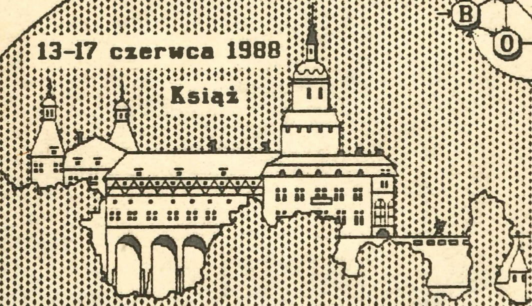
Redaktorzy:
A.Straszak
Z.Nahorski
J.Sikorski

13-17 czerwca 1988

Książ



1. Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Tom 1

BOS'88

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

TOM 1

OPTYMALIZACJA METODY I ZASTOSOWANIA

I KRAJOWA KONFERENCJA

BADAŃ OPERACYJNYCH i SYSTEMOWYCH

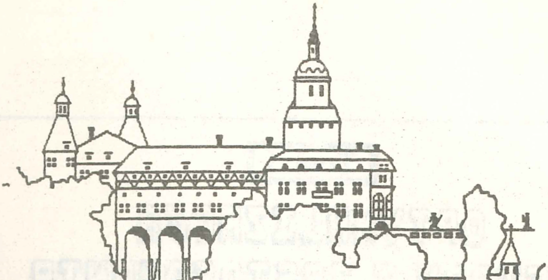
Książ, 13 - 17 czerwca 1988

BOS'88

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1989

WARSZAWA



Zamek Książ

I Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Organizator konferencji

Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych

przy współpracy

Instytutu Badań Systemowych PAN

Komitet naukowy konferencji

Jerzy Hołubiec, Andrzej Kałuszko, Jerzy Kisielnicki, Henryk Kowalowski, Roman Kulikowski, Franciszek Marecki, Zbigniew Nahorski, Stanisław Piasecki, Jarosław Sikorski, Jan Stachowicz, Jan Stasierski, Andrzej Straszak, Maciej Sysło, Władysław Świtalski

Redaktorzy naukowi materiałów

Andrzej Straszak, Zbigniew Nahorski, Jarosław Sikorski

2. Problemy optymalizacji i algorytmy ich rozwiązywania

2.5

I Krajowa Konferencja
Badań Operacyjnych i Systemowych
Książ, 13 - 17 czerwca 1988r.

O PEWNYM ZADANIU PROGRAMOWANIA CAŁKOWITOLICZBOWEGO Z ILORAZOWĄ FUNKCJĄ CELU

Marek Libura
Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6
01-447 Warszawa

W pracy przedstawiono zadanie programowania binarnego z liniowymi ograniczeniami i funkcją celu będącą ilorazem funkcji liniowych. Zadania tego typu występują w różnego rodzaju zastosowaniach programowania dyskretnego. Model, który tu opiszemy, pojawia się w zastosowaniach medycznych przy planowaniu naświetlań w tak zwanej brachyradioterapii. W pracy zagadnienie to jest najpierw przedstawione opisowo, a następnie sformułowane jest odpowiednie zadanie programowania dyskretnego. Dyskutowany jest związek tego zadania z parametrycznym programowaniem dyskretnym i opisana jest metoda iteracyjna, której użyto do rozwiązania przykładowych praktycznych zadań.

1. Wprowadzenie

Zadania programowania ilorazowego występują w różnego rodzaju zastosowaniach praktycznych (patrz np. Schaible (1981)). Przedstawiony w pracy model dotyczy zastosowań medycznych związanych z planowaniem naświetlań w tak zwanej brachyradioterapii. Zagadnienie to zostało przedstawione na Seminarium Zakładu Programowania Matematycznego IBS PAN przez dra Andrzeja Niemierkę z Centrum Onkologii w Warszawie.

Opisowe sformułowanie problemu jest następujące:

W $\mathbb{R}^3$ dane są trzy zbiory punktów X, T, K ponumerowanych liczbami naturalnymi. Ze względu na interpretację medyczną będziemy nazywali zbiór X zbiorem możliwych lokalizacji źródeł, zbiór T - zbiorem punktów niszczonych, zbiór K - zbiorem punktów chronionych. W praktycznych zastosowaniach moc zbioru X nie przekracza 100, natomiast zbiory T i K liczą odpowiednio po kilkanaście i kilka elementów. W każdym punkcie X może być umieszczone jedno źródło promieniowania. Wszystkie umieszczane źródła są identyczne. Fakt, czy w punkcie $i \in X$ znajduje się źródło, czy nie, jest opisywany przez zmienną binarną x_i, przy czym

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w punkcie } i \text{ jest umieszczone źródło} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Umieszczenie źródła w punkcie $i \in X$ powoduje dotarcie do każdego z punktów $j \in T \cup K$ w jednostce czasu dawki promieniowania w_{ij}, przy czym

$$w_{ij} = \frac{c}{\mathrm{dist}(i,j)^2} \tag{1}$$

gdzie dist(i,j) oznacza odległość między punktami i,j, a c jest pewną stałą.

Dawki promieniowania docierające od poszczególnych źródeł sumują się, jeśli więc $x = (x_1,\dots,x_n)$, gdzie $n = |X|$, jest wektorem opisującym układ źródeł, to łączna dawka promieniowania $d_j(x)$ docierająca do j od wszystkich źródeł jest równa

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\, x_i \tag{2}$$

Problem jest teraz formułowany następująco:

> Mając do dyspozycji M źródeł, należy je rozmieścić (niekoniecznie wszystkie) w punktach X w taki sposób, aby dawki w punktach T były jak największe i wyższe od zadanego poziomu, dawki w punktach K były jak najmniejsze, a rozkład dawek w punktach T był możliwie równomierny.

Takie nieformalne postawienie problemu opisuje tylko jego istotę i w zależności od przyjętej formalizacji może prowadzić do różnych zadań optymalizacyjnych. W następnym punkcie przedstawimy formalizację prowadzącą do jednokryteriowego zadania z ilorazową funkcją celu.

2. Sformułowanie zadania programowania ilorazowego.

Problem opisany w poprzednim punkcie jest w zasadzie problemem wielokryteriowym, w którym można wyróżnić trzy grupy wielkości mogących występować w roli kryteriów. Są to : poziomy dawek w punktach T, poziomy dawek w punktach K oraz wskaźnik reprezentujący nierównomierność dawek w punktach T. Opisane dalej sformułowanie sprowadza problem do zadania jednokryteriowego poprzez wprowadzenie warunków równomierności dawki w punktach T do układu ograniczeń i wyrażenie dwóch pierwszych grup kryteriów poprzez ilorazową funkcję celu. Zdefiniujmy dla danego x minimalną dawkę w punktach T

$$t(x) = \min_{j \in T} d_j(x) \tag{3}$$

i maksymalną dawkę w punktach K

$$k(x) = \max_{j \in K} d_j(k) \tag{4}$$

Zadanie jest teraz formułowane następująco:

Należy znaleźć wektor x opisujący układ źródeł, dla którego iloraz $t(x)/k(x)$ jest największy. Ponadto liczba użytych źródeł nie może przekraczać M i musi być spełniony warunek równomierności dawki w punktach T.

Wprowadzenie kryterium ilorazowego wydaje się dobrze uzasadnione praktycznie. Pozwala ono na uniknięcie pewnej patologii rozwiązań, na którą natknięto się przy próbach zastosowania jako funcji celu różnicy funkcji $k(x)-t(x)$, a także lepiej oddaje istotę problemu. W przyjętym sformułowaniu warunek równomierności dawki w punktach T jest zapisywany jako wymaganie, aby iloraz maksymalnej i minimalnej dawki w tych punktach nie przekroczył zadanej wielkości traktowanej jako parametr zadania.

Pełne sformułowanie problemu jako zadania programowania matematycznego jest teraz następujące:

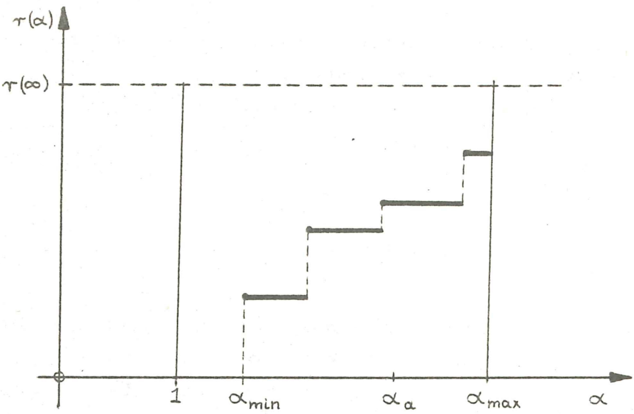
$$r(\alpha) = \max \frac{t}{k}$$

$$(*) \quad \begin{cases} t \le \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\, x_i \le \alpha\, t & \text{dla } j \in T & (5) \\ k \ge \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\, x_i & \text{dla } j \in K & (6) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le M & & (7) \\ t \ge t_{min}, \quad k \ge 0 & & (8) \\ x_i = 0 \text{ albo } 1 & \text{dla } i = 1,\dots,n & (9) \end{cases}$$

Zadanie (*) jest zadaniem programowania mieszanego z n zmiennymi binarnymi $x_i,\dots,x_n$ i dwoma zmiennymi ciągłymi t oraz k. Zauważmy, że w każdym rozwiązaniu optymalnym tego zadania przynajmniej jedno ograniczenie spośród ograniczeń (5) jest (lewostronnie) napięte i przynajmniej jedno ograniczenie spośród ograniczeń (6) jest napięte, a zatem t jest równe minimalnej dawce w punktach zbioru T, a k - maksymalnej dawce w punktach zbioru K. Parametr α występujący po prawej stronie nierówności (5) określa maksymalną nierównomierność rozkładu dawek w punktach T, a stała dodatnia t_{min} jest równa minimalnej wartości dawki, która musi być osiągnięta w punktach zbioru T.

Tak postawione zadanie (*) jest zadaniem dyskretnym z parametryzacją prawej strony ograniczeń. Pełnym rozwiązaniem takiego zadania byłoby podanie przebiegu funkcji $r(\alpha)$ dla całego interesującego przedziału $[1, \alpha_{max}]$ parametru α oraz odpowiednich wektorów x dla każdej wartości α z tego przedziału.

Funkcja $r(\alpha)$ jest funkcją schodkową. Typowy przebieg takiej funkcji jest pokazany na rys.1.



Rys. 1.

Liczba punktów, w których następuje skok wartości funkcji r, jest skończona, co wynika ze skończonej liczby różnych wektorów x. Dla $\alpha < \alpha_{min}$, gdzie $\alpha_{min} \geq 1$, zadanie (*) jest sprzeczne. Wyznaczenie pełnego przebiegu $r(\alpha)$ jest trudne do uzyskania przy pomocy istniejącego oprogramowania. Dlatego w przeprowadzonych obliczeniach zrezygnowano z obliczania pełnego parametrycznego rozwiązania zadania (*) i zadowolono się poszukiwaniem rozwiązań dla zadanej z góry wartości α_a, odpowiadającej akceptowanej nierównomierności dawek w zbiorze T. W dalszej części pracy będziemy przyjmować, że parametr α jest ustalony.

3. Rozwiązanie zadania programowania ilorazowego.

Literatura dotycząca rozwiązywania zadań programowania ilorazowego jest bardzo obszerna (patrz np. Schiable (1981)). Metody rozwiązywania zadań z ilorazową funkcją celu można podzielić na trzy grupy :

1° Rozwiązywanie zadań po dokonaniu transformacji do zadania równoważnego bez kryterium ilorazowego.

2° Rozwiązywanie zadania z ilorazową funkcją celu jako szczególnego zadania programowania nieliniowego.

3° Rozwiązywanie zadania parametrycznego związanego z problemem ilorazowym.

Nieco dokładniej omówimy trzecie podejście, ponieważ zostało ono zastosowane do zadania z punktu 2.
Rozważmy parę zadań (P) i (Q_λ) w następującej postaci

$$(P) \qquad \max_{x \in S} f(x)/g(x) \qquad (10)$$

$$(Q_\lambda) \qquad z(\lambda) = \max_{x \in S} \left(f(x) - \lambda g(x) \right) \qquad (11)$$

gdzie S jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, $g(x) > 0$ dla $x \in S$ oraz istnieje $x \in S$, dla którego $f(x) \geq 0$.
Zadanie (P) jest pierwotnym zadaniem programowania ilorazowego, natomiast zadanie (Q_λ) - związanym z nim zadaniem parametrycznym. Zauważmy, że jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są afiniczne, to (Q_λ) jest zadaniem z afiniczną funkcją celu.
Oznaczmy rozwiązanie optymalne zadania (P) symbolem x^*, to znaczy

$$x^* = \arg \max_{x \in S} f(x)/g(x) \qquad (12)$$

i niech

$$\lambda^* = f(x^*)/g(x^*) \qquad (13)$$

Zachodzą następujące znane związki między zadaniami (P) oraz (Q_λ) (patrz np. Jagannathan (1966), Dinkelbach (1967)) :

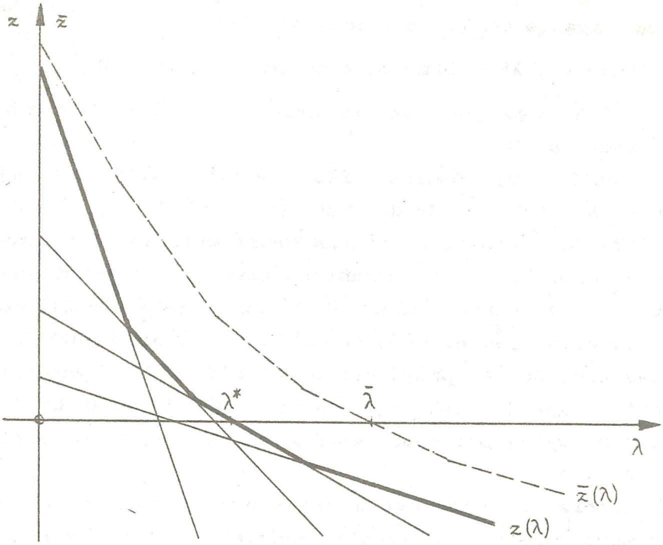
$$\begin{aligned} z(\lambda) > 0 &\iff \lambda < \lambda^* \\ z(\lambda) = 0 &\iff \lambda = \lambda^* \\ z(\lambda) < 0 &\iff \lambda > \lambda^* \end{aligned} \qquad (14)$$

a ponadto rozwiązanie optymalne zadania (Q_λ) jest równocześnie rozwiązaniem optymalnym zadania (P).
Rozwiązanie zadania (P) może więc być sprowadzone do rozwiązania równania

$$z(\lambda) = 0 \qquad (15)$$

i wyznaczenia dla λ spełniającego to równanie, rozwiązania zadania parametrycznego (Q_λ).

W rozważanym przypadku zadania (*) funkcje f i g są afiniczne i łatwo zauważyć, że $z(\lambda)$ jest odcinkowo-liniową wypukłą i ściśle malejącą funkcją dla $\lambda \geq 0$. Typowy przebieg funkcji z jest pokazany na rys.2. (linia ciągła gruba).



Rys. 2.

Na rys. 2. naszkicowano również linią przerywaną przebieg funkcji $\bar{z}(\lambda)$ będącej odpowiednikiem funkcji $z(\lambda)$ dla ciągłej relaksacji zadania (Q_λ), to znaczy - w przypadku rozważanego zadania (*) - dla sytuacji, gdy warunki binarności zmiennych (9) są zastąpione warunkami

$$0 \le x_i \le 1 \qquad \text{dla } i = 1,\dots,n \qquad (16)$$

Z faktu ,że mamy do czynienia z relaksacją zadania (Q_λ) wynika, że $\bar{z}(\lambda) \ge z(\lambda)$ oraz $\bar{\lambda} \ge \lambda$, gdzie $\bar{\lambda}$ jest rozwiązaniem równania $\bar{z}(\lambda) = 0$. Do rozwiązania tego równania może być użyta ta sama metoda , co w przypadku równania $z(\lambda) = 0$, z tym, że nakład obliczeń jest tu zwykle znacznie mniejszy, bowiem nie mamy tu do czynienia z zadaniem programowania dyskretnego.

W prowadzonych próbach do rozwiązywania powyższych równań była zastosowana metoda iteracyjna zaproponowana przez Dinkelbacha, która w tym konkretnym przypadku jest realizcją klasycznej metody Newtona.

Schemat postępowania jest następujący :

1° Wybierz $\lambda = \lambda^1$ (na przykład $\lambda^1 = \bar{\lambda}$).

2° Rozwiąż zadanie (Q_λ), to znaczy problem

$z(\lambda) = \max \{ t-\lambda k \mid$ przy ograniczeniach (5)..(9) $\}$ (17)

Niech $\bar{t}$, $\bar{k}$ będą wartościami zmiennych t, k w rozwiązaniu zadania (Q_λ).

3° Jeśli $z(\lambda) = 0$, wówczas STOP; w przeciwnym przypadku podstaw $\lambda = \bar{t}/\bar{k}$ i idź do kroku 2°.

Zadanie (17) jest zadaniem programowania mieszanego z liniową funkcją celu, liniowymi ograniczeniami, z dwoma zmiennymi ciągłymi i n zmiennymi binarnymi. Do rozwiązywania tego zadania stosowano pakiet programowania liniowego LINDO. Jako początkową wartość λ przyjmowano wartość $\bar{\lambda}$ otrzymywaną z rozwiązania ciągłej relaksacji zadania (*). Również tu stosowano podaną wyżej procedurę iteracyjną biorąc jako wartość początkową $\lambda = 1$.

Doświadczenia obliczeniowe z omawianymi zadaniami są dotychczas zbyt małe na wyciąganie bardziej ogólnych wniosków, tym niemniej wydaje się, że stosując powyższe podejście będzie można rozwiązywać praktyczne zadania w akceptowalnym czasie. Uzyskiwanie wartości $\bar{\lambda}$ wymagało kilku (2 do 4) iteracji, z których pierwsza pochłaniała na PC/AT kilkadziesiąt sekund, a następne były krótsze ze względu na to, że startowano z rozwiązania dopuszczalnego i dokonywano reoptymalizacji dla zadania ze zmienionym jednym współczynnikiem w funkcji celu. Liczba iteracji dla zadania dyskretnego była również niewielka , z tym, że każda trwała od kilku do kilkunastu minut. W tym przypadku nie było żadnych zysków z reoptymalizacji, poniaważ stosowany pakiet takimi możliwościami nie dysponuje.

4. Zakończenie.

Omawiane w pracy zadanie jest parametryczną wersją zadania dwukryteriowego w następującej postaci

$$\max\left(\frac{t(x)}{k(x)}, \frac{h(x)}{k(x)}\right)$$
$$\text{przy ograniczeniach (7),(8),(9)} \qquad (18)$$

gdzie $h(x) = \max \{ d_j(x) : j \in K \}$.

W niektórych zbliżonych zastosowaniach niezbędne jest wprowadzenie dodatkowego kryterium, które należy minimalizować, a którego wartość q dla danego $\bar{x}$ spełniającego ograniczenia zadania jest równa minimalnej liczbie linii prostych pokrywających punkty zbioru $X_1 = \{ i \in X : \bar{x}_i = 1 \}$. Wynika to z faktu, że w niektórych przypadkach źródła aktywne są wprowadzane do ciała pacjenta za pomocą specjalnych igieł. Ponieważ z wbiciem każdej igły wiąże się uszkodzenie zdrowych tkanek, wprowadzenie powyższego trzeciego kryterium zmierza do minimalizacji tych uszkodzeń. Wyznaczenie wartości q wiąże się z rozwiązaniem zadania pomocniczego z zakresu geometrii obliczeniowej, które w ogólnym przypadku jest trudne i znacznie komplikuje całe zagadnienie.

3. Literatura.

1. Dinkelbach W. (1967) On nonlinear factional programming Management Science, 13, 492-498.
2. Ibaraki T. (1983) Parametric approaches to fractional programming. Mathematical Programming, 26, 345-362.
3. Jagannathan R. (1966) On some properties of programming problems in parametric form pertaining to fractional programming. Management Science, 12, 609-615.
4. Renner W.D., Pugh N.O., Ross D.B., Berg R.E., Hall D.C. (1987) An algorithm for planning stereotactic brain implants. Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys., 13, 631 -637.
5. Schaible S. (1981) A survey of fractional programming. W : Generalized Concavity in Optimization and Economics. Academic Press, Inc., 417-472.

L I T E R A T U R A

(1) Crabill T. B., Gross D., Magazine M. J. (1977) A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues. Operations Res. Vol. 25, No. 2, pp. 219-232.

(2) Deb R. K., Serfozo R. F. (1973) Optimal Control of Batch Service Queues. Advances Appl. Probability 5, 340-361.

(3) [illegible] (1977) [illegible] Theory of Service [illegible]. [illegible], New York, 1970.

(4) [illegible] (1979) The Computation of Optimal Control in a Queue with Batch Service, Manag. Scie. 25 [illegible].

(5) Stanek S. (1984) [illegible], Praca doktorska, [illegible].

(6) Королюк В., Турбин А. (1976) Полумарковские процессы и их приложения, Киев.

(7) Schlee S. (1982) Systemy masowej obsługi [illegible] zastosowań [illegible] Przegląd Statystyczny XXIX, 3/4.

(8) Neuts M. (1967) A general class of bulk queues with Poisson input, Ann. Math. Stat. 38, 759-770.

(9) ______ (1979) Queues solvable without Rouché's theorem. Operations Res. 27.

(10) Wilson J. (1966) The ergodic queue length distributions for queueing systems with finite capacity. J. Roy. Stat. Soc. B28.

Zarząd

Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych

Prezes

prof.dr hab.inż. Andrzej Straszak
Instytut Badań Systemowych PAN

Wiceprezes

prof.dr hab.inż. Jan Stasierski
Wojskowa Akademia Techniczna

Wiceprezes

prof.dr hab.inż. Stanisław Piasecki
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz generalny

dr inż. Zbigniew Nahorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz

dr inż. Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Skarbnik

dr inż. Andrzej Kałuszko
Instytut Badań Systemowych PAN

Członkowie

prof.dr hab. Jerzy Kisielnicki
Wydział Zarządzania UW

doc.dr hab.inż. Bohdan Korzan
Wojskowa Akademia Techniczna

doc.dr hab.inż. Jan Stachowicz
Zakład Nauk Zarządzania PAN

doc.dr hab.inż. Maciej Sysło
Instytut Informatyki UWr.

Komisja rewizyjna

PRZEWODNICZĄCY

dr Władysław Świtalski
Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych UW

CZŁONKOWIE

dr inż. Janusz Kacprzyk
Instytut Badań Systemowych PAN

dr inż. Marek Malarski
Instytut Transportu PW

doc.dr hab.Henryk Sroka
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

dr inż. Leon Słomiński
Instytut Badań Systemowych PAN

PION III