POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WIELOKRYTERIALNE DECYZJE KOOPERACYJNE

METODY WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO

Lech Kruś

Warszawa 2011

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
Tom 70

==

Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2011

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH

===

Lech Kruś

WIELOKRYTERIALNE DECYZJE KOOPERACYJNE

METODY WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO

Warszawa 2011

Dr inż. Lech Kruś
Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk
Newelska 6, 01-447 Warszawa
email: krus@ibspan.waw.pl

Recenzenci:

Prof. dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski

Prof. dr hab. inż. Andrzej P. Wierzbicki

Skład: Lech Kruś i Urszula Kruś

Wydawca:
Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk
Newelska 6, 01-447 Warszawa
www.ibspan.waw.pl

ISSN 0208-8029
ISBN 9788389475381

1

Wprowadzenie

W pracy rozważa się sytuacje decyzyjne, w których jest kilku decydentów negocjujących warunki możliwej współpracy. Problem dotyczy podziału efektów współpracy, przy czym każdy decydent ma swój odrębny, zestaw celów, które chciałby osiągnąć i kieruje się swoimi preferencjami. Cele te są w ogólnym przypadku konfliktowe, zarówno w przypadku każdego decydenta jak i między decydentami. Każdy decydent ma określony wektor kryteriów mierzących poziomy osiągnięcia jego celów, przy czym wartości tych kryteriów zależą od decyzji wszystkich decydentów. Sytuacje takie nazywane są sytuacjami kooperacyjnymi z wielokryterialnami wypłatami decydentów. Zakłada się, że można zbudować model matematyczny opisujący taką sytuację decyzyjną a w szczególności pozwalający wyznaczyć wielokryterialne wypłaty decydentów w zależności od podejmowanych przez nich decyzji.

Praca dotyczy problemów metodologicznych związanych ze wspomaganiem procesu decyzyjnego w takich sytuacjach przy wykorzystaniu modeli matematycznych. Przedstawia się podstawy teoretyczne i metody, które mogą być wykorzystane w konstrukcji systemów komputerowych wsparcia decyzyjnego.

Cechą charakterystyczną rozpatrywanych w pracy problemów w przypadku wielokryterialnych wypłat jest to, że każdy decydent ma do czynienia z pewnym zbiorem tzw. niezdominowanych rozwiązań, przy czym zbiory rozwiązań decydentów są wzajemnie współzależne. Zbiory niezdominowanych rozwiązań są na ogół niemożliwe do zapisania w formie analitycznej i przedstawienia decydentom w takiej formie do analizy. Możliwe jest natomiast wyznaczenie pewnej skończonej liczby punktów należących do tych zbiorów przy zastosowaniu metod obliczeniowych.

W uzupełnieniu do rozwijanych w pracy podstaw teoretycznych i metod wspomagania decyzji kooperacyjnych, rozpatruje się również zagadnienia budowy i zastosowania systemów komputerowych nie tylko do wspomagania analizy decyzyjnej dokonywanej indywidualnie przez każdego decydenta z uwzględnieniem jego preferencji, ale także do wspomagania procesu mediacji, w trakcie którego generowane są propozycje mediacyjne.

Dla przypadku pojedynczego decydenta rozwinięte zostały metody wielokryterialnego wspomagania decyzji. Istnieje już obecnie bardzo wiele prac przeglądowych i monografii poświęconych metodom wielokryterialnego podejmowania decyzji. np. (Branke, Deb, Miettinen, Słowiński 2008), (Wierzbicki, Makowski, Vessels 2000), (Kaliszewski 1994, 2006), (Chankong, Haimes 1983), (Cohon, 1985), (Galas, Nykowski, Żółkiewski 1987), (Hwang, Masud, 1979), (Sawaragi, Nakayama, Tanino 1985), (Steuer 1986), (Yu 1985), (Zeleny 1982). Proponowane w tych pracach podejścia mają na celu umożliwienie decydentowi wyboru ze zbioru rozwiązań niezdominowanych rozwiązania zgodnego z jego preferencjami, przy zastosowaniu pewnej procedury przeglądania tego zbioru. Wykorzystywane są przy tym różne metody obliczeniowe.

Wśród stosowanych podejść na szczególną uwagę zasługują metody stosujące pojęcie tzw. funkcji osiągnięcia, wykorzystujących poziomy aspiracji czy punkty referencyjne, sprecyzowane przez decydenta, por. (Wierzbicki, 1982, 1986, Wierzbicki i inni 2000). W metodach tego typu stosowana jest interakcyjna procedura, w trakcie której decydent może coraz lepiej poznawać zbiór rozwiązań niezdominowanych, wyznaczając przy pomocy systemu komputerowego niektóre rozwiązania z tego zbioru. Odpowiednio dobierając punkty referencyjne może także kierować sposobem przeglądania tego zbioru i wybrać ostateczne rozwiązanie zgodnie ze swoimi preferencjami.

W przypadku kilku decydentów zagadnienie jest bardziej złożone, ponieważ istnieje wiele indywidualnych zbiorów rozwiązań niezdominowanych i zbiory te są współzależne. Decydenci mają zwykle różne cele, których osiągniecie jest mierzone za pomocą kryteriów i maja różne preferencje. Rozwiązaniem całego problemu jest wariant, który zostanie zaakceptowany przez wszystkich decydentów. Decydenci mogą być w różnej tzw. *pozycji przetargowej*. Każdy z nich może mieć inny wpływ na wyniki współpracy. Wspomaganie procesu decyzyjnego rozumiane jest w tym przypadku jako wspomaganie decydentów w procesie analizy umożliwiającej lepsze rozumienie ich pozycji przetargowej, a także jako wspomaganie procesu negocjacji, tzn. pomoc w znalezieniu akceptowalnego przez nich wszystkich rozwiązania.

Istnieje obecnie wiele prac poświęconym analizie procesów negocjacji a także ich formalnemu opisowi, np. prace (Barclay, Peterson 1976), (Raiffa 1982), (Axelrod 1985), (Wierzbicki 1985, 1987, 1990), (Kersten, Szapiro 1986), (Kersten i inni 1988, 1991), Sebenius (1992, 2007). Idee komputerowego wspomagania procesów negocjacji oraz przykłady zbudowanych systemów można znaleźć w pracach autorów: Goeltner (1987), Jarke, Jelassi, Shakun (1987), Kersten (1985, 1988), Korhonen, Moskowitz, Wallenius, Zionts (1986), DeSanctis, Gallupe (1987), Shakun (1988), Nunamaker, Applegate, Konsynsky (1988), Korhonen, Wallenius, (1989), Nyhart, Samarasan (1989), Vetschera (1990), Teich, Wallenius, Kuula, Zionts (1995), Ehtamo, Hamalainen (2001), Heiskanen, Ehtamo, Hamalainen (2001). Rozwijane są idee wspomagania negocjacji przez internet, w tym z wykorzystaniem systemów wieloagentowych, i zbierane jest doświadczenie stosowania takich systemów, np. (Kersten, Sunil 1999, Kersten i inni 2002, Kersten, Lo 2003, Chen i inni 2005, Vetschera, Kersten, Köszegi 2006, Vetschera 2007, Wachowicz 2006, 2008, Szapiro, Wojewnik 2007, 2008).

Monografia przedstawia specyficzne autorskie podejście do problemu negocjacji przy wielokryterialnych wypłatach decydentów.

Sytuację decyzyjną, w której znajdują się decydenci opisuje się za pomocą gier wielokryterialnych, w szczególności wielokryterialnego problemu targu i wielokryterialnych gier koalicyjnych. Wypłaty w takich grach rozpatrywane są w przestrzeni będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów. W momencie rozpoczęcia badań w latach 80-ych ubiegłego wieku, teoria takich gier nie była jeszcze rozwinięta. Zaproponowano więc i przedstawia się w pracy odpowiednie sformułowania takich gier, koncepcje ich rozwiązań i analizę właściwości. Proponowane koncepcje rozwiązań charakteryzują się tym, że uwzględniają preferencje każdego z decydentów.

Proponuje się konstrukcję wielorundowych procedur wspomagających analizę decyzyjną wykonywaną przez decydentów jak i proces mediacji z wykorzystaniem koncepcji rozwiązań teorii gier. W każdej rundzie takiej procedury każdy decydent przeprowadza analizę wielokryterialną osiągalnych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów, co umożliwia mu wskazanie swoich preferencji. Informacje o tych preferencjach umożliwiają z kolei wyliczenie propozycji mediacyjnej. Propozycja mediacyjna wyznaczana jest na podstawie jednej z proponowanych w pracy koncepcji rozwiązania gry wielokryterialnej. Propozycja mediacyjna uwzględnia preferencje wszystkich decydentów i jest przedmiotem indywidualnej analizy przez decydentów w kolejnej rundzie.

W pracy opisano, jak taka procedura może być zaimplementowana w konstrukcji komputerowego systemu wsparcia decyzyjnego.

Zaproponowane w pracy podejście stanowi uzupełnienie ewentualnie alternatywę do podejść prezentowanych w cytowanej wyżej literaturze.

Układ pracy jest następujący.

W rozdziale 2 przedstawia się podstawowe pojęcia i idee wielokryterialnej optymalizacji. Szczególną uwagę zwrócono na metodę punktu referencyjnego z wykorzystaniem funkcji osiągnięcia A.P. Wierzbickiego, ponieważ metoda ta jest wykorzystywana w proponowanych procedurach wspomagających analizę i proces mediacji, przedstawionych w dalszej części pracy.

Rozdział 3 wprowadza podstawowe pojęcia dotyczące negocjacji i klasycznej teorii gier. Klasyczną jest nazywana teoria gier rozwijana przy założeniu skalarnych wypłat graczy.

Kolejne rozdziały 4 - 9 zawierają oryginalne wyniki w zakresie przedmiotowym monografii uzyskane w trakcie prowadzonych badań.

Rozdział 4 zawiera ogólne sformułowanie wielokryterialnego problemu decyzyjnego w sytuacjach kooperacyjnych. Podaje się definicję wielokryterialnego problemu targu. Proponuje się kilka koncepcji rozwiązań, stanowiących uogólnienie rozwiązań znanych z literatury. Rozwiązania te są określane z wykorzystaniem wprowadzonej, oryginalnej koncepcji tzw. punktu względnej utopii. Punkt ten uwzględnia preferencje decydentów określone w ich przestrzeniach kryteriów. Analizuje się właściwości tych rozwiązań i ich relacje.

Przedstawia się następnie możliwości wykorzystania tych rozwiązań w interakcyjnych procedurach mediacyjnych (Rozdział 5). Inspiracją do formułowania takich procedur były koncepcje i metody negocjacji (Raiffa 1982) stosowane w praktyce, np. zakończone sukcesem rokowania izraelsko-egipskie w Camp David. Proponuje się oryginalną procedurę, w której wprowadza się i łączy dwa sposoby wspomagania decyzyjnego: tzw. jednostronne i wielostronne. Wspomaganie jednostronne pozwala każdemu z decydentów biorących udział w negocjacjach na niezależną analizę problemu bez uwzględnienia aktualnych decyzji pozostałych decydentów. Wspomagana jest analiza wielokryterialna wykonywana przez każdego z decydentów metodą punktu referencyjnego z użyciem funkcji osiągnięcia. We wspomaganiu wielostronnym uwzględnione są aktualne decyzje wszystkich decydentów. Taki sposób wspomagania decyzyjnego umożliwia decydentom lepsze poznanie ich sytuacji przetargowej, wybór propozycji rozwiązań zgodnie z ich preferencjami, a także wspomaga znalezienie konsensusu, jako rozwiązania niezdominowanego, akceptowanego przez wszystkich decydentów.

Powyższa procedura została wykorzystana w konstrukcji komputerowego systemu wsparcia decyzyjnego MCBARG. Strukturę i funkcje tego systemu omawia się w rozdziale 6. System ten umożliwia budowę modelu problemu decyzyjnego opisywanego jako wielokryterialny problem targu i przeprowadzenie sesji negocjacyjnych z udziałem osób przyjmujących rolę decydentów w tym problemie. System wspomaga proces analizy wielokryterialnej dokonywany w każdej rundzie przez każdego decydenta oraz pełni rolę niezależnego mediatora i ułatwia decydentom znalezienie konsensusu. W rozdziale tym przedstawia się także przykłady dotyczące międzynarodowej współpracy w zakresie kwaśnych deszczów, oraz współpracy gospodarstw rolnych, modelowane jako wielokryterialny problem targu. Modele wielokryterialnego problemu targu dla tych przykładów zostały zbudowane z wykorzystaniem edytora systemu MCBARG a następnie wykorzystane w przeprowadzonych eksperymentalnych sesjach negocjacji.

W Rozdziale 7 rozpatruje się sytuacje decyzyjne opisywane za pomocą wielokryterialnych gier kooperacyjnych, uwzględniających możliwość tworzenia przez graczy koalicji. Przedstawia się rozwinięcie sformułowania klasycznych gier kooperacyjnych podanego przez Aumana (1967), oraz koncepcji rozwiązań na przypadek wielokryterialnych wypłat graczy. W przestrzeniach wielokryterialnych wypłat rozpatruje się różne sformułowania dominacji. Podaje się oryginalną propozycję koncepcji rozwiązania typu nukleolus, uwzględniającego preferencje wszystkich graczy. Przedstawia się także idee interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji, w której zaproponowana koncepcja nukleolusa służy do wyznaczania propozycji mediacyjnych.

Rozdział 8 przedstawia rodzinę gier opisujących współpracę graczy zainteresowanych pozyskaniem pewnego zestawu dóbr przez realizację wspólnego projektu. Proponuje się i analizuje procedury alokacji kosztów między graczy, wykorzystujące mechanizm cenowy oraz różne koncepcje rozwiązań. Przedstawia się także procedurę wspomagającą analizę problemu alokacji kosztów. Problem alokacji kosztów rozpatruje się także w kolejnym rozdziale 9 w klasie tzw. gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji. Gry takie opisują rzeczywiste sytuacje, w których wypłaty każdej koalicji zależą nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicji tworzonych przez graczy pozostałych. W pracy rozwijana jest teoria takich gier. W szczególności formułuje się koncepcje rozwiązań, takich jak rdzeń gry i zbiory stabilne. Analizuje się właściwości tych rozwiązań.

Rozdział 10 zawiera podsumowanie najważniejszych wyników uzyskanych w trakcie dotychczasowych badań i prezentowanych we wcześniejszych rozdziałach oraz propozycje kierunków dalszych badań.

Monografię kończy bibliografia zawierająca 235 pozycji literatury i indeks.

Przedstawiane w pracy wyniki były prezentowane m.in. w niżej wymienionych pracach:

- w zakresie idei wspomagania negocjacji w wielokryterialnych sytuacjach kooperacyjnych: (Fortuna, Kruś 1984, Kruś 1985, Bronisz, Kruś 1987, 1988, 1989a, 1989b, Bronisz, Kruś, Wierzbicki 1989, Kruś 1991, Kruś, Bronisz 1993, Kruś 1996, 2002b, 2004b, Wierzbicki, Kruś, Makowski 1993),

- dotyczących systemu komputerowego MCBARG i przykładów wielokryterialnych problemów targu: (Kruś, Bronisz, Łopuch 1990, Kruś, Łopuch 1989, Kruś, Łopuch, Bronisz 1989, Kruś 1992a),

- dotyczących wielokryterialnych gier koalicyjnych, gier wieloprzedmiotowych w zastosowaniu do alokacji kosztów, gier w postaci funkcji partycji: (Kruś, Bronisz 1995, 1996, 1998, 2000, Kruś 2008, 2009).

Lista ważniejszych wyników

W zakresie sytuacji kooperacyjnych modelowanych jako wielokryterialny problemu targu:

- koncepcje indywidualnie niezdominowanych wypłat graczy oraz punktu względnej utopii (Definicje 4.1, 4.2),
- koncepcja uogólnionego rozwiązania Raifffy-Kalaia-Smorodinsky'ego i jego aksjomatyzacja (Twierdzenia 4.1. i 4.2),
- koncepcja uogólnionego rozwiązania leksykograficznego i jego aksjomatyzacja (Twierdzenie 4.3),
- koncepcja rozwiązania iteracyjnego (Twierdzenie 5.1. pokazujące właściwości tego rozwiązania),
- propozycja interakcyjnej procedury wspomagającej analizę i proces mediacji,
- zaprojektowanie i implementacja systemu komputerowego (MCBARG) wspomagającego analizę i proces mediacji w wielokryterialnym problemie targu, w tym algorytmizacja interakcyjnej procedury wymienionej wyżej,
- opracowanie przykładów ilustrujących wielokryterialny problem targu: współpracy gospodarstw rolnych, problemu kwaśnych deszczów.

W zakresie sytuacji kooperacyjnych modelowanych jako wielokryterialne gry koalicyjne bez wypłat ubocznych:

- sformułowanie założeń i koncepcji rozwiązań takiej gry (Definicje 7.1 - 7.4 oraz Twierdzenia 7.1 i 7.2),
- propozycja nukleolusa uwzględniającego preferencje decydentów a także zbadanie jego właściwości (Lematy 7.1 - 7.3, Twierdzenie 7.3),
- idea interakcyjnej procedury wspomagania negocjacji w sytuacjach decyzyjnych opisywanych przez wielokryterialną grę kooperacyjną.

W zakresie zastosowania gier koalicyjnych w problemach alokacji kosztów:

- sformułowanie problemu alokacji kosztów z wykorzystaniem mechanizmu cen, jako wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej (Definicje 8.1-8.5),
- koncepcja rozwiązania wg idei Shapley'a i analiza właściwości (Twierdzenie 8.1),
- koncepcja nukleolusa i analiza jego właściwości (Twierdzenie 8.3),
- idea iteracyjnej procedury wspomagającej analizę wielokryterialną,
- propozycje i zbadanie właściwości rozwiązań gier kooperacyjnych w postaci funkcji partycji, formułowanych przy słabszej relacji dominacji niż przyjmowane w literaturze,
- pokazanie, że nukleolus i rdzeń w takich grach mogą być wyznaczone jako analogiczne koncepcje rozwiązań odpowiednio sformułowanych gier w postaci funkcji charakterystycznej (Twierdzenia 9.2 i 9.5).

8

Rozwiązania gier kooperacyjnych w zastosowaniu do problemu alokacji kosztów

Rozpatruje się problem alokacji kosztów w przypadku realizacji projektu mającego na celu pozyskanie pewnego zestawu dóbr. Realizacją projektu jest zainteresowanych kilka podmiotów decyzyjnych. Każdy z nich może zrealizować samodzielnie odpowiedni projekt w celu pozyskania tych dóbr, ale może również podjąć współpracę z innymi, tworząc różne koalicje i wspólnie realizować projekty odpowiednio większej skali. Podmioty decyzyjne traktujemy dalej jako graczy w grze kooperacyjnej

Problem alokacji kosztów dotyczy nie tylko ich podziału między graczy, ale także między rozpatrywane, różne dobra. Problem nie jest trywialny, zwłaszcza że gracze mogą tworzyć różne koalicje, a podział korzyści ze współpracy musi być akceptowany przez wszystkich uczestniczących w danej koalicji graczy.

Problem alokacji kosztów ma bardzo obszerną literaturę. Zestaw istotnych artykułów zawiera praca zbiorowa (Young, 1982). Przykłady problemów praktycznych i propozycje rozwiązań podają: Ransmeier (1942) - dotyczące wielokryterialnego planowania w Dolinie Tennessee w Stanach Zjednoczonych, Gately (1974) - zagadnienia dotyczące inwestowania w systemy energetyczne, Young, Okada, Hashimoto (1980) - dotyczące alokacji kosztów związanych z inwestycjami w zasoby wodne regionu Umea w Szwecji. Podobne problemy rozpatrywano w ramach interdyscyplinarnego projektu dotyczącego Regionu Górnej Noteci w Polsce realizowanego w Instytucie Badań Systemowych PAN wspólnie z International Institute for Applied System Analysis w Laxenburg w Austrii i we współpracy z szeregiem instytutów w Polsce. Kolejne przykłady problemów i rozwiązań z zastosowaniem różnych technik zawierają prace (Fernández, Hinojosa, Puerto, 2004), (Matsubayashi, Umezawa, Masuda, Nishino, 2005), (Krajewska, Kopfer, 2006), (Cruijssen, Cools, Dullaert, 2007).

W tej pracy problem współpracy podmiotów decyzyjnych i alokacji kosztów jest modelowany za pomocą rodziny gier kooperacyjnych, zwanych grami wieloprzedmiotowymi. Są to gry z wypłatami ubocznymi, w których bezpośrednio uwzględnione są wektory określające ilości kilku rodzajów dóbr pozyskiwanych w wyniku realizacji projektu lub projektów, oraz wprowadzana jest procedura alokacji kosztów wykorzystująca mechanizm cenowy. Proponuje się i porównuje różne koncepcje rozwiązań teorii gier kooperacyjnych w zastosowaniu do tego problemu. Analizuje się właściwości tych rozwiązań. Dyskutuje się różne procedury alokacji kosztów budowane na podstawie tych koncepcji rozwiązań i formułuje mechanizmy określania odpowiednich cen. Przy określaniu mechanizmów cenowych przydatne były idee podane przez Billera and Heath (1982). Uzyskiwane rozwiązania porównywane są do wyników klasycznej metody SCRB (James, Lee 1971, Young Okada, Hashimoto 1980) tradycyjne stosowanej w praktyce alokacji kosztów w przypadku projektów z zakresu inwestycji w systemy wodne. Podaje się algorytm obliczeniowy umożliwiający wyznaczenie omawianych rozwiązań. Wykonano eksperymenty obliczeniowe na przykładzie problemu alokacji kosztów dla 4 graczy i 2 rodzajów dóbr. Wyniki eksperymentów ilustrują proponowane podejście i pokazują możliwości jego zastosowania. Proponuje się także i dyskutuje możliwości wspomagania wielokryterialnej analizy problemu.

8.1 Ogólne sformułowanie problemu alokacji kosztów jako wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej

Niech $N = \{1, \dots, n\}$ będzie skończonym zbiorem graczy, a $\mathcal{N}$ będzie zbiorem wszystkich niepustych podzbiorów zbioru N.

Niech C oznacza daną koalicje graczy, $C \in \mathcal{N}$. Każdy z graczy jest zainteresowany pozyskaniem tego samego zestawu dóbr $M = \{1, \dots, m\}$, które mogą być uzyskane w wyniku realizacji odpowiedniego projektu rozwojowego.

Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$, dana jest funkcja $f_C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ opisująca koszt realizacji projektu dającego w wyniku wektor $x \in \mathbb{R}^m$ określający ilości pozyskiwanych dóbr poszczególnych rodzajów. Zakłada się, że $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m_+$, co oznacza, że gracze zainteresowani są tylko dodatnimi ilościami tych dóbr. Funkcja kosztów f_C zależy tylko od całkowitej ilości poszczególnych dóbr, a nie zależy od ich podziału między graczy.

Przyjmuje się konwencję, że dla $x, z \in \mathbb{R}^m$, i dla każdego m:
$x \geq z$ oznacza, że $x_j \geq z_j$ dla wszystkich $j \in M$,
$x > z$ oznacza, że $x_j \geq z_j,\ x \neq z$ dla wszystkich $j \in M$,
$x \gg z$ oznacza, że $x_j > z_j$ dla wszystkich $j \in M$

Niech $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n \times m}_+ = \mathbb{R}^{NM}$, gdzie:
$\mathbb{R}^{MN}$ jest przestrzenią dóbr koalicji pełnej N,
$y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im}) \in \mathbb{R}^m_+$,

y_{ij} oznacza ilość dobra j przydzielonego graczowi i, dla $j \in M$, $i \in N$.

Kontynuując notację,
$\mathbb{R}^{CM}$ oznacza przestrzeń dóbr graczy tworzących koalicję C,
y^C oznacza projekcję wektora dóbr $y \in \mathbb{R}^{NM}$ na przestrzeń $\mathbb{R}^{CM}$,
$y^C = \{y_i\}_{i \in C}$, gdzie $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{im}) \in \mathbb{R}^m_+$.

Postawione zadanie dotyczy analizy korzyści jakie mogą osiągnąć gracze tworząc koalicje, poszukiwania zwycięskiej koalicji, oraz alokacji korzyści akceptowalnej przez graczy. W celu rozwiązania zadania formułuje się grę kooperacyjną z wypłatami ubocznymi, w której uwzględnia się mechanizm alokacji kosztów wykorzystujący ceny rozpatrywanych dóbr. Gra nazywana dalej grą wieloprzedmiotową, formułowana jest dla zadanego wektora dóbr $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{NM}$, określającego ilości dóbr wymaganych przez poszczególnych graczy.

Definicja 8.1
Wieloprzedmiotowa gra kooperacyjna z wypłatami ubocznymi zdefiniowana jest przez parę
(N, v_y), gdzie N jest zbiorem graczy, a funkcja v_y jest określona przez:
$v_y(C) = \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_C, \sum_{i \in C} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right]$ dla wszystkich $C \in \mathcal{N}$,
$v_y(\emptyset) = 0.$ □

Funkcja v_y jest zwana funkcją charakterystyczną gry. Funkcja ta odwzorowuje podzbiory C zbioru N w zbiór liczb rzeczywistych. Dla danej koalicji określa jej wypłatę, jeśli członkowie tej koalicji będą działać wspólnie.

Funkcja c jest funkcją cen. Dla danej funkcji kosztów f i wektora dóbr x, określa ona wektor cen przyporządkowanych poszczególnym rodzajom dóbr, tzn. $c(f,x) \in I\!R^m$, gdzie $c(f,x) = (c_1(f,x),\ldots,c_j(f,x),\ldots,c_m(f,x))$, i $c_j(f,x)$ jest ceną dobra j-tego rodzaju.

W definicji tej, część:
$\sum\limits_{j=1}^{m}\left[c_j(f_{\{i\}},y_i)\times y_{ij}\right]$ opisuje koszt projektu realizowanego indywidualnie przez gracza i-th player, a część:
$\sum\limits_{j=1}^{m}\left[c_j(f_C,\sum_{i\in C} y_i \times \sum_{i\in C} y_{ij})\right]$ opisuje koszt projektu realizowanego wspólnie przez graczy tworzących koalicję C.
$v_y(C)$ określa korzyści jakie ci gracze uzyskują realizując projekt wspólnie w koalicji C w porównaniu z sytuacją, gdyby każdy działał niezależnie.

Łatwo zauważyć, że funkcja $v_y(\{i\}) = 0$ dla wszystkich $i \in N$, co oznacza spełnienie warunku normalizacji gry.

Oznaczmy przez Ω klasę wszystkich wieloprzedmiotowych gier kooperacyjnych.

Definicja 8.2

Mówimy, że gra z wypłatami ubocznymi jest **właściwa** (ang. proper), jeśli spełniony jest warunek superadytywności:

$$v_y(C\cup T) \geq v_y(C) + v_y(T) \text{ dla wszystkich } C,T \in \mathcal{N}, C\cap T = \emptyset.$$

Mówimy, że gra z wypłatami ubocznymi jest **ściśle właściwa** (ang. strictly proper), jeśli spełniony jest warunek ścisłej superaddytywności:

$$v_y(C\cup T) > v_y(C) + v_y(T) \text{ dla wszystkich } C,T \in \mathcal{N}, C\cap T = \emptyset.$$

□

Definicja 8.3
Mówimy, że wektor wypłat $z = (z_1, \ldots, z_n)$ jest **imputacją** w grze (N, v_y), jeśli spełnia następujące warunki:

$$z_i \geq v_y(\{i\}) \tag{8.1}$$

zwany warunkiem indywidualnej racjonalności, oznaczającym, że żaden z graczy nie zgodzi się na wypłatę gorszą niż może uzyskać sam działając indywidualnie, oraz

$$\sum_{i \in N} z_i = v_y(N), \tag{8.2}$$

zwany warunkiem racjonalności grupowej. Warunek ten oznacza, że gracze osiągając porozumienie w koalicji, dzielą między siebie całą wartość funkcji $v_y(N)$.

□

Niech $I(N, v_y)$ będzie zbiorem wszystkich imputacji w grze (N, v_y).

Definicja 8.4
Koncepcją rozwiązania jest funkcja $F : \Omega \to I\!R^n$, która każdej grze (N, v_y) przyporządkowuje wektor wypłat ze zbioru $I(N, v_y)$.
□

Zgodnie z określona koncepcją rozwiązania, można wyznaczyć wymagane udziały graczy w celu pokrycia kosztów wspólnego projektu oraz podział między nimi ilości dóbr, uzyskanych w wyniku jego realizacji.

Definicja 8.5
Dla każdego wektora dóbr $y = (y_1, \ldots, y_n) \in I\!R^{NM}$, gdzie $y_i \in I\!R^m$

jest wektorem dóbr przydzielonych graczowi i, **funkcja określająca wkłady finansowe graczy** jest zdefiniowana przez $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$, gdzie

$$G_i(N, v_y) = \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - F_i(N, v_y)$$

oznacza wkład finansowy gracza i. □

W powyższych definicjach rozpatrujemy wieloprzedmiotowe gry kooperacyjne zależne od ilości dóbr przyporządkowanych poszczególnym graczom i od sposobu alokacji kosztów między tych graczy. Zakłada się, że rozwiązaniem gry jest imputacja. Oznacza to, że żaden gracz nie zaakceptuje współpracy przy realizacji projektu, przy którym pokrywana przez niego część kosztów byłaby większa niż koszt odpowiedniego projektu realizowanego indywidualnie, tzn.:
$G_i(N, v_y) \leq f_{\{i\}}(y_i)$ dla wszystkich $i \in N$,
oraz, że całość korzyści odniesionych z realizacji wspólnego projektu będzie rozdzielona między graczy, tzn.
$\sum_{i \in N} G_i(N, v_y) = f_N(\sum_{i \in N} y_i)$.

Wypłaty uboczne (ang. side payments) graczy określone są jako różnice między kosztami wynikającymi z mechanizmu cenowego a kosztami wynikającymi z koncepcji rozwiązania:

$$\sum_{j=1}^{m} [c_j(f_N, y_i) \times y_{ij}] - G_i(N, v_y).$$

8.2 Aksjomaty i koncepcja rozwiązania wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej

Procedura alokacji kosztów powinna spełnić szereg wymagań, aby mogła być zastosowana w rzeczywistych problemach (patrz

Billera,Heat 1982). Wymagania te formułowane są w postaci zestawu aksjomatów.

Aksjomat 1 (Pełne pokrycie kosztów)
Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$,

$$f_C(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j(f_C, x) \times x_j.$$

Jeśli gracze w koalicji C zdecydują się realizować projekt umożliwiający pozyskanie wektora dóbr x, to mechanizm cen powinien zapewnić pokrycie pełnych kosztów $f_C(x)$ tego projektu.

Aksjomat 2 (Addytywność)
Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$,

$$c(f_C, x) + c(g_C, x) = c(h_C, x)$$

dla wszystkich $(f_C, x), (g_C, x) \in P^m$, takich, że $h_C = f_C + g_C$. Jeśli funkcje f_C i g_C reprezentują różne składowe ogólnych kosztów h_C, wtedy finalna cena każdego dobra powinna być sumą cen składowych.

Aksjomat 3 (Niezależność od agregacji)
Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$,
jeśli $f_C(x) = g_C(\sum_{j=1}^{m} d_j x_j)$, gdzie $d = (d_1, \ldots, d_m) \in I\!R^m$, $d > 0$ jest danym wektorem, to $c(f_C, x) = c(g_C, \sum_{j=1}^{m} d_j \cdot x_j) \times x$.
Jeśli dwa dobra są w rzeczywistości tym samym dobrem, być może mierzonym w innych jednostkach, to wynikowa cena powinna zależeć tylko od ich kombinacji liniowej.

Aksjomat 4
Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$, jeśli funkcja f_C jest niemalejąca (tzn. $x \geq z \Rightarrow f_C(x) \geq f_C(z)$) w zbiorze $\{z \in I\!R^m : \ 0 \leq z \leq$

$x\}$, to $c(f, x) \geq 0$.

Oznacza to, że jeśli funkcja kosztów jest niemalejąca, to ceny nie powinny być ujemne.

Aksjomat 5

Jeśli koalicja C jest taka, że $v_y(C) = v_y(C \cap T)$ dla $C \in \mathcal{N}$, to $\sum_{i \in C} F_i(N, v_y) = v_y(C)$.

Właściwość ta oznacza, że gracz pozorny, który nic nie wnosi do danej koalicji, nie powinien odnosić korzyści ze współpracy.

Aksjomat 6

Dla każdej permutacji Π i każdego $i \in N$,

$$F_{\Pi(i)}(N, \Pi v_y) = F_i(N, v_y).$$

Oznacza to, że gracze są anonimowi. Rozwiązanie nie zależy od sposobu uporządkowania kolejności graczy w grze.

Aksjomat 7

Dla każdej gry (N, v'_y) i (N, v''_y) spełniony jest warunek:

$$F(N, v'_y + v''_y) = F(N, v'_y) + F(N, v''_y).$$

Z właściwości tej wynika, że jeśli podzielimy funkcję całych kosztów na pewną liczbę składowych i rozpatrzymy gry sformułowane dla składowych funkcji kosztów, to wynik gry powinien być określony jako suma wyników gier składowych.

Aksjomat 8

Dla wszystkich koalicji $C, T \in \mathcal{N}$ gry (N, v_y) spełniony jest warunek

$$f_{C \cup T}(\sum_{i \in C \cup T} y_i) \leq f_C(\sum_{i \in C} y_i) + f_T(\sum_{i \in T} y_i).$$

Warunek ten opisuje tzw. efekty skali związane z realizacją projektów. Spełnienie tego warunku oznacza, że koszt jednego większego projektu jest mniejszy niż suma kosztów dwóch mniejszych niezależnych projektów dających razem tę samą ilość dóbr.

Lemat 8.1

Jeśli gra $(N, v_y) \in \Omega$ spełnia Aksjomaty 1 i 8 to jest grą właściwą, tzn. spełnia warunek superaddytywności. ■

Dowód

Dla każdych koalicji $C, T \in \mathcal{N}$, takich, że $C \cap T = \emptyset$, mamy

$$v_y(C \cup T) = \sum_{i \in C \cup T} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_C, \sum_{i \in C \cup T} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right] = \sum_{i \in C \cup T} f_{\{i\}}(y_i) - f_{C \cup T}(\sum_{i \in C \cup T} y_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i \in C} f_{\{i\}}(y_i) - f_C(\sum_{i \in C} y_i) + \sum_{i \in T} f_{\{i\}}(y_i) - f_T(\sum_{i \in T} y_i) = v_y(C) + v_y(T).$$

$\diamondsuit$

Łatwo zauważyć, że jeśli nierówność w definicji 8.2 jest spełniona ściśle, to gra jest ściśle właściwa.

Twierdzenie 8.1

Dla dowolnego danego wektora dóbr $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{NM}$, istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie F spełniające Aksjomaty 1 - 8.

Punkcja F ma postać

$$F_i(N, v_y) = \sum_{C \in \mathcal{N} : i \in C} \frac{(|C| - 1)! \cdot (n - |C|)!}{n!} (v_y(C) - v_y(C - \{i\})),$$

dla każdego $i \in N$, gdzie

$$v_y(C) = \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_C, \sum_{i \in C} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right]$$

dla wszystkich $C \in (\mathcal{N})$,
$v_y(\emptyset) = 0$,
a

$$c_j(f_C, \sum_{i \in C} y_i) = \int_0^1 \frac{\partial f_C}{\partial x_j}(t \cdot \sum_{i \in C} y_i)dt.$$

Notacja $\frac{\partial f_C}{\partial x_j}(t \cdot \sum_{i \in C} y_i)$ *oznacza pochodną cząstkową ze względu na* j*-tą współrzędną w punkcie* $(t \cdot \sum_{i \in C} y_i)$.
$|C|$ *oznacza moc zbioru* C. ■

Dowód
Przyjmijmy, że dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$ funkcje kosztów f_C, g_C, h_C będą takie jak w Aksjomacie 2, tzn. $h_C = f_C + g_C$ i niech $(N, v_y), (N, v_y'), (N, v_y")$ będą odpowiednio grami wynikającymi z tych trzech funkcji kosztów. Z Aksjomatu 2 wynika, że

$$\begin{aligned} v_y(C) &= \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(h_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(h_C, \sum_{i \in C} y_i) \times \sum_{i \in C} y_{ij}\right] \\ &= \sum_{i \in C} \sum_{j=1}^{m} \left[(c_j(f_{\{i\}}, y_i) + c_j(g_{\{i\}}, y_i)) \times y_{i,j}\right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} \left[\left(c_j\left(f_s, \sum_{i \in C} y_i\right) + c_j\left(g_C, \sum_{i \in C} y_i\right)\right) \times \sum_{i \in C} y_{i,j}\right] \\ &= v_y'(C) + v_y''(C). \end{aligned}$$

Ponieważ Aksjomaty 1 i 2 są spełnione, z Lematu 8.1 wynika, że gra spełnia warunek superaddytywności. Z aksjomatów 5-7, zgodnie z twierdzeniem w pracy (Shapley 1953), podstawiając postać funkcji charakterystycznej podanej w Definicji 8.1, możemy wyznaczyć postać funkcji określającej rozwiązanie $F_i(N, v_y)$.

Z Aksjomatów 1-4, stosując podejście zaproponowane przez Billera i Heath (1982), można pokazać, że podana w twierdzeniu procedura alokacji kosztów jest jednoznaczna i przyjmuje określoną w tym twierdzeniu postać. $\Diamond$

Właściwości rozwiązania

Procedura alokacji kosztów opisana w Twierdzeniu 8.1, określa w jednoznaczny sposób ceny przyporządkowane poszczególnym dobrom. Ceny te zapewniają pokrycie kosztów realizacji całego wspólnego projektu. Koszty wynikające z tych cen, przyporządkowane poszczególnym graczom w ogólnym przypadku nie określają rzeczywistych udziałów tych graczy w kosztach, określonych na podstawie rozwiązania F, które to udziały mogą być na ogół inne. Wymagany jest dodatkowy przepływ funduszy. Realizowany jest on jako mechanizm wypłat ubocznych. Oznacza to, że każdy gracz i pokrywa koszty zgodnie z mechanizmem cenowym:

$$\sum_{j=1}^{m}\left[c_j(f_C, \sum_{i\in C} y_i) \times y_{ij}\right],$$

a następnie wypłacane są wypłaty uboczne zapewniające, że po ich uwzględnieniu, rzeczywiste wkłady graczy we wspólny projekt są zgodne z wyznaczonym rozwiązaniem.

Łatwo zauważyć, że

$$\sum_{i\in N} F_i(N, v_y) = v_y(N).$$

Ponieważ gra (N, v_y) jest właściwa, co wynika z Lematu 8.1, to

$$F_i(N, v_y) \geq v_y(i) \text{ dla każdego } i \in N,$$

co oznacza, że jest imputacją.

Łatwo pokazać, że z Aksjomatu 1 wynika:
$G_i(N, v_y) \geq f_{\{i\}}$ dla każdego $i \in N$, oraz
$\sum\limits_{i\in N} G_i(N, v_y) = f_N(\sum\limits_{i\in N} y_i)$.

Oznacza to, że funkcja określająca wkłady finansowe graczy jest dobrze określona. Wkład finansowy żadnego gracza nie jest większy niż koszt niezależnego projektu, realizowanego przez niego indywidualnie. Wkłady finansowe wszystkich graczy dokładnie pokrywają koszty wspólnego projektu.

Można wyznaczyć wypłaty uboczne, stanowiące subsydia poszczególnych graczy, jako różnice między kosztami wynikającymi z mechanizmu cen, a rzeczywistymi wkładami finansowymi wynikającymi z koncepcji rozwiązania:

$$\sum_{j=1}^{m}[c_j(f_C, y_i) \times y_{ij}] - G_i(N, v_y),$$

dla graczy $i = 1, ..., n$.

8.3 Inne koncepcje rozwiązań wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej

8.3.1 Rdzeń gry

Definicja 8.6
Rdzeniem gry (ang. core) nazywamy zbiór wszystkich wektorów wypłat $z \in I\!R^n$ spełniających warunek

$$\sum_{i \in C} z_i \geq v_y(C)$$

dla wszystkich koalicji $C \in \mathcal{N}$ (warunek ten nazywany jest warunkiem racjonalności koalicyjnej),
i warunek

$$\sum_{i \in N} z_i = v_y(N).$$

□

Wypłata z należy do rdzenia gry v_y, jeśli jest imputacją i jeśli spełnia warunek racjonalności koalicyjnej, tzn. że nie istnieje koalicja $C \in \mathcal{N}$ w której gracze mogliby uzyskać więcej niż w przypadku koalicji pełnej. Innymi słowami, dla danego wektora dóbr y, nie istnieje podkoalicja, która daje tworzącym ją graczom większe korzyści niż koalicja pełna. Rdzeń jako koncepcja rozwiązania, charakteryzuje się dużą stabilnością, ponieważ nie istnieje podkoalicja, która mogłaby spowodować zerwanie i podział koalicji pełnej.

W ogólnym przypadku rdzeń gry może być pusty, a jeśli istnieje, to może zawierać więcej niż jedno rozwiązanie.

Poszukujemy koncepcji rozwiązania, która pozwoli określić końcowy wektor wypłat w sposób jednoznaczny, a jeśli gra ma niepusty rdzeń, to wyznaczony wektor wypłat będzie do niego należał.

8.3.2 Funkcja nadwyżki i nukleolus

W literaturze teorii gier kooperacyjnych jest wiele koncepcji rozwiązań budowanych z wykorzystaniem porządku leksykograficznego dla różnych postaci tzw. funkcji nadwyżki (ang. excess function). W celu usystematyzowania tych koncepcji rozwiązań i analizy ich stosowalności w przypadku rozpatrywanej klasy gier, formułuje się niżej ogólne warunki, które powinna spełniać funkcja nadwyżki, a także definiuje się ogólna koncepcję nukleolusa generowanego przez tę funkcję. Przedstawia się nowe wyniki opisujące relację między tą koncepcją i rdzeniem gry. Następnie wprowadza się i analizuje różne konkretne postaci funkcji nadwyżki i odpowiadające im koncepcje nukleolusa.

Definicja 8.7

Funkcja $l_C : R^N \times \Omega \to R$ będzie nazywana **ogólną funkcją nadwyżki** dla koalicji C, jeśli spełnia następujące warunki:

1. Jeśli $z^1, z^2 \in R^N$ są takie, że $z_i^1 = z_i^2$ dla każdego $i \in C$, wtedy dla każdej gry v_y,
$$l_C(z^1, v_y) = l_C(z^2, v_y).$$
2. Jeśli $z^1, z^2 \in R^N$ są takie, że $z_i^1 \geq z_i^2$ dla każdego $i \in C$, i istnieje $j \in C$ takie, że $z_j^1 > z_j^2$, to dla każdej gry v_y,
$$l_C(z^1, v_y) < l_C(z^2, v_y).$$
3. Dla każdej gry v_y, jeśli $\sum_{i \in C} z_i = v_y(C)$, to $l_C(z, v_y) = 0$.
4. $l_C(z, v_y)$ jest ciągła ze względu z i v_y.

□

Funkcja nadwyżki $l_C(z, v_y)$ odzwierciedla postawę danej koalicji C względem wypłaty z. Pierwszy warunek oznacza, że funkcja nadwyżki nie zależy od pozostałych graczy ze zbioru N, nie należących do C. Warunek 2 gwarantuje, że jeśli wypłaty graczy rosną (rośnie co najmniej wypłata jednego gracza), to maleje wartość funkcji nadwyżki koalicji tworzonych przez tych graczy. Warunek 3 dzieli wypłaty na dwie kategorie: te, które dana koalicja C może osiągnąć, gdy $l_C(z, v_y) \geq 0$, oraz te, które dla tej koalicji są nieosiągalne, gdy $l_C(z, v_y) < 0$. Z warunków 2 i 4 wynika, że jeśli $z^1, z^2 \in R^N$ są takie, że $z_i^1 \geq z_i^2$ dla każdego $i \in C$, to dla każdej gry v_y, $l_C(z^1, v_y) \leq l_C(z^2, v_y)$.

Na podstawie warunków 2 i 3 można pokazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.2

Dla każdej kolekcji funkcji nadwyżek $\{l_C\}_{C\in\mathcal{N}}$*, dla każdej gry* (N, v_y)*, rdzeń*

$$\begin{aligned} core(N, v_y) = \{z \in I(N, v_y) :\ & l_C(z, v_y) \le 0, \\ & dla\ każdego\ C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}\}. \end{aligned}$$

■

Definicja 8.8

Niech $\Theta(z)$ będzie wektorem w przestrzeni $R^{|\mathcal{N}|-1}$ otrzymanym przez uporządkowanie wartości funkcji nadwyżek $l_C(z, v_y)$ wszystkich koalicji C ze zbioru $\mathcal{N}$, $C \ne N$ w niemalejącym porządku. **Ogólna koncepcja nukleolusa** jest zdefiniowana jako

$$GN(v_y) = \{z \in I(N, v_y) :\ \Theta(z) \le_{lex} \Theta(x) \text{ for any } x \in I(N, v_y)\}.$$

□

Dla dowolnych wektorów $z^1, z^2 \in R^m$, porządek leksykograficzny $z^1 \le_{lex} z^2$ oznacza, że $z^1 = z^2$ albo, że istnieje liczba całkowita k, $1 \le k \le m$ taka, że $z^1_i = z^2_i$, dla $1 \le i < k$ i że $z^1_k < z^2_k$.

$I(N, v_y)$ jest zbiorem imputacji gry v_y.

Twierdzenie 8.3

Niech $\{l_C\}_{C\in\mathcal{N}}$ *będzie kolekcją funkcji nadwyżek i niech* $(N, v_y) \in \Omega$.

(i) Istnieje niepusty ogólny nukleolus $GN(N, v_y)$.

(ii) Ogólny nukleolus zawiera skończoną liczbę punktów.

(iii) Jeśli ogólne funkcje nadwyżek $\{l_C\}_{C\in\mathcal{N}}$ *są dodatnie i afiniczne wzgledem* z*, tzn.* $l_C(z, v_y) = \sum_{i\in C} a_i^C z_i + b^C$*, gdzie* $a_i^C > 0$ *dla* $i \in N$*, to*
nukleolus $GN(N, v_y)$ *jest jednoznaczny.*

(iv) Jeśli rdzeń $core(N, v_y)$ *gry jest niepusty, to* $GN(N, v_y) \subset core(N, v_y)$. ∎

Dowód

W celu pokazania części (i) twierdzenia, użyjemy równoważnej definicji funkcji

$$\Theta_i(z_i) = \max\{\min\{l_C(z, v_y) : C \in \widetilde{\mathcal{N}}\}\widetilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N} \setminus \{N\}, |\widetilde{\mathcal{N}}| = i\}$$

Z warunku 4, Definicji 8.7 mamy, że funkcja l_C jest ciągła. Funkcja określona jako maksimum lub minimum skończonej liczby funkcji ciągłych też jest ciągła. Wynika z tego , że funkcje Θ_i dla $i = 1, 2, \ldots |\mathcal{N}| - 1$ też są ciągłe.

Zdefiniujmy

$$I_1 = \{z \in I(N, v_y) : \Theta_1(z) \leq \Theta_1(y) \text{ dla wszystkich } \ y \in I(N, v_y)\}$$

i

$$I_i = \{z \in I_{i-1} : \Theta_i(z) \leq \Theta_i(y) \text{ dla wszystkich } \ y \in I_{i-1}(N, v_y)\}$$

dla $i = 2, \ldots, |\mathcal{N}| - 1$.
Ponieważ $I(N, v_y)$ jest niepusty, a Θ_i jest ciągła dla $i = 1, \ldots |\mathcal{N}| - 1$, łatwo zauważyć, że zbiór I_i jest zwarty i niepusty dla $i = 1, \ldots, |\mathcal{N}| - 1$. Oczywiście, $I_{|\mathcal{N}|-1} = GN(N, v_y)$, co oznacza, że została pokazana część (i) twierdzenia.

Dowodząc część (ii), przyjmijmy, że $B(z) = (B_1(z), \ldots, B_k(z))$ oznacza uporządkowaną partycję zbioru $\mathcal{N} \setminus \{N\}$, taką że

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i(z) = \mathcal{N} \setminus \{N\}, \ B_i(z) \cap B_j(z) = \emptyset \text{ kiedy tylko } i \neq j$$

i

$$B_1(z) = \{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\} : l_C(z, v_y) \geq l_T(y, v_y) \\ \text{dla każdego } T \in \mathcal{N} \setminus \{N\}\},$$

oraz

$$B_i(z) = \{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_i(z) : l_C(z, v_y) \geq l_T(y, v_y)$$
$$\text{dla każdego } T \in \mathcal{N} \setminus \{N\} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_i(z)\}.$$

$B_i(z)$ odpowiada koalicji o i-tej najwyższej nadwyżce.

Niech x i y będą różnymi punktami należącymi do zbioru $GN(N, v_y)$ i niech $B(x) = (B_1(z), \ldots, B_k(z))$, i $B(y) = (B_1(z), \ldots, B_l(z))$. Ponieważ każdy punkt w $GN(N, v_y)$ został otrzymany w wyniku minimalizacji nadwyżek w leksykograficznym porządku, mamy $k = l$ i dla $j = 1, \ldots, k$, $l_C(x, v_y) = l_T(y, v_y)$, gdy tylko $C \in B_j(x)$ i $T \in B_j(y)$ i $|B_j(x)| = |B_j(y)|$, gdzie $|B_j(\cdot)|$ oznacza moc zbioru $B_j(\cdot)$.
Ponieważ $l_{\{i\}}(x, v_y)$ określa x_i w sposób jednoznaczny dla każdego $i \in N$ i ponieważ $x \neq y$, mamy $B(x) \neq B(y)$. Oznacza to, że każdy punkt w rdzeniu $GN(N, v_y)$ ma inną uporządkowaną partycję. Ponieważ jest tylko skończona liczba uporządkowanych partycji, dowodzi to części (ii) Twierdzenia.

Do dowodu części (iii) wystarczy pokazać, że $\Theta(x) = \Theta(y)$, $x \neq y$, $x, y \in I(N, v_y)$ pociąga za sobą, że $\Theta(\frac{x+y}{2}) <_{lex} \Theta(x)$.
Niech $x, y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|-1}$ i $\eta : \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|-1} \to \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|-1}$ będzie funkcją porządkującą:

$$\eta_i(z) = \max\{\min\{z_j : j \in \widetilde{\mathcal{N}}\}, \quad \widetilde{\mathcal{N}} \in \mathcal{N} \setminus \{N\}, \quad |\widetilde{\mathcal{N}}| = i\}.$$

Można pokazać (Schmeidler 1969), że $\eta(x + y) \leq_{lex} \eta(x) + \eta(y)$. Ponieważ

$$\eta(\{l_C(x, v_y)\}_{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}}) = \Theta(x),$$

$$\eta(\{l_C(y, v_y)\}_{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\}}) = \Theta(y)$$

i

$$l_C(x, v_y) + l_C(y, v_y) = \sum_{i \in C} a_i^C x_i + b^C + \sum_{i \in C} a_i^C y_i + b^C =$$

$$2\left(\sum_{i\in C} a_i^C \cdot \frac{x_i+y_i}{2} + b^C\right) = 2l_C\left(\frac{x+y}{2}, v_y\right)$$

mamy

$$\eta\left(\{l_C(x,v_y)+l_C(y,v_y)\}_{C\in\mathcal{N}\setminus\{N\}}\right) = 2\Theta\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Otrzymujemy, że $2\Theta(\frac{x+y}{2}) \leq_{lex} \Theta(x)+\Theta(y)$. Jeśli ta nierówność jest spełniona ściśle, to część (iii) jest już dowiedziona. W przeciwnym przypadku $2\Theta(\frac{x+y}{2}) = \Theta(x)+\Theta(y)$. Z założenia $\Theta(x) = \Theta(y)$, można pokazać, że $l_C(x,v_y) = l_C(y,v_y)$ dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}\setminus\{N\}$. Pociąga to za sobą, że $x = y$, co jest w sprzeczności do założenia, co dowodzi części (iii) twierdzenia.

Część (iv) wynika bezpośrednio z twierdzenia 8.2.

$\diamondsuit$

8.3.3 Przykłady funkcji nadwyżki i nukleolusa

Wykorzystując ogólną koncepcję nukleolusa wprowadza się kilka różnych rozwiązań posiadających różne właściwości. Podaje się listę rozwiązań i konkretnych sformułowań funkcji nadwyżki generujących te rozwiązania. Odpowiadają one rozwiązaniom znanym z literatury, podanym w nawiasach.

Nukleolus (Schmeidler 1969)

$l_C^{Nu}(z,v_y) = v_y(C) - \sum_{i\in C} z_i$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$.

Słaby Nuklelus (Shapley, Shubik 1966)

$l_C^{WN}(z,v_y) = \frac{v_y(C)-\sum_{i\in C} z_i}{|C|}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$.

gdzie $|C|$ oznacza moc koalicji C.

Nukleolus proporcjonalny (Young, Okada, Hashimoto 1982)

$l_C^{PN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{v_y(C)}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$, $v_y(C) \neq 0$,
w przeciwnym przypadku $l_C^{PN}(z, v_y) = 0$.

Nukleolus kompromisowy (ang. concession nucleolus) zaproponowany przez Seo i Sakawę (1987)
$l_C^{CN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{\sum_{i \in C} SH_i(N, v_y)}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$,
gdzie CH oznacza wartość Shapley'a.

Nukleolus zerwania (ang. disruption nucleolus)
$l_C^{DN}(z, v_y) = \frac{v_y(C) - \sum_{i \in C} z_i}{v_y(N) - v_y(C) - v_y(N \setminus C)}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{N}$

Uwaga 1. Nukleolus zerwania określony jest na podstawie warunków, przy których może nastapić zerwanie współpracy graczy, stąd jego nazwa. W przypadku Nukleolusa zerwania, nadwyżka koalicji obliczana jest ze względu na wypłaty graczy, którzy do tej koalicji nie należą. Zaproponowany tutaj nukleolus zerwania jest analogiczny do rozwiązania sformułowanego w pracy (Littlechild, Vaidya 1976). Nukleolus Littlechilda jest generowany przez funkcję nadwyżki

$$d_C(z, v_y) = \frac{\sum_{i \in N \setminus C} z_i - v_y(N \setminus C)}{\sum_{i \in C} z_i - v_y(C)}.$$

Ponieważ

$$\sum_{i \in N \setminus C} z_i = v_y(N) - \sum_{i \in C} z_i \quad \text{dla } z \in I(N, v_y),$$

$d_C(z, v_y)$ może być sformułowana jako

$$d_C(z, v_y) = \frac{v_y(N) - v_y(C) - v_y(n \setminus C)}{\sum_{i \in C} z_i - v_y(C)} - 1.$$

Można zauważyć, że funkcje d_C i l_C^{DN} generują te same postaci nukleolusa.

Uwaga 2. Zaproponowana tutaj funkcja l_C^{DN} spełnia warunki (1 – 4) ogólnej funkcji nadwyżki. Funkcja d_C zdefiniowana przez Littlechilda nie spełnia tych warunków.

Uwaga 3. Proponowana funkcja nadwyżki l_C^{DN} umożliwia wyznaczanie wartości nukleolusa zerwania przez rozwiązanie odpowiedniego problemu optymalizacji programowania liniowego.

8.3.4 Problemy obliczeniowe związane z wyznaczaniem nukleolusa

Różne postaci nukleolusa wymienione w poprzednim punkcie są generowane przez liniowe funkcje nadwyżki. Umożliwia to sformułwanie algorytmów obliczeniowych, w których rozwiązuje się zestaw problemów programowania liniowego. Ogólna idea algorytmu została zaproponowana w pracach (Kopelowitz 1967), (Maschler, Peleg, Shapley 1979).

Dla dowolnej gry $(N, v_y) \in \Omega$ i kolekcji funkcji nadwyżki $\{l_C\}_{C \in N}$ można wyznaczyć nukleolus stosując następujący algorytm:

Algorytm wyznaczania nukleolusa

Zakładamy, że dana jest postać funkcji nadwyżki l_C.

Krok 1.

Rozwiąż problem programowania liniowego:

LP1: $\min w_1$
przy ograniczeniach
$l_C(z, v_y) \leq w_1,$ dla wszystkich $C \in \mathcal{N} \setminus \{N\},$
$z \in I(N, v_y).$

ustaw numer iteracji k=2

Krok 2.

Niech w^*_{k-1} oznacza optymalną wartość w_{k-1} w problemie LP(k-1) i niech

$$A_{k-1} = \{z \in I\!R^n : z \text{ będzie rozwiązaniem optymalnym problemu LP(k-1)}\},$$

$$E_{k-1} = \{C \in \mathcal{N} \setminus \{N\} : l_C(z, v_y) = w^*_{k-1} \text{ dla każdego } z \in A_{k-1}\};$$

jeśli rozwiązanie problemu LP(k-1) jest jednoznaczne, to **stop**,
w przeciwnym przypadku

Rozwiąż problem:

LPk: min w_k
przy ograniczeniach
$l_C(z, v_y) \leq w_k$, dla każdego $C \in \mathcal{N} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$,
$l_C(z, v_y) = w^*_j$ dla każdego $s \in E_j$, $j = 1, \ldots, k-1$,
$z \in I(N, v_y)$.

ustaw k=k+1, **idź do Kroku 2**.

Uwagi

Jeśli rozwiązanie problemu LP1 jest jednoznaczne, to jest to nukleolus gry (N, v_y), generowany przez funkcję nadwyżki l_C.

Niestety problem LP1 nie zawsze ma jednoznaczne rozwiązanie. W takim przypadku wymagana jest pewna liczba kolejnych iteracji algorytmu. Wyznaczenie nukleolusa generowanego przez daną funkcję nadwyżki l_C wymaga rozwiązania nie więcej niż $n-1$ problemów programowania liniowego.

Przy implementacji algorytmu należy zauważyć, że dla każdego danego k, podzbiór E_k może być znaleziony przez optymalne rozwiązanie dualne problemu LPk. Rozwiązania dualne są standardowo wyznaczane w procesie rozwiązywania problemów programmowania liniowego metodą simplex (Christensen, Lind 1996).

8.3.5 Metoda SCRB

Nazwa metody SCRB stanowi skrót pełnej nazwy: Separable Costs-Remaining Benefits method (James, Lee 1971, Young, Okada, Hashimoto 1982). Metoda ta jest często stosowana w praktyce alokacji kosztów w przypadku projektów rozwojowych systemów wodnych. W opisie metody stosowane jest specyficzne nazewnictwo, w szczególności definiowane są takie pojęcia jak resztowe koszty (ang. remaning costs), resztowe korzyści (ang. remaining benefits) czy koszty marginalne (ang. marginal costs).

Koszty marginalne, oznaczone jako $mc(i)$, związane z włączeniem gracza i do koalicji, określone są przez przyrost kosztów projektu, gdy gracz i jest włączany do koalicji pełnej. Niech y_i oznacza wektor dóbr żądanych przez gracza i, a $u_y(C) = f_C(\sum_{i \in C} y_i)$ oznacza koszt projektu realizowanego przez koalicję C, dla każdej $C \in \mathcal{N}$. Koszt marginalny wyznaczany jest jako:

$$mc(i) = u_y(N) - u_y(N-1)$$

Korzyści resztowe, oznaczone dalej jako $rb(i)$, opisują gotowość gracza i do pokrycia kosztów wyznaczanych w odniesieniu do projektu realizowane indywidualnie. Określone są jako różnica kosztu projektu realizowanego indywidualnie pomniejszonego o koszty marginalne danego gracza.

$$rb(i) = f_{\{i\}}(y_i) - mc(i)$$

Koszty resztowe rc opisują oszczędności uzyskiwane, gdy jeden większy projekt będzie realizowany wspólnie przez wszystkich graczy w koalicji pełnej, w miejsce wielu małych, niezależnych projektów realizowanych przez pojedynczych graczy.

$$rc = u_y(N) - \sum_{j \in N} mc(j)$$

Rozwiązanie w metodzie SCRB obliczane jest w ten sposób, że resztowe koszty są dzielone między graczy w proporcji do resztowych korzyści.

$$F_i^{SCRB} = u_y(i) + \frac{rb(i)}{\sum_{j \in N} rb(j)} \cdot rb.$$

Uwaga
Metoda jest bardzo prosta. Przy pierwszym spojrzeniu jest bardzo atrakcyjna i wydaje się rozsądna. Z tego powodu jest bardzo często stosowana w praktyce. Niestety ma istotne wady. W ogólnym przypadku, rozwiązanie wyznaczone przy pomocy tej metody, może nie spełniać warunku racjonalności indywidualnej i/lub warunku racjonalności grupowej. Wyznaczone rozwiązanie może nie należeć do rdzenia gray, nawet gdy ten rdzeń nie jest pusty.

8.4 Przykład modelu gry kooperacyjnej i wyniki obliczeniowe

Przykład dotyczy czterech podmiotów decyzyjnych (graczy) zainteresowanych dwoma rodzajami dóbr. Dobra te mogą być uzyskane w wyniku realizacji projektów rozwojowych. Każdy z graczy może realizować swój własny niezależny projekt, aby uzyskać wymagane ilości dóbr. Gracze mogą jednak tworzyć koalicje i realizować wspólnie projekt odpowiednio większej skali.

W tym przypadku mamy:
zbiór graczy $N = \{1, 2, 34\}$,
zbiór dóbr $M = \{1, 2\}$,
zbiór możliwych koalicji $\mathcal{N} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.
Dla każdej koalicji $C \in \mathcal{N}$, dana jest funkcja kosztów $f_C(x_1, x_2)$, gdzie x_1, x_2 oznaczają ilości dóbr wymaganych przez koalicję C. W tym przykładzie przyjęto, że funkcja kosztów ma postać: $f(x_1, x_2) = ax_1^\alpha x_2^\beta$, gdzie liczny $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Funkcja ta jest traktowana jako przybliżenie rzeczywistej funkcji kosztów w rozpatrywanym przedziale $[\underline{x}_1, \overline{x}_1], [\underline{x}_2, \overline{x}_2]$. W problemie rzeczywistym funkcja ta może być oczywiście bardziej złożona i inna dla każdej koalicji.

Dla danych ilości dóbr zakładanych przez graczy, wyznaczono wartości charakteryzujące rozpatrywaną grę. Następnie obliczono rozwiązania gry zgodnie z różnymi koncepcjami: wartość Shapley'a, Nukleolus, Słaby Nukleolus, Nukleolus Proporcjonalny, Nukleolus Kompromisowy. Wyniki są porównywane z rozwiązaniem uzyskanym metodą SCRB. Wymienione wyżej nukleolusy zostały wyznaczone z użyciem algorytmu przedstawionego w Sekcji 8.3.4, przez rozwiązanie wymaganej liczby odpowiednio sformułowanych problemów programowania liniowego. Wyniki przedstawione są w tabelach i na rysunkach.

Tabela 8.1 zawiera ilości dóbr wymagane odpowiednio przez każdego gracza i koalicję, a następnie, obliczone dla każdej koalicji: koszt projektu, ceny dóbr 1 i 2, a także wartości funkcji charakterystycznej.

Tabela 8.1.

Koalicja	{1}	{2}	{3}	{4}	{12}	{13}	{14}	{23}
Dobro 1	4,00	2,00	3,00	2,00	6,00	7,00	6,00	5,00
Dobro 2	5,00	2,00	1,00	3,00	7,00	6,00	8,00	3,00
Koszt projektu	7,61	3,73	3,46	4,39	10,67	10,84	11,25	6,94
Cena dobra 1	1,06	1,04	0,64	1,22	0,99	0,86	1,04	0,77
Cena dobra 2	0,68	0,83	1,54	0,65	0,68	0,80	0,63	1,03
Funkcja charakt. v	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

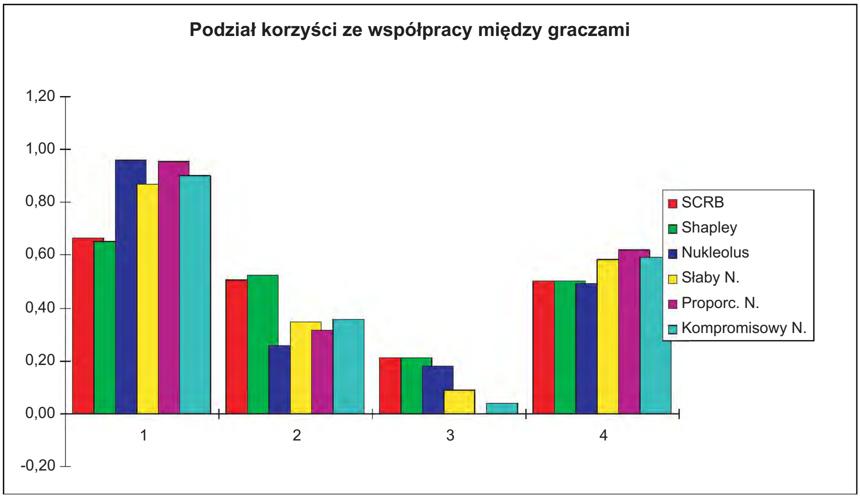
Koalicja	{24}	{34}	{123}	{124}	{134}	{234}	{1234}
Dobro 1	4,00	5,00	9,00	8,00	9,00	7,00	11,00
Dobro 2	5,00	4,00	8,00	10,00	9,00	6,00	11,00
Koszt projektu	7,61	7,79	13,78	14,21	14,45	10,84	17,31
Cena dobra 1	1,06	0,87	0,85	0,99	0,89	0,86	0,87
Cena dobra 2	0,68	0,87	0,77	0,63	0,71	0,80	0,70
Funkcja charakt. v	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

W tabeli 8.2 podano korzyści wynikające ze współpracy w odniesieniu do każdego gracza, obliczone zgodnie z różnymi koncepcjami rozwiązań.

Tabela 8.2. Korzyści jakie odnoszą gracze w wyniku współpracy

Koncepcja rozwiązania	Gracze			
	1	2	3	4
SCRB	0,67	0,51	0,21	0,50
Shapley	0,65	0,53	0,21	0,50
Nucleolus	0,96	0,26	0,18	0,49
Słaby N.	0,87	0,35	0,09	0,59
Proporc. N.	0,95	0,32	0,00	0,62
Kompromisowy N.	0,90	0,36	0,04	0,59

Korzyści wynikające ze współpracy przedstawiono także na Rys. 8.1. W tym przykładzie gracz 1 wymaga znacznie większej ilości dóbr niż każdy z pozostałych graczy. Ceny dóbr obliczono zgodnie z zależnościami podanymi w Twierdzeniu 8.1. Wartości rozwiązania, tzn. wypłaty graczy w koalicji pełnej interpretowane są jako korzyści odnoszone przez graczy w wyniku współpracy.



Rysunek 8.1. Podział korzyści wynikających ze współpracy między graczami

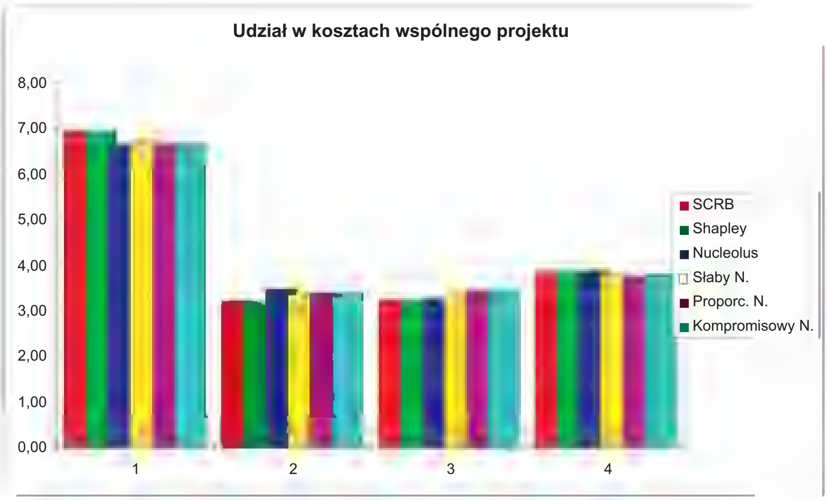
W tabeli 8.3 i na Rys. 8.2 przedstawiono rzeczywiste wkłady graczy we wspólny projekt.

Jak wspomniano wcześniej, metoda SCRB ma niekorzystne cechy, ponieważ rozwiązania wyznaczone tą metodą mogą nie spełniać warunków racjonalności. Rozwiązania metody SCRB i wartość Shapley'a mogą w pewnych przypadkach nie należeć do rdzenia gry, nawet gdy ten rdzeń istnieje i nie jest pusty.

Wszystkie wyznaczone postaci nukleolusa należą do rdzenia gry. Różnią się ze względu na różne sformułowania funkcji nadwyżki. Nukleolus Słaby, Proporcjonalny, Kompromisowy różnią się od oryginalnego Nukleolusa Schmaidlera sposobem ważenia nadwyżki. W przypadku Nukleolusa Słabego nadwyżka jest mierzona na głowę uczestnika koalicji, w przypadku Nukleolusa Proporcjonalnego - proporcjonalnie do siły koalicji mierzonej wartością

Tabela 8.3. Wkłady finansowe graczy we wspólny projekt

Koncepcja rozwiązania	Gracze			
	1	2	3	4
SCRB	6,95	3,22	3,25	3,89
Shapley	7,61	7,79	13,78	14,21
Nucleolus	7,61	7,79	13,78	14,21
Słaby N.	7,61	7,79	13,78	14,21
Proporc. N.	7,61	7,79	13,78	14,21
Kompromisowy N.	7,61	7,79	13,78	14,21



Rysunek 8.2. Udział w kosztach projektu dla różnych koncepcji rozwiązań

funkcji charakterystycznej, w przypadku Nukleolusa Kompromisowego - w proporcji do siły koalicji mierzonej wartością Shapley'a uczestników, tzn. w proporcji do oczekiwanych wypłat tych graczy. W przypadku Nukleolusa Zerwania, nadwyżka koalicji obliczana jest ze względu na wypłaty graczy, którzy do tej koalicji nie należą.

8.5 Wspomaganie analizy wielokryterialnej

Proponowany model gry kooperacyjnej do analizy problemu alokacji kosztów został sformułowany przy założeniu, że wektor dóbr $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ jest dany, gdzie y_i, $i = 1, ..., n$ oznacza zestaw dóbr pożądanych przez gracza i. Oznacza to także, że rozwiązanie kooperacyjne jest wyznaczane dla danego wektora y i może być rozpatrywane jako parametryczne ze względu na pożądane ilości tych dóbr. Kooperacja graczy oznacza, że zgadzają się realizować większy i efektywniejszy projekt wspólnie. Koszt tego wspólnego projektu jest mniejszy niż sumaryczny koszt mniejszych projektów realizowanych niezależnie. Rozwiązanie kooperacyjne gry opisuje faktycznie podział między graczy korzyści odnoszonych ze współpracy. W rezultacie dany gracz poniesie koszty mniejsze, niż w przypadku odrzucenia współpracy. Naturalne jest, że gracz może preferować np. pozyskanie większej ilości określonego dobra zamiast określonego zmniejszenia kosztów. W celu umożliwienia takich rozważań proponuje się ogólniejszą analizę wielokryterialną i jej wspomaganie w interaktywnej procedurze.

8.5.1 Problem analizy wielokryterialnej

Każdy z graczy stara się zmaksymalizować wektor y_i określający ilości pożądanych dóbr oraz zminimalizować koszty związane z realizacją projektu rozwojowego, oznaczone tutaj jako u_i. Wektor kryteriów gracza i ma postać $(y_i, u_i) \in R^{m+1}$, gdzie m jest liczbą rodzajów dóbr. Dla każdego gracza i dany jest zbiór $V_{\{i\}}$ określający osiągalne wartości kryteriów w przestrzeni R^{m+1} w przypadku niezależnej realizacji projektów. Jeśli funkcje kosztów $f_{\{i\}}(y_i)$ są dane dla rozpatrywanego zakresu dóbr $[y_{il}, y_{ih}]$, to zbiory $V_{\{i\}}$ mogą być określone jako:

$$V_{\{i\}} = \{(y_i, u_i) : y_i \in [y_{il}, y_{ih}],\ u_i \geq f(y_i)\}$$

W przypadku kooperacji, osiągalne wartości kryteriów wszystkich graczy są określone przez zbiór $V_N \in \Pi_{i \in N} R^{m+1}$.

$$\begin{aligned} V_N = \{(y_i, u_i) \in R^{n(m+1)} &: y_i \in [y_{il}, y_{ih}], \\ & u_i \geq G_i(N, v_y) \text{ for all } i = 1, 2, ..., n, \\ & \sum_{i \in N} u_i \geq f_N(\sum_{i \in N} y_i)\}, \end{aligned}$$

gdzie:
$f_N(\sum_{i \in N} y_i)$ jest funkcją kosztów dla wspólnego projektu realizowanego przez koalicję pełną,
$G_i(N, v_y) = \sum_{j=1}^{m} \left[c_j(f_{\{i\}}, y_i) \times y_{ij}\right] - F_i(N, v_y)$ oznacza wkład finansowy gracza i wyznaczony na podstawie koncepcji rozwiązania $F_i(N, v_y)$ dla danego wektora dóbr y.

8.5.2 Iteracyjna procedura wspomagająca analizę wielokryterialną

Proponuje się iteracyjną procedurę umożliwiającą graczom analizę wypłat gry z uwzględnieniem wielokryterialnego charakteru tych wypłat. Procedura obejmuje dwie fazy działań.

W pierwszej fazie gracze analizują swoje osiągalne wypłaty, zakładając że działają sami, że nie ma między nimi współpracy. Wyniki z tej fazy stanowią podstawę do analizy korzyści wynikających ze współpracy i możliwości tworzenia różnych koalicji, które analizowane są w drugiej fazie. W pierwszej fazie, każdy gracz niezależnie analizuje zbiór swoich osiągalnych niezdominowanych wypłat wykorzystując odpowiedni pakiet oprogramowania optymalizacji wielokryterialnej, np. tego typu, jak system DIDAS (Lewandowski, Kręglewski, Rogowski, Wierzbicki 1989). Dany gracz stara się znaleźć możliwie najlepszą wypłatę zgodną z jego preferencjami w zbiorze $V_{\{i\}}$. Wypłata ta może być uzyskana bez względu na możliwą współpracę z innymi graczami. W kolejnych iteracjach gracz zakłada i proponuje punkty referencyjne $(y_i^r, u_i^r) \in R^{m+1}$, gdzie R^{m+1} jest przestrzenią kryteriów wypłat tego gracza. System optymalizacji wielokryterialnej, dla każdego punktu referencyjnego wyznacza wypłatę niezdominowaną w zbiorze $V_{\{i\}}$, zgodną z zadanym punktem referencyjnym. Gracz odpowiednio proponując kolejne punkty referencyjne i analizując uzyskiwane wyniki w iteracyjnym procesie, może znaleźć wypłatę zgodna z jego preferencjami. Gracz jest proszony o wskazanie tej preferowanej wypłaty. Ta faza jest kończone, gdy wszyscy gracze $i = 1, 2, ...n$, wskażą swoje preferowane wypłaty. Wypłaty te oznaczone jako (y_i^q, u_i^q) są przechowywane w systemie komputerowym. Stanowią punkt startowy w drugiej fazie procedury.

W drugiej fazie analizowane są wyniki możliwej współpracy graczy. Analiza wykonywana jest w pewnej liczbie rund. Każda runda składa się z dwóch części. Pierwsza część obejmuje niezależną analizę gry przez każdego gracza. Gracz określa swoje preferencje za pomocą punktów referencyjnych (y_i^r, u_i^r), zakłada także punkty referencyjne pozostałych graczy (y_j^r, u_j^r), $j \neq i$, $j = 1, 2, ...n$. System wyznacza rozwiązanie możliwe rozwiązanie. Gracz może zakładać kolejno różne punkty referencyjne i analizować wynikające dla nich wypłaty, szukając preferowanego rozwiązania kooperacyjnego. Może przy tym lepiej zrozumieć naturę sytuacji decyzyjnej. Gracz proszony jest o wskazanie swojej preferowanej wielokryterialnej wypłaty, oznaczoną jako (y_i^u, u_i^u) i nazwaną preferowaną wypłatą jednostronną.

W drugiej części rundy, na podstawie wskazanych przez graczy ich prefereowanych wypłat jednostronnych, określany jest punkt

$(y^u, u^u) = (y_1^u, ...y_n^u, u_1^u, ..., u_n^u)$. Punkt ten, w porównaniu z punktem status quo, wyznacza kierunek poprawy wypłat zgodny z preferencjami wszystkich graczy. Mając określony ten punkt, system wyznacza wypłaty graczy, niezdominowane w zbiorze V_N zgodnie podejściem punktu referencyjnego optymalizacji wielokryterialnej. Wyznaczone wypłaty graczy będą się na ogół różniły od wypłat wyznaczonych w pierwszej części rundy, ponieważ są wyznaczane zgodnie z preferowanymi kierunkami wypłat wszystkich graczy. W pierwszej części rundy dany gracz mógł tylko zakładać punkty referencyjne innych graczy, nie znając ich naprawdę. Wypłaty wyznaczane przez system w drugiej części rundy nazywane są wielostronnymi. Przedstawiane są graczom do analizy. Po dokonaniu analizy, gracze mogą przeprowadzić następną rundę procedury, w analogiczny sposób. Będzie to w szczególności wskazane, gdy wypłaty wyznaczone przez system w trakcie analizy jednostronnej i wypłaty wielostronne będą się istotnie różniły. Zauważmy, że w drugiej i następnych rundach, przy analizie jednostronnej, preferencje pozostałych graczy mogą być szacowane na podstawie punktów referencyjnych rzeczywiście zakładanych przez nich we wcześniejszych rundach. Gracze w dowolnym momencie mogą przerwać analizę zatrzymując procedurę, ale mogą również, analizując kolejne wypłaty wyznaczane przez system, traktowane jako propozycje mediacyjne, znaleźć konsensus.

Niżej przedstawia się schemat procedury.

Faza pierwsza

Każdy gracz i niezależnie analizuje swój zbiór wypłat $V_{\{i\}}$ Przy użyciu pakietu optymalizacji wielokryterialnej. Wynik analizy wielokryterialnej: $(y_1^q, ..., y_n^q, u_1^q, ..., u_n^q)$ gdzie (y_i^q, u_i^q) oznacza wybrany, preferowany przez gracza i, wektor wypłat niezdominowany w zbiorze $V_{\{i\}}$.

Faza druga

Runda 1

Analiza jednostronna

Analiza jednostronna wykonywana jest niezależnie i równolegle przez graczy $i = 1, 2, ..., n$. Dany gracz i proponuje punkt referencyjny (y_i^r, u_i^r) i zakłada punkty referencyjne kontrgraczy $j \neq i$, $j = 1, 2, ...n$. System komputerowy wyznacza odpowiednią niezdominowaną wielokryterialną wypłatę w zbiorze V_N. Gracz i analizuję te wypłatę, proponuje inny punkt referencyjny, system wyznacza kolejną niezdominowaną wypłatę, znów analizowaną przez gracza itd., aż gracz wskaże wypłatę preferowaną (y_i^u, u_i^u), uznaną jako najlepszą.

Analiza wielostronna.

Analiza wielostronna może być dokonywana, gdy wszyscy gracze zakończą analizę jednostronna i wskażą swoje preferowane wypłaty. System wyznacza wówczas wielostronną wypłatę niezdominowaną w zbiorze V_N na podstawie punktu referencyjnego $(y^{o1}, u^{o1}) = (y^u, u^u) = (y_1^u, ...y_n^u, u_1^u, ..., u_n^u)$. Gracze analizują tę wypłatę jako propozycję mediacyjną i decydują czy kontynuować procedurę postępowania czy też ją zakończyć.

. . . .

Runda k

Wykonywana jest w taki sam sposób jak runda 1. Przy wyznaczaniu wypłat niezdominowanych dla gracza i w ramach analizy jednostronnej, gracz ten może podawać swoje różne punkty referencyjne, przy czym punkty referencyjne kontrgraczy mogą być przyjmowane na postawie (y^{ok}, u^{ok}).

Kryterium stopu

Procedura jest kończona, gdy gracze zrezygnują z kontynuowania analizy, lub gdy zgodzą się zaakceptować wyznaczone wypłaty wielostronnego rozwiązania.

8.6 Podsumowanie

W rozdziale podano model opisujący problem alokacji kosztów między decydentów negocjujących realizację wspólnego projektu rozwojowego. Model ten opisany jest w formie tzw. wieloprzedmiotowej gry kooperacyjnej. Decydenci, traktowani jako gracze w tej grze, są zainteresowani pozyskaniem pewnego zestawu dóbr, które mogą być uzyskane wyniku realizacji projektów niezależnych, lub też gracze mogą tworzyć różne koalicje i rozważyć realizację większego projektu wspólnego.

Rozpatrzono procedurę alokacji kosztów przy wykorzystaniu mechanizmu cen i różne koncepcje rozwiązań teorii gier. Zaproponowano niezbędne narzędzia obliczeniowesłużące wyznaczeniu proponowanych rozwiązań. Podano i zaimplementowano numerycznie algorytm wyznaczania różnych typów nukleolusa. Przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe dla przykładowego problemu z 4 graczami i dwoma rodzajami dóbr. Przedstawiono wyniki tych eksperymentów. Zaproponowano ideę procedury wspomagającej analizę wielokryterialną problemu alokacji kosztów.

10

Uwagi końcowe

W pracy rozpatruje się sytuacje decyzyjne, w których decydenci mogą odnosić korzyści w wyniku wzajemnej współpracy. Korzyści te określane są w porównaniu z sytuacją, gdyby dany decydent nie przystąpił do współpracy, zgodnie z koncepcją BATNA. Każdy decydent podejmuje niezależne decyzje oraz ma swój niezależny wektor kryteriów określający wyniki tych decyzji i swoje preferencje wyboru. Wartości kryteriów danego decydenta zależą od decyzji wszystkich decydentów.

Zakłada się, że dany jest model matematyczny pozwalający wyznaczyć wartości kryteriów każdego decydenta w zależności od decyzji wszystkich decydentów. Model nie opisuje preferencji decydentów. Nie zakłada się istnienia określonych funkcji użyteczności decydentów. Zaproponowano metody wspomagające analizę decyzyjną w wielokryterialnej przestrzeni wypłat stanowiącej iloczyn kartezjański przestrzeni kryteriów poszczególnych decydentów oraz procedury umożliwiające znalezienie zgodnych decyzji. Przedstawiono ogólny opis matematyczny rozważanych sytuacji decyzyjnych i na tej podstawie sformułowano model wielokryterialnego problemu targu (rozdział 4) rozpatrywany dalej w pracy, a także sformułowano model wielokryterialnej gry kooperacyjnej, w której uwzględnia się wpływ możliwych koalicji na rozwiązania i wypłaty graczy.

W przypadku wielkryterialnego problemu targu zaproponowano uogólnione rozwiązanie Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego (R-K-S) oraz jego aksjomatyczną charakteryzację. Założono, że każdy gracz ma możliwość analizy niezdominowanych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów. Na podstawie wskazanych przez graczy wypłat, wybranych zgodnie z ich preferencjami, konstruuje się tzw. punkt względnej utopii. Punkt ten uwzględniający preferencje wszystkich graczy jest podstawą konstrukcji proponowanego rozwiązania. Rozwiązanie to, w przypadku jednokryterialnych wypłat, sprowadza się do rozwiązania R-K-S. Nie jest natomiast prostym rozszerzeniem klasycznego rozwiązania R-K-S konstruowanym z wykorzystaniem punktu idealnego w przestrzeni wielokryterialnych wypłat. Pokazano, że w szczególnych przypadkach rozwiązanie to może być tylko słabo niezdominowane w zbiorze wypłat. Kolejna propozycja dotyczy, uogólnionego na przypadek wielokryterialnych wypłat, rozwiązania Imai, wykorzystującego porządek leksykograficzny. Podano idee algorytmu umożliwiającego poprawę słabo niezdominowanych rozwiązań R-K-S do rozwiązań niezdominowanych. Przedstawiono również konstrukcje umożliwiające uogólnienie na przypadek wielokryterialnych wypłat klasycznych rozwiązania Nasha i Rozwiązania Egalitarnego. Przeprowadzono analizę własności tych rozwiązań.

Przedstawiane w pracach (Kruś, Bronisz 1993, Kruś 2002) sformułowania wielokryterialnego problemu targu i koncepcje rozwiązań były następnie przedmiotem badań innych autorów np. (Hinojosa i inni 2005), (Marmol i inni 2007).

Koncepcje uogólnionych rozwiązań R-K-S oraz Imai zostały zastosowane w konstrukcji interakcyjnych procedur wspomagania analizy decyzyjnej decydentów i wyznaczania propozycji mediacyjnych. Wielostronna analiza decyzyjna poprzedzona jest etapem analizy jednostronnej, w trakcie której każdy decydent niezależnie bada zbiór swoich niezdominowanych wypłat w swojej przestrzeni kryteriów, wykorzystując podejście punktu referencyjnego. Wskazane przez każdego decydenta wypłaty, wybrane zgodnie z jego preferencjami, są podstawą wyznaczenia propozycji mediacyjnej. Propozycja ta uwzględnia preferencje wszystkich decydentów i jest przedmiotem analizy wielostronnej. W kolejnych rundach powtarzane sa oba etapy analizy. Sformułowano w tym celu koncepcję rozwiązania iteracyjnego i pokazano jego zbieżność do rozwiązania Pareto optymalnego.

Przedstawiono koncepcje ogólnej konstrukcji komputerowych systemów wspomagania decyzji w rozpatrywanych sytuacjach przetargowych. Procedura wykorzystująca rozwiązanie iteracyjne została zaimplementowana w systemie komputerowym MCBARG. Zamieszczono dwa przykłady ilustrujące wielokryterialny problem targu: przykład dotyczący zagadnienia kwaśnych deszczów oraz przykład dotyczący współpracy gospodarstw rolnych. Przykłady te zostały wprowadzone do systemu i pozwalają prześledzić jego działanie.

W rozdziale 7 rozpatrzono sytuacje kooperacyjne opisywane przez modele wielokryterialnych gier koalicyjnych bez wypłat ubocznych. Podano sformułowanie matematyczne takiej gry, a następnie zbadano jej własności i sformułowano koncepcje rozwiązań takie jak rdzeń i nukleolus gry. Zaproponowano oryginalny sposób określania funkcji nadwyżki uwzględniającej preferencje graczy oraz generowaną przez tę funkcję postać nukleolusa. Nucleolus ten, w przypadku klasycznych gier targu, sprowadza się do koncepcji podanej przez Schmeidlera (1969), natomiast w przypadku gier targu sprowadza się do uogólnionego rozwiązania Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego podanego w pracy (Kruś, Bronisz 1993) i rozpatrywanego w pracy (Kruś 2002) oraz omówionego w rozdziale 4. Podano również ideę iteracyjnej procedury wspomagającej analizę i wyznaczenie rozwiązania mediacyjnego. Przedstawiane problemy były wcześniej przedmiotem prac (Kruś, Bronisz 1995), (Kruś 2008). Podane propozycje korespondują z ideą zastosowania punktów referencyjnych do wyznaczania propozycji mediacyjnych w grach koalicyjnych przedstawioną w pracy (Wierzbicki 2005).

W rozdziale 8 rozpatrzono problem decyzyjny, w którym podmioty decyzyjne negocjują realizację wspólnego lub wspólnych przedsięwzięć w celu pozyskania wiązki dóbr. Mogą działać indywidualnie lub tworzyć koalicje. Problem dotyczy podziału pozyskanej wiązki dóbr i udziału w kosztach przedsięwzięć. Zaproponowano model rodziny gier kooperacyjnych opisującej ten problem alokacji kosztów z uwzględnieniem mechanizmu cenowego i wypłat ubocznych. Zagadnienie to przedstawiono na podstawie wcześniejszej pracy (Kruś, Bronisz 2000). Zbadano różne koncepcje rozwiązań tych gier. Zaimplementowano algorytm wyznaczania różnych koncepcji nukleolusa traktowanego jako podstawę do wyznaczania propozycji madiacyjnych. Przedstawiono przykład numeryczny ilustrujący proponowane analizy. Zaproponowano również procedurę wspomagającą analizę wielokryterialną i proces mediacji. Problem alokacji i kosztów jest również rozpatrywany w sytuacji, gdy wypłata danej koalicji zależy nie tylko od graczy, którzy ją tworzą, ale także od struktury koalicyjnej graczy pozostałych (rozdział 9). Sytuacje taką opisano jako grę kooperacyjną w postaci funkcji partycji. Uzyskane wyniki dotyczą koncepcji rozwiązań w tych grach i ich analizy. Istotne jest w szczególności pokazanie koincydencji rdzenia takiej gry z rdzeniem odpowiednio skonstruowanej gry w postaci funkcji charakterystycznej. Rdzeń taki określa ramy, w których decydenci mogą prowadzić negocjacje. Można również wtedy zastosować podejście prezentowane w rodziale 8. Nowe zagadnienia badań w tym kierunku mogą dotyczyć koncepcji rdzeni optymistycznych i pesymistycznych rozpatrywanych w pracach Koczy'ego (2007, 2008).

Uzyskane wyniki teoretyczne mogą mieć zastosowanie nie tylko w omawianym problemie kooperacji, opisywanym jako modele targu lub modele gier kooperacyjnych z wektorowymi wypłatami graczy, ale także w szerszej klasie zagadnień dotyczących także sytuacji niekooperacyjnych. Przykładowo, algorytm interakcyjnej procedury mediacyjnej, wykorzystującej idee rozwiązania iteracyjnego oraz metodę punktu referencyjnego i funkcji osiągnięcia, został zastosowany dla przypadku wielokryterialnej, niekooperacyjnej gry dynamicznej dotyczącej tzw. „wojny rybnej" (prace magisterskie: Cichoń (1989), Kaniewski (1990)), w eksperymentalnym systemie komputerowym. Wielokryterialne rozwiązania w grach niekooperacyjnych były rozpatrywane między innymi w pracach (Wierzbicki 1990, Kruś, Bronisz 1994).

Równolegle z badaniami, których wyniki przedstawia się w tej pracy, prowadzonych z zastosowaniem analizy wielokryterialnej i podejścia punktu referencyjnego, prowadzono prace z zastosowaniem idei funkcji użyteczności. Wykorzystywano koncepcje funkcji użyteczności R. Kulikowskiego (1998, 2002, 2003) inspirowane pracami Savage (1954), Tverskiego i Kahnemana (Tversky 1967, Tversky, Kahneman 1981). Uzyskane wyniki (Kruś 2002a, 2004a), (Kulikowski, Kruś 2003) dotyczą między innymi konstrukcji systemów komputerowych wspomagania analizy decyzyjnej, analizy wspólnych przedsięwzięć innowacyjnych, analizy problemu kooperacji na przykładzie szkoły wyższej. W przypadku stosowania koncepcji funkcji użyteczności decydentów, szczególnie istotny jest problem identyfikacji jej postaci na podstawie interakcji z decydentami. Interesujące ze względu na zastosowania w praktyce i jako przedmiot dalszych badań są procedury budowy modelu preferencji decydentów prezentowane w pracach (Greco, Mousseau, Słowiński 2008), (Figueira, Greco, Mousseau, Słowiński 2008), oraz zastosowanie teorii zbiorów przybliżonych (Greco, Matarazzo, Słowiński 2001, 2008).

Bieżące i planowane badania dotyczą również zastosowania metod proponowanych w pracy do analizy motywacyjnie zgodnych wielokryterialnych mechanizmów rynkowych z wykorzystaniem systemów wieloagentowych. Zagadnienie zgodności motywacji w mechanizmach rynkowych rozwijane jest w pracach E. Toczyłowskiego (por. Toczyłowski 2003, 2009). Dotyczy ono badania i konstrukcji takich mechanizmów rynkowych, w których harmonizowane sa interesy uczestników tak, że występowałaby zgodność ich motywacji i uczestnicy ci byliby skłonni do przekazywania niezafałszowanych informacji, umożliwiających efektywne funkcjonowanie danego systemu. W pracy (Kruś, Skorupiński, Toczyłowski 2010) zagadnienie to jest badane jest na przykładzie problemu producenta i jego klientów.

Przedstawiane w tej pracy metody są zgodne z ideami dotyczącymi zaufania i uczciwości w systemach rozproszonych (A. Wierzbicki 2010), stanowiącymi kolejny interesujący kierunek dalszych badań.

Bibliografia

Alcamo J., Shaw R., Hordijk L. (1990) The RAINS Model of Acidification, Science and Strategies in Europe. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht.

Ameliańczyk, A. (1979) Multicriterial optimization of international economic cooperation control. Prace Naukowe ICT Polit. Wrocł. Nr 39.

Aumann, R. J. (1961) The Core of Cooperative Games without Side Payments. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 98, 539-552.

Aumann, R. J. (1967) A Survey of Games without Sidepayments. In: Essays in Mathematical Economics, M. Shubik, ed., Princeton University Press, 3-27.

Aumann, R.J., Maschler, M. (1964) The Bargaining Set for Cooperative Games. In: Advances in Game Theory (M. Dreshler, L. S. Shapley and A. W. Tucker, eds.), *Annals of Mathematics Studies*, No. 52, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Auman, R.J., Peleg, B. (1960) Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, *Bull. of the American Mathematical Society.* 66, 173-179.

Axelrod R., (1985), The Evolution of Cooperation. Basic Books, New York.

Barclay S., Peterson C (1976) Multi-attribute Models for Negotiations. Technical Report 76-1, Decisions and Designs, Inc. McLean, VA.

Bednarczuk E. (2005) Parametryczne problemy optymalizacji wielokryterialnej, warunki stabilności rozwiązań. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT. Warszawa.

Bednarczuk E. (2006) Stability analysis for parametric vector optimization problems. Dissertationes Mathematicae. Warszawa.

Benayoun R., de Montgolfier J., Laritchev O. (1971) Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM). *Mathematical Programming*, 1, 366-375.

Bergstresser, K., P.L. Yu (1977) Domination Structures and Multicriteria Problems in N-person Games. *Theory and Decision*, Vol. 8, 5-48.

Bergman L., H. Cesar, G. Klaassen (1990) A Scheme for Sharing the Costs of Reducing Sulfur Emissions in Europe. WP-90-005.IIASA, Laxenburg, Austria.

Billera L.,J., Heath D. C. (1982) Allocation of Shared Costs: A Set of Axioms Yielding a Unique Procedure, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, No. 1, 32-39.

Blass A., Raiffa H. (1986) Copmuter Program for Investigating the Efficient Solutions of Two-party, multiple-issue Negotiations, Unpublished Manuscript, Harvard University.

Bouyssou D., Marchant T., Pirlot M., Tsoukias A., Vincke P. (2006) Evaluation and Decision Models with Multiple Criteria. Springer.

Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Słowiński, R. (Eds.) (2008) Multiobjctive Optimization, LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Bronisz P., L. Krus (1986a), Interactive System Aiding Decision Making in Multiobjective Cooperative Games. Mathematical Background, *Syst. Anal. Model. Simul.*, vol.3, 387-394.

Bronisz P., L. Krus (1986b) Supporting of Negotiation in Bargaining Problem with Multiple Payoffs. W: Proceedings of the 1986 IFAC Workshop on Modeling, Decision and Game with Application to Social Phenomena, Vol II, Beijing, China, 496-502.

Bronisz P., L. Kruś (1987) A Mathematical Basis for System Supporting Multicriteria Bargaining, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, vol. 4, Warsaw, Poland, 331-337.

Bronisz P., L. Kruś, B. Lopuch (1987) An Experimental System Supporting Multiobjective Bargaining Problem. A Methodological Guide, W: Theory, Software and Testing Examples for Decision Support Systems, ed. A. Lewandowski, A.P.Wierzbicki, IIASA, Laxenburg.

Bronisz P., L. Kruś, (1988a) Application of Generalized Raiffa Solution to Multicriteria Bargaining Support. W: System Modeling and Optimization, M. Iri, K. Yajima (eds), Lecture Notes in Control and Information Sciences 113, Springer- Verlag, 207-211.

Bronisz P., L. Kruś, (1988b) Interactive Procedures for Multicriteria Decision Support in Bargaining Problem. W: System Analysis and Simulation, A. Sydow, S.G. Tzafestas, R. Vichnevetsky (eds), Band 46, Akademie-Verlag, Berlin, 59-62.

Bronisz P., L. Kruś, A. Wierzbicki (1989) Towards Interactive Solutions in a Bargaining Problem, W: Aspiration Based Decision Support Systems, ed.: A.Lewandowski, A.P.Wierzbicki, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer Verlag, Berlin, 251-268.

Bronisz P., H. Bury, L. Kruś (1989) Interaktywny system wspomagający analizę strategii rozwojowych. W: Materiały 1-szej Krajowej Konferencji BOiS, IBS PAN, Warszawa.

Bronisz P., L. Kruś (1989a) Dynamic Solution of Two-Person Bargaining Games. in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, 449-456.

Bronisz P., L. Krus (1989b) An Experimental System Supporting Negotiation on Joint Development Program. in: Processes of International Negotiations, F. Mautner-Markhof (ed.), Westview Press, Boulder, 519-529.

Bui T. (1987) Co-oP - A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision Making. Lecture Notes in Computer Science 290, Springer Verlag, Berlin.

Bury H., L. Kruś, R. Kulikowski (1988) Supporting Planning Decisions by Experiments with Complex Development Model. W: Methodology and Applications of Decision Support Systems, Third Polish Finnish Conference, Sobieszewo 1988. IBS PAN. Warszawa.

Chander, P., Tulkens, H. (1997) The core and economy with multilateral environmental externalities, *International Journal of Game Theory* 26(3), 379-401.

Chankong, V., Haimes, Y.Y.(1983) Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. Elsevier Science Publishing, New York.

Charnes, A., Cooper, W.W., Ferguson, R.O. (1955) Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science* 1(2), 138-151.

Charnes, A., Cooper, W.W. (1961) Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, John Wiley and Sons, New York.

Charnes, A., Cooper, W.W.(1977) Goal programming and multiple objective optimization; part 1. *European Journal of Operational Research* 1(1), 39-54.

Chen E., Vahidov R., Gregory E. Kersten G.E.(2005) Agent-supported negotiations in the e-marketplace. *International Journal of Electronic Business*, 3 (1), 28-49 .

Cichoń T. (1989) Narzędzia softwerowe do symulacji i wspomagania decyzji w przypadku wielokryterialnej gry dynamicznej. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.

Cruijssen F., Cools M. and Dullaert W. (2007) Horizontal cooperation in logistics: Opportunities and impedimenta. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 43(2), 129-142.

Davis M., Maschler M. (1965), The Kernel of a Cooperative Game, *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. 12.

Deb K. (2008), Introduction to Evolutionary Multiobjective Optimization. W: Multiobjective Optimization, Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Slowiński, R. (Eds.), LNCS 5252, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 57-95.

Deb K., Chaudhuri S., Miettinen K.(2006) Towards estimating nadir objective vector using evolutionary approaches. W: Keijzer, M., i inni (red) Proceedings of the 8th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2006), Seattle, vol. 1, 643-650. ACM Press, New York.

Dell R. F., Karwan M. H. (1990) An Interactive MCD Weight Space Reduction Method Utilizing a Tchebysheff Utility Function. *Naval Research Logistics*, 37, 263-277.

Dreyfus S. (1985) Beyond Rationality, W: M. Grauer, M. Thompson, A. P. Wierzbicki (eds): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Ehtamo H., Hamalainen R.P. (2001) Interactive multiple-criteria methods for reaching pareto optimal agreements in negotiations. *Group Decision and Negotiation*, 10(6):475-491.

Fandel G., (1979) Optimale Entscheidungen in Organizationen, Springer-Verlag, Heidelberg.

Fandel G., A.P. Wierzbicki, (1985) A Procedural Selection of Equilibria for Supergames, (private unpublished communication).

Fandel G., Gal T. (red)(1997): Multiple Criteria Decision Making. LNEMS 448, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (red)(2005) Multiple Criteria Analysis State of the Art Surveys. Springer + Business Media Inc.

Figueira J., Greco S., Mousseau V., Słowiński R. (2008) Interactive Multiobjective Optimization Using a Set of Additive Value Functions. W: J. Branke i inni (red.) Multibjective Optmization. LNCS 5252, 97-119. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Fernández F.R., Hinojosa M.A., Puerto J. (2004) Multi-criteria minimum cost spanning tree games. *European Journal of Operational Research*, 158 (2), 399-408.

Fisher R., Ury W., (1981) Getting to Yes, Hougton Mifflin, Boston.

Fortuna Z., Kruś L. (1984) Simulation of an Interactive Metod Supporting Collectiva Decision Making using a Regional Development Model. In: Interactive Decision Analysis, M. Grauer, A. P. Wierzbicki eds., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 201-209.

Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z, (1987) Programowanie wielokryterialne. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

Gass, S., Saaty, T.(1955) The computational algorithm for the parametric objective function. Naval Research Logistics Quarterly 2, 39-45. Springer-Verlag, Heidelberg.

Gately D. (1974) Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Geme Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power, *International Economic Review*, Vol. 15.

Gembicki, F., Y. Y. Haimes (1975) Approach to Performance and Multiojective Sensitive Optimization: the Goal Attainement Method. *IEEE Automatic Control* AC-20, No. 6.

Geoffrion, A.M.(1968) Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22(3), 618-630.

Gillies D. B. (1959) Solution to General Nonzero Sum Games, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 40.

Goeltner C. (1987) The Copmuter as a Third Party: Decision Support System for Two Party Single-issue and Two Party multiple-issue Negotiations. Working Paper 1958-87, Alfred P. Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA.

Gondzio J., Makowski M. (1995) HOPDM - Modular Solver for LP Problems: Users Guide to version 2.12. Working Paper WP-95-50, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg.

Granat J., Makowski M. (2000) Interactive specification and analysis of aspiration-based preferences. *EJOR*, 122 (2) 469-485.

Grauer M., M. Thompson, A.P. Wierzbicki (eds), (1985) Plural Rationality and Interactive Decision Processses, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Greco S., Matarazzo B., Słowiński R. (2001) Rough Sets Theory for Multicriteria Decision Analysis. *EJOR*, 129, 1-47.

Greco S., Matarazzo B., Słowiński R. (2008) Dominance-Based Rough Set Approach to Interactive Multiobjective Optimization. W: J. Branke i inni (red.) Multibjective Optmization. LNCS 5252, 121-155. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Greco S., Mousseau V., Słowiński R. (2008) Ordinal Regression Revisited: Multiple criteria ranking with a set of Additive Value Functions. *EJOR*. 191 (2) 416-436).

Harsanyi J.C., R. Selten, (1972) A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information, *Management Sciences*, Vol. 18, 80-106.

Heiskanen P., Ehtamo H., Hamalainen R.P. (2001) Constraint proposal method for computing Pareto solutions in multi-party negotiations. *European Journal of Operational Research*, 133(1), 44-61.

Hordijk L. (1991) Use of the RAINS Model in Acid RAins Negotiations in Europe. Environmental Science Technology, 25 (4).

Huang, C.Y., Sjöström, T. (2003) Consistent solutions for cooperative games with externalities, *Games and Economic Behavior* 43, 196-213.

Hwang C., Masud A. S. M., Paidy S. R., Yoon K. (1979) Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications, A stete-of-the-art survey. Springer Verlag.

Ignizio, J.P.(1985) Introduction to Linear Goal Programming. Sage Publications, Beverly Hills.

Imai H., (1983) Individual Monotonicity and Lexicographical Maxmin Solution, *Econometrica*, Vol.51, 389-401.

Jahn, J.(2004) Vector Optimization. Springer, Berlin.

Jacket-Lagreze E., Siskos J. (1982) Assesing a set of Additive Utiiy Functions for Multicriteria Decision Making: The UTA Method. *EJOR*, 10:151-164.

Jacket-Legreze E. (1990) Interactive Assessment of Preferences Using Holistic Judgements. The PREFCALC system. W: Readings in Multiple Criteria Decision aid, (C. A. Bana e Costa Ed.). Springer Verlag, Berlin, 335-350.

James L.D., R.R. Lee, (1971) Economics of Water Resources Planning. New York, McGraw-Hill.

Jaszkiewicz A., Słowiński R. (1995) The light-beam search – outranking based interactive procedure for multiple -objective mathematical programming. W: Advances in Multicriteria Analysis (Pardalos P. M., Siskos Y., Zopoundis C. red.), Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 129-146.

Jarke M., Jelassi M. T., Shakun M. F. (1987) Mediator: Towards a negotiation support system. *European Journal of Operation Research* 31, 314-334.

Kalai, E. (1975) Excess Functions for Cooperative Games without Sidepayments. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.29, No. 1, 60-71.

Kalai E., Smorodinsky M. (1975) Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 43, 513-518.

Kaliszewski, I.(1994) Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique. Kluwer, Dordrecht.

Kaliszewski I., Zionts S. (2004) Generalization of the Zionts-Wallenius Multicriteria Decision Making Algorithm. *Control and Cybernetics* 3, 477-500.

Kaliszewski, I.(2006) Soft Computing for Complex Multiple Criteria Decision Making, Springer.

Kaniewski M., (1990) Wspomaganie decyzji w wielokryterialnych grach dynamicznych na przykładzie modelu gry połowowej. Praca magisterska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, Instytut Automatyki.

Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976) Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. Wiley, Chichester.

Kersten G. E. (1985) NEGO - Group Decision Support System. *Information and Management*. Vol. 8., 237-386.

Kersten G. E. (1988) A Procedure for Negotiating Efficient and Non-Efficient Compromises. *Decision Support Systems* 4, 167-177, North-Holland.

Kersten, G. E.; Koszegi, S.T.; Vetschera, R. (2002) The effects of culture in anonymous negotiations: experiment in four countries. System Sciences, System Sciences, 2002. HICSS. Proceedings of the 35th Annual Hawaii International Conference, 7-10 Jan. 2002 , 418 - 427.

Kersten G., Lo G. (2003) Aspire: an integrated negotiation support system and software agents for e-business negotiation. *International Journal of Internet and Enterprise Management*, 1 (3), 293 - 315.

Kersten G. E., Michalowsky W., Matwin S., Szpakowicz S. (1988) Rule-based Modelling of Negotiation Strategies. *Theory and Decision*, Vol. 25., 225-257.

Kersten G. E., Michalowski W., Szpakowicz S., Koperczak Z. (1991) Restructurable Representations of Negotiations. Management Science, 37 (10).

Kersten G.E., Sunil J. (1999) WWW-based negotiation support: design, implementation, and use. Decision Support Systems 25, (2), 135-154.

Kersten G. E., Szapiro T. (1986) Generalized Approach to Modeling Negotiations, *European Journal of Operational Research*, Vol. 26, 1, 142-149.

Khorram E., Zarepisheh M., Ghaznavi-ghosoni B.A.(2010) Sensitivity analysis on the priority of the objective functions in lexicographic multiple objective linear programs *EJOR*, 207, 1162-1168.

Kóczy L.Á. (2007) A Recursive Core for Partition Function Form Games. *Theory and Decision* 63, 41-51.

Kóczy L.Á. (2008) Sequential Coalition Formation and the Core in the Presence of Externalities. *Games and Economic Behavior*

Konarzewska-Gubała E. (1980) Programowanie przy wielorakości celów. Warszawa. PWE.

Konarzewska-Gubała E. (1991) Wspomaganie decyzji wielokryterialnych: system „Bipolar". Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Seria Monografie i Opracowania, 76.

Kopelowitz A. (1967) Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of N-Person Games. RM No. 31, Research Program in Game Theory and Math. Economics, Department of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem.

Korhonen P., Laakso J. (1986) A Visual Interactive Method for Solving the Multiple Criteria Problem. *EJOR*, 24, 227-287.

Korhonen P., Salo S., Steuer, R.E.(1997) A heuristic for estimating nadir criterion values in multiple objective linear programming. *Operations Research* 45(5), 751-757.

Korhonen P., Moskowitz H., Wallenius J., Zionts S. (1986) An Interactive Approach to Multiple Criteria Optimization with Multiple Decision-Makers. *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 33, 589-602, John Wiley & Sons.

Korhonen P., Wallenius J. (1989) Supporting Individuals in Group Decision-making. Helsinki School Of Economics, Finland.

Kostreva M.M., Ogryczak W., Wierzbicki A. (2004) Equitable Aggregation and Multiple Criteria Analysis. *EJOR*, 158, 362-367.

Krajewska M.A., Kopfer H. (2006) Collaborating freight forwarding enterprises. *OR Spectrum*, 28 (3), 301-317.

Kreglewski T., Paczynski J., Granat J., Wierzbicki A. P. (1988) IAC-DIDAS-N A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System for Multicriteria Analysis of Nonlinear Models with Nonlinear Model Generator supporting model analysis, IIASA working paper, IIASA, Laxenburg , Austria.

Kreglewski T., (1984) private communication.

Kruś L. (1985) An Interactive Method for Decision Support in a Two-person Game with an Example from Regional Planning. In: Plural Rationality and Interactive Decision Processes, M. Grauer, M. Thompson, A. P. Wierzbicki eds., Lecture Notes in

Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, 336-343.

Kruś L., Lopuch B., Bronisz P., (1989) Application of interactive solutions for decision support in bargaining problem, an illustrative example. In: Methodology and Applications of Decision Support Systems, R. Kulikowski (ed.), Proceeding of the 3-rd Polish-Finnish Symposium, Gdansk, 1988, 121-140.

Kruś L., Bronisz P., Lopuch B., (1990) MCBARG - Enhanced, A System Supporting Multicriteria Bargaining, IIASA Collaborative Paper, CP-90-006, IIASA, Laxenburg, Austria.

Kruś, L., Lopuch B. (1989) Wielokryterialny problem targu w przypadku modeli liniowych i jego rozwiązanie przy użyciu systemu MCBARG. Przykład modeli gospodarstwa rolnego. Opracowanie ZTSW 16/17/89, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., Bronisz P. (1990). Decision Support on Joint Development Program, Opracowanie, ZTSW, IBS PAN, Warszawa.

Kruś L., (1991) Some Models and Procedures for Decision Support in Bargaining, W: Multiple Criteria Decision Support. Korhonen, Lewandowski, Wallenius (ed.), Lecture notes in Economics and Math. Systems, Vol. 356, Springer Verlag, Berlin 350-359.

Kruś, L. (1992a) Interactive Approach to multicriteria bargaining on an example of acid rains problem. W: Systems and Control (Han-Fu Chen Ed.) International Acad. Publ., Beijing, China.

Kruś, L. (1992b) Computer Based Mediation Support. W: Preprints of the IFAC Workshop on "Support Systems for Decision and Negotiation Processes", June, 24-26, 1992, Warsaw, Poland.

Kruś L., Bronisz P. (1993) Some New Results in Interactive Approach to Multicriteria Bargaining. W: User Oriented Methodology and Techniques of Decision Analysis, Wierzbicki i inni (red.), Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, Springer Verlag, Berlin, str 21-34.

Kruś L., Bronisz P. (1994) On n-person Noncooperative Multicriteria Games Described in Strategic Form. *Annals of Operation Research*. Vol. 51 (1994), 83-97. J. C. Balzer AG, Sci. Publ.

Kruś L., Nahorski Z., Owsinski J. W. (eds.) (1994). Decision Support in Negotiations and Policy Determination. Special issue of *Control and Cybernetics*. Vol. 22, No.4, 1993 (appeared in 1994).

Kruś L. (1994) Wspomaganie negocjacji w wielokryterialnym zagadnieniu targu. Biuletyn Instytutu Badań Systemowych PAN. Nr 2, 14-26.

Kruś L., Bronisz P. (1995) Solution Concepts in Multicriteria Cooperative Games without Side Payments. W: System Modelling and Optimization, J. Dolezal (ed.), Chapman and Hall Publ.

Kruś L., Bronisz P. (1996) Cooperative Game Model for a Cost Allocation Problem. In: S. Bańka, S. Domek, Z. Emirsajłow (eds) Methods and Models in Automation and Robotics. Proc of the Third Int. Symposium. 10-13 September, Międzyzdroje Poland. Technical Univ. of Szczecin, Vol. 1, 275-280.

Kruś L., (1996) Multicriteria Decision Support in Negotiations, *Control and Cybernetics*, Vol. 25 , No. 6, 1245-1260.

Kruś L., Bronisz P. (1998) Cooperative game in partition function form for a cost allocation problem. In: S. Bańka, S. Domek, Z. Emirsajłow (eds) Methods and Models in Automation and Robotics. Proc.of the Fifth Int. Symposium. 25-29 August, Międzyzdroje, Poland. Technical Univ. of Szczecin, 279-284.

Kruś L., Bronisz, P., (2000) Cooperative game solution concepts to a cost allocation problem, *European Journal of Operational Research*. Vol. 122 , No. 2, 258-271.

Kruś L. (2002a) A System Supporting Financial Analysis of an Innovation Project in the Case of Two Negotiating Parties, Bull. of Polish Academy of Sci., Ser. Techn., Vol. 50, No. 1, 93-108.

Kruś L. (2002b) Multicriteria Decision Support in Bargaining, a Problem of Players Manipulations, in: T. Trzaskalik, J. Michnik, (eds), Multiple Objective and Goal Programming, Physica Verlag, Springer, Berlin.

Kruś L., (2004a), A Computer Based System Supporting Analysis of Cooperative Strategies, in: L. Rutkowski, J. Siekmann, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, (eds), Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin.

Kruś L. (2004b) A multicriteria approach to cooperation in the case of innovative activity, *Control and Cybernetics*, Vol. 33 , No. 3.

Kruś L. (2008) On Some Procedures Supporting Multicriteria Cooperative Decisions. *Foundations of Computing and Decision Science*, 33 (3), 257-270.

Kruś L. (2009) Cost Allocation in Partition Function Form Games. *Operation Research and Decisions*, No. 2, 39-49.

Kruś L. Skorupiński J., Toczyłowski E. (2010) Analiza motywacyjnie zgodnych decyzji wielokryterialnych na przykładzie problemu producenta i klientów. Badania Operacyjne i Systemowe.

Kulikowski R. (1998) Portfolio optimization: two factors utility approach, Control & Cybernetics, 3.

Kulikowski R.(2002) URS methodology - a tool for stimulation of economic growth by innovations, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech., Vol. 50 , No. 1.

Kulikowski R.(2003) On general theory of risk management and decision support systems, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Sci. Tech., Vol. 51 No. 3.

Kulikowski R. , L. Kruś (2003) Support of education decisions. In: Group Decisions and Vot-ing (J. Kacprzyk, D. Wagner eds), Akad. Oficyna Wyd. EXIT, Warszawa.

Lax D. A., Sebenius J. K. (1985) The Power of Alternatives and the Limits to Negotiations, *Negotiation J.* Vol. 1, 163-179.

Legros P.(1986) Allocating Joint Costs by Means of Nucleolus, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 15, Issue 2, 109-119.

Lewandowski A., A.P. Wierzbicki A.P. (1989) Aspiration Based Decision Support Systems. Springer, Berlin.

Lewandowski A., T. Kreglewski, T. Rogowski, A. P. Wierzbicki (1989) Decision Support Systems of DIDAS Family. In: Aspiration Based Decision Support Systems, (A. Lewandowski, A.P. Wierzbicki eds.) Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 331, Springer-Verlag, 21-47.

Littlechild S.C. (1974) A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 3, Issue 1, 21-29.

Littlechild, S.C., Thompson, G.F. (1977) Aircraft landing fees: a game theory approach. *The Bell Journal of Economics*. Vol. 8, 186-204.

Littlechild S.C., Vaidya K.G. (1976) The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game, *Int. Journal of Game Theory*, Vol. 5, 151-161.

Lucas, W.F., (1965) Solution for Four-Person Games in Partition Function Form, *SIAM Review*. Vol. 13, 118-128.

Lucas, W.F. (1968) A game with no solutions. *Bull. of the American Mathematical Society* Vol. 74, 237-239.

Lucas, W.F. (1969) The proof that a game may note have a solution. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.137, 219-229.

Luce R.D., H. Raiffa, (1957) Games and Decisions: Introduction and Critical Survey, New York: Wiley.

Makowski M. (2005) A structured modeling technology. *EJOR*, Vol. 166 (3), 615-648.

Makowski, M., Somlyódy, L. and Watkins, D. (1996), Multiple Criteria Analysis for Water Quality Management in the Nitra Basin. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, Vol. 32: 937-951.

Makowski, M. (2000) Modeling paradigms applied to the analysis of European air quality. *EJOR*, Vol. 122 (2), 219-241.

Maschler M, Peleg B, Shapley L.S. (1979) Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, 303-338.

Matsubayashi N., Umezawa M., Masuda Y. and Nishino H. (2005) A cost allocation problem arising in hub-spoke network systems. *European Journal of Operational Research*, Vol. 160 (3), 821-838.

Matwin S., Szpakowicz S., Koperczak Z., Kersten G.E., Michalowski W.(1989) Negoplan: An Expert System Shell for Negotiation Support, *IEEE Intelligent Systems*, Vol. 4 (4), 50-62.

Matwin, S., Szapiro T., Haigh K. (1991) Genetic Algorithms Approach to a Negotiation Support System. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* Vol. 21 (1), 102-114.

Michalowski W., Szapiro T. (1989) A procedure for worst outcomes displacement in multiple criteria decision making . *Computers and Operations Research*, Vol. 16, (3), 195-206.

Michalowski W., Szapiro T. (1992) A Bi-reference Procedure for Interactive Multiple Criteria Programming. *Operations Research*, Vol. 40, No. 2

Miettinen, K. (2008) Introduction to Mutiobjective Optimization: Noninteractive Approaches. In: Multiobjctive Optimization, J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Słowiński (Eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Moulin H. (1988) Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge University Press, Cambridge.

Nakayama H. (1985) Aspiration Level Approach to Interactive Multi-objective Programming and its Applications. W: Advances in Multicriteria Analysis (Pardalos P. M., Siskos Y., Zopoundis C. red.), KluwerAcademic Publishers, Dodrecht, 147-174.

Narula S.C., Kirilov L., Vassilev V. (1994) Reference Direction Approach for Solving Multiple Objective Nonlinear Programming Problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 24, 804-806.

Nash J.F., (1950) The Bargaining Problem, *Econometrica*, Vol. 18, 155-162.

Nash J.F., (1953) Two-Person Cooperative Games, *Econometrica*, Vol. 21, 129-140.

von Neumann, J., O. Morgenstern (1953) Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press.

Nunamaker J., F., Applegate L., M., Konsynsky B., R. (1988) Computer-aided deliberation: Model Management and Group Decision Support. *Operations Research*, Vol. 36., 826-848.

Nyhart J., Samarasan D. (1989) The Elements of Negotiation Management: Using Computers to Help Resolve Conflict. *Negotiation Journal*, 43-62.

Nykowski I., Żółkiewski Z.(1985) A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem. *European J. Oper. Res.* 19, 91-97.

Ogryczak W., (1997) Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Modele preferencji i zastosowania do wspomagania decyzji. Warszawa, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.

Ogryczak W., (2002) Multiple criteria optimization and decisions under risk, *Control and Cybernetics*, Vol. 31 , No. 4.

Ogryczak W., Śliwiński T. (2007) On Optimization of the Importance Weighted OWA Aggregation of Multiple Criteria. LNCS **4705**, 804-817.

Ogryczak W., (2008) Reference Point Method with Lexicographic Min-ordering of Individual Achievements. W: Multiple Criteria Decision Making 07, T. Trzaskalik red.. Publisher of The Karol Adamiecki University of Economics in Katowice, Katowice, 155-174.

Pawlak Z.(1982) Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11, 341-356.

Pawlak Z.(1991) Rough Sets. Kluwer, Dordrecht.

Peleg, B. (1963) Solutions to Cooperative Games without Side Payments. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 106, 280-292.

Piasecki, St., J. Hołubiec, A. Ameliańczyk (1982). Międzynarodowa kooperacja gospodarcza, modelowanie i optymalizacja. PWN, Warszawa.

Raiffa H., (1953) Arbitration Schemes for Generalized Two-Person Games, *Annals of Mathematics Studies*, No. 28 361-387, Princeton.

Raiffa H. (1982) The Art and Science of Negotiations. Harvard Univ. Press, Cambridge.

Ransmeier J. S. (1942) The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning, The Vanderbild University Press, Nashvill.

Rogowski, J. Sobczyk, A. P. Wierzbicki (1988) IAC-DIDAS-L A Dynamic Interactive Decision Analysis and Support System, Linear Version. WP-88-110, IIASA, Laxenburg, Austria.

Roth A.E., (1979a) An Impossibility Result Concerning n-Person Bargaining Games, *International Journal of Game Theory*, Vol. 8, 129-132.

Roth A.E., (1979b) Axiomatic Model of Bargaining, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 170, Springer-Verlag, Berlin.

Roth A.E. , M.W.K. Malouf , (1979) Game-Theoretical Models and the Role of Information in Bargaining, *Psychological Review*, Vol. 86, 1163-1170.

Roy B. (1990) Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.

Savage L. J., The foundations of statistics. New York, Wiley, 1954

Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985) Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, New York.

DeSanctis G., Gallupe R., B. (1987) A Foundation for the Study of Group Decision Support Systems. *Management Science*, Vol. 33, No. 5., 589-609.

Schmeidler D. (1969) The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, No. 3, 1163-1169.

Sebenius J. K. (1992) Negotiation Analysis: A Characterization and Review *Management Science*, Vol. 38, No. 1, 18-38.

Sebenius J. K. (2007) Negotiation Analysis: Between Decisions and Games. W: W. Edwards, R. Miles, D. von Winterfeldt (eds.),Advances in Decision Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Seo F. (1988) Utilization of Mathematical Programming in Group Decision Making: An Application to Effective Formation of Integrated Regional Information Networks. Discussion Paper No. 254, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University.

Seo F. Sakawa M. (1987) Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning, D. Reidel Publishing Co.

Shakun M. (1988) Evolutionary Systems Design. HoldenDay, Oakland, CA.

Shapley L. S. (1953) A Value for n-Person Game, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 28,

Shapley L. S., Schubik M.(1966) Quasi-cores in Monetary Economy with Nonvonvex Preferences, *Econometrica*, Vol. 34, 805-827.

Skulimowski A.(1996) Decision Support Systems Based on Reference Sets Theory Multiobjective Optimization. AGH-Press, Kraków.

Skwarczyło M. (1988) Opis użytkowy programu SCONVEX. Opracowanie ZTSW-24-17/88, IBS PAN, Warszawa.

Stam A., H. Cesar, M. Kuula (1989) Transboundary Air Pollution in Europe: An Interactive Multicriteria Tradeoff Analysis, WP-89-61, IIASA, Laxenburg, Austria.

Stearns R. (1964) On the Axioms for a Cooperative Game without Side Payments. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 15, 82-86.

Steuer R.E.(1986) Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. Wiley, New York.

Szapiro T. (1991) Podejście interaktywne we wspomaganiu podejmowania decyzji. SGH. Warszawa.

Szapiro T. (1993) Co decyduje o decyzji. PWN, Warszawa.

Szapiro T.(red.) (2000) Decyzje menadżerskie z Excelem. PWE, Warszawa.

Szapiro T., Wojewnik P. (2007) Negotiating an Investment Strategy with Fuzzy Redescriptions. W: G. Kersten, j. Rios, E. Chen (red.) Proc. Group Decisions and Negotiations 2007, Vol. II, Concordia Univ., Montreal, Canada.

Szapiro T., Wojewnik P. (2008) Universal Software Platform for Construction of Web-based Negotiation Support Systems. W: J. Climaco, G. Kersten, J. P. Costa (red.) Group Decisions and Negotiation, Proceedings, 203-204.

Teich J. E., Wallenius H., Kuula M., Zionts S. (1995) A Decision Support Approach for Negotiation with an Application to Agricultural Income Policy Negotiations. *European Journal of Operational Research*, Vol. 81, 76-87.

Thomson W., (1980) Two Characterization of the Raiffa Solution, Economic Letters, Vol. 6, 225-231.

Thrall, R.M., Lucas W.F. (1963) n-Person Games in Partition Function Form, *Naval Research Logistics Quarterly*, 10, 281-298.

Toczyłowski E.(2003) Optymalizacja procesów rynkowych przy ograniczeniach. AOW EXIT, Warszawa.

Toczyłowski E. (2009) Zgodność motywacji w mechanizmach rynku energii. Rynek Energii, II(IV) , 88-95.

Trzaskalik T. (1990) Wielokryterialne dyskretne programowanie dynamiczne. Teoria i zastosowania w praktyce gospodarczej. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach.

Trzaskalik T. (1997) Multiple Criteria Discrete Dynamic Programming. W: Multiple Criteria Decision Making. Fandel G., Gal T. (eds), LNEMS 448, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 202-211.

Trzaskalik T. (1998) Multiobjective analysis in dynamic environment. Karol Adamiecki University of Economics in Katowice (Katowice).

Trzaskalik T., Michnik J. (red.) (2002) Multiple objective and goal programming : Recent developments. Physica-Verlag, Springer.

Trzaskalik T., Sitarz S. (2007) Discrete dynamic programming with outcomes in random variable structures. *European Journal of Operational Research*, 177, (3), 1535-1548.

Trzaskalik T. (red.) (2006) Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym. PWE, Warszawa.

Tversky A., Kahneman O., (1981) The framing of decisions and the psychology of choice, *Science*, Vol. 211, 453-480.

Tversky A. (1967) Utility theory and additivity analysis of risky choices, *Experimental Psychology*, Vol. 75, 27-37.

Vetschera, R.(1990) Group Decisions and Negotiation Support - a Methodological Survey. *OR Spectrum*, Vol. 17, 67-77.

Vetschera R., Kersten G., Köszegi S. (2006) User Assessment of Internet-Based Negotiation Support Systems: An Exploratory Study. *Journal of Organizational Computing and Electronic Commerce* Vol. 16 (2), 123-148.

Vetschera, R.(2007) Preference structures and negotiator behavior in electronic negotiations. *Decision Support Systems* Vol. 44 (1), 135-146.

Wachowicz T. (2006) Application of Multiple Attribute Stochastic Dominance to Selection of Negotiation Strategies in E-negotiations. W: Multiple Decision Making 05, T. Trzaskalik (red). The Karol Adamiecki University of Economic Press, Katowice.

Wachowicz T. (2008) Negotiation and Arbitration Support with Analytic Hierarchical Process. W: Multiple Decision Making 07, T. Trzaskalik (red). The Karol Adamiecki University of Economic Press, Katowice.

Wierzbicki A. (2010) Trust and Fairness in Open, Distributed Systems. Springer

Wierzbicki A.P., (1982) A Mathematical Basis for Satisficing Decision Making, *Mathematical Modelling*, 3, 391-405.

Wierzbicki A.P., (1983) Negotiation and Mediation in Conflicts I: The Role of Mathematical Approaches and Methods, Working Paper WP-83-106, IIASA, Laxenburg; także w: H. Chestnat i inni, (ed): Supplemental Ways to Increase International Stability, Pergamon Press, Oxford, 1983.

Wierzbicki A.P., (1985) Negotiation and Mediation in Conflicts II: Plural Rationality and Interactive Decision Processes, W: M.Grauer, M.Thompson, A.P.Wierzbicki (ed): Plural Rationality and Interactive Decision Processes, Proceedings Sopron 1984, Springer-Verlag, Heidelberg.

Wierzbicki A.P.,(1986) On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterizations to Vector Optimization Problems, *OR Spectrum* 8:73-87, Springer Verlag.

Wierzbicki A.P., (1990) Multiple Criteria Solutions in Noncooperative Game Theory, Part III. Discussion Paper 288, Kyoto Institute of Economic Research, Kyoto University, Kyoto.

Wierzbicki A.P., (1987) Towards Interactive Procedures in Simulation and Gaming: Implications for Multiperson Decision Support, W: Methodology and Software for Interactive Decision Support, Proceedings of International Workshop, Albena, Springer Verlag.

Wierzbicki, A. P., L. Krus, M. Makowski (1993) The Role of Multi-Objective Optimization in Negotiation and Mediation Support" in: Theory and Decision, special issue on "International Negotiation Support Systems: Theory, Methods, and Practice, Vol. 34 (3), 201-214.

Wierzbicki A. P., M. Makowski, J. Wessels, (2000) Model-based Decision Support Methodology with Environmental Applications, Kluwer Academic Press, Dordrecht, Boston.

Wierzbicki A. P. (2005) A Reference Point Approach to Coalition Games. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* Vol. 13 (2-3), 81-89.

Young H. P., Okada N., Hashimoto T. (1980) Cost Allocation in Water Resources Development - A Case Study of Sweden. RR 80-32, IIASA, Laxenburg, Austria.

Young P. (1982) Cost allocation. Prentice Hall. New York.

Young P. (1985) Monotonic solutions of cooperative games. *Internationl Journal of Game Theory*, Vol. 14 (2),65-72.

Young P. (1992) Negotiation Analysis. The University of Michigan Press.

Zeleny, M.(1973) Compromise programming. In: Cochrane, J.L., Zeleny,M. (eds.) Multiple Criteria Decision Making, 262-301. University of South Carolina, Columbia, SC.

Zionts S., Wallenius J. (1976) An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem. *Management Science* 22, 652-663.

Zionts S., Wallenius J. (1983) An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Utility Functions. *Management Science* 29, 519-529.

Rozpatruje się sytuacje decyzyjne, w których występuje kilku decydentów, negocjujących warunki współpracy. Problem dotyczy podziału efektów współpracy, przy czym każdy decydent ma swój odrębny, wielokryterialny zestaw celów, które chciałby osiągnąć i kieruje się swoimi preferencjami.

W pracy przedstawia się podstawy teoretyczne i metody wspomagania procesu decyzyjnego w takich sytuacjach z wykorzystaniem odpowiednio zbudowanego systemu komputerowego. Rozpatrywane sytuacje opisywane są formalnie jako modele wielokryterialnego problemu targu i wielokryterialnych gier koalicyjnych. Proponowane są koncepcje rozwiązań w tych grach uwzględniające preferencje decydentów, a następnie wielorundowe procedury negocjacyjne wspomagające proces znajdowania zgodnego rozwiązania. W poszczególnych rundach takiej procedury stosowana jest jednostronna i wielostronna analiza wielokryterialna możliwych wypłat, przy czym system komputerowy generuje propozycje mediacyjne. Przedstawia się konstrukcję zbudowanego systemu komputerowego MCBARG, w którym taka procedura została zaimplementowana oraz przykłady problemów kooperacji.

ISSN 0208-8029
ISBN 9788389475381

SYSTEMS RESEARCH INSTITUTE
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Phone: (+48) 22 3810246 / 22 3810277 / 22 3810241 / 22 3810273
email: biblioteka@ibspan.waw.pl