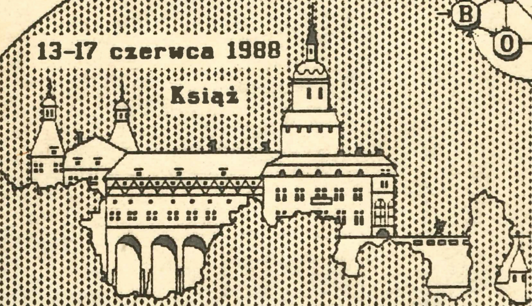
Redaktorzy:

A.Straszak
Z.Nahorski
J.Sikorski

13-17 czerwca 1988

Książ



1. Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Tom 1

BOS'88

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

TOM 1

OPTYMALIZACJA
METODY I ZASTOSOWANIA

I KRAJOWA KONFERENCJA

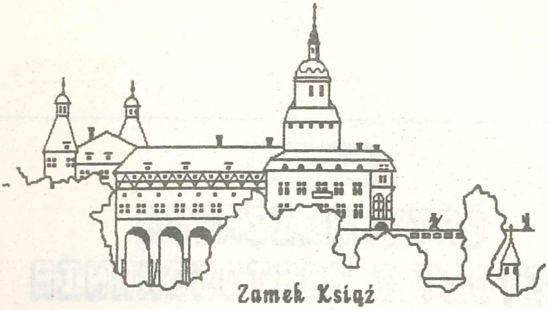
BADAŃ OPERACYJNYCH i SYSTEMOWYCH

Książ, 13 - 17 czerwca 1988

BOS'88

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH POLSKIEJ AKADEMII NAUK

1989
WARSZAWA



Zamek Książ

I Krajowa Konferencja Badań Operacyjnych i Systemowych

Organizator konferencji

Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych

przy współpracy

Instytutu Badań Systemowych PAN

Komitet naukowy konferencji

Jerzy Hołubiec, Andrzej Kałuszko, Jerzy Kisielnicki, Henryk Kowalowski, Roman Kulikowski, Franciszek Marecki, Zbigniew Nahorski, Stanisław Piasecki, Jarosław Sikorski, Jan Stachowicz, Jan Stasierski, Andrzej Straszak, Maciej Sysło, Władysław Świtalski

Redaktorzy naukowi materiałów

Andrzej Straszak, Zbigniew Nahorski, Jarosław Sikorski

3. Optymalizacja w transporcie

3.1

I Krajowa Konferencja
Badań Operacyjnych i Systemowych
Książ, 13 - 17 czerwca 1988r.

PRZEPŁYWY W SIECIACH POJEMNOŚCIOWYCH

Andrzej CHOJNACKI
Wydział Cybernetyki
Wojskowej Akademii Technicznej
01-489 Warszawa

W referacie przedstawiono podstawowe pojęcia i metody dotyczące szczególnego przypadku sieci formalnych, w których rozpatruje się przepływy dynamiczne przy pojemnościowych charakterystykach gałęzi. Podano definicje: sieci pojemnościowej, przepływu, przepływu maksymalnego oraz zaspokajającego. Omówiono niektóre metody wyznaczania przepływu maksymalnego dla przypadków szczególnych, zwracając uwagę na NP-zupełność problemu ogólnego. Przedstawiono ideę zastosowania odpowiednika dynamicznego sieci pojemnościowej do wyznaczania wszystkich przepływów maksymalnych. Sformułowano warunki wystarczające do tego, aby przepływ wyznaczony z wykorzystaniem metody potencjałów węzłowych był przepływem maksymalnym.

W literaturze zagadnienia przepływów w sieciach występują najczęściej w ujęciach, pozwalających na ich następującą interpretację:

- sieć formalna jest modelem sieci transportowej, w której przemieszczana jest materia, energia, informacja itp. z pewną intensywnością stałą w czasie przesyłania; modele takie rozpatrują np. Ford i Fulkerson (1962),

- sieć formalna jest modelem sieci transportowej, w której przesyłane są porcje materii, informacji itp., przy czym ustalone są czasy ich przemieszczania na gałęziach sieci, a kolejne porcje przesyłane mogą być w stałych odstępach czasu, model taki prezentuje Ford (1958),
- sieć formalna jest modelem sieci drogowej, po której poruszają się pojedyncze obiekty, przy czym ustalone są czasy ich przemieszczania się dla poszczególnych gałęzi i wierzchołków sieci; ruch każdego obiektu powoduje niedostępność pewnych elementów sieci dla ruchu innych obiektów; takie podejście przedstawiają Kaszubowski i inni (1970).

Przedstawione w referacie sieci pojemnościowe mogą z kolei mieć interpretację następującą:

- sieć formalna jest modelem sieci drogowej;
- poruszają się po niej obiekty punktowe;
- ustalone są minimalne czasy pokonywania gałęzi sieci przez te obiekty;
- gałąź sieci jest niedostępna dla innych obiektów wtedy, gdy znajduje się na niej (a niekoniecznie porusza) dowolny obiekt.

Rozważania przedstawione w referacie rozszerzone są w pracy Chojnackiego (1987), gdzie znajdują się dowody odpowiednich twierdzeń i uzasadnienia wniosków.

Kluczowym pojęciem w teorii przepływów w sieciach jest pojęcie przepustowości interpretowanej jako zdolność do przemieszczania materii, energii, informacji itp. w jednostkach czasu. Przez przyjęcie stałej przepustowości zakłada się więc jak gdyby stały (bez zahamowań) proces przemieszczania się określonego dobra. Własności takiej nie ma np. transport kolejowy, gdzie wzajemne uwarunkowania elementów sieci kolejowej mogą wymuszać zatrzymywanie się pociągów, gdy jakiś inny pociąg znajduje się na elemencie sieci kolejowej i niekoniecznie porusza. Elementy sieci kolejowej są scharakteryzowane ilością pociągów, które mogą na nich jednocześnie przebywać - są jak gdyby ustalone ich "pojemności". Sieć pojemnościowa jest to więc taka sieć, której elementy scharakteryzowane są pojemnościami określającymi ile maksymalnie obiektów może przebywać na tym elemencie. Można pokazać, że sieć pojemnościowa z dowolnymi pojemnościami dla potrzeb wyznaczania przepływów zastąpiona może być odpowiednią siecią z pojemnościami jednostkowymi. Do takich sieci ograniczymy się w niniejszym referacie. Rozpatrywać będziemy ruch obiektów po sieci między dwoma wyróżnionymi jej wierzchołkami.

Formalnie sić pojemnościowa jest to graf $G = \langle W,U,P \rangle$ */, w którym wyróżniono wierzchołek x^p zwany źródłem i wierzchołek x^k zwany odpływem oraz na gałęziach którego określona jest funkcja o wartościach naturalnych. Wartości tej funkcji nazwiemy czasami pokonywania gałęzi.

Przepływ w tak zdefiniowanej sieci pojemnościowej w przedziale czasu $[0,T]$ opisuje przemieszczanie się obiektów po gałęziach sieci od źródła do odpływu w tym przedziale czasu. Może być więc określony podaniem liczby N przemieszczających się obiektów, ich trasami i terminarzami. Trasa μ_n n-tego obiektu jest marszrutą skierowaną łączącą wierzchołki x^p oraz x^k , czyli

---

*/ wszystkie używane w referacie pojęcia z zakresu teorii grafów i sieci bazują na definicjach przedstawionych w pracy Korzana (1978r).

$$\mu_n = \langle x_n^0, u_n^1, x_n^1, \dots \dots, u_n^{l_n}, x_n^{l_n} \rangle$$

przy czym $x_n^0 = x^p$; $x_n^{l_n} = x^k$; $x_n^s \in W$ dla $s = \overline{0,l_n}$; $u_n^s \in U$ dla $s = \overline{1,l_n}$; $\langle x_n^{s-1}, u_n^s, x_n^s \rangle \in P$ dla $s = \overline{1,l_n}$.

Terminarz T_n n-tego obiektu jest to ciąg momentów "wejścia" tego obiektu na kolejne gałęzie marszruty:

$$T_n = \langle t_n^1 , t_n^2, \dots, t_n^{l_n} \rangle \text{ gdzie } t_n^s \in \mathcal{N} \cup \{0\}$$

Przepływ w sieci pojemnościowej S w przedziale $[0,T]$ będzie to więc zbiór pusty (gdy żadne obiekty nie przemieszczają się) lub zbiór

$$\{\langle \mu_1, T_1 \rangle, \langle \mu_2, T_2 \rangle, \dots \dots, \langle \mu_n, T_n \rangle\}$$

spełniający warunki fizycznej realizowalności:

$$t_n^{s+1} - t_n^s \geqslant \tau(u_n^s)$$

$$t_n^1 \geqslant 0$$

$$t_n^{l_n} + \tau(u_n^{l_n}) \leqslant T$$

oraz warunki nieprzekroczenia jednostkowej pojemności gałęzi:

$$[(u_n^s = u_m^q) \wedge (n \neq m)] \Rightarrow [(t_m^q \geqslant t_n^{s+1}) \vee (t_m^{q+1} \leqslant t_n^s)]$$

dla $n,m = \overline{1,N}$; $q = \overline{1,l_m}$; $s = \overline{1,l_n}$ przy czym $t_n^{l_n+1} = t_n^{l_n} + \tau(u_n^{l_n})$; $t_m^{l_m+1} = t_m^{l_m} + \tau(u_m^{l_m})$.

Wartością przepływu nazywamy liczność zbioru będącego przepływem, czyli ilość przemieszczających się obiektów. Przepływ o wartości maksymalnej w zbiorze wszystkich przepływów dla ustalonej sieci pojemnościowej i w ustalonym przedziale czasu nazywamy przepływem maksymalnym. Przepływ o zadanej wartości nazywamy przepływem zaspokajającym. Można pokazać, że przepływ maksymalny zawsze istnieje. Zadanie wyznaczania przepływu zaspokajającego można zastąpić odpowiednim zadaniem wyznaczania przepływu maksymalnego. Ograniczymy się więc do zadania wyznaczania przepływu maksymalnego.

Ogólny problem wyznaczania przepływu w sieci pojemnościowej sformułujemy następująco: czy dla danej sieci pojemnościowej S istnieje przepływ o wartości N w przedziale $[0,T]$? Można udowodnić, że problem ten jest NP-zupełny. Stąd wynika niecelowość poszukiwania wielomianowych algorytmów rozwiązywania zadania wyznaczania maksymalnego przepływu.

Jedna z metod rozwiązywania zadań planowania ruchu obiektów w sieci polega na zamianie sieci początkowej na jej tzw. odpowiednik dynamiczny. Metodę taką prezentuje np. Ford (1958). W miejsce każdego wierzchołka x wprowadzone zostają wierzchołki x(t) $(t = \overline{0,T})$. Dla grafów Berge'a łączy się wierzchołki x(t) oraz y(t') wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle x,y \rangle$ jest łukiem w grafie sieci pojemnościowej i $t' - t = \tau(x,y)$. Wyznaczony w odpowiedniku dynamicznym statyczny przepływ zero-jedynkowy odpowiada opisowi ruchu obiektów w sieci. Zawsze jednak istnieje wtedy taki statyczny przepływ maksymalny, że odpowiadający mu ruch obiektów przebiega "bez zahamowań", tzn. że obiekty w trakcie przemieszczania się nie muszą się zatrzymywać. Można pokazać, że ruch obiektów w sieci pojemnościowej nie ma takiej własności w przypadku ogólnym. Wynika to z faktu, że sieć pojemnościowa ma charakter sieci "z pamięcią", gdyż zajętość gałęzi przebywającym tam obiektem obejmuje więcej niż jedną jednostkę czasu. Odpowiednik dynamiczny sieci pojemnościowej musi więc zawierać łuki "przechowujące" informację od kiedy i jak długo obiekt przebywa na gałęzi. Zadanie wyznaczania maksymalnego zero-jedynkowego przepływu statycznego w takim odpowiedniku dynamicznym można sformułować jako zadanie binarnego programowania liniowego. Można udowodnić, że macierz ograniczeń takiego zadania nie jest w przypadku ogólnym całkowicie unimodularna. Stąd wynika, że z warunków binarności zmiennych zrezygnować nie można.

Odpowiednik dynamiczny sieci pojemnościowej możemy też wykorzystać w zadaniu wyznaczania wszystkich przepływów maksymalnych w danej sieci pojemnościowej i ustalonym przedziale czasu. Tworzymy graf zwykły, którego wierzchołkami są drogi prowadzące od odpowiedników źródła do odpowiedników odpływów. Krawędziami łączymy te pary dróg, które nie mogą jednocześnie odpowiadać ruchowi różnych obiektów. Można udowodnić, że każdemu najliczniejszemu zbiorowi wewnętrznie stabilnemu w tak utworzonym grafie odpowiada maksymalny przepływu w ustalonym przedziale czasu w danej sieci pojemnościowej. Stosując dowolny algorytm wyznaczania wszystkich najliczniejszych zbiorów wewnętrznie stabilnych otrzymamy więc wszystkie maksymalne przepływy w sieci pojemnościowej.

Zadanie wyznaczania maksymalnego przepływu w sieci pojemnościowej upraszcza się, gdy wszystkie czasy pokonywania gałęzi są identyczne. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że są one jednostkowe. Niech $\mathbb{U}(x,y)$ oznacza zbiór wszystkich gałęzi "łączących" wierzchołek x z wierzchołkiem y grafu G czyli $\mathbb{U}(x,y) = \{u \in U : \langle x,u,y\rangle \in P\}$. Rozpatrzmy sieć pomocniczą $\tilde{S}$, w której $\tilde{G} = \langle W,\tilde{U}\rangle$ jest grafem Berge'a, gdzie $\langle x,y\rangle \in \tilde{U} \Leftrightarrow \mathbb{U}(x,y) \neq \emptyset$. Na łukach grafu $\tilde{G}$ opisana jest funkcja $\tilde{\mu}$ o wartościach

$$\tilde{\mu}(x,y) = \overline{\overline{\mathbb{U}(x,y)}} .$$

W sieci $\tilde{S}$ metodą potencjałów wierzchołkowych wyznaczamy zero-jedynkowy przepływ $\tilde{f}$ maksymalizujący funkcjonał

$$E(\tilde{f}) = (T+1)\cdot \tilde{v} - \sum_{\langle x,y\rangle \in \tilde{U}} \tilde{f}(x,y),$$

gdzie $\tilde{v}$ jest wartością przepływu $\tilde{f}$. Na podstawie przepływu $\tilde{f}$ cechujemy jedynkami i zerami gałęzie grafu G w sposób następujący: jeżeli $\tilde{f}(x,y) = 1 > 0$, to 1 różnych gałęzi ze zbioru $U(x,y)$ cechujemy jedynką, a pozostałe zerem. Jeżeli $\tilde{f}(x,y) = 0$ to wszystkie gałęzie zbioru $U(x,y)$ cechujemy zerem. Zauważmy, że takie ocechowanie wyznacza zero-jedynkowy przepływ statyczny w grafie G z jednostkowymi przepustowościami. Na jego podstawie tworzymy $\tilde{v}$ rozłącznych parami dróg łączących źródło x^p z odpływem x^k:

$$\mathcal{V}^n = \langle i_n^0, u_n^1, i_n^1, \ldots \ldots, u_n^{l_n}, i_n^{l_n} \rangle$$

i takich, których cechy gałęzi są równe jedności. W takim razie

$$E(\tilde{f}) = (T+1)\cdot \tilde{v} - \sum_{n=1}^{\tilde{v}} l_n = \sum_{n=1}^{\tilde{v}} (T+1-l_n) = \sum_{n=1}^{\tilde{v}} r_n$$

Ford (1958) pokazał, że $r_n \geqslant 0$ dla $n = \overline{1,\tilde{v}}$. Jeżeli $r_n=0$, to modyfikujemy przepływ $\tilde{f}$ oraz ocechowanie gałęzi grafu G tak, aby otrzymać wyłącznie drogi $\mathcal{V}^n$ o długościach nie przekraczających T. Wartość $E(\tilde{f})$ nie ulegnie oczywiście zmianie. Każdej drodze $\mathcal{V}^n$ przyporządkowujemy r_n terminarzy w postaci

$$T_n^t = \langle t, t+1, t+2, \ldots \ldots, t+l_n \rangle \text{ dla } t = \overline{0, r_n-1}$$

Można teraz udowodnić, że zbiór wszystkich par $\langle \mathcal{V}^n, T_n^t \rangle$ jest przepływem maksymalnym w sieci pojemnościowej S w przedziale czasu $[0,T]$ o wartości $E(\tilde{f})$. Obiekty poruszające się w sposób opisany tym przepływem nie zatrzymują się, a ponadto sumaryczny czas ich przebywania w sieci jest minimalny.

W podobny sposób można wyznaczyć przepływ w sieci pojemnościowej, gdy wszystkie wartości $\tilde{\tau}(u)$ dla $u \in \mathbb{U}(x,y)$ są identyczne oraz wszystkie liczby

$$k(x,y) = \frac{\overline{\overline{U(x,y)}}}{\tau(u)} \quad (u \in \mathbb{U}(x,y))$$

są naturalne. Metodą potencjałów wierzchołkowych wyznaczamy w grafie $\tilde{G}$ przepływ $\bar{\bar{f}}$ maksymalizujący tym razem funkcjonał

$$E(f) = (T+1) \cdot v - \sum_{\langle x,y \rangle \in \tilde{U}} \tau(x,y) \cdot f(x,y)$$

traktując wartości funkcji k jako przepustowości łuków. Na podstawie przepływu $\bar{\bar{f}}$ wyznaczamy podobnie jak powyżej przepływ w sieci pojemnościowej o wartości $E(\bar{\bar{f}})$. Niech

$$r_n = T + 1 - \sum_{s=1}^{l_n} \tilde{\tau}(x_n^{s-1}, x_n^s).$$

Wartość $E(\bar{\bar{f}})$ można przedstawić w postaci

$$E(\bar{\bar{f}}) = \sum_{n=1}^{N} k_n \cdot r_n$$

Każdej drodze ϑ_n przyporządkowujemy $k_n \cdot r_n$ różnych par marszruta-terminarz, przy czym wśród nich występuje r_n różnych terminarzy "przesuniętych" względem siebie o jedną jednostkę czasu, a każdemu terminarzowi odpowiada k_n rozłącznych parami marszrut. Ruch obiektów przemieszczających się zgodnie z tym przepływem ma podobne własności jak w przypadku sieci pojemnościowej z identycznymi czasami przemieszczania się. Powstaje pytanie, czy tak wyznaczony przepływ jest przepływem maksymalnym w sieci pojemnościowej.

Okazuje się, że nie musi tak być. Warunkiem wystarczającym na to, aby ten przepływ był maksymalny jest istnienie funkcji $\alpha : W - \{0,1,..,T+1\}$ o następujących własnościach:

$\alpha(x^p) = 0, \quad \alpha(x^k) = T + 1$

$\alpha(y) - \alpha(x) \leq \tilde{\tau}(x,y) \Rightarrow \bar{f}(x,y) = 0$

$\alpha(y) - \alpha(x) > \tilde{\tau}(x,y) \Rightarrow \bar{f}(x,y) = k(x,y) \wedge \dfrac{\alpha(y) = \alpha(x)}{\tilde{\tau}(x,y)} \in \mathcal{N}$

Dla ustalonego przepływu $\bar{f}$ i acyklicznego w sensie dróg grafu $\tilde{G}$ w prosty sposób można sprawdzić spełnienie powyższego warunku.

Gdy $\tilde{G}$ nie jest grafem acyklicznym w sensie dróg, to możemy przyjąć procedurę polegającą na "rozrywaniu" wszystkich dróg cyklicznych. Wszystkie drogi cykliczne można wyznaczyć stosując np. algorytm Lejfmana wyznaczania wszystkich składowych silnej spójności w grafie $\tilde{G}$. Jeżeli funkcja α o postulowanych własnościach nie istnieje, to można pokazać, że dla dużych wartości T przepływ wyznaczony w opisany sposób jest dobrym przybliżeniem przepływu maksymalnego. Mówiąc ściśle graniczna intensywność tego przepływu

$$\lim_{T \to \infty} \frac{E(\bar{f})}{T}$$

jest równa wartości maksymalnego przepływu statycznego w sieci z grafem $\tilde{G}$ i przepustowościami określonymi funkcją k.

Występują też inne przypadki szczególne, w których w stosunkowo prosty sposób możemy wyznaczyć przepływ maksymalny w sieci pojemnościowej. Zachodzi to np. gdy $r_n = 1$ dla wszystkich n lub gdy długość każdej drogi w sieci pojemnościowej jest większa od

$$T - \min_u \tilde{\tau}(u)$$

Praktycznie więc możemy dla wyznaczenia rozwiązania suboptymalnego zadania maksymalizacji przepływów w sieci pojemnościowej zastosować odpowiednią kombinację różnych metod modyfikując etapowo sieć wyjściową tak, aby spełnić warunki potrzebne do zastosowania kolejnej metody. Po wyznaczeniu przepływu możemy porównać jego wartość z oszacowaniami górnymi. W przypadku równości otrzymany przepływ jest przepływem maksymalnym. Oszacowaniem górnym może być przykładowo iloczyn T i wartości maksymalnego przepływu statycznego w sieci, której graf jest identyczny z grafem sieci pojemnościowej, a przepustowości gałęzie są równe odwrotnościom czasów ich pokonywania.

Gdy różnica między oszacowaniem górnym a wartością otrzymanego przepływu jest niezadawalająco duża, to otrzymane rozwiązanie możemy poprawić metodą przeglądu bezpośredniego.

Literatura

1. Chojnacki A. (1987) Przepływy w sieciach pojemnościowych, WAT, Warszawa.

2. Ford L.R.Jr. (1958) Constructing Maximal Dinamic Flows from Static Flows. Operation Research, Nr 6

3. Ford L.R.Jr., Fulkerson D.R. (1962) Flows in Networks.Princeton Uniwersity Press

4. Kaszubowski Z., Mizera R., Piasecki S. (1970) Problemy przegrupowania wojsk. WAT, Warszawa

5. Korzan B. (1978) Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania. WNT

L I T E R A T U R A

(1) Crabill T. B., Gross D., Magazine M. J. (1977) A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queues. Operations Res. Vol. 25, No. 2, pp. 219-232.

(2) Deb R. K., Serfozo R. F. (1973) Optimal Control of Batch Service Queues. Advances Appl. Probability 5, 340-361.

(3) [illegible] (1979) [illegible] Service [illegible]. Ferguson [illegible], New York [illegible]

(4) [illegible] (1979) The Computation of Optimal Control of a Queue with Batch Service, Manag. Sci. 25 [illegible]

(5) Stanek S. (1984) [illegible], Praca doktorska, [illegible]

(6) Королюк В., Турбин А. (1976) Полумарковские процессы и их приложения. Киев.

(7) [illegible] (1982) [illegible] zastosowania [illegible] Przegląd [illegible]

(8) Neuts M. (1967) A general class of bulk queues with Poisson input. Ann. Math. Stat. 38, 759-770.

(9) ______ (1979) Queues solvable without Rouché's theorem. Operations Res. 27.

(10) Wilson J. (1966) The ergodic queue length distributions for queueing systems with finite capacity. J. Roy. Stat. Soc. B28.

Zarząd
Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych

Prezes
prof.dr hab.inż. Andrzej Straszak
Instytut Badań Systemowych PAN

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Jan Stasierski
Wojskowa Akademia Techniczna

Wiceprezes
prof.dr hab.inż. Stanisław Piasecki
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz generalny
dr inż. Zbigniew Nahorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Sekretarz
dr inż. Jarosław Sikorski
Instytut Badań Systemowych PAN

Skarbnik
dr inż. Andrzej Kałuszko
Instytut Badań Systemowych PAN

Członkowie
prof.dr hab. Jerzy Kisielnicki
Wydział Zarządzania UW

doc.dr hab.inż. Bohdan Korzan
Wojskowa Akademia Techniczna

doc.dr hab.inż. Jan Stachowicz
Zakład Nauk Zarządzania PAN

doc.dr hab.inż. Maciej Sysło
Instytut Informatyki UWr.

Komisja rewizyjna
PRZEWODNICZĄCY

dr Władysław Świtalski
Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych UW

CZŁONKOWIE

dr inż. Janusz Kacprzyk
Instytut Badań Systemowych PAN

dr inż. Marek Malarski
Instytut Transportu PW

doc.dr hab.Henryk Sroka
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

dr inż. Leon Słomiński
Instytut Badań Systemowych PAN

PION III