomagania procesów negocjacji oraz przykłady zbudowanych systemów można

znaleźć w pracach autorów: Goeltner (1987), Jarke, Jelassi, Shakun (1987), Kersten (1985, 1988), Korhonen, Moskowitz, Wallenius, Zions (1986), DeSanctis, Gallupe (1987), Shakun (1988), Nunamaker, Applegate, Konsynsky (1988), Korhonen, Wallenius, (1989), Nyhart, Samarasan (1989), Vetschera (1990), Teich, Wallenius, Kuula, Zions (1995), Ehtamo, Hamalainen (2001), Heiskanen, Ehtamo, Hamalainen (2001). Rozwijane są idee wspomagania negocjacji przez internet, w tym z wykorzystaniem systemów wieloagentowych, i zbierane jest doświadczenie stosowania takich systemów, np. (Kersten, Sunil 1999, Kersten i inni 2002, Kersten, Lo 2003, Chen i inni 2005, Vetschera, Kersten, Köszegi 2006, Vetschera 2007, Wachowicz 2006, 2008, Szapiro, Wojewnik 2007, 2008).

Monografia przedstawia specyficzne autorskie podejście do problemu negocjacji przy wielokryterialnych wypłatach decydentów.

Sytuację decyzyjną, w której znajdują się decydenci opisuje się za pomocą gier wielokryterialnych, w szczególności wielokryterialnego problemu targu i wielokryterialnych gier koalicyjnych. Wypłaty w takich grach rozpatrywane są w przestrzeni będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów. W momencie rozpoczęcia badań w latach 80-ych ubiegłego wieku, teoria takich gier nie była jeszcze rozwinięta. Zaproponowano więc i przedstawia się w pracy odpowiednie sformułowania takich gier, koncepcje ich rozwiązań i analizę właściwości. Proponowane koncepcje rozwiązań charakteryzują się tym, że uwzględniają preferencje każdego z decydentów.

Proponuje się konstrukcję wielorundowych procedur wspomagających analizę decyzyjną wykonywaną przez decydentów jak i proces mediacji z wykorzystaniem koncepcji rozwiązań teorii gier. W każdej rundzie takiej procedury każdy decydent przeprowadza

analizę wielokryterialną osiągalnych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów, co umożliwi mu wskazanie swoich preferencji. Informacje o tych preferencjach umożliwiają z kolei wyliczenie propozycji mediacyjnej. Propozycja mediacyjna wyznaczana jest na podstawie jednej z proponowanych w pracy koncepcji rozwiązania gry wielokryterialnej. Propozycja mediacyjna uwzględnia preferencje wszystkich decydentów i jest przedmiotem indywidualnej analizy przez decydentów w kolejnej rundzie.

W pracy opisano, jak taka procedura może być zaimplementowana w konstrukcji komputerowego systemu wsparcia decyzyjnego.

Zaproponowane w pracy podejście stanowi uzupełnienie ewentualnie alternatywę do podejść prezentowanych w cytowanej wyżej literaturze.

Układ pracy jest następujący.

W rozdziale 2 przedstawia się podstawowe pojęcia i idee wielokryterialnej optymalizacji. Szczególną uwagę zwrócono na metodę punktu referencyjnego z wykorzystaniem funkcji osiągnięcia A.P. Wierzbickiego, ponieważ metoda ta jest wykorzystywana w proponowanych procedurach wspomagających analizę i proces mediacji, przedstawionych w dalszej części pracy.

Rozdział 3 wprowadza podstawowe pojęcia dotyczące negocjacji i klasycznej teorii gier. Klasyczną jest nazywana teoria gier rozwijana przy założeniu skalarnych wypłat graczy.

Kolejne rozdziały 4 - 9 zawierają oryginalne wyniki w zakresie przedmiotowym monografii uzyskane w trakcie prowadzonych badań.

Rozdział 4 zawiera ogólne sformułowanie wielokryterialnego problemu decyzyjnego w sytuacjach kooperacyjnych. Podaje się

definicję wielokryterialnego problemu targu. Proponuje się kilka koncepcji rozwiązań, stanowiących uogólnienie rozwiązań znanych z literatury. Rozwiązania te są określane z wykorzystaniem wprowadzonej, oryginalnej koncepcji tzw. punktu względnej utopii. Punkt ten uwzględnia preferencje decydentów określone w ich przestrzeniach kryteriów. Analizuje się właściwości tych rozwiązań i ich relacje.

Przedstawia się następnie możliwości wykorzystania tych rozwiązań w interakcyjnych procedurach mediacyjnych (Rozdział 5). Inspiracją do formułowania takich procedur były koncepcje i metody negocjacji (Raiffa 1982) stosowane w praktyce, np. zakończone sukcesem rokowania izraelsko-egipskie w Camp David. Proponuje się oryginalną procedurę, w której wprowadza się i łączy dwa sposoby wspomaganie decyzyjnego: tzw. jednostronne i wielostronne. Wspomaganie jednostronne pozwala każdemu z decydentów biorących udział w negocjacjach na niezależną analizę problemu bez uwzględnienia aktualnych decyzji pozostałych decydentów. Wspomagana jest analiza wielokryterialna wykonywana przez każdego z decydentów metodą punktu referencyjnego z użyciem funkcji osiągnięcia. We wspomaganium wielostronnym uwzględnione są aktualne decyzje wszystkich decydentów. Taki sposób wspomaganie decyzyjnego umożliwi decydentom lepsze poznanie ich sytuacji przetargowej, wybór propozycji rozwiązań zgodnie z ich preferencjami, a także wspomaga znalezienie konsensusu, jako rozwiązania niezdominowanego, akceptowanego przez wszystkich decydentów.

Powyższa procedura została wykorzystana w konstrukcji komputerowego systemu wsparcia decyzyjnego MCBARG. Strukturę

i funkcje tego systemu omawia się w rozdziale 6. System ten umożliwia budowę modelu problemu decyzyjnego opisywanego jako wielokryterialny problem targu i przeprowadzenie sesji negocjacyjnych z udziałem osób przyjmujących rolę decydentów w tym problemie. System wspomaga proces analizy wielokryterialnej dokonywany w każdej rundzie przez każdego decydenta oraz pełni rolę niezależnego mediatora i ułatwia decydentom znalezienie konsensusu. W rozdziale tym przedstawia się także przykłady dotyczące międzynarodowej współpracy w zakresie kwaśnych deszczów, oraz współpracy gospodarstw rolnych, modelowane jako wielokryterialny problem targu. Modele wielokryterialnego problemu targu dla tych przykładów zostały zbudowane z wykorzystaniem edytora systemu MCBARG a następnie wykorzystane w przeprowadzonych eksperymentalnych sesjach negocjacji.

W Rozdziale 7 rozpatruje się sytuacje decyzyjne opisywane za pomocą wielokryterialnych gier kooperacyjnych, uwzględniających możliwość tworzenia przez graczy koalicji. Przedstawia się rozwinięcie sformułowania klasycznych gier kooperacyjnych podanego przez Aumana (1967), oraz koncepcji rozwiązań na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy. W przestrzeniach wielokryterialnych wypłat rozpatruje się różne sformułowania dominacji. Podaje się oryginalną propozycję koncepcji rozwiązania typu nukleolus, uwzględniającego preferencje wszystkich graczy. Przedstawia się także idee interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji, w której zaproponowana koncepcja nukleolusa służy do wyznaczania propozycji mediacyjnych.

Rozdział 8 przedstawia rodzinę gier opisujących współpracę graczy zainteresowanych pozyskaniem pewnego zestawu dóbr przez realizację wspólnego projektu. Proponuje się i analizuje procedury alokacji kosztów między graczy, wykorzystujące mechanizm

cenowy oraz różne koncepcje rozwiązań. Przedstawia się także procedurę wspomagającą analizę problemu alokacji kosztów. Problem alokacji kosztów rozpatruje się także w kolejnym rozdziale 9 w klasie tzw. gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji. Gry takie opisują rzeczywiste sytuacje, w których wypłaty każdej koalicji zależą nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicji tworzonych przez graczy pozostałych. W pracy rozwijana jest teoria takich gier. W szczególności formułuje się koncepcje rozwiązań, takich jak rdzeń gry i zbiory stabilne. Analizuje się właściwości tych rozwiązań.

Rozdział 10 zawiera podsumowanie najważniejszych wyników uzyskanych w trakcie dotychczasowych badań i prezentowanych we wcześniejszych rozdziałach oraz propozycje kierunków dalszych badań.

Monografię kończy bibliografia zawierająca 235 pozycji literatury i indeks.

Przedstawiane w pracy wyniki były prezentowane m.in. w niżej wymienionych pracach:

- w zakresie idei wspomagania negocjacji w wielokryterialnych sytuacjach kooperacyjnych: (Fortuna, Kruś 1984, Kruś 1985, Bronisz, Kruś 1987, 1988, 1989a, 1989b, Bronisz, Kruś, Wierzbicki 1989, Kruś 1991, Kruś, Bronisz 1993, Kruś 1996, 2002b, 2004b, Wierzbicki, Kruś, Makowski 1993),

- dotyczących systemu komputerowego MCBARG i przykładów wielokryterialnych problemów targu: (Kruś, Bronisz, Łopuch 1990, Kruś, Łopuch 1989, Kruś, Łopuch, Bronisz 1989, Kruś 1992a),

- dotyczących wielokryterialnych gier koalicyjnych, gier wielopremiotowych w zastosowaniu do alokacji kosztów, gier w postaci funkcji partycji: (Kruś, Bronisz 1995, 1996, 1998, 2000, Kruś 2008, 2009).

Lista ważniejszych wyników

W zakresie sytuacji kooperacyjnych modelowanych jako wielokryterialny problem targu:

- koncepcje indywidualnie niezdominowanych wypłat graczy oraz punktu względnej utopii (Definicje 4.1, 4.2),
- koncepcja uogólnionego rozwiązania Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego i jego aksjomatyzacja (Twierdzenia 4.1. i 4.2),
- koncepcja uogólnionego rozwiązania leksykograficznego i jego aksjomatyzacja (Twierdzenie 4.3),
- koncepcja rozwiązania iteracyjnego (Twierdzenie 5.1. pokazujące właściwości tego rozwiązania),
- propozycja interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji,
- zaprojektowanie i implementacja systemu komputerowego (MCBARG) wspomagającego analizę i proces mediacji w wielokryterialnym problemie targu, w tym algorytmizacja interakcyjnej procedury wymienionej wyżej,
- opracowanie przykładów ilustrujących wielokryterialny problem targu: współpracy gospodarstw rolnych, problemu kwaśnych deszczów.

W zakresie sytuacji kooperacyjnych modelowanych jako wielokryterialne gry koalicyjne bez wypłat ubocznych:

- sformułowanie założeń i koncepcji rozwiązań takiej gry (Definicje 7.1 - 7.4 oraz Twierdzenia 7.1 i 7.2),
- propozycja nukleolusa uwzględniającego preferencje decydentów a także zbadanie jego właściwości (Lematy 7.1 - 7.3, Twierdzenie 7.3),
- idea interakcyjnej procedury wspomagania negocjacji w sytuacjach decyzyjnych opisywanych przez wielokryterialną grę kooperacyjną.

W zakresie zastosowania gier koalicyjnych w problemach alokacji kosztów:

- sformułowanie problemu alokacji kosztów z wykorzystaniem mechanizmu cen, jako wielopredmiotowej gry kooperacyjnej (Definicje 8.1-8.5),
- koncepcja rozwiązania wg idei Shapley'a i analiza właściwości (Twierdzenie 8.1),
- koncepcja nukleolusa i analiza jego właściwości (Twierdzenie 8.3),
- idea iteracyjnej procedury wspomagającej analizę wielokryterialną,
- propozycje i zbadanie właściwości rozwiązań gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji, formułowanych przy słabszej relacji dominacji niż przyjmowane w literaturze,
- pokazanie, że nukleolus i rdzeń w takich grach mogą być wyznaczone jako analogiczne koncepcje rozwiązań odpowiednio sformułowanych gier w postaci funkcji charakterystycznej (Twierdzenia 9.2 i 9.5).

Podstawowe pojęcia i idee optymalizacji wielokryterialnej

2.1 Pojęcia podstawowe

Rozpatrujemy najpierw problem optymalizacji wielokryterialnej w przypadku pojedynczego decydenta

$$\max_{x \in X_0 \subset \mathbb{R}^k} f(x), \quad (2.1)$$

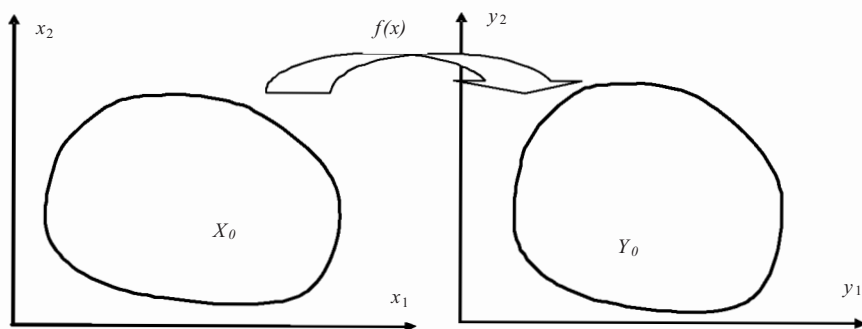
gdzie

x jest wektorem zmiennych decyzyjnych,

X_0 jest zbiorem decyzji dopuszczalnych,

$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją wektorową, gdzie $m \geq 2$. Dla określonego wariantu zmiennych decyzyjnych x , składowe funkcje $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$ określają wartości kryteriów. Za pomocą tych kryteriów decydent ocenia wyniki tego wariantu decyzji. Przestrzeń kryteriów \mathbb{R}^m nazywana jest również przestrzenią ocen lub przestrzenią wyników. Zadanie 2.1 oznacza, że decydent maksymalizuje jednocześnie wszystkie kryteria określone jako składowe wektorowej funkcji $f(\cdot)$.

Niech Y_0 oznacza zbiór ocen osiągalnych w przestrzeni kryteriów przy dopuszczalnych decyzjach tzn. $Y_0 = f(X_0)$. Zakładamy,



Rysunek 2.1. Zbiór decyzji dopuszczalnych i zbiór osiągalnych ocen

że zbiór Y_0 jest zwarty. Przykład zbioru dopuszczalnych zmiennych decyzyjnych oraz zbioru osiągalnych ocen jest przedstawiony na Rys. 2.1.

W przestrzeni kryteriów wprowadzamy częściowy porządek określony przez dodatni stożek:

$$D = \{y \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Mówimy, że element y^1 **silnie dominuje** y^2 , gdzie $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^m$, i oznaczamy $y^1 \gg y^2$, jeśli $y^1 \in y^2 + \text{int}(D)$, gdzie $\text{int}(D)$ oznacza wnętrze zbioru D ,
 $y + \text{int}(D) = \{z \in \mathbb{R}^m : z = y + v, \text{ dla wszystkich } v \in \text{int}(D)\}.$

Mówimy, że element y^1 **dominuje** element y^2 , i oznaczamy $y^1 > y^2$, gdzie $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^m$, jeśli $y^1 \in y^2 + D \setminus \{0\}$.

Mówimy, że element y^1 **słabo dominuje** element y^2 , i oznaczamy $y^1 \geq y^2$, gdzie $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^m$, jeśli $y^1 \in y^2 + D$.

Przedstawione pojęcia dominacji są szczególnymi przypadkami dominacji stożkowych, w których stożek D może być dowolnym stożkiem wypukłym w przestrzeni \mathbb{R}^m .

W przypadku zadań optymalizacji jednokryterialnej, gdy $y = f(x) \in \mathbb{R}$, problem polega na znalezieniu rozwiązania dominującego w zbiorze osiągalnych wartości tej funkcji, tzn. takiego, który dominuje pozostałe elementy tego zbioru. W przypadku zadań optymalizacji wielokryterialnej zbiór rozwiązań dominujących w zbiorze $Y_0 \subset \mathbb{R}^m$ jest na ogół pusty. Poszukuje się elementów zwanych niezdominowanymi. Element niezdominowany w zbiorze Y_0 jest elementem, dla którego nie istnieją w tym zbiorze elementy dominujące. W zagadnieniach optymalizacji wielokryterialnej elementów niezdominowanych jest zwykle pewien zbiór. Formalna definicja jest następująca:

Mówimy, że element $y \in Y_0$ jest niezdominowany (Pareto optymalny, efektywny) w zbiorze Y_0 , jeżeli należy do do zbioru $Y^N = \{y^N \in Y_0 : Y_0 \cap (y^N + D \setminus \{0\}) = \emptyset\}$.

Pojęcia elementów niezdominowanych, Pareto optymalnych, efektywnych (ang. *nondominated*, *Pareto optimal*, *effective*) stosowane są w literaturze wymiennie.

Warianty decyzji $x \in X_0$, takie że $f(x) \in Y^N$ nazywamy efektywnymi (sprawnymi).

W teorii zagadnień wielokryterialnych rozpatruje się także elementy słabo niezdominowane.

Mówimy, że element $y \in Y_0$ jest słabo niezdominowany (słabo Pareto optymalny, słabo efektywny) w zbiorze Y_0 , jeżeli należy do do zbioru $Y^{sN} = \{y^{sN} \in Y_0 : Y_0 \cap (y^{sN} + \text{int}(D)) = \emptyset\}$.

W zadaniach optymalizacji wielokryterialnej mamy zwykle do czynienia ze zbiorem rozwiązań obejmujących warianty decyzyjne, których wielokryterialne oceny należą do zbioru elementów Y^N niezdominowanych w zbiorze Y_0 .

Zbiór Y_0 w ogólnym przypadku nie jest dany w postaci jawnej. Zakłada się natomiast, że dany jest model matematyczny określający zbiór X_0 oraz postać wektorowej funkcji $f(\cdot)$. Model ten umożliwia dla danego wariantu decyzji x wyznaczenie oceny należącej do zbioru Y_0 w przestrzeni kryteriów. Wyznaczenie całego zbioru rozwiązań efektywnych nie jest w ogólnym przypadku możliwe, w szczególności, gdy jest to zbiór typu kontinuum. Poszczególne elementy niezdominowane mogą być natomiast wyznaczone przez rozwiązanie odpowiednio sformułowanych zadań optymalizacji jednokryterialnej.

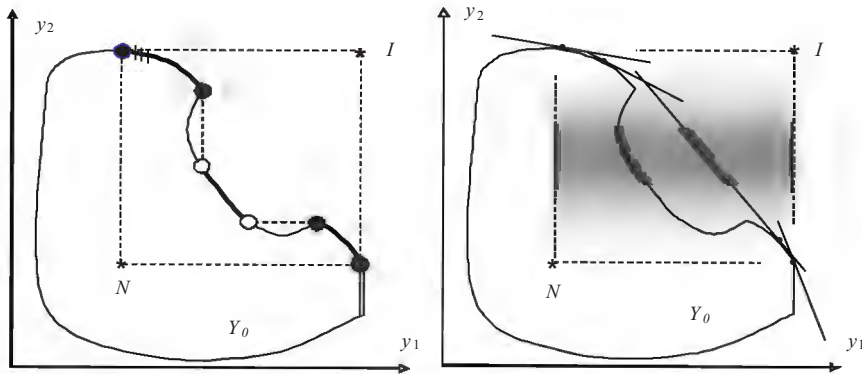
Zakładamy, że decydent ma określone preferencje w przestrzeni kryteriów. Wspomaganie decyzji wielokryterialnych polega na umożliwieniu decydentowi przeglądania zbioru elementów niezdominowanych i wybór rozwiązania zgodnie z jego osobistymi preferencjami. Można przyjąć, że decydentowi pomaga analityk systemowy. Analityk ten, na podstawie informacji uzyskanych od decydenta i na podstawie dostępnych informacji specyficznych dla zagadnienia, którego dotyczy rozpatrywany problem optymalizacji wielokryterialnej, buduje model matematyczny. Wykorzystując ten model, pomaga decydentowi, generując zgodnie z jego życzeniami (np. wykorzystując odpowiednio zbudowany system komputerowy), rozwiązania efektywne analizowane następnie przez decydenta. Istotne jest przy tym zapewnienie suwerenności decydenta, który podejmuje ostateczną decyzję i ponosi też za nią odpowiedzialność. Wspomniany wyżej model, zwany też modelem podstawowym, nie zawiera opisu preferencji decydenta. Modelowanie preferencji decydenta stanowi oddzielne, poważne zagadnienie badawcze.

Jest wiele metod umożliwiających wyznaczenie reprezentacji zbioru elementów niezdominowanych w problemie 2.1 w postaci

skończonej liczby punktów. Wstępną informację dotyczącą położenia tego zbioru w przestrzeni kryteriów można uzyskać rozwiązując niezależnie n zadań maksymalizacji wartości poszczególnych kryteriów $f_i(x)$:

$$\max_{x \in X_0 \subset \mathbb{R}^k} f_i(x), i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Na Rys. 2.2 przedstawiono przykład zbioru Y_0 . Pogrubiony brzeg tego zbioru oraz czarne punkty oznaczają zbiór elementów niezdominowanych. Zbiór elementów niezdominowanych powiększony o brzeg zaznaczony linią podwójną oraz o punkty zaznaczone kółkami pustymi w środku oznacza zbiór elementów słabo niezdominowanych.



Rysunek 2.2. Rozwiązania niezdominowane, słabo niezdominowane i właściwie niezdominowane z granicą ε

Wyznaczone maksymalne wartości funkcji $f_i(x)$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, przy warunku $x \in X_0$ definiują tzw. punkt idealny w przestrzeni kryteriów (oznaczony na rysunku przez I). Może być również wyznaczony punkt nadir określony przez minimalne wartości kryteriów, które mogą przyjmować rozwiązania niezdominowane (oznaczony na rysunku przez N). W przypadku $m \geq 3$

wyznaczenie punktu nadir nie jest tak proste jak na rysunku. Algorytmy wyznaczania przybliżonych wartości punktu nadir podane są w pracach (Korhonen i inni 1997), (Deb i inni 2006). Należy zaznaczyć, że rozwiązanie zadania typu (2.2) może nie być jednoznaczne i w ogólnym przypadku odpowiadająca mu wielokryterialna ocena w zbiorze Y_0 może być elementem tylko słabo niezdominowanym. Punkt idealny i nadir dają wstępną, przybliżoną informację o położeniu zbioru elementów niezdominowanych w przestrzeni kryteriów (prostokąt zaznaczony liniami przerywanymi na rysunku 2.2). Punkt idealny jest w wielu pracach nazywany również punktem utopijnym (ang. ideal, utopia). W niektórych pracach pojęcia te są rozróżniane, por. (Miettinen 2008), a punkt utopijny oznacza pewien punkt silnie dominujący punkt idealny.

Cechą charakterystyczną elementów niezdominowanych jest to, że żadnej współrzędnej nie można poprawić bez pogorszenia innej. Przy porównywaniu elementów niezdominowanych $y^1, y^2 \in Y_0^N$ można analizować współczynniki wymiany (ang. trade offs) postaci $(y_i^1 - y_i^2)/(y_j^2 - y_j^1)$, gdzie $(y_i^1 - y_i^2) \geq 0$, $(y_j^2 - y_j^1) > 0$, $i, j = 1, \dots, m$, określające poprawę i -tego kryterium elementu y^1 względem elementu y^2 w porównaniu z pogorszeniem kryterium j . Z punktu widzenia decydenta mogą nie być interesujące elementy niezdominowane, charakteryzujące się bardzo wysokimi wartościami współczynników wymiany. Wprowadzono w związku z tym pojęcie elementów właściwie niezdominowanych. Zgodnie z definicją Geoffriona (1998) element niezdominowany $y^0 = f(x^0)$ nazywamy właściwie niezdominowanym (właściwie Pareto optymalnym) wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla dowolnych $y \in Y^0$ oraz wskaźników $i, j = 1, \dots, m, i \neq j$, z zależności $y_i > y_i^0 \wedge y_j < y_j^0$ wynika $(y_i - y_i^0)/(y_j^0 - y_j) \leq M$.

Rozwiązanie efektywne x^0 którego obraz $y^0 = f(x^0)$ jest elementem właściwie niezdominowanym, nazywamy właściwie efektywnym.

Wprowadźmy stożek $D_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^m : dist(y, D) \leq \varepsilon \|y\|\}$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest daną liczbą określającą marginalne współczynniki wymiany między kryteriami, a $dist(y, D)$ oznacza odległość od elementu y do zbioru D , $dist(y, D) = \min_{y' \in D} \|y - y'\|$. Można wówczas sformułować (Wierzbicki, 1986) pojęcie elementów właściwie niezdominowanych z granicą ε . Są to elementy w przestrzeni ocen należące do zbioru:

$$Y^{wN} = \{y^{wN} \in Y_0 : Y_0 \cap (y^{wN} + D_\varepsilon \setminus \{0\}) = \emptyset\}.$$

Elementy właściwie niezdominowane z granicą ε dla pewnego $\varepsilon > 0$ na Rys. 2.2 to zbiór elementów niezdominowanych pomniejszony o fragment brzegu zaznaczony krótkimi kreskami pionowymi.

Jedna z pierwszych idei wyznaczania rozwiązań efektywnych polega na maksymalizacji jednego z kryteriów np. j -tego, przy ograniczeniu kryteriów pozostałych.

Rozpatrzmy następujące zadanie optymalizacji (ozn. $P_j(\varepsilon)$) dla ustalonego wektora parametrów $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_m)$.

Znaleźć punkt $x^{0\varepsilon}$ taki, że

$$\begin{aligned} f_j(x^{0,\varepsilon}) &= \max_{x \in X^0} f_j(x), \\ \text{przy ograniczeniach:} & \\ f_i(x) &\geq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, i \neq j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

W zadaniu powyższym maksymalizujemy j -tą funkcję celu, przy założeniu, że pozostałe kryteria osiągną wartości nie mniejsze niż określone zadany wektorem ε .

Idea ta, rozważana m.in. w pracy (Chankong, Haims 1983) pozwala na znajdowanie elementów niezdominowanych jeśli rozwiązanie zadania 2.3 jest jednoznaczne. W przeciwnym przypadku rozwiązanie może być słabo niezdominowane. Należy zwrócić uwagę, że jeśli którakolwiek składowa wektora ε przewyższy wartości określone przez punkt idealny, rozwiązanie zadania 2.3 nie istnieje. Zadanie powyższe rozwiązywane dla różnych, odpowiednio dobranych wartości składowych wektora ε pozwala wyznaczyć różne rozwiązania efektywne i odpowiadające im oceny niezdominowane.

Jedną z częściej stosowanych w praktyce metod wyznaczania rozwiązań słabo niezdominowanych jest metoda wag (patrz np. Gass, Saaty 1955, Chankong, Haimes 1983). Niech zbiór $W = \{w : w \in R^k, w_j \geq 0, \sum_{j=1}^m w_j = 1\}$ określa wektory nieujemnych znormalizowanych wag. Metoda wag polega na rozwiązaniu zadania optymalizacji:

$$\max_{x \in X_0} \sum_{j=1}^m w_j f_j(x) \quad (2.4)$$

dla założonego wektora wag $w \in W$.

Na Rys. 2.2, z prawej strony, czarne punkty pokazują przykłady rozwiązań uzyskanych tą metodą przy zmienianych węgach. Ciągłe linie skośne przedstawiają zbiory poziomicowe funkcji $w_1 y_1 + w_2 y_2 = \text{const}$. Zmiana wag oznacza zmianę nachylenia zbioru poziomicowego. Zauważmy, że w przypadku przedstawionym na rysunku, niewypukłego zbioru Y_0 , nie jest możliwe znalezienie wszystkich elementów niezdominowanych. Rozwiązania powyższego zadania mogą być poza tym niejednoznaczne, (patrz także (Steuer, 1986), gdzie podane są dalsze uwagi dotyczące tej

metody. Jeśli w definicji zbioru W przyjmiemy, że wagi są dodatnie, to rozwiązania zadania 2.4 są właściwie efektywne w zadaniu 2.1.

Przyjmijmy, że decydent podał pożądane poziomy wartości kryteriów w zadaniu 2.1, określone jako wektor celu $f^c = [f_1^c, \dots, f_m^c]^T$. Przyjmijmy, że dany jest również wektor wag $w = [w_1, \dots, w_m]^T$.

Można wówczas poszukiwać rozwiązania minimalizującego sumaryczne ważone odchylenia od pożądanych wartości kryteriów:

$$\min_{x \in X_0} (\sum_{j=1}^m w_j |f_j(x) - f_j^c|^p)^{1/p}, \quad (2.5)$$

gdzie $1 \leq p \leq \infty$.

W zadaniu tym, do zmierzenia odchylenia poszukiwanego rozwiązania od zadanego celu, wykorzystana jest ważona norma l_p . Poszukuje się różnych rozwiązań zadania 2.1 rozwiązując wielokrotnie zadanie 2.5 dla różnych wektorów wag. Rozwiązanie tego zadania jest efektywnym rozwiązaniem zadania 2.1, jeśli zadany cel jest elementem słabo dominującym punkt idealny oraz jeżeli rozwiązanie to jest jednoznaczne lub gdy wszystkie wagi są dodatnie. Zauważmy, że jeśli zakładany cel należałby do wnętrza zbioru Y_0 , punkt ten będzie również rozwiązaniem zadania 2.5, natomiast nie będzie elementem niezdominowanym w zbiorze Y_0 . Jeśli zbiór Y_0 nie jest wypukły, to w ogólnym przypadku nie wszystkie punkty niezdominowane mogą być znalezione.

Rozpatrywane jest również analogiczne zadanie z normą Czebyszewa:

$$\min_{x \in X_0} \max_{j=1, \dots, m} w_j |f_j(x) - f_j^c|, \quad (2.6)$$

W tym przypadku, dla odpowiednio wybranego wektora celu dominującego punkt idealny, może być znaleziony każdy element niezdominowany, także dla zbioru Y_0 niewypukłego. Może się jednak okazać, że w wyniku rozwiązania tego zadania uzyskuje się

punkt słabo niezdominowany w Y_0 . W pracach (Steuer 1986), (Kaliszewski 1994) analizowano to zadanie w postaci rozszerzonego problemu Czebyszewa (ang. augmented Chebyshev problem):

$$\min_{x \in X_0} \max_{j=1, \dots, m} w_j |f_j(x) - f_j^c| + \varepsilon \sum_{j=1}^m |f_j(x) - f_j^c|, \quad (2.7)$$

gdzie ε jest małą liczbą.

Jak pokazano w tej ostatniej pracy, rozwiązując ten problem z $\varepsilon \rightarrow 0$ można znaleźć każdy element właściwie niezdominowany.

2.2 Metoda punktu referencyjnego

Ogólne podejście do zagadnienia parametrycznej charakteryzacji zbioru rozwiązań niezdominowanych oraz systematyzację różnych wcześniejszych metod zawiera praca (Wierzbicki 1986).

Rozpatruje się zbiór A parametrów a , które mogą reprezentować wagi, poziomy aspiracji decydenta, ewentualnie inne parametry zależne od decydenta, a także funkcję zwaną dalej funkcją skalaryzującą, określającą pewną wartość skalarną dla danego punktu y ze zbioru Y_0 oraz punktu a ze zbioru A . Niech $s : Y_0 \times A \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza taką funkcję skalaryzującą. Formuluje się dwa ogólne warunki, które powinna spełniać funkcja skalaryzująca, aby mogła być użyta do charakteryzacji zbioru rozwiązań niezdominowanych.

Warunek dostateczny skalaryzacji (WDS):

dla każdego $a \in A_s$

$$\text{Arg} \max_{y \in Y_0 \cap Y_s(a)} s(y, a) \subset Y^N, \quad (2.8)$$

gdzie $\text{Arg} \max$ oznacza zbiór wszystkich punktów maksymalizujących wartość funkcji skalarnej, A_s jest podzbiorem zbioru A , dla którego warunek 2.8 zachodzi, $Y_s(a)$ reprezentuje ewentualne dodatkowe ograniczenia zależne od parametru a .

Jeśli warunek 2.8 jest spełniony, można określić odwzorowanie ze zbioru A_s w zbiór Y^N :

$$\Psi(a) = \text{Arg} \max_{y \in Y_0 \cap Y_s(a)} s(y, a).$$

To odwzorowanie może być podstawą konstrukcji interakcji między decydentem a systemem wspomagania decyzji, w których decydent specyfikuje pewien parametr $a \in A_s$, a system rozwiązuje zadanie $\max_{y \in Y_0 \cap Y_s(a)} s(y, a)$ i wyznacza niezdominowany element $y^0 \in Y^N$.

Odwzorowanie $\Psi(\cdot)$ jest nazywane parametryczną reprezentacją zbioru Y^N . Parametry a mogą być wykorzystane jako parametry sterujące w tworzeniu reprezentacji zbioru elementów niezdominowanych zadania optymalizacji wielokryterialnej.

Warunek dostateczny skalaryzacji oznacza, że dla każdego parametru sterującego a ze zbioru A_s , rozwiązaniem zadania $\max_{y \in Y_0 \cap Y_s(a)} s(y, a)$ jest element niezdominowany w zbiorze Y_0 . Natomiast nie jest gwarantowana możliwość wyznaczenia wszystkich elementów niezdominowanych.

Warunek konieczny skalaryzacji (WKS):

dla każdego $y^0 \in Y^N$ istnieje parametr $a^* \in A_n$ taki, że

$$y^0 \in \text{Arg} \max_{y \in Y_0 \cap Y_s(a^*)} s(y, a^*), \quad (2.9)$$

gdzie A_n jest podzbiorem zbioru A , dla którego warunek 2.9 zachodzi.

Warunek ten oznacza, że odpowiednio wybierając parametr a^* i rozwiązując zadanie $\max_{y \in Y_0 \cap Y_s(a^*)} s(y, a^*)$ można znaleźć każdy element niezdominowany w zbiorze Y_0 .

Jeśli dla danej funkcji skalaryzującej s spełnione są oba wymienione wyżej warunki (2.8) i (2.9) oraz zbiory $A_s = A_n$,

$Y_s(a) = Y_n(a)$ dla wszystkich $a \in A_s$, to mówimy, że warunki te kompletnie charakteryzują parametrycznie zbiór Y^N elementów niezdominowanych i spełniona jest właściwość: $\bigcup_{a \in A_s} \Psi(a) = Y^N$.

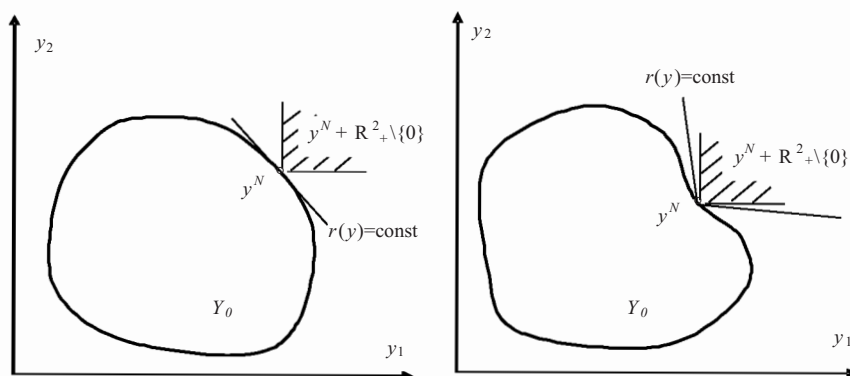
Analogicznie formułowane są warunki dostateczny i konieczny skalaryzacji dla zbiorów elementów słabo niezdominowanych i właściwie niezdominowanych z granicą ε .

Funkcja skalaryzująca powinna umożliwić oddzielanie zbiorów zgodnie z definicjami efektywności, słabej efektywności i właściwej efektywności z granicą ε , a także powinna charakteryzować się właściwością monotoniczności.

Separowalność zbiorów

Mówimy, że funkcja $r : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ silnie oddziela dwa rozłączne zbiory Y_1, Y_2 w przestrzeni \mathbb{R}^m , jeżeli istnieje liczba $\beta \in \mathbb{R}$, taka że $r(y) \leq \beta$ dla wszystkich $y \in Y_1$ oraz $r(y) > \beta$ dla wszystkich $y \in Y_2$.

W definicji efektywności rozwiązania zadania optymalizacji wielokryterialnej wymagane jest, aby zbiory Y_0 oraz $\{y^N + D \setminus \{0\}\}$ były rozłączne. Analogicznie rozłączność odpowiednich zbiorów jest wymagana w przypadku słabej efektywności i właściwej efektywności. Gdy zbiór Y_0 jest wypukły, zbiory te mogą być oddzielone funkcją liniową, o postaci $\sum_{i=1}^m a_i y_i$, jak pokazano to na lewej części Rys. 2.3. W przypadku niewypukłego zbioru Y_0 , nie dla wszystkich punktów efektywnych oddzielenie takie jest możliwe. Zbiory Y_0 i $\{y^N + D \setminus \{0\}\}$ mogą być jednak oddzielone przy pomocy funkcji nieliniowej o zbiorach poziomicowych postaci $y \in \mathbb{R}^m, r(y) = \text{const}$. Przykład takich zbiorów poziomicowych pokazany jest na prawej części Rys. 2.3.



Rysunek 2.3. Oddzielanie zbiorów

Monotoniczność funkcji skalaryzującej

Mówimy, że:

funkcja $r : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$ jest silnie monotoniczna, gdy $y^1 \in y^2 + D \setminus \{0\} \Rightarrow r(y^1) > r(y^2)$,

funkcja $r : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna, gdy $y^1 \in y^2 + \text{int}D \Rightarrow r(y^1) > r(y^2)$,

funkcja $r : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ε silnie monotoniczna, gdy $y^1 \in y^2 + D_\varepsilon \setminus \{0\} \Rightarrow r(y^1) > r(y^2)$.

Twierdzenie 2.1 (Wierzbicki 1986)

Każdy punkt maksymalizujący wartość silnie monotonicznej funkcji skalaryzującej $r : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$

jest niezdominowany w zbiorze Y_0 .

Każdy punkt maksymalizujący wartość ściśle monotonicznej funkcji skalaryzującej $r : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$

jest słabo niezdominowany w zbiorze Y_0 .

Każdy punkt maksymalizujący wartość ε silnie monotonicznej funkcji skalaryzującej $r : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$

jest właściwie niezdominowany z granicą ε w zbiorze Y_0 . ■

Funkcje osiągnięcia reprezentujące porządek

Niech $Y^* \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem parametrów sterujących. Zakładamy, że zbiór $Y^* = \mathbb{R}^m$ lub jest to dostatecznie duży podzbiór tej przestrzeni zawierający Y_0 . Parametr sterujący y^* z tego zbioru jest interpretowany jako punkt w przestrzeni ocen określony przez poziomy aspiracji decydenta. Punkt ten może być osiągalny (należeć do zbioru Y_0) lub nie.

Funkcje osiągnięcia reprezentujące porządek (ang. order representing achievement functions) są określone jako ciągłe funkcje $s : Y_0 \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$, takie że $s(y, y^*)$ jest ściśle monotoniczna jako funkcja y dla każdego $y^* \in Y^*$, oraz ma właściwość reprezentacji porządku, tzn. :

$$\{y \in \mathbb{R}^m : s(y, y^*) > 0\} = y^* + \text{int}D, \text{ dla wszystkich } y^* \in Y^*. \quad (2.10)$$

Wynika stąd oraz z ciągłości funkcji $s(\cdot)$, że $s(y, y^*) = 0$ dla wszystkich $y^* = y \in Y^0$.

Funkcje osiągnięcia aproksymujące porządek

Funkcje osiągnięcia aproksymujące porządek (ang. order approximating achievement functions) są to ciągłe funkcje $s : Y_0 \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$, takie że $s(y, y^*)$ jest silnie monotoniczna jako funkcja y dla każdego $y^* \in Y^*$, oraz ma właściwość aproksymacji porządku, tzn.:

$$\{y^* + D_{\varepsilon^d}\} \subset \{y \in \mathbb{R}^m : s(y, y^*) \geq 0\} \subseteq \{y^* + \text{int}D_{\varepsilon}\} \quad (2.11)$$

dla wszystkich $y^* \in Y^*$, gdzie $\varepsilon > \varepsilon^d \geq 0$.

Przykład funkcji osiągnięcia aproksymującej porządek

$$s(y, y^*) = \min_{1 \leq i \leq m} [a_i(y_i - y_i^*) + a_{k+1} \sum_{i=1}^m a_i(y_i - y_i^*)],$$

gdzie $y^* \in \mathbb{R}^m$, a parametr $a_{m+1} > 0$ jest dostatecznie mały w porównaniu z ε i dostatecznie duży w porównaniu z ε^d określonymi jak w 2.11.

Twierdzenie 2.2 (Wierzbicki 1986)

Jeśli $s(y, y^)$ jest funkcją osiągnięcia reprezentującą porządek, to dla każdego $y^* \in Y^*$, każdy punkt, który maksymalizuje tę funkcję na zbiorze Y_0 jest słabo niezdominowany.*

Jeśli y^0 jest punktem słabo niezdominowanym to maksimum funkcji $s(y, y^0)$ na zbiorze Y_0 jest osiągalne w punkcie $y = y^0$ i jest równe 0. ■

Twierdzenie 2.3 (Wierzbicki 1986)

Jeśli $s(y, y^)$ jest funkcją osiągnięcia aproksymującą porządek z ε , ε^d jak w (2.11), to dla każdego $y^* \in Y^*$, każdy punkt, który maksymalizuje tę funkcję na zbiorze Y_0 jest niezdominowany. Jeśli y^0 jest punktem właściwie niezdominowanym (wg stożka D_ε) to maksimum funkcji $s(y, y^0)$ na zbiorze Y_0 jest osiągalne w punkcie $y = y^0$ i jest równe 0.* ■

Uwagi

Klasy funkcji osiągnięcia – reprezentujących porządek i aproksymujących porządek – kompletnie charakteryzują elementy słabo efektywne (słabo niezdominowane) oraz prawie kompletnie charakteryzują elementy właściwie efektywne i elementy efektywne (niezdominowanych) bez założenia wypukłości zbioru Y_0 .

Parametry sterujące y^* interpretowane są jako punkty w przestrzeni kryteriów określone przez poziomy aspiracji decydenta. Znak maksymalnej wartości funkcji osiągnięcia informuje, czy wyspecyfikowane poziomy aspiracji są osiągalne (znak plus), czy nieosiągalne (znak minus). Zerowa wartość maksymalna funkcji osiągnięcia oznacza, że poziomy aspiracji są osiągalne i efektywne.

Charakteryzacje elementów niezdominowanych, słabo niezdominowanych i właściwie niezdominowanych w zadaniu optymalizacji wielokryterialnej 2.1 przy pomocy powyższych funkcji osiągnięcia są ogólne, stosowalne dla szerokiej klasy zadań: liniowych, nieliniowych, niewypukłych, dyskretnych, a także dynamicznych (wielokryterialnej optymalizacji trajektorii).

Wymienione wyżej klasy funkcji osiągnięcia stały się podstawą interakcyjnego podejścia punktu referencyjnego do wspomaganie decyzji wielokryterialnych (Wierzbicki 1977, 1980, 1999, Wierzbicki, Makowski, Wessels 2000). W podejściu tym, w przypadku złożonych zagadnień praktycznych, zakłada się interakcje decydenta z komputerowym systemem wspomaganie decyzji. System komputerowy zawiera implementację modelu opisującego sytuację decyzyjną w postaci zadania optymalizacji wielokryterialnej typu 2.1, traktowanego jako model podstawowy (ang. *substantial, core model*), natomiast nie zawiera modelu opisującego preferencje decydenta. Swoje preferencje decydent wyraża w interakcji z systemem wskazując punkty referencyjne w przestrzeni kryteriów. Punkty referencyjne obejmują punkty aspiracji i punkty rezerwacji. Punkt aspiracji określa wartości kryteriów, które decydent chciałby osiągnąć. Punkt rezerwacji - wartości kryteriów, które powinien osiągnąć, a nie chciałby uzyskać wartości gorszych.

Zakłada się, że w kroku wstępnym przed rozpoczęciem interakcji, system automatycznie wyznacza wielkości takie jak punkt idealny, punkt nadir, rozwiązanie neutralne umożliwiające decydentowi wstępną ocenę dotyczącą umiejscowienia zbioru rozwiązań niezdominowanych w przestrzeni kryteriów. W kolejnych krokach decydent określa punkty aspiracji i rezerwacji w przestrzeni kryteriów. System komputerowy rozwiązuje zadanie optymalizacji

odpowiedniej funkcji osiągnięcia i wyznacza kolejny element niezdominowany. Decydent analizuje rozwiązania wyznaczone przez system komputerowy i wskazuje kolejne punkty referencyjne. Celem procedury jest generowanie reprezentacji zbioru elementów niezdominowanych zgodnie z preferencjami decydenta.

Przykładowa funkcja osiągnięcia stosowana również w złożonych praktycznych problemach optymalizacji wielokryterialnej ma postać:

$$s(y, y^*) = \min_{1 \leq i \leq m} \sigma_i(y_i, y_i^a, y_i^r) + \rho \sum_{i=1}^m \sigma_i(y_i, y_i^a, y_i^r), \quad (2.12)$$

gdzie $y = f(x)$, natomiast y_i^a, y_i^r oznaczają odpowiednio poziomy aspiracji i rezerwacji podawane przez decydenta. Funkcje $\sigma_i(\cdot)$ mają postać

$$\sigma_i(y_i, y_i^a, y_i^r) = \begin{cases} 1 + \alpha(y_i - y_i^a)/(y_i^{up} - y_i^a), & \text{if } y_i^a \leq y_i \leq y_i^{up} \\ (y_i - y_i^r)/(y_i^a - y_i^r), & \text{if } y_i^r \leq y_i \leq y_i^a \\ \beta(y_i - y_i^r)/(y_i^r - y_i^{lo}), & \text{if } y_i^{lo} \leq y_i \leq y_i^r. \end{cases} \quad (2.13)$$

Wartości y^{lo} , y^{up} stanowią rozsądnie przyjmowane ograniczenia (dolne i górne), ramach których przyjmowane są punkty aspiracji i rezerwacji.

Decydent, stosując metodę punktu referencyjnego, może swobodnie modyfikować punkty referencyjne. Ma możliwość uczenia - coraz lepszego poznawania natury problemu decyzyjnego. Może badać te części zbioru elementów niezdominowanych, które go najbardziej interesują i znaleźć rozwiązanie zgodne z jego preferencjami.

W pracach (Wierzbicki 1982, 1986), (Wierzbicki i inni 2000) podano szereg proponowanych wariantów funkcji osiągnięcia. Analizowane są przy tym problemy dotyczące sterowalności lokalnej, możliwości efektywnego rozwiązywania zadań optymalizacji

funkcji osiągnięcia algorytmami obliczeniowymi, prostoty mechanizmów interakcji, łatwej interpretowalności dotyczącej zarówno wprowadzanych parametrów, jak i uzyskiwanych wyników. Zagadnienia konstrukcji systemów komputerowych wspomagania decyzji i wiele przykładów zastosowań zawierają między innymi prace (Lewandowski i inni 1989, Rogowski i inni 1988, Gondzio, Makowski 1995, Makowski i inni 1996, Wierzbicki i inni 2000, Granat, Makowski 2000, Makowski 2000, 2005). W pracach (Kostreva, Ogryczak, Wierzbicki 2004, Ogryczak, Sliwiński 2007, Ogryczak 2008) rozwijana jest metoda punktu referencyjnego z zastosowaniem idei tzw. agregacji OWA (ang. Ordered Weighted Averaging), w której wykorzystuje się porządek leksykograficzny.

2.3 Inne kierunki badań

Zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej i wielokryterialnego wspomagania decyzji są przedmiotem bardzo wielu opracowań monograficznych i artykułów. Artykuły z tego zakresu publikowane są w takich czasopismach jak *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, *European Journal of Operational Research*, *Management Science*, *Operations Research*, *Naval Research Logistics*, *IEEE Automatic Control*, *Control and Cybernetics* i wielu innych.

Przegląd różnych podejść i metod zawierają między innymi prace: (Miettinen 2008, 1999, Branke, Deb, Miettinen, Słowiński 2008, Chankong, Haimes 1983, Jahn 2004, Trzaskalik, Michnik 2002, Fandel, Gal 1997, Ogryczak 1997, Szapiro 1991, Konarzewska-Gubała 1980, 1991, Sawaragi, Nakayama, Tanino 1985, Chankong, Haimes 1983, Galas, Nykowski, Żółkiewski 1987).

Zwarty przegląd metod wspomagania analizy wielokryterialnej zawiera praca (Kaliszewski 2006). Autor rozwija również oryginalne podejście, w którym oddzielony jest etap uzyskania dyskretnej reprezentacji zbioru Pareto i etap analizy wykonywany przez decydenta. Złożony obliczeniowo i czasochłonny etap wyznaczania reprezentacji zbioru Pareto realizowany jest bez udziału decydenta. Tworzona jest aproksymacja tego zbioru. W etapie analizy decydent nie ma do czynienia z pełnym, złożonym modelem problemu optymalizacji. Interakcyjna analiza realizowana jest już z wykorzystaniem tej aproksymacji, co może być wykonywane sprawnie z punktu widzenia wymaganego nakładu obliczeń.

Zadania optymalizacji jednokryterialnej 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 stanowią podstawę wielu interakcyjnych metod wspomagających decydenta w znalezieniu preferowanego rozwiązania w zbiorze elementów niezdominowanych. Zadania typu 2.3 były stosowane np. w pracy (Benayoun i inni 1971).

Idea wag była stosowana między innymi w pracach (Zionts, Wallenius 1976, 1983) i (Dell, Karwan 1990). Podane w tych pracach metody należą do klasy metod, w których zakłada się, że preferencje decydenta określone są przez pewną funkcję wartościującą (por. Keeney, Raiffa, 1976). Ogólna idea polega na identyfikacji tej funkcji na podstawie interakcji z decydem oraz na znalezieniu rozwiązania maksymalizującego wartość tej funkcji w zbiorze Y_0 . Przykładowo, w kolejnych iteracjach metody Ziontsa -Walleniusa, zaproponowanej dla wielokryterialnych zadań programowania liniowego, wyznaczane jest rozwiązanie Pareto optymalne metodą wag. Określone są następnie sąsiednie wierzchołki Pareto optymalne oraz odpowiadające im współczynniki wymiany i przedstawiane decydentowi. Decydent jest proszony o wskazanie, czy i ewentualnie który z nich jest bardziej preferowany od bieżącego.

Na podstawie tej informacji poprawiane są wagi i wyznaczane jest nowe rozwiązanie. Uogólnienie algorytmu Ziontsa-Walleniusa na przypadek problemów nieliniowych można znaleźć w pracy (Kaliszewski, Zionts 2004).

Kolejnym przykładem zastosowania idei funkcji wartościującej jest metoda UTA (Jacket-Lagrece, Siskos 1982). Decydent jest proszony o określenie słabego porządku dla pewnego zbioru alternatyw. Uzyskane relacje preferencji lub indyferencji są wykorzystywane do określenia liniowych ograniczeń. Tworzony jest problem programowania celowego umożliwiający sprawdzenie istnienia addytywnej funkcji wartościującej. W ogólnym przypadku może istnieć wiele takich funkcji. Kolejne interakcje z decydem pozwalają zredukować zbiór tych funkcji. W przypadku stwierdzenia braku addytywnej funkcji wartościującej spełniającej nałożone ograniczenia, wymagana jest interakcja z decydem w celu wyjaśnienia powodu niezgodności podanych relacji. Metoda UTA została zaimplementowana w systemie PREFCALC (Jacket-Lagrece 1990).

Uogólnienie metod typu UTA rozwijane jest w pracach (Figueira, Greco, Mousseau, Słowiński 2008), (Greco, Mousseau, Słowiński 2008) z wykorzystaniem pewnego zbioru addytywnych funkcji wartościujących budowanych na podstawie informacji uzyskiwanych w interakcyjnej procedurze od decydem. Metody te są stosowane zarówno do zadań optymalizacji wielokryterialnej jak i wielokryterialnego rankingu.

Zadania typu 2.5 formułowane dla normy l_1 są wykorzystywane w metodach programowania celowego (Charnes i inni 1955, Charnes, Cooper 1961, 1977, Ignizio 1985). W ogólnej postaci ważonego programowania celowego decydent jest proszony o podanie poziomów aspiracji f_j^c dla wszystkich kryteriów $j = 1, \dots, m$ oraz

wag w_j . Rozwiązywane są zadania $\min_x \sum_{i=1}^m w_i |f_i(x) - f_i^c|$ dla $x \in X_0$. W przypadku liniowych funkcji celu i liniowych ograniczeń, zadanie to może być rozwiązywane zmodyfikowaną metodą SIMPLEX. Podawane przez decydenta poziomy aspiracji f_j^c nie powinny być osiągalne jednocześnie. W szczególności, gdy założone poziomy aspiracji będą wewnątrz zbioru Y_0 , w wyniku rozwiązania powyższego zadania zostaną osiągnięte i rozwiązanie też będzie wewnątrz zbioru Y_0 i nie będzie efektywne. Wady tej nie ma rozpatrywane wyżej podejście funkcji osiągnięcia.

Wykorzystanie koncepcji punktu referencyjnego do sterowania przeszukiwaniem zbioru rozwiązań niezdominowanych było przedmiotem wielu prac. Oprócz wymienionych prac szkoły A.P. Wierzbickiego należy wymienić między innymi prace (Steuer 1986), gdzie stosowano metodę Czebyszewa, (Nakayama 1995), (Jaszkiwicz, Słowiński 1994), (Korhonen, Laakso 1986), (Narula 1994).

W ostatnich latach rozwijane jest podejście ewolucyjne (ang. evolutionary multiobjective optimization) zarówno do wyznaczania elementów niezdominowanych jak i konstrukcji interakcyjnych algorytmów wspomagających decydenta w znalezieniu rozwiązania zgodnie z jego preferencjami. Ogólna idea polega na zastosowaniu algorytmów genetycznych, umożliwiających jednoczesne poszukiwanie kilku elementów niezdominowanych. Obszerny przegląd literatury z tego zakresu zawiera praca (Deb 2008).

W pracy (Greco, Matarazzo, Słowiński 2008) przedstawiono nową metodę interakcyjnej optymalizacji wielokryterialnej wykorzystującą idee zbiorów przybliżonych (Pawlak 1982, 1991).

Wielokryterialne wspomaganie decyzji w problemach dynamicznych jest rozwijane w pracach (Trzaskalik 1990, 1997, 1998, Skulimowski 1996, Trzaskalik, Sitarz 2007).

Prace (Bednarczuk 2005, 2006) poświęcone są analizie warunków stabilności zadań optymalizacji wielokryterialnej.

W pracach (Szapiro 2000, Trzaskalik 2006) można znaleźć wiele przykładów zadań praktycznych i ilustracje różnych metod optymalizacji wielokryterialnej w zastosowaniu do wspomagania decyzji.

Przedstawiono wyżej tylko wybrane prace ilustrujące różne podejścia i metody. W pracach cytowanych we wprowadzeniu i w tym rozdziale, w szczególności w pracach zbiorowych i monografiach można znaleźć pełny zestaw stosownej literatury.

Uwagi końcowe

W pracy rozpatruje się sytuacje decyzyjne, w których decydenci mogą odnosić korzyści w wyniku wzajemnej współpracy. Korzyści te określane są w porównaniu z sytuacją, gdyby dany decydent nie przystąpił do współpracy, zgodnie z koncepcją BATNA. Każdy decydent podejmuje niezależne decyzje oraz ma swój niezależny wektor kryteriów określający wyniki tych decyzji i swoje preferencje wyboru. Wartości kryteriów danego decydenta zależą od decyzji wszystkich decydentów.

Zakłada się, że dany jest model matematyczny pozwalający wyznaczyć wartości kryteriów każdego decydenta w zależności od decyzji wszystkich decydentów. Model nie opisuje preferencji decydentów. Nie zakłada się istnienia określonych funkcji użyteczności decydentów. Zaproponowano metody wspomagające analizę decyzyjną w wielokryterialnej przestrzeni wypłat stanowiącej iloczyn kartezyjański przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów oraz procedury umożliwiające znalezienie zgodnych decyzji. Przedstawiono ogólny opis matematyczny rozważanych sytuacji decyzyjnych i na tej podstawie sformułowano model wielokryterialnego problemu targu (rozdział 4) rozpatrywany dalej w pracy, a także sformułowano model wielokryterialnej gry kooperacyjnej,

w której uwzględnia się wpływ możliwych koalicji na rozwiązania i wypłaty graczy.

W przypadku wielkryterialnego problemu targu zaproponowano uogólnione rozwiązanie Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego (R-K-S) oraz jego aksjomatyczną charakteryzację. Założono, że każdy gracz ma możliwość analizy niezdominowanych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów. Na podstawie wskazanych przez graczy wypłat, wybranych zgodnie z ich preferencjami, konstruuje się tzw. punkt względnej utopii. Punkt ten uwzględniający preferencje wszystkich graczy jest podstawą konstrukcji proponowanego rozwiązania. Rozwiązanie to, w przypadku jednokryterialnych wypłat, sprowadza się do rozwiązania R-K-S. Nie jest natomiast prostym rozszerzeniem klasycznego rozwiązania R-K-S konstruowanym z wykorzystaniem punktu idealnego w przestrzeni wielokryterialnych wypłat. Pokazano, że w szczególnych przypadkach rozwiązanie to może być tylko słabo niezdominowane w zbiorze wypłat. Kolejna propozycja dotyczy, uogólnionego na przypadek wielokryterialnych wypłat, rozwiązania Imai, wykorzystującego porządek leksykograficzny. Podano idee algorytmu umożliwiającego poprawę słabo niezdominowanych rozwiązań R-K-S do rozwiązań niezdominowanych. Przedstawiono również konstrukcje umożliwiające uogólnienie na przypadek wielokryterialnych wypłat klasycznych rozwiązania Nasha i Rozwiązania Egalitarnego. Przeprowadzono analizę własności tych rozwiązań.

Przedstawiane w pracach (Kruś, Bronisz 1993, Kruś 2002) sformułowania wielokryterialnego problemu targu i koncepcje rozwiązań były następnie przedmiotem badań innych autorów np. (Hinojosa i inni 2005), (Marmol i inni 2007).

Koncepcje uogólnionych rozwiązań R-K-S oraz Imai zostały zastosowane w konstrukcji interakcyjnych procedur wspomagan

analizy decyzyjnej decydentów i wyznaczania propozycji mediacyjnych. Wielostronna analiza decyzyjna poprzedzona jest etapem analizy jednostronnej, w trakcie której każdy decydent niezależnie bada zbiór swoich niezdominowanych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów, wykorzystując podejście punktu referencyjnego. Wskazane przez każdego decydenta wypłaty, wybrane zgodnie z jego preferencjami, są podstawą wyznaczenia propozycji mediacyjnej. Propozycja ta uwzględnia preferencje wszystkich decydentów i jest przedmiotem analizy wielostronnej. W kolejnych rundach powtarzane są oba etapy analizy. Sformułowano w tym celu koncepcję rozwiązania iteracyjnego i pokazano jego zbieżność do rozwiązania Pareto optymalnego.

Przedstawiono koncepcje ogólnej konstrukcji komputerowych systemów wspomagania decyzji w rozpatrywanych sytuacjach przetargowych. Procedura wykorzystująca rozwiązanie iteracyjne została zaimplementowana w systemie komputerowym MCBARG. Zamieszczono dwa przykłady ilustrujące wielokryterialny problem targu: przykład dotyczący zagadnienia kwaśnych deszczów oraz przykład dotyczący współpracy gospodarstw rolnych. Przykłady te zostały wprowadzone do systemu i pozwalają prześledzić jego działanie.

W rozdziale 7 rozpatrzono sytuacje kooperacyjne opisywane przez modele wielokryterialnych gier koalicyjnych bez wypłat ubocznych. Podano sformułowanie matematyczne takiej gry, a następnie zbadano jej własności i sformułowano koncepcje rozwiązań takie jak rdzeń i nukleolus gry. Zaproponowano oryginalny sposób określania funkcji nadwyżki uwzględniającej preferencje graczy oraz generowaną przez tę funkcję postać nukleolusa. Nucleolus ten, w przypadku klasycznych gier targu, sprowadza się do koncepcji podanej przez Schmeidlera (1969), natomiast w przypadku gier

targu sprowadza się do uogólnionego rozwiązania Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego podanego w pracy (Kruś, Bronisz 1993) i rozpatrywanego w pracy (Kruś 2002) oraz omówionego w rozdziale 4. Podano również ideę iteracyjnej procedury wspomagającej analizę i wyznaczenie rozwiązania mediacyjnego. Przedstawiane problemy były wcześniej przedmiotem prac (Kruś, Bronisz 1995), (Kruś 2008). Podane propozycje korespondują z ideą zastosowania punktów referencyjnych do wyznaczania propozycji mediacyjnych w grach koalicyjnych przedstawioną w pracy (Wierzbiński 2005).

W rozdziale 8 rozpatrzono problem decyzyjny, w którym podmioty decyzyjne negocjują realizację wspólnego lub wspólnych przedsięwzięć w celu pozyskania wiązki dóbr. Mogą działać indywidualnie lub tworzyć koalicje. Problem dotyczy podziału pozyskanej wiązki dóbr i udziału w kosztach przedsięwzięć. Zaproponowano model rodziny gier kooperacyjnych opisującej ten problem alokacji kosztów z uwzględnieniem mechanizmu cenowego i wypłat ubocznych. Zagadnienie to przedstawiono na podstawie wcześniejszej pracy (Kruś, Bronisz 2000). Zbadano różne koncepcje rozwiązań tych gier. Zaimplementowano algorytm wyznaczania różnych koncepcji nukleolusa traktowanego jako podstawę do wyznaczania propozycji mediacyjnych. Przedstawiono przykład numeryczny ilustrujący proponowane analizy. Zaproponowano również procedurę wspomagającą analizę wielokryterialną i proces mediacji. Problem alokacji i kosztów jest również rozpatrywany w sytuacji, gdy wypłata danej koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych (rozdział 9). Sytuację taką opisano jako grę kooperacyjną w postaci funkcji partycji. Uzyskane wyniki dotyczą koncepcji rozwiązań w tych grach i ich analizy. Istotne jest w szczególności pokazanie koincydencji rdzenia takiej gry z rdzeniem odpowiednio skonstruowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Rdzeń

taki określa ramy, w których decydenci mogą prowadzić negocjacje. Można również wtedy zastosować podejście prezentowane w rozdziale 8. Nowe zagadnienia badań w tym kierunku mogą dotyczyć koncepcji rdzeni optymistycznych i pesymistycznych rozpatrywanych w pracach Koczy'ego (2007, 2008).

Uzyskane wyniki teoretyczne mogą mieć zastosowanie nie tylko w omawianym problemie kooperacji, opisywanym jako modele targu lub modele gier kooperacyjnych z wektorowymi wypłatami graczy, ale także w szerszej klasie zagadnień dotyczących także sytuacji niekooperacyjnych. Przykładowo, algorytm interakcyjnej procedury mediacyjnej, wykorzystującej idee rozwiązania iteracyjnego oraz metodę punktu referencyjnego i funkcji osiągnięcia, został zastosowany dla przypadku wielokryterialnej, niekooperacyjnej gry dynamicznej dotyczącej tzw. „wojny rybnej” (prace magisterskie: Cichoń (1989), Kaniewski (1990)), w eksperymentalnym systemie komputerowym. Wielokryterialne rozwiązania w grach niekooperacyjnych były rozpatrywane między innymi w pracach (Wierzbicki 1990, Kruś, Bronisz 1994).

Równolegle z badaniami, których wyniki przedstawia się w tej pracy, prowadzonych z zastosowaniem analizy wielokryterialnej i podejścia punktu referencyjnego, prowadzono prace z zastosowaniem idei funkcji użyteczności. Wykorzystywano koncepcje funkcji użyteczności R. Kulikowskiego (1998, 2002, 2003) inspirowane pracami Savage (1954), Tverskiego i Kahnemana (Tversky 1967, Tversky, Kahneman 1981). Uzyskane wyniki (Kruś 2002a, 2004a), (Kulikowski, Kruś 2003) dotyczą między innymi konstrukcji systemów komputerowych wspomagania analizy decyzyjnej, analizy wspólnych przedsięwzięć innowacyjnych, analizy problemu kooperacji na przykładzie szkoły wyższej. W przypadku stosowania koncepcji funkcji użyteczności decydentów, szczególnie istotny jest problem

identyfikacji jej postaci na podstawie interakcji z decydentami. Interesujące ze względu na zastosowania w praktyce i jako przedmiot dalszych badań są procedury budowy modelu preferencji decydentów prezentowane w pracach (Greco, Mousseau, Słowiński 2008), (Figueira, Greco, Mousseau, Słowiński 2008), oraz zastosowanie teorii zbiorów przybliżonych (Greco, Matarazzo, Słowiński 2001, 2008).

Bieżące i planowane badania dotyczą również zastosowania metod proponowanych w pracy do analizy motywacyjnie zgodnych wielokryterialnych mechanizmów rynkowych z wykorzystaniem systemów wieloagentowych. Zagadnienie zgodności motywacji w mechanizmach rynkowych rozwijane jest w pracach E. Toczyłowskiego (por. Toczyłowski 2003, 2009). Dotyczy ono badania i konstrukcji takich mechanizmów rynkowych, w których harmonizowane są interesy uczestników tak, że występowałaby zgodność ich motywacji i uczestnicy ci byłiby skłonni do przekazywania niezafałszowanych informacji, umożliwiającą efektywne funkcjonowanie danego systemu. W pracy (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2010) zagadnienie to jest badane jest na przykładzie problemu producenta i jego klientów.

Przedstawiane w tej pracy metody są zgodne z ideami dotyczącymi zaufania i uczciwości w systemach rozproszonych (A. Wierzbicki 2010), stanowiącymi kolejny interesujący kierunek dalszych badań.

Bibliografia

- Alcamo J., Shaw R., Hordijk L. (1990) The RAINS Model of Acidification, Science and Strategies in Europe. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht.
- Ameliańczyk, A. (1979) Multicriterial optimization of international economic cooperation control. Prace Naukowe ICT Polit. Wrocław. Nr 39.
- Aumann, R. J. (1961) The Core of Cooperative Games without Side Payments. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 98, 539-552.
- Aumann, R. J. (1967) A Survey of Games without Sidepayments. In: *Essays in Mathematical Economics*, M. Shubik, ed., Princeton University Press, 3-27.
- Aumann, R.J., Maschler, M. (1964) The Bargaining Set for Cooperative Games. In: *Advances in Game Theory* (M. Dresher, L. S. Shapley and A. W. Tucker, eds.), *Annals of Mathematics Studies*, No. 52, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

- Auman, R.J., Peleg, B. (1960) Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, *Bull. of the American Mathematical Society*. 66, 173-179.
- Axelrod R., (1985), *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, New York.
- Barclay S., Peterson C (1976) Multi-attribute Models for Negotiations. Technical Report 76-1, Decisions and Designs, Inc. McLean, VA.
- Bednarczuk E. (2005) Parametryczne problemy optymalizacji wielokryterialnej, warunki stabilności rozwiązań. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT. Warszawa.
- Bednarczuk E. (2006) Stability analysis for parametric vector optimization problems. *Dissertationes Mathematicae*. Warszawa.
- Benayoun R., de Montgolfier J., Laritchev O. (1971) Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM). *Mathematical Programming*, 1, 366-375.
- Bergstresser, K., P.L. Yu (1977) Domination Structures and Multicriteria Problems in N-person Games. *Theory and Decision*, Vol. 8, 5-48.
- Bergman L., H. Cesar, G. Klaassen (1990) A Scheme for Sharing the Costs of Reducing Sulfur Emissions in Europe. WP-90-005.IIASA, Laxenburg, Austria.
- Billera L.,J., Heath D. C. (1982) Allocation of Shared Costs: A Set of Axioms Yielding a Unique Procedure, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, No. 1, 32-39.

- Blass A., Raiffa H. (1986) Copmuter Program for Investigating the Efficient Solutions of Two-party, multiple-issue Negotiations, Unpublished Manuscript, Harvard University.
- Bouyssou D., Marchant T., Pirlot M., Tsoukias A., Vincke P. (2006) Evaluation and Decision Models with Multiple Criteria. Springer.
- Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Słowiński, R. (Eds.) (2008) Multiobjective Optimization, LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Bronisz P., L. Krus (1986a), Interactive System Aiding Decision Making in Multiobjective Cooperative Games. Mathematical Background, *Syst. Anal. Model. Simul.*, vol.3, 387-394.
- Bronisz P., L. Krus (1986b) Supporting of Negotiation in Bargaining Problem with Multiple Payoffs. W: Proceedings of the 1986 IFAC Workshop on Modeling, Decision and Game with Application to Social Phenomena, Vol II, Beijing, China, 496-502.
- Bronisz P., L. Kruś (1987) A Mathematical Basis for System Supporting Multicriteria Bargaining, *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, vol. 4, Warsaw, Poland, 331-337.
- Bronisz P., L. Kruś, B. Lopuch (1987) An Experimental System Supporting Multiobjective Bargaining Problem. A Methodological Guide, W: Theory, Software and Testing Examples for Decision Support Systems, ed. A. Lewandowski, A.P.Wierzbicki, IIASA, Laxenburg.

- Bronisz P., L. Kruś, (1988a) Application of Generalized Raiffa Solution to Multicriteria Bargaining Support. W: System Modeling and Optimization, M. Iri, K. Yajima (eds), Lecture Notes in Control and Information Sciences 113, Springer-Verlag, 207-211.
- Bronisz P., L. Kruś, (1988b) Interactive Procedures for Multicriteria Decision Support in Bargaining Problem. W: System Analysis and Simulation, A. Sydow, S.G. Tzafestas, R. Vichnevetsky (eds), Band 46, Akademie-Verlag, Berlin, 59-62.
- Bronisz P., L. Kruś, A. Wierzbicki (1989) Towards Interactive Solutions in a Bargaining Problem, W: Aspiration Based Decision Support Systems, ed.: A.Lewandowski, A.P.Wierzbicki, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer Verlag, Berlin, 251-268.
- Bronisz P., H. Bury, L. Kruś (1989) Interaktywny system wspomagający analizę strategii rozwojowych. W: Materiały 1-szej Krajowej Konferencji BOiS, IBS PAN, Warszawa.
- Bronisz P., L. Kruś (1989a) Dynamic Solution of Two-Person Bargaining Games. in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, 449-456.
- Bronisz P., L. Kruś (1989b) An Experimental System Supporting Negotiation on Joint Development Program. in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, 519-529.
- Bui T. (1987) Co-oP - A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision Making. Lecture Notes in Computer Science 290, Springer Verlag, Berlin.

- Bury H., L. Kruś, R. Kulikowski (1988) Supporting Planning Decisions by Experiments with Complex Development Model. W: Methodology and Applications of Decision Support Systems, Third Polish Finnish Conference, Sobieszewo 1988. IBS PAN. Warszawa.
- Chander, P., Tulkens, H. (1997) The core and economy with multilateral environmental externalities, *International Journal of Game Theory* 26(3), 379-401.
- Chankong, V., Haimes, Y.Y.(1983) Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. Elsevier Science Publishing, New York.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Ferguson, R.O. (1955) Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science* 1(2), 138-151.
- Charnes, A., Cooper, W.W. (1961) Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, John Wiley and Sons, New York.
- Charnes, A., Cooper, W.W.(1977) Goal programming and multiple objective optimization; part 1. *European Journal of Operational Research* 1(1), 39-54.
- Chen E., Vahidov R., Gregory E. Kersten G.E.(2005) Agent-supported negotiations in the e-marketplace. *International Journal of Electronic Business*, 3 (1), 28-49 .
- Cichoń T. (1989) Narzędzia softwerowe do symulacji i wspomaganie decyzji w przypadku wielokryterialnej gry dynamicznej. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.

- Cruijssen F., Cools M. and Dullaert W. (2007) Horizontal cooperation in logistics: Opportunities and impedimenta. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 43(2), 129-142.
- Davis M., Maschler M. (1965), The Kernel of a Cooperative Game, *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. 12.
- Deb K. (2008), Introduction to Evolutionary Multiobjective Optimization. W: Multiobjective Optimization, Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Slowiński, R. (Eds.), LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 57-95.
- Deb K., Chaudhuri S., Miettinen K.(2006) Towards estimating nadir objective vector using evolutionary approaches. W: Keijzer, M., i inni (red) Proceedings of the 8th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2006), Seattle, vol. 1, 643-650. ACM Press, New York.
- Dell R. F., Karwan M. H. (1990) An Interactive MCD Weight Space Reduction Method Utilizing a Tchebysheff Utility Function. *Naval Research Logistics*, 37, 263-277.
- Dreyfus S. (1985) Beyond Rationality, W: M. Grauer, M. Thompson, A. P. Wierzbicki (eds): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Ehtamo H., Hamalainen R.P. (2001) Interactive multiple-criteria methods for reaching pareto optimal agreements in negotiations. *Group Decision and Negotiation*, 10(6):475-491.
- Fandel G., (1979) Optimale Entscheidungen in Organisationen, Springer-Verlag, Heidelberg.

- Fandel G., A.P. Wierzbicki, (1985) A Procedural Selection of Equilibria for Supergames, (private unpublished communication).
- Fandel G., Gal T. (red)(1997): Multiple Criteria Decision Making. LNEMS 448, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (red)(2005) Multiple Criteria Analysis State of the Art Surveys. Springer + Business Media Inc.
- Figueira J., Greco S., Mousseau V., Słowiński R. (2008) Interactive Multiobjective Optimization Using a Set of Additive Value Functions. W: J. Branke i inni (red.) Multiobjective Optmization. LNCS 5252, 97-119. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004) Multi-criteria minimum cost spanning tree games. *European Journal of Operational Research*, 158 (2), 399-408.
- Fisher R., Ury W., (1981) Getting to Yes, Houghton Mifflin, Boston.
- Fortuna Z., Kruś L. (1984) Simulation of an Interactive Metod Supporting Collectiva Decision Making using a Regional Development Model. In: Interactive Decision Analysis, M. Grauer, A. P. Wierzbicki eds., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 201-209.
- Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z, (1987) Programowanie wielokryterialne. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.
- Gass, S., Saaty, T.(1955) The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Research Logistics Quarterly* 2, 39-45. Springer-Verlag, Heidelberg.

- Gately D. (1974) Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Game Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power, *International Economic Review*, Vol. 15.
- Gembicki, F., Y. Y. Haimes (1975) Approach to Performance and Multiojective Sensitive Optimization: the Goal Attainment Method. *IEEE Automatic Control* AC-20, No. 6.
- Geoffrion, A.M.(1968) Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22(3), 618-630.
- Gillies D. B. (1959) Solution to General Nonzero Sum Games, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 40.
- Goeltner C. (1987) The Copmuter as a Third Party: Decision Support System for Two Party Single-issue and Two Party multiple-issue Negotiations. Working Paper 1958-87, Alfred P. Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.
- Gondzio J., Makowski M. (1995) HOPDM - Modular Solver for LP Problems: Users Guide to version 2.12. Working Paper WP-95-50, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg.
- Granat J., Makowski M. (2000) Interactive specification and analysis of aspiration-based preferences. *EJOR*, 122 (2) 469-485.
- Grauer M., M. Thompson, A.P. Wierzbicki (eds), (1985) Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Greco S., Matarazzo B., Słowiński R. (2001) Rough Sets Theory for Multicriteria Decision Analysis. *EJOR*, 129, 1-47.

- Greco S., Matarazzo B., Słowiński R. (2008) Dominance-Based Rough Set Approach to Interactive Multiobjective Optimization. W: J. Branke i inni (red.) *Multibjective Optmization*. LNCS 5252, 121-155. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Greco S., Mousseau V., Słowiński R. (2008) Ordinal Regression Revisited: Multiple criteria ranking with a set of Additive Value Functions. *EJOR*. 191 (2) 416-436).
- Harsanyi J.C., R. Selten, (1972) A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information, *Management Sciences*, Vol. 18, 80-106.
- Heiskanen P., Ehtamo H., Hamalainen R.P. (2001) Constraint proposal method for computing Pareto solutions in multi-party negotiations. *European Journal of Operational Research*, 133(1), 44-61.
- Hordijk L. (1991) Use of the RAINS Model in Acid Rains Negotiations in Europe. *Environmental Science Technology*, 25 (4).
- Huang, C.Y., Sjöström, T. (2003) Consistent solutions for cooperative games with externalities, *Games and Economic Behavior* 43, 196-213.
- Hwang C., Masud A. S. M., Paidy S. R., Yoon K. (1979) *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, A state-of-the-art survey*. Springer Verlag.
- Ignizio, J.P.(1985) *Introduction to Linear Goal Programming*. Sage Publications, Beverly Hills.
- Imai H., (1983) Individual Monotonicity and Lexicographical Maxmin Solution, *Econometrica*, Vol.51, 389-401.
- Jahn, J.(2004) *Vector Optimization*. Springer, Berlin.

- Jacket-Lagreze E., Siskos J. (1982) Assesing a set of Additive Utiy Functions for Multicriteria Decision Making: The UTA Method. *EJOR*, 10:151-164.
- Jacket-Legreze E. (1990) Interactive Assessment of Preferences Using Holistic Judgements. The PREFCALC system. W: Readings in Multiple Criteria Decision aid, (C. A. Bana e Costa Ed.). Springer Verlag, Berlin, 335-350.
- James L.D., R.R. Lee, (1971) Economics of Water Resources Planning. New York, McGraw-Hill.
- Jaszkievicz A., Słowiński R. (1995) The light-beam search – outranking based interactive procedure for multiple -objective mathematical programming. W: Advances in Multicriteria Analysis (Pardalos P. M., Siskos Y., Zopoundis C. red.), Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 129-146.
- Jarke M., Jelassi M. T., Shakun M. F. (1987) Mediator: Towards a negotiation support system. *European Journal of Operation Research* 31, 314-334.
- Kalai, E. (1975) Excess Functions for Cooperative Games without Sidepayments. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.29, No. 1, 60-71.
- Kalai E., Smorodinsky M. (1975) Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 43, 513-518.
- Kaliszewski, I.(1994) Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique. Kluwer, Dordrecht.
- Kaliszewski I., Zionts S. (2004) Generalization of the Zionts-Wallenius Multicriteria Decision Making Algorithm. *Control and Cybernetics* 3, 477-500.

- Kaliszewski, I. (2006) *Soft Computing for Complex Multiple Criteria Decision Making*, Springer.
- Kaniewski M., (1990) *Wspomaganie decyzji w wielokryterialnych grach dynamicznych na przykładzie modelu gry połowowej*. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.
- Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976) *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, Chichester.
- Kersten G. E. (1985) *NEGO - Group Decision Support System. Information and Management*. Vol. 8., 237-386.
- Kersten G. E. (1988) *A Procedure for Negotiating Efficient and Non-Efficient Compromises. Decision Support Systems* 4, 167-177, North-Holland.
- Kersten, G. E.; Koszegi, S.T.; Vetschera, R. (2002) *The effects of culture in anonymous negotiations: experiment in four countries. System Sciences, System Sciences, 2002. HICSS. Proceedings of the 35th Annual Hawaii International Conference, 7-10 Jan. 2002* , 418 - 427.
- Kersten G., Lo G. (2003) *Aspire: an integrated negotiation support system and software agents for e-business negotiation. International Journal of Internet and Enterprise Management*, 1 (3), 293 - 315.
- Kersten G. E., Michalowsky W., Matwin S., Szpakowicz S. (1988) *Rule-based Modelling of Negotiation Strategies. Theory and Decision*, Vol. 25., 225-257.

- Kersten G. E., Michalowski W., Szpakowicz S., Koperczak Z. (1991) Restructurable Representations of Negotiations. *Management Science*, 37 (10).
- Kersten G.E., Sunil J. (1999) WWW-based negotiation support: design, implementation, and use. *Decision Support Systems* 25, (2), 135-154.
- Kersten G. E., Szapiro T. (1986) Generalized Approach to Modeling Negotiations, *European Journal of Operational Research*, Vol. 26, 1, 142-149.
- Khorram E., Zarepisheh M., Ghaznavi-ghosoni B.A.(2010) Sensitivity analysis on the priority of the objective functions in lexicographic multiple objective linear programs *EJOR*, 207, 1162-1168.
- Kóczy L.Á. (2007) A Recursive Core for Partition Function Form Games. *Theory and Decision* 63, 41-51.
- Kóczy L.Á. (2008) Sequential Coalition Formation and the Core in the Presence of Externalities. *Games and Economic Behavior*
- Konarzewska-Gubała E. (1980) Programowanie przy wielorakości celów. Warszawa. PWE.
- Konarzewska-Gubała E. (1991) Wspomaganie decyzji wielokryterialnych: system „Bipolar”. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Seria Monografie i Opracowania*, 76.
- Kopelowitz A. (1967) Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of N-Person Games. RM No. 31, Research Program in Game Theory and Math. Economics, Department of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem.

- Korhonen P., Laakso J. (1986) A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem. *EJOR*, 24, 227-287.
- Korhonen P., Salo S., Steuer, R.E.(1997) A heuristic for estimating nadir criterion values in multiple objective linear programming. *Operations Research* 45(5), 751-757.
- Korhonen P., Moskowitz H., Wallenius J., Zionts S. (1986) An Interactive Approach to Multiple Criteria Optimization with Multiple Decision-Makers. *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 33, 589-602, John Wiley & Sons.
- Korhonen P., Wallenius J. (1989) Supporting Individuals in Group Decision-making. Helsinki School Of Economics, Finland.
- Kostreva M.M., Ogryczak W., Wierzbicki A. (2004) Equitable Aggregation and Multiple Criteria Analysis. *EJOR*, 158, 362-367.
- Krajewska M.A., Kopfer H. (2006) Collaborating freight forwarding enterprises. *OR Spectrum*, 28 (3), 301-317.
- Kreglewski T., Paczynski J., Granat J., Wierzbicki A. P. (1988) IAC-DIDAS-N A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models with Nonlinear Model Generator supporting model analysis, IIASA working paper, IIASA, Laxenburg , Austria.
- Kreglewski T., (1984) private communication.
- Kruś L. (1985) An Interactive Method for Decision Support in a Two-person Game with an Example from Regional Planning. In: Plural Rationality and Interactive Decision Processes, M. Grauer, M. Thompson, A. P. Wierzbicki eds., Lecture Notes in

Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 336-343.

Kruś L., Lopuch B., Bronisz P., (1989) Application of interactive solutions for decision support in bargaining problem, an illustrative example. In: Methodology and Applications of Decision Support Systems, R. Kulikowski (ed.), Proceeding of the 3-rd Polish-Finnish Symposium, Gdansk, 1988, 121-140.

Kruś L., Bronisz P., Lopuch B., (1990) MCBARG - Enhanced, A System Supporting Multicriteria Bargaining, IIASA Collaborative Paper, CP-90-006, IIASA, Laxenburg, Austria.

Kruś, L., Lopuch B. (1989) Wielokryterialny problem targu w przypadku modeli liniowych i jego rozwiązanie przy użyciu systemu MCBARG. Przykład modeli gospodarstwa rolnego. Opracowanie ZTSW 16/17/89, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., Bronisz P. (1990). Decision Support on Joint Development Program, Opracowanie, ZTSW, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., (1991) Some Models and Procedures for Decision Support in Bargaining, W: Multiple Criteria Decision Support. Korhonen, Lewandowski, Wallenius (ed.), Lecture notes in Economics and Math. Systems, Vol. 356, Springer Verlag, Berlin 350-359.

Kruś, L. (1992a) Interactive Approach to multicriteria bargaining on an example of acid rains problem. W: Systems and Control (Han-Fu Chen Ed.) International Acad. Publ., Beijing, China.

Kruś, L. (1992b) Computer Based Mediation Support. W: Preprints of the IFAC Workshop on "Support Systems for Decision and Negotiation Processes", June, 24-26, 1992, Warsaw, Poland.

- Kruś L., Bronisz P. (1993) Some New Results in Interactive Approach to Multicriteria Bargaining. W: User Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis, Wierzbicki i inni (red.), Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, Springer Verlag, Berlin, str 21-34.
- Kruś L., Bronisz P. (1994) On n-person Noncooperative Multicriteria Games Described in Strategic Form. *Annals of Operation Research*. Vol. 51 (1994), 83-97. J. C. Balzer AG, Sci. Publ.
- Kruś L., Nahorski Z., Owsinski J. W. (eds.) (1994). Decision Support in Negotiations and Policy Determination. Special issue of *Control and Cybernetics*. Vol. 22, No.4, 1993 (appeared in 1994).
- Kruś L. (1994) Wspomaganie negocjacji w wielokryterialnym zagadnieniu targu. Biuletyn Instytutu Badań Systemowych PAN. Nr 2, 14-26.
- Kruś L., Bronisz P. (1995) Solution Concepts in Multicriteria Cooperative Games without Side Payments. W: System Modelling and Optimization, J. Dolezal (ed.), Chapman and Hall Publ.
- Kruś L., Bronisz P. (1996) Cooperative Game Model for a Cost Allocation Problem. In: S. Bańka, S. Domek, Z. Emirsajłow (eds) Methods and Models in Automation and Robotics. Proc of the Third Int. Symposium. 10-13 September, Międzyzdroje Poland. Technical Univ. of Szczecin, Vol. 1, 275-280.
- Kruś L., (1996) Multicriteria Decision Support in Negotiations, *Control and Cybernetics*, Vol. 25 , No. 6, 1245-1260.
- Kruś L., Bronisz P. (1998) Cooperative game in partition function form for a cost allocation problem. In: S. Bańka, S. Domek, Z. Emirsajłow (eds) Methods and Models in Automation

and Robotics. Proc.of the Fifth Int. Symposium. 25-29 August, Międzyzdroje, Poland. Technical Univ. of Szczecin, 279-284.

Kruś L., Bronisz, P., (2000) Cooperative game solution concepts to a cost allocation problem, *European Journal of Operational Research*. Vol. 122 , No. 2, 258-271.

Kruś L. (2002a) A System Supporting Financial Analysis of an Innovation Project in the Case of Two Negotiating Parties, *Bull. of Polish Academy of Sci., Ser. Techn.*, Vol. 50, No. 1, 93-108.

Kruś L. (2002b) Multicriteria Decision Support in Bargaining, a Problem of Players Manipulations, in: T. Trzaskalik, J. Michnik, (eds), *Multiple Objective and Goal Programming*, Physica Verlag, Springer, Berlin.

Kruś L., (2004a), A Computer Based System Supporting Analysis of Cooperative Strategies, in: L. Rutkowski, J. Siekmann, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, (eds), *Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin.

Kruś L. (2004b) A multicriteria approach to cooperation in the case of innovative activity, *Control and Cybernetics*, Vol. 33 , No. 3.

Kruś L. (2008) On Some Procedures Supporting Multicriteria Cooperative Decisions. *Foundations of Computing and Decision Science*, 33 (3), 257-270.

Kruś L. (2009) Cost Allocation in Partition Function Form Games. *Operation Research and Decisions*, No. 2, 39-49.

- Kruś L. Skorupiński J., Toczyłowski E. (2010) Analiza motywacyjnie zgodnych decyzji wielokryterialnych na przykładzie problemu producenta i klientów. *Badania Operacyjne i Systemowe*.
- Kulikowski R. (1998) Portfolio optimization: two factors utility approach, *Control & Cybernetics*, 3.
- Kulikowski R.(2002) URS methodology - a tool for stimulation of economic growth by innovations, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech.*, Vol. 50 , No. 1.
- Kulikowski R.(2003) On general theory of risk management and decision support systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech.*, Vol. 51 No. 3.
- Kulikowski R. , L. Kruś (2003) Support of education decisions. In: *Group Decisions and Voting* (J. Kacprzyk, D. Wagner eds), Akad. Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.
- Lax D. A., Sebenius J. K. (1985) The Power of Alternatives and the Limits to Negotiations, *Negotiation J.* Vol. 1, 163-179.
- Legros P.(1986) Allocating Joint Costs by Means of Nucleolus, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 15, Issue 2, 109-119.
- Lewandowski A., A.P. Wierzbicki A.P. (1989) *Aspiration Based Decision Support Systems*. Springer, Berlin.
- Lewandowski A., T. Kreglewski, T. Rogowski, A. P. Wierzbicki (1989) Decision Support Systems of DIDAS Family. In: *Aspiration Based Decision Support Systems*, (A. Lewandowski, A.P. Wierzbicki eds.) *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 331, Springer-Verlag, 21-47.

- Littlechild S.C. (1974) A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 3, Issue 1, 21-29.
- Littlechild, S.C., Thompson, G.F. (1977) Aircraft landing fees: a game theory approach. *The Bell Journal of Economics*. Vol. 8, 186-204.
- Littlechild S.C., Vaidya K.G. (1976) The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 5, 151-161.
- Lucas, W.F., (1965) Solution for Four-Person Games in Partition Function Form, *SIAM Review*. Vol. 13, 118-128.
- Lucas, W.F. (1968) A game with no solutions. *Bull. of the American Mathematical Society* Vol. 74, 237-239.
- Lucas, W.F. (1969) The proof that a game may not have a solution. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.137, 219-229.
- Luce R.D., H. Raiffa, (1957) *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*, New York: Wiley.
- Makowski M. (2005) A structured modeling technology. *EJOR*, Vol. 166 (3), 615-648.
- Makowski, M., Somlyódy, L. and Watkins, D. (1996), Multiple Criteria Analysis for Water Quality Management in the Nitra Basin. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, Vol. 32: 937-951.
- Makowski, M. (2000) Modeling paradigms applied to the analysis of European air quality. *EJOR*, Vol. 122 (2), 219-241.

- Maschler M, Peleg B, Shapley L.S. (1979) Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, 303-338.
- Matsubayashi N., Umezawa M., Masuda Y. and Nishino H. (2005) A cost allocation problem arising in hub-spoke network systems. *European Journal of Operational Research*, Vol. 160 (3), 821-838.
- Matwin S., Szpakowicz S., Koperczak Z., Kersten G.E., Michalowski W.(1989) Negoplan: An Expert System Shell for Negotiation Support, *IEEE Intelligent Systems*, Vol. 4 (4), 50-62.
- Matwin, S., Szapiro T., Haigh K. (1991) Genetic Algorithms Approach to a Negotiation Support System. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* Vol. 21 (1), 102-114.
- Michalowski W., Szapiro T. (1989) A procedure for worst outcomes displacement in multiple criteria decision making . *Computers and Operations Research*, Vol. 16, (3), 195-206.
- Michalowski W., Szapiro T. (1992) A Bi-reference Procedure for Interactive Multiple Criteria Programming. *Operations Research*, Vol. 40, No. 2
- Miettinen, K. (2008) Introduction to Multiobjective Optimization: Noninteractive Approaches. In: Multiobjective Optimization, J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Słowiński (Eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Moulin H. (1988) Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge University Press, Cambridge.

- Nakayama H. (1985) Aspiration Level Approach to Interactive Multi-objective Programming and its Applications. W: *Advances in Multicriteria Analysis* (Pardalos P. M., Siskos Y., Zopounidis C. red.), KluwerAcademic Publishers, Dodrecht, 147-174.
- Narula S.C., Kirilov L., Vassilev V. (1994) Reference Direction Approach for Solving Multiple Objective Nonlinear Programming Problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 24, 804-806.
- Nash J.F., (1950) The Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 18, 155-162.
- Nash J.F., (1953) Two-Person Cooperative Games, *Econometrica*, Vol. 21, 129-140.
- von Neumann, J., O. Morgenstern (1953) *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press.
- Nunamaker J., F., Applegate L., M., Konsynsky B., R. (1988) Computer-aided deliberation: Model Management and Group Decision Support. *Operations Research*, Vol. 36., 826-848.
- Nyhart J., Samarasan D. (1989) The Elements of Negotiation Management: Using Computers to Help Resolve Conflict. *Negotiation Journal*, 43-62.
- Nykowski I., Żółkiewski Z.(1985) A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem. *European J. Oper. Res.* 19, 91-97.

- Ogryczak W., (1997) Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Modele preferencji i zastosowania do wspomaganie decyzji. Warszawa, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.
- Ogryczak W., (2002) Multiple criteria optimization and decisions under risk, *Control and Cybernetics*, Vol. 31 , No. 4.
- Ogryczak W., Śliwiński T. (2007) On Optimization of the Importance Weighted OWA Aggregation of Multiple Criteria. LNCS **4705**, 804-817.
- Ogryczak W., (2008) Reference Point Method with Lexicographic Min-ordering of Individual Achievements. W: Multiple Criteria Decision Making 07, T. Trzaskalik red.. Publisher of The Karol Adamiecki University of Economics in Katowice, Katowice, 155-174.
- Pawlak Z.(1982) Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11, 341-356.
- Pawlak Z.(1991) Rough Sets. Kluwer, Dordrecht.
- Peleg, B. (1963) Solutions to Cooperative Games without Side Payments. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 106, 280-292.
- Piasecki, St., J. Hołubiec, A. Ameliańczyk (1982). Międzynarodowa kooperacja gospodarcza, modelowanie i optymalizacja. PWN, Warszawa.
- Raiffa H., (1953) Arbitration Schemes for Generalized Two-Person Games, *Annals of Mathematics Studies*, No. 28 361-387, Princeton.
- Raiffa H. (1982) The Art and Science of Negotiations. Harvard Univ. Press, Cambridge.

- Ransmeier J. S. (1942) The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning, The Vanderbilt University Press, Nashvill.
- Rogowski, J. Sobczyk, A. P. Wierzbicki (1988) IAC-DIDAS-L A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System, Linear Version. WP-88-110, IIASA, Laxenburg, Austria.
- Roth A.E., (1979a) An Impossibility Result Concerning n-Person Bargaining Games, *International Journal of Game Theory*, Vol. 8, 129-132.
- Roth A.E., (1979b) Axiomatic Model of Bargaining, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 170, Springer-Verlag, Berlin.
- Roth A.E. , M.W.K. Malouf , (1979) Game-Theoretical Models and the Role of Information in Bargaining, *Psychological Review*, Vol. 86, 1163-1170.
- Roy B. (1990) Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.
- Savage L. J., The foundations of statistics. New York, Wiley, 1954
- Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985) Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, New York.
- DeSanctis G., Gallupe R., B. (1987) A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems. *Management Science*, Vol. 33, No. 5., 589-609.
- Schmeidler D. (1969) The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, No. 3, 1163-1169.

- Sebenius J. K. (1992) Negotiation Analysis: A Characterization and Review *Management Science*, Vol. 38, No. 1, 18-38.
- Sebenius J. K. (2007) Negotiation Analysis: Between Decisions and Games. W: W. Edwards, R. Miles, D. von Winterfeldt (eds.), *Advances in Decision Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Seo F. (1988) Utilization of Mathematical Programming in Group Decision Making: An Application to Effective Formation of Integrated Regional Information Networks. Discussion Paper No. 254, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University.
- Seo F. Sakawa M. (1987) Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning, D. Reidel Publishing Co.
- Shakun M. (1988) Evolutionary Systems Design. HoldenDay, Oakland, CA.
- Shapley L. S. (1953) A Value for n-Person Game, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 28,
- Shapley L. S., Schubik M. (1966) Quasi-cores in Monetary Economy with Nonconvex Preferences, *Econometrica*, Vol. 34, 805-827.
- Skulimowski A. (1996) Decision Support Systems Based on Reference Sets Theory Multiobjective Optimization. AGH-Press, Kraków.
- Skwarczyło M. (1988) Opis użytkowy programu SCONVEX. Opracowanie ZTSW-24-17/88, IBS PAN, Warszawa.
- Stam A., H. Cesar, M. Kuula (1989) Transboundary Air Pollution in Europe: An Interactive Multicriteria Tradeoff Analysis, WP-89-61, IIASA, Laxenburg, Austria.

- Stearns R. (1964) On the Axioms for a Cooperative Game without Side Payments. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 15, 82-86.
- Steuer R.E.(1986) Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. Wiley, New York.
- Szapiro T. (1991) Podejście interaktywne we wspomaganii podejmowania decyzji. SGH. Warszawa.
- Szapiro T. (1993) Co decyduje o decyzji. PWN, Warszawa.
- Szapiro T.(red.) (2000) Decyzje menadżerskie z Excelem. PWE, Warszawa.
- Szapiro T., Wojewnik P. (2007) Negotiating an Investment Strategy with Fuzzy Redescriptions. W: G. Kersten, j. Rios, E. Chen (red.) *Proc. Group Decisions and Negotiations 2007*, Vol. II, Concordia Univ., Montreal, Canada.
- Szapiro T., Wojewnik P. (2008) Universal Software Platform for Construction of Web-based Negotiation Support Systems. W: J. Climaco, G. Kersten, J. P. Costa (red.) *Group Decisions and Negotiation, Proceedings*, 203-204.
- Teich J. E., Wallenius H., Kuula M., Zionts S. (1995) A Decision Support Approach for Negotiation with an Application to Agricultural Income Policy Negotiations. *European Journal of Operational Research*, Vol. 81, 76-87.
- Thomson W., (1980) Two Characterization of the Raiffa Solution, *Economic Letters*, Vol. 6, 225-231.
- Thrall, R.M., Lucas W.F. (1963) n-Person Games in Partition Function Form, *Naval Research Logistics Quarterly*, 10, 281-298.

- Toczyłowski E.(2003) Optymalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach. AOW EXIT, Warszawa.
- Toczyłowski E. (2009) Zgodność motywacji w mechanizmach rynku energii. Rynek Energii, II(IV) , 88-95.
- Trzaskalik T. (1990) Wielokryterialne dyskretne programowanie dynamiczne. Teoria i zastosowania w praktyce gospodarczej. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach.
- Trzaskalik T. (1997) Multiple Criteria Discrete Dynamic Programming. W: Multiple Criteria Decision Making. Fandel G., Gal T. (eds), LNEMS 448, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 202-211.
- Trzaskalik T. (1998) Multiobjective analysis in dynamic environment. Karol Adamiecki University of Economics in Katowice (Katowice).
- Trzaskalik T., Michnik J. (red.) (2002) Multiple objective and goal programming : Recent developments. Physica-Verlag, Springer.
- Trzaskalik T., Sitarz S. (2007) Discrete dynamic programming with outcomes in random variable structures. *European Journal of Operational Research*, 177, (3), 1535-1548.
- Trzaskalik T. (red.) (2006) Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym. PWE, Warszawa.
- Tversky A., Kahneman O., (1981) The framing of decisions and the psychology of choice, *Science*, Vol. 211, 453-480.
- Tversky A. (1967) Utility theory and additivity analysis of risky choices, *Experimental Psychology*, Vol. 75, 27-37.

- Vetschera, R.(1990) Group Decisions and Negotiation Support - a Methodological Survey. *OR Spectrum*, Vol. 17, 67-77.
- Vetschera R., Kersten G., Köszegi S. (2006) User Assessment of Internet-Based Negotiation Support Systems: An Exploratory Study. *Journal of Organizational Computing and Electronic Commerce* Vol. 16 (2), 123-148.
- Vetschera, R.(2007) Preference structures and negotiator behavior in electronic negotiations. *Decision Support Systems* Vol. 44 (1), 135-146.
- Wachowicz T. (2006) Application of Multiple Attribute Stochastic Dominance to Selection of Negotiation Strategies in E-negotiations. W: Multiple Decision Making 05, T. Trzaskalik (red). The Karol Adamecki University of Economic Press, Katowice.
- Wachowicz T. (2008) Negotiation and Arbitration Support with Analytic Hierarchical Process. W: Multiple Decision Making 07, T. Trzaskalik (red). The Karol Adamecki University of Economic Press, Katowice.
- Wierzbicki A. (2010) Trust and Fairness in Open, Distributed Systems. Springer
- Wierzbicki A.P., (1982) A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making, *Mathematical Modelling*, 3, 391-405.
- Wierzbicki A.P., (1983) Negotiation and Mediation in Conflicts I: The Role of Mathematical Approaches and Methods, Working Paper WP-83-106, IIASA, Laxenburg; także w: H. Chestnat i inni, (ed): Supplemental Ways to Increase International Stability, Pergamon Press, Oxford, 1983.

- Wierzbicki A.P., (1985) Negotiation and Mediation in Conflicts II: Plural Rationality and Interactive Decision Processes, W: M.Grauer, M.Thompson, A.P.Wierzbicki (ed): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Wierzbicki A.P.,(1986) On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems, *OR Spectrum* 8:73-87, Springer Verlag.
- Wierzbicki A.P., (1990) Multiple Criteria Solutions in Noncooperative Game Theory, Part III. Discussion Paper 288, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, Kyoto.
- Wierzbicki A.P., (1987) Towards Interactive Procedures in Simulation and Gaming: Implications for Multiperson Decision Support, W: Methodology and Software for Interactive Decision Support, Proceedings of International Workshop, Albena, Springer Verlag.
- Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993) The Role of Multi-Objective Optimization in Negotiation and Mediation Support” in: Theory and Decision, special issue on “International Negotiation Support Systems: Theory, Methods, and Practice, Vol. 34 (3), 201-214.
- Wierzbicki A. P., M. Makowski, J. Wessels, (2000) Model-based Decision Support Methodology with Environmental Applications, Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston.
- Wierzbicki A. P. (2005) A Reference Point Approach to Coalition Games. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* Vol. 13 (2-3), 81-89.

- Young H. P., Okada N., Hashimoto T. (1980) Cost Allocation in Water Resources Development - A Case Study of Sweden. RR 80-32, IIASA, Laxenburg, Austria.
- Young P. (1982) Cost allocation. Prentice Hall. New York.
- Young P. (1985) Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, Vol. 14 (2),65-72.
- Young P. (1992) Negotiation Analysis. The University of Michigan Press.
- Zeleny, M.(1973) Compromise programming. In: Cochrane, J.L., Zeleny,M. (eds.) Multiple Criteria Decision Making, 262-301. University of South Carolina, Columbia, SC.
- Zionts S., Wallenius J. (1976) An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem. *Management Science* 22, 652-663.
- Zionts S., Wallenius J. (1983) An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Utility Functions. *Management Science* 29, 519-529.

Rozpatruje się sytuacje decyzyjne, w których występuje kilku decydentów, negocjujących warunki współpracy. Problem dotyczy podziału efektów współpracy, przy czym każdy decydent ma swój odrębny, wielokryterialny zestaw celów, które chciałby osiągnąć i kieruje się swoimi preferencjami.

W pracy przedstawia się podstawy teoretyczne i metody wspomaganie procesu decyzyjnego w takich sytuacjach z wykorzystaniem odpowiednio zbudowanego systemu komputerowego. Rozpatrywane sytuacje opisywane są formalnie jako modele wielokryterialnego problemu targu i wielokryterialnych gier koalicyjnych. Proponowane są koncepcje rozwiązań w tych grach uwzględniające preferencje decydentów, a następnie wielorundowe procedury negocjacyjne wspomagające proces znajdowania zgodnego rozwiązania. W poszczególnych rundach takiej procedury stosowana jest jednostronna i wielostronna analiza wielokryterialna możliwych wypłat, przy czym system komputerowy generuje propozycje mediacyjne. Przedstawia się konstrukcję zbudowanego systemu komputerowego MCBARG, w którym taka procedura została zaimplementowana oraz przykłady problemów kooperacji.

ISSN 0208-8029
ISBN 9788389475381

SYSTEMS RESEARCH INSTITUTE
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Phone: (+48) 22 3810246 / 22 3810277 / 22 3810241 / 22 3810273
email: biblioteka@ibspan.waw.pl