



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

STANISŁAW PIASECKI

**ELEMENTY TEORII NIEZAWODNOŚCI
I EKSPLOATACJI OBIEKTÓW
O ELEMENTACH WIELOSTANOWYCH**

dla inżynierów

Warszawa 1995

**ELEMENTY TEORII NIEZAWODNOŚCI
I EKSPLOATACJI OBIEKTÓW
O ELEMENTACH WIELOSTANOWYCH**

dla inżynierów

STANISŁAW PIASECKI

Warszawa 1995

11
12
13
14
15

16
17

O NIEZAWODNOŚCI ELEMENTU

Przypomnijmy podstawowe założenia klasycznej, dwustanowej teorii niezawodności. Opiera się ona o pojęcie prawdopodobieństwa przejścia ze stanu "0" do stanu "1" lub przeciwnie, przy tym prawdopodobieństwo przejścia ze stanu "0" do stanu "1" nazywamy prawdopodobieństwem uszkodzenia. Wielkość tę oznaczamy symbolem $P_{ij}(t, \tau)$ i odczytujemy jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i = 0, 1$, w jakim znajdował się element w chwili t do stanu $j = 0, 1$ po upływie czasu τ (w chwili $t + \tau$). Przedział $(0, t)$ jest dotychczasowym czasem pracy elementu. Dla elementu nowego mamy $t = 0$. Jeżeli proces uszkodzeń jest procesem jednorodnym w czasie, to wartość $P_{ij}(t, \tau)$ nie zależy od t , co w skrócie zapisujemy w postaci $P_{ij}(\tau)$ i interpretujemy jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j po upływie czasu τ .

W tym miejscu teoria niezawodności styka się z teorią odnowy i teorią masowej obsługi. W klasycznej teorii niezawodności przyjmuje się bowiem, że elementy są nieanaprawialne, to znaczy $p_{10}(t, \tau) = 0$. W odróżnieniu od powyższego, w teorii masowej obsługi przejście ze stanu $i = 1$ do stanu $j = 0$ jest możliwe i następuje po pewnym czasie zwanym czasem obsługi. Zdarzeniu nazywanym w teorii niezawodności uszkodzeniem, w teorii masowej obsługi odpowiada zdarzenie polegające na zgłoszeniu klienta do obsługi. Z kolei, zdarzenie przeciwne w teorii masowej obsługi jest nazywane zakończeniem obsługi.

Teoria odnowy zakłada także możliwości przejścia ze stanu $i = 1$ do stanu $j = 0$ nazywając to zdarzenie odnową, z tym zastrzeżeniem, że klasyczna teoria odnowy zakłada, iż jest to zdarzenie natychmiastowe, tak że zdarzenie uszkodzenia pociąga za sobą natychmiastowe zdarzenie odnowienia. Próby rozszerzenia zastosowań teorii odnowy prowadzą do uwzględnienia faktu, że odnowa nie występuje natychmiast i wtedy różnica między teorią odnowy a teorią masowej obsługi sprowadza się do jednego, lecz istotnego faktu. W teorii masowej obsługi uwzględnia się skończone możliwości systemu obsługi, a więc że system obsługi nie może jednocześnie odnawiać nieskończenie wiele zgłoszeń.

Wracając do klasycznej teorii niezawodności wiemy, że będą nas interesowały dwie wielkości: $p_{01}(t, \tau)$ oraz $p_{00}(t, \tau) = 1 - p_{01}(t, \tau)$, ponieważ $p_{10}(t, \tau) = 0$ i $p_{11}(t, \tau) = 1$. Charakterystyczną cechą procesów teorii niezawodności jest więc to, że rozpatrujemy je przy warunku początkowym *element nieuszkodzony* (stan $i = 0$).

Ważną charakterystyką procesu uszkodzeń jest *szybkość narastania* wartości $p_{01}(t, \tau)$ w zależności od wzrostu τ . Wielkość tę nazywamy *intensywnością uszkodzeń*, oznaczamy symbolem $\lambda_{01}(t)$ oraz definiujemy następująco:

$$\lambda_{01}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(t, \tau) - p_{01}(t, 0)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} p_{01}(t, \tau) \Big|_{\tau = 0}$$

Definiuje się także intensywność przeciwną

$$\lambda_{00}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{00}(t, \tau) - p_{00}(t, 0)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} p_{00}(t, \tau) \Big|_{\tau=0}$$

Zauważmy, że biorąc pod uwagę warunki początkowe

$$p_{01}(t, 0) = 0$$

$$p_{00}(t, 0) = 1$$

możemy także napisać:

$$\lambda_{01}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(t, \tau)}{\tau}$$

$$\lambda_{00}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{00}(t, \tau) - 1}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-p_{01}(t, \tau)}{\tau} = -\lambda_{01}(t)$$

Z ostatniej równości wynika:

$$\lambda_{01}(t) + \lambda_{00}(t) = 0$$

co jest odpowiednikiem równości:

$$p_{01}(t) + p_{00}(t) = 1$$

Ponieważ, jak wiemy, proces uszkodzeń jest procesem Markowa, więc dla procesu dwustanowego ogólne równania Kolmogorowa będą miały postać:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{01}(t, \tau) = p_{00}(t, \tau) \cdot \lambda_{01}(t+\tau) + p_{01}(t, \tau) \cdot \lambda_{10}(t+\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{00}(t, \tau) = p_{00}(t, \tau) \cdot \lambda_{00}(t+\tau) + p_{01}(t, \tau) \cdot \lambda_{10}(t+\tau)$$

Ponieważ $\lambda_{10}(t) = \lambda_{11}(t) = 0$, to układ równań sprowadza się do dwóch (zależnych) równań różniczkowych.

Rozwiązując drugie równanie z określonym poprzednio warunkiem początkowym otrzymamy:

$$p_{00}(t, \tau) = \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda_{01}(u) du \right\} ,$$

a stąd

$$p_{01}(t, \tau) = 1 - p_{00}(t, \tau) = 1 - \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda_{01}(u) du \right\} .$$

Wielkość $p_{01}(t, \tau)$ nazywamy *funkcją niezawodności* i oznaczamy symbolem $R(t, \tau)$. Wartość $R(t, \tau)$ jest prawdopodobieństwem, że w odcinku czasu $[t, t+\tau]$ nie nastąpi uszkodzenie (oczywiście, jeżeli element w chwili t był nieuszkodzony).

Wielkość $p_{01}(t, \tau)$ nazywamy *prawdopodobieństwem uszkodzenia* i oznaczamy ją zwykle symbolem $F(t, \tau)$. Wartość $F(t, \tau)$ jest prawdopodobieństwem uszkodzenia elementu w odcinku czasu $(t, t+\tau)$ (oczywiście, w chwili t nieuszkodzonego).

Między wielkościami $R(t, \tau)$ i $F(t, \tau)$ zachodzą oczywiste związki:

$$R(t, \tau) = 1 - F(t, \tau)$$

oraz

$$\frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} = -f(t, \tau); \quad \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = f(t, \tau)$$

Jeżeli proces uszkodzeń jest jednorodny w czasie, to funkcje $\lambda_{01}(t)$ oraz $\lambda_{00}(t)$ oznaczamy często symbolami $\lambda_1(t) = \lambda$ i $\lambda_0(t) = -\lambda$. Są one funkcjami stałymi, a więc liczbami. W takim przypadku proces uszkodzeń elementu scharakteryzowany jest jedną liczbą λ .

Zwróćmy uwagę na to, że każda dystrybuanta uszkodzeń $F(t, \tau)$ jest w pełni zdefiniowana funkcją $\lambda(t)$, gdyż

$$f(t, \tau) = 1 - \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda(u) du \right\}$$

Przebieg funkcji $f(0, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(0, \tau)$; $R(0, \tau)$ oraz $\lambda(t)$ dla rozkładu logarytmo-normalnego i Weibulla są pokazane na rys. 1 i 2.

O NIEZAWODNOŚCI SYSTEMU

Rozpatrzmy system składający się z dwóch elementów A i B. Jak wiemy z klasycznej teorii niezawodności, w takim przypadku mogą występować tylko dwie sensowne struktury niezawodnościowe:

równoległa: system jest uszkodzony (w stanie 1) wtedy i tylko wtedy kiedy obydwa elementy są uszkodzone, a więc gdy para elementów jest w stanie $(1, 1)$.

szeregowa: system jest zdalny (w stanie 0) wtedy i tylko wtedy kiedy obydwa elementy są nieuszkodzone, a więc gdy para elementów jest w stanie (0,0).

Znając więc niezawodność elementów i rodzaj struktury (równoległa czy szeregową) możemy wyznaczyć niezawodność systemu. Dla struktury:

- równoległej

$$F(\tau) = P_{01}^A(\tau) \cdot P_{01}^B(\tau)$$

oraz

$$R(\tau) = 1 - F(\tau) = 1 - P_{01}^A(\tau) \cdot P_{01}^B(\tau)$$

- szeregowej

$$R(\tau) = P_{00}^A(\tau) \cdot P_{00}^B(\tau)$$

oraz

$$F(\tau) = 1 - R(\tau) = 1 - P_{00}^A(\tau) \cdot P_{00}^B(\tau)$$

W szczególności, jeżeli

$$P_{01}^A(\tau) = F^A(\tau) = 1 - e^{-\lambda^A \cdot \tau}$$

$$P_{01}^B(\tau) = F^B(\tau) = 1 - e^{-\lambda^B \cdot \tau}$$

to otrzymamy dla struktury

- równoległej

$$F(t) = \left(1 - e^{-\lambda^A \cdot \tau}\right) \left(1 - e^{-\lambda^B \cdot \tau}\right) = \left(1 - e^{-\lambda \cdot \tau}\right)^2 \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \tau}\right)^2 \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

- szeregowej

$$R(\tau) = e^{-(\lambda^A + \lambda^B) \cdot \tau} = e^{-2\lambda \tau} \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

$$F(\tau) = 1 - R(\tau) = 1 - e^{-2\lambda\tau}$$

$$\text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

Jednakże tak proste rozważania wystarczą tylko w tym przypadku gdy uszkodzenia elementów są od siebie całkowicie niezależne. Jest to założenie w wielu przypadkach niemożliwe do przyjęcia. Wtedy niezbędnym staje się aparat procesów wielostanowych. Oczywiście, także niezbędna jest znajomość struktury uwarunkowań procesu uszkodzeń poszczególnych elementów. Fizycznie, uszkodzenie elementu może zależeć od stanu innych współpracujących elementów. Może się zdarzyć także sytuacja, że uszkodzenie elementów zależy od czynnika zewnętrznego: stresu. W takim przypadku czynnik zewnętrzny należy włączyć jako dodatkowy element systemu sprowadzając ten przypadek do poprzedniego, gdy uszkodzenie jednego elementu zależy od stanu innego (lub innych).

Przykładem zależności uszkodzeń jest praca dwóch elementów na wspólne obciążenie (np. dwóch prądnic). Wtedy uszkodzenie jednego z nich powoduje, że drugi musi przyjąć na siebie całość obciążenia, co oczywiście zwiększa możliwość jego uszkodzenia.

Oznaczmy symbolem $p_{00,1}^A(t,\tau)$ prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu A (przejście w stan $j = 1$) po czasie τ , jeżeli w chwili t obydwa elementy (A, B) były zdadne w stanie (0, 0). Podobnie $p_{01,1}^A(t,\tau)$ odczytujemy jako prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu A po czasie τ , jeżeli w chwili t element B był uszkodzony, zaś element A - nieuszkodzony.

W przypadku uszkodzeń zależnych mamy:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) \neq p_{01,1}^A(t,\tau)$$

natomiast dla uszkodzeń niezależnych:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) = p_{01,1}^A(t,\tau)$$

co umożliwia nam uproszczenie oznaczeń według następującej zasady:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) = p_{01,1}^A(t,\tau) = p_{0,1}^A(t,\tau)$$

W rezultacie, dla dwóch elementów możemy wyróżnić następujące cztery sensowne struktury uwarunkowań:

1. Uszkodzenie elementu A nie zależy od stanu B i przeciwnie - uszkodzenie B nie zależy od stanu A).
2. Uszkodzenie elementu A zależy od stanu elementu B, lecz uszkodzenie elementu B nie zależy od stanu elementu A.
3. Uszkodzenie elementu B zależy od stanu elementu A, lecz uszkodzenie elementu A nie zależy od stanu elementu B,
4. Uszkodzenie elementu A zależy od stanu elementu B i podobnie - B zależy od A.

Jeżeli system składa się z większej liczby elementów, to możliwe przypadki struktury uwarunkowań mogą być bardzo skomplikowane.

Przyjmując, przykładowo, czwartą strukturę uwarunkowań i szeregową strukturę niezawodności, otrzymamy:

$$P_{00,00}(t,\tau) = P_{00,0}^A(t,\tau) \cdot P_{00,0}^B(t,\tau) = R(t,\tau)$$

Zauważmy, że w przypadku gdy struktura niezawodnościowa systemu jest szeregową, nieważna jest struktura uwarunkowań. Prawdopodobieństwo uszkodzenia takiego systemu nie zależy od tego, czy uszkodzenia są zależne czy też nie. Dotyczy to każdego systemu szeregowego, niezależnie od liczby jego elementów.

Wracając do naszego przykładu systemu o strukturze równoległej i zależnych uszkodzeniach, zauważmy że wtedy dla wyznaczenia wartości

$$P_{00,11}(t,\tau) = F(t,\tau)$$

potrzebna jest znajomość zależności:

$$P_{00,10}(t,\tau) = P_{00,1}^A(t,\tau) \cdot P_{00,0}^B(t,\tau)$$

$$P_{10,11}(t,\tau) = P_{10,1}^A(t,\tau) \cdot P_{10,1}^B(t,\tau) = P_{10,1}^B \quad \text{gdyż } P_{10,1}^A(t,\tau) = 1$$

oraz

$$P_{00,01}(t,\tau) = P_{00,0}^A(t,\tau) \cdot P_{00,1}^B(t,\tau)$$

$$P_{01,11}(t,\tau) = P_{01,1}^A(t,\tau) \cdot P_{01,1}^B(t,\tau) = P_{01,1}^A(t,\tau) \quad \text{gdyż } P_{01,1}^B(t,\tau) = 1$$

Procedurą wyznaczania wartości $F(t,\tau)$ dla takiego przypadku zajmiemy się nieco dalej. Obecnie zwróćmy uwagę, że dla opisu zachowania się dwuelementowego równoległego systemu, przy zależnych uszkodzeniach, konieczna i wystarczająca jest znajomość czterech funkcji:

$$P_{00,01}(t,\tau) ; P_{00,1}^B(t,\tau) ;$$

$$P_{01,1}^A(t,\tau) ; P_{10,1}^B(t,\tau) ;$$

lub odpowiednio funkcji intensywności:

$$\lambda_{00,1}^A(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_{00,1}^B(t) = \alpha^B(t)$$

$$\lambda_{01,1}^A(t) = \beta^A(t)$$

$$\lambda_{10,1}^B(t) = \beta^B(t)$$

Jeśli natomiast uszkodzenia są niezależne, to do opisu wystarcza znajomość tylko dwóch funkcji

$$P_{01}^A(t,\tau)$$

$$P_{01}^B(t,\tau)$$

lub odpowiednio funkcji

$$\lambda_0^A(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_0^B(t) = \alpha^B(t)$$

Jeżeli zaś procesy uszkodzeń są jednorodne w czasie, to - odpowiednio czterech liczb: α^A , α^B , β^A , β^B (dla uszkodzeń zależnych) lub dwóch liczb α^A , α^B (dla uszkodzeń niezależnych).

Celem wyznaczenia wartości $F(t, \tau)$ dla takiego dwuelementowego systemu, widoczną staje się potrzeba wyróżnienia czterech stanów: (0,0); (0,1); (1,0) i (1,1) o intensywnościach przejścia:

$$\lambda_{00,10}(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_{00,01}(t) = \alpha^B(t)$$

$$\lambda_{01,11}(t) = \beta^A(t)$$

$$\lambda_{10,11}(t) = \beta^B(t)$$

przy czym

$$\alpha^A(t) \leq \beta^A(t);$$

$$\alpha^B(t) \leq \beta^B(t).$$

Jednakże trudności opisu procesu uszkodzeń systemu składającego się z dwóch fizycznych elementów komplikują się dalej, jeżeli zwrócimy uwagę, że uszkodzenia mogą być różnego rodzaju. Jednocześnie zauważmy, że jeżeli celem naszych wysiłków jest podniesienie niezawodności wyrobów, to istotną jest dla nas informacja o rodzaju uszkodzenia, a nie tylko stwierdzenia faktu, że nastąpiło uszkodzenie. Wynika to z tego, że znając rodzaj uszkodzenia możemy znaleźć przyczynę uszkodzenia, a ta informacja pozwala na przedsięwzięcie odpowiednich zabiegów technologicznych celem usunięcia przyczyn powstawania uszkodzeń. W rezultacie, praktycznie zawsze podczas badań niezawodności, mamy do czynienia z wieloma stanami - jednym stanem zdatności i wieloma, różniącymi się rodzajem uszkodzeń, stanami niezdatności. W rezultacie, w wyniku badań otrzymujemy oszacowanie wielu funkcji intensywności przejścia $\lambda_1(t)$; $\lambda_2(t)$; $\lambda_3(t)$... ze stanu zdatności (0) do poszczególnych rodzajów stanów niezdatności 1, 2, 3, Przy tym, w wielu przypadkach proste sumowanie tych intensywności dla wyznaczenia intensywności uszkodzeń w ogóle nie ma sensu.

Sytuację taką przedstawia nam następujący przykład:

PRZYKŁAD I. O NIEZAWODNOŚCI I STRUKTURZE NIEZAWODNOŚCIOWEJ SYSTEMU DWUELEMENTOWEGO

Żałómy, że prostownik, przekształcający prąd przemienny na prąd stały składa się z dwóch szeregowo połączonych ogniw półprzewodnikowych, które wraz z kondensatorami i dławikami tworzą układ prostowniczy. Układ ten jest w małym stopniu obciążony, natomiast pracuje pod dużym napięciem (jak, na przykład, w układzie zasilania lampy kineskopowej w odbiorniku telewizyjnym). W celu

zwiększenia niezawodności układu, połączono szeregowo dwa wspomniane ogniwa półprzewodnikowe A i B obniżając w ten sposób dwukrotnie napięcie pracy każdego z nich.

Jeżeli symbolem $\lambda(v)$ oznaczamy zmierzoną laboratoryjnie intensywność uszkodzenia ogniwa, która jest zależna od napięcia pracy v , to opisany sposób podwyższenia niezawodności zasilania ma tylko wtedy sens gdy zachodzi nierówność:

$$\lambda(v) > 2 \cdot \lambda\left(\frac{v}{2}\right)$$

gdzie: v - jest napięciem pracy prostownika. Załóżmy, że równość ta jest spełniona.

W celu uproszczenia zapisu dalej będziemy stosowali oznaczenia

$$\lambda(v) = \alpha \quad \lambda\left(\frac{v}{2}\right) = \beta$$

Ponieważ połączenie ogniw jest szeregowo, więc funkcja niezawodności $R(t)$ prostownika (pomijając uszkodzenia innych elementów) będzie wyrażała się wzorem:

$$R(t) = P_{00,00}(t) = P_{00,0}^A(t) \cdot P_{00,0}^B(t) = e^{-2\beta t}$$

i to niezależnie od tego czy uszkodzenia ogniw są zależne, czy też nie.

Jednakże zagadnienie określenia struktury niezawodnościowej komplikuje się, gdy zwrócimy uwagę, że uszkodzenia ogniw półprzewodnikowych mogą być dwójakiego rodzaju, bowiem intensywność uszkodzeń $\lambda(v)$ w rzeczywistości jest sumą dwóch składników:

$\lambda_1(v)$ - intensywności uszkodzeń polegających na zniszczeniu (przebicciu) warstwy izolacyjnej półprzewodnika, co prowadzi do zwarcia ogniwa,

$\lambda_2(v)$ - intensywności uszkodzeń polegających na całkowitej utracie zdolności przewodzenia co prowadzi do powstania przerwy w obwodzie ogniwa.

Przy tym, oczywiście:

$$\lambda(v) = \lambda_1(v) + \lambda_2(v)$$

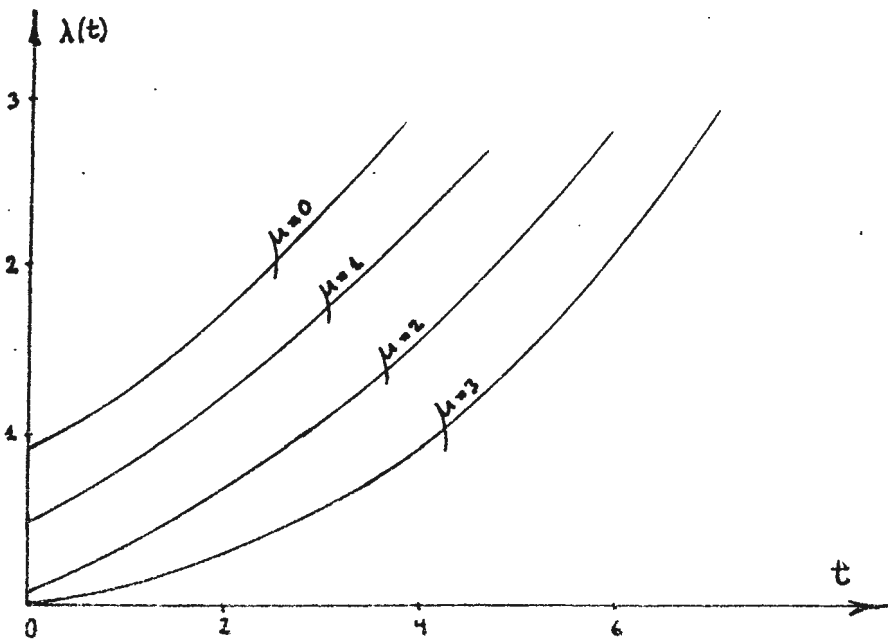
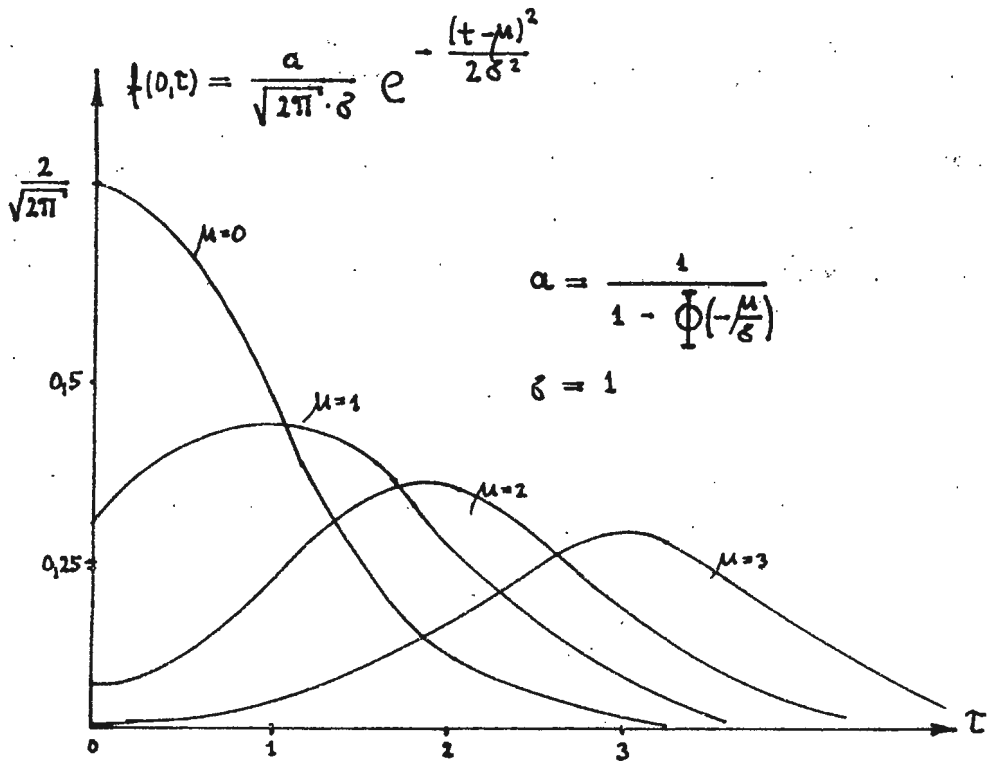
Jeżeli będziemy rozpatrywali tylko pierwszą składową (zakładając, że druga składowa jest pomijalnie mała), to niezawodnościowa struktura układu jest równoległa. Jeżeli ponadto nie uwzględnimy, że wartość λ_1 zależy od v , a więc jeżeli założymy, że

$$\lambda_1(v) = \alpha_1 = \text{const.}$$

to przy niezależnych uszkodzeniach ogniw otrzymamy funkcję niezawodności układu o postaci:

$$R(t) = 1 - P_{00,11}(t) = 1 - \left[1 - P_{00}^A(t)\right] \cdot \left[1 - P_{00}^B(t)\right] = 1 - \left(1 - e^{-\alpha_1 t}\right)^2$$

Założmy obecnie, że wartość λ_1 zależy od v , tak jak to jest w rzeczywistości. Wtedy nie możemy już przyjąć, że uszkodzenia są niezależne, gdyż uszkodzenie



Rys.1 Uciety rozkład normalny

ogniwa zależy od tego, czy drugie ogniwo jest uszkodzone (wtedy pracuje pod napięciem v), czy też nie (wtedy pracuje pod napięciem $\frac{v}{2}$).

Aby wyznaczyć $R(t)$ gdy $\lambda_2 \approx 0$, a więc dla struktury równoległej, należy zauważyć, że uszkodzenie układu prostowniczego jest określone sumą następujących elementarnych, wzajemnie wykluczających się zdarzeń.

- że w chwili τ ($0 < \tau \leq t$) uszkodzi się jedno z dwóch ogniw (i żadne nie uszkodziło się do tej chwili), a następnie, że w pozostałym odcinku czasu (τ, t) uszkodziło się pozostałe ogniwo.

Prawdopodobieństwo takiego, elementarnego zdarzenia jest równe:

$$2\beta_1 \cdot e^{-2\beta_1\tau} \cdot \left[1 - e^{-\alpha_1 \cdot (t-\tau)} \right] d\tau$$

Sumując elementarne prawdopodobieństwa w odcinku czasu od $\tau = 0$ do $\tau = t$ i odejmując od jedności otrzymamy:

$$R(t) = 1 - 2\beta_1 \int_0^t e^{-2\beta_1\tau} \left[1 - e^{-\alpha_1(t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= \frac{\alpha_1 e^{-2\beta_1 t} - 2\beta_1 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1 - 2\beta_1}$$

Zauważmy, że gdy podstawiamy

$$\alpha_1 = \beta_1 = \lambda_1$$

to otrzymamy poprzedni wzór na wartość $R(t)$, gdy uszkodzenia były niezależne. Pozostaje jednak dalej problem, co zrobić, gdy obie składowe (λ_1 oraz λ_2) są współmierne? Jaka jest struktura niezawodnościowa prostownika - szeregowy czy równoległy?

Przeanalizujemy ten przypadek. Początkowo określimy zbiór elementarnych zdarzeń, wzajemnie wykluczających się, które powodują uszkodzenia prostownika. Zauważmy, że w tym przypadku mamy dwa rodzaje uszkodzeń.

Pierwszego rodzaju zdarzeniem będzie występowanie przerwy w którymkolwiek z ogniw przed wystąpieniem zwarcia. Drugiego rodzaju zdarzenie to wystąpienie zwarcia w którymkolwiek ogniwie przed wystąpieniem przerwy, a następnie wystąpienie zwarcia lub przerwy w pozostałym ogniwie.

Prawdopodobieństwo elementarnego zdarzenia pierwszego rodzaju, jeżeli przerwa wystąpiła dokładnie w chwili τ , będzie równe:

$$2\beta_2 e^{-2\beta_2\tau} e^{-2\beta_1 t}$$

Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia pierwszego rodzaju będzie równe wartości wyrażenia:

$$2\beta_2 \int_0^t e^{-2(\beta_1 + \beta_2)\tau} d\tau = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \left[1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} \right]$$

Zdarzenie drugiego rodzaju składa się z dwóch kolejnych zdarzeń elementarnych:

- zwarcia jednego z ogniw w chwili τ przy czym $0 < \tau \leq t$

oraz

- zwarcia lub przerwy drugiego ogniwa w chwili x przy czym $\tau < x \leq t$.

Prawdopodobieństwo drugiego w kolejności zdarzenia elementarnego jest równe:

$$\alpha_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(x - t)} dx + \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(x - \tau)} dx$$

Stąd, całkując po x otrzymamy prawdopodobieństwo drugiego w kolejności zdarzenia

$$1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)}$$

Jest to prawdopodobieństwo, że w odcinku czasu $(t - \tau)$ nastąpi uszkodzenie pozostałego ogniwa, bądź z powodu zwarcia, bądź przerwy. Ostatecznie prawdopodobieństwo elementarnego zdarzenia drugiego rodzaju będzie określone wyrażeniem:

$$2\beta_1 e^{-2(\beta_1 + \beta_2)\tau} \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right] d\tau$$

Całkując to wyrażenie względem τ otrzymamy:

$$\beta_1 \frac{1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t}}{\beta_1 + \beta_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2}$$

Sumując prawdopodobieństwo zdarzeń pierwszego i drugiego rodzaju oraz odejmując tę sumę od jedności, otrzymamy następującą postać funkcji niezawodności.

$$R(t) = e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - 2\beta_1 \frac{e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2}$$

W przypadku gdy $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ otrzymamy wzór poprzedni. Jeżeli dodatkowo $\alpha_1 = \beta_1 = \text{const.}$, to otrzymamy znany wzór dla struktury równoległej i niezależnych uszkodzeń. W przypadku gdy $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ otrzymamy znany wzór dla struktury szeregowej.

Rozważmy teraz przypadek, gdy celem zwiększenia niezawodności prostownika połączono równolegle dwa ogniwa półprzewodnikowe A i B. Ponieważ obciążenie prądowe prostownika wysokiego napięcia jest niewielkie, to chociaż prądowe obciążenie każdego z dwóch ogniw zmniejszyło się dwukrotnie, to nie wpłynęło to znacząco na zmianę ich niezawodności. Załóżmy, że w przybliżeniu niezawodność każdego z nich nie zmieniła się. Przyjmijmy, tak jak poprzednio, że występują uszkodzenia ogniwo dwójakiego rodzaju - typu zwarcie lub przerwa.

Zauważmy, że - podobnie jak poprzednio - w przypadku uszkodzenia typu przerwa, jak również w przypadku uszkodzenia typu zwarcie, prawdopodobieństwo takiego uszkodzenia elementarnego będzie równe:

$$2\alpha_1 e^{-2\alpha_1 \tau} + 2\alpha_2 e^{-2\alpha_2 \tau} dt$$

Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia typu zwarcie będzie równe:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right]$$

Dla elementarnego, podwójnego zdarzenia typu przerwa, a następnie zwarcie lub przerwa, prawdopodobieństwo takiego zdarzenia będzie równe:

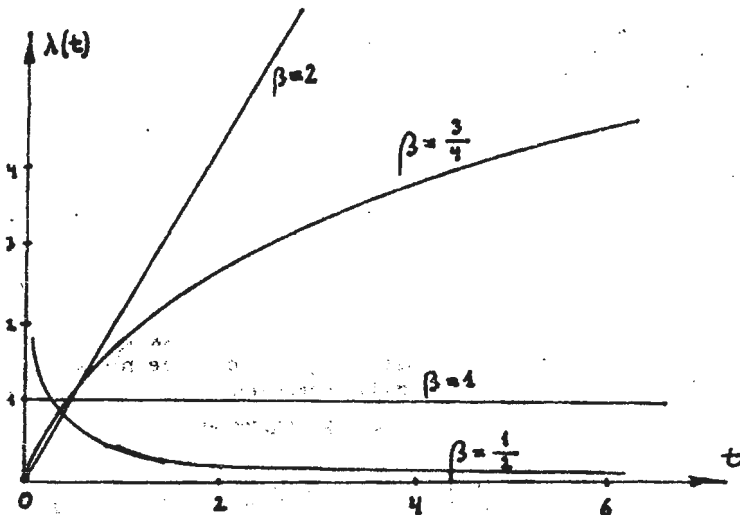
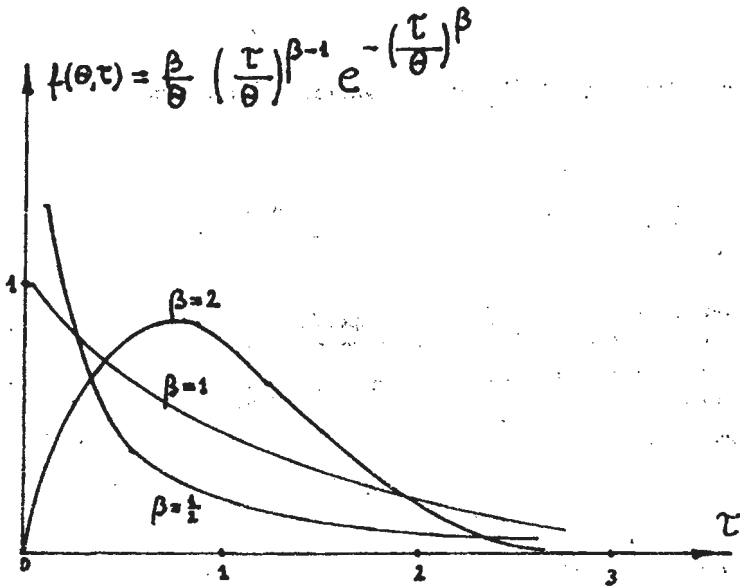
$$2\alpha_2 e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right] dt$$

Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia typu przerwa będzie równe:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right]$$

Odejmując sumę prawdopodobieństw obu typów uszkodzeń od jedności otrzymamy funkcję niezawodności takiego układu:

$$R(t) = \frac{e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[2\alpha_2 - (\alpha_2 - \alpha_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right]$$



Rys.2 Rozkład Weibulla

Zauważmy, że w przypadku gdy $\alpha_2 = 0$ otrzymamy funkcję niezawodności dla układu szeregowego:

$$R(t) = e^{-2\alpha_1 t}$$

choć ogólnie są połączone równolegle. Przeciwnie, jeżeli $\alpha_1 = 0$, to otrzymamy:

$$R(t) = 2e^{-\alpha_2 t} - e^{-2\alpha_2 t} = 1 - [1 - e^{-\alpha_2 t}]^2$$

Można także zauważyć, że taki sposób zwiększania niezawodności układu ma sens tylko wtedy, kiedy zachodzi nierówność $\alpha_1 < \alpha_2$.

To, który z tych dwóch sposobów zwiększania niezawodności układu należy wybrać zależy od stosunku wartości α_1 , α_2 , $2\beta_1$, $2\beta_2$. Decyduje o tym porównanie wartości dwóch wyrażeń:

$$R(t) = e^{-2\beta_1 t} - \frac{e^{-2\beta_1 t} - e^{-at}}{a - 2\beta_1}, \quad a - 2\beta_1 > 0$$

dla szeregowo połączonych ogniw oraz

$$R(t) = \frac{e^{-at}}{a} [2\alpha - ae^{-at}], \quad \alpha_1 < \alpha_2$$

dla równolegle połączonych ogniw, przy tym:

$$a = \alpha_1 + \alpha_2$$

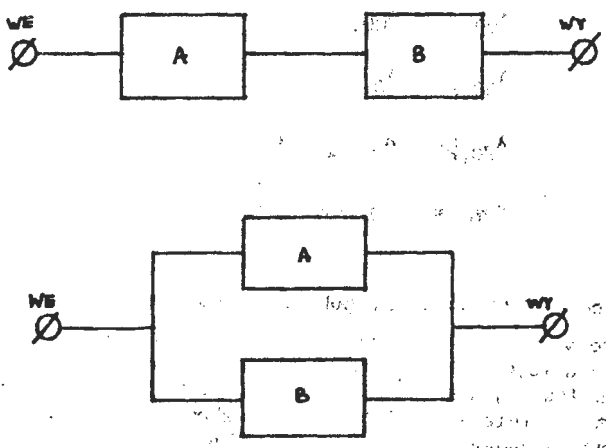
$$b = \beta_1 + \beta_2$$

Rozważony przykład poucza nas, jak wielką lekkomyślnością jest traktowanie różnych uszkodzeń jako uszkodzeń w ogólności i że nie ma sensu suma intensywności $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ różnego rodzaju uszkodzeń.

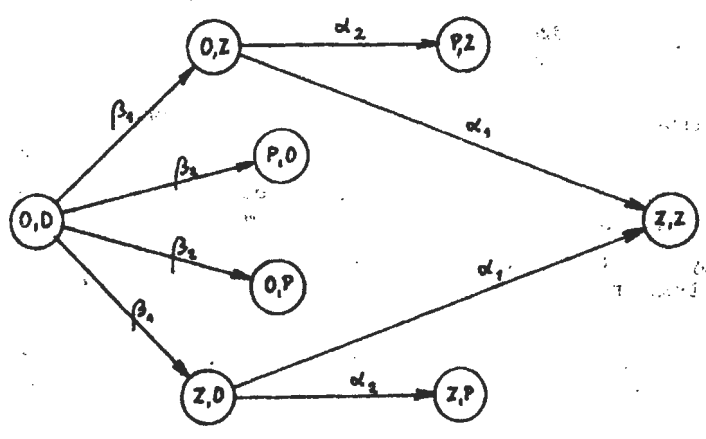
KONIEC PRZYKŁADU

Z przykładu wynika, że istnieje wyraźna zależność struktury niezawodnościowej nie tylko od budowy układu, ale także od rodzaju rozpatrywanego uszkodzenia. W przypadku gdy występują różnego rodzaju (pod względem fizycznym) uszkodzenia, pojęcie struktury niezawodnościowej staje się nieprzydatne. W takich sytuacjach zmuszeni jesteśmy do analizy bardzo złożonych zdarzeń, co znakomicie powiększa możliwość popełnienia pomyłki. Ułatwieniem w takich przypadkach jest rozszerzenie zbioru rozpatrywanych stanów.

Oznaczając symbolem Z - zwarcie, a symbolem P - przerwę, w przypadku szeregowego połączenia prostowników należałoby wyróżnić następujące stany: (0,0) - pełnej zdatności, (Z,0) i (0,Z) - niepełnej zdatności oraz (Z,P); (Z,Z); (P,0)



Rys.3 "Szeregowa" a) oraz "równoległa" struktura niezawodnościowa systemu (obiekту) dwuelementowego



Rys.4 Struktura procesu uszkodzeń dwuelementowego prostownika o szeregowej strukturze niezawodnościowej

1 (0,P) - niezdatności. Intensywności przejścia byłyby równe:

$$\lambda_{00,Z0} = \lambda_{00,OZ} = \beta_1$$

$$\lambda_{00,PO} = \lambda_{00,OP} = \beta_2$$

$$\lambda_{Z0,ZZ} = \lambda_{OZ,ZZ} = \alpha_1$$

$$\lambda_{Z0,ZP} = \lambda_{OZ,PZ} = \alpha_2$$

Struktura takiego procesu uszkodzeń jest pokazana na rys. 4.

Następnie należy rozwiązać zadanie polegające na wyznaczeniu prawdopodobieństw przejść ze stanu (0,0) do poszczególnych interesujących nas stanów. Zauważmy przy tym, że takie przedstawienie procesu umożliwia nam wyznaczenie prawdopodobieństwa szczególnie niebezpiecznego uszkodzenia - zwarcia całego układu. Będzie ono równe prawdopodobieństwu osiągnięcia stanu ZZ.

STRUKTURA SYSTEMU I PROCESU

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na konieczność ścisłego odróżnienia:

- struktury procesu uszkodzeń (rys. 4) oraz
- struktury niezawodnościowej systemu (rys. 3)

W strukturze procesu

- elementami struktury są stany obiektu fizycznego (systemu)

natomiast

- relacjami wiążącymi te stany są możliwości (procesy) przejścia (ze stanu na stan) wyrażone ilościowo intensywnościami lub prawdopodobieństwami przejścia.

W strukturze systemu (obiektu) fizycznego.

- elementami struktury są fizyczne elementy (składniki) systemu (obiektu)

natomiast

- relacjami wiążącymi te elementy są możliwości przepływu czynnika wiążącego je w całość (zwykle jest nim prąd elektryczny, ciecz lub inne czynniki).

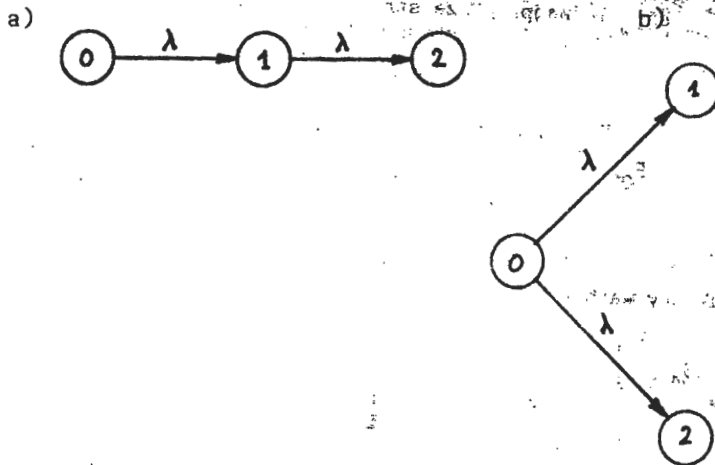
W ostatnim przypadku uszkodzenie równoznaczne jest z przerwaniem możliwości przepływu czynnika z wejścia do wyjścia.

Różnicę między tymi pojęciami pokażemy na najprostszym przykładzie systemu dwuelementowego oraz procesu o dwóch relacjach.

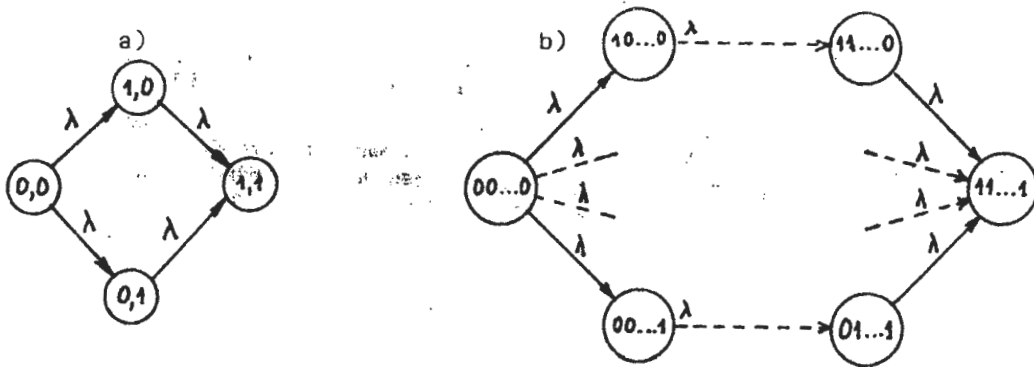
Na rys. 3 mamy pokazane dwie struktury systemu: a) szeregową i b) równoległą.

Jak wiemy, jeśli intensywności uszkodzeń są równe, to dla przypadku a) mamy

$$F(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$$



Rys.5 Struktura a) "łańcuchowa" oraz b) "wachlarzowa" procesu uszkodzeń



Rys.6 Struktura procesu uszkodzeń dla: a) systemu dwuelementowego b) systemu wieloelementowego o strukturze równoległej

oraz

$$f(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^2$$

dla przypadku b) i niezależnych uszkodzeniach.

Dla struktury szeregowej relacjami są pary: (WE,A) (A,B) (B,WY).

Dla struktury równoległej relacjami są pary: (WE,A) (WE,B), (A,WY) (B,WY).

Na rysunku 5 pokazane są dwie najprostsze struktury procesu uszkodzeń. Na rys.

5a struktura łańcuchowa, na rys. 5b struktura typu wachlarz.

Dla struktury łańcuchowej:

$$P_{02}(t) = F(t) = 1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}$$

natomiast dla struktury wachlarzowej mamy:

$$P_{01}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}] \quad P_{02}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}]$$

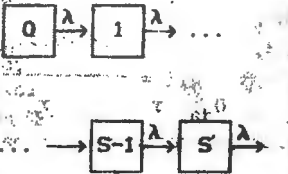
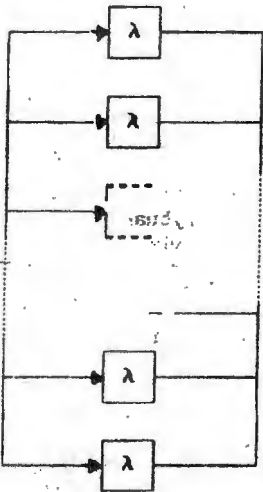
Przyjmując, że obiekt jest uszkodzony jeżeli jest w stanie: 1 lub 2 otrzymamy

$$F(t) = P_{01}(t) + P_{02}(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$$

Dla struktury łańcuchowej relacjami są pary: (0,1) (1,2), a dla wachlarzowej - pary: (0,1) (0,2).

Zauważmy, że o ile dystrybuanta $F(t)$ czasu poprawnej pracy do uszkodzenia jest taka sama dla systemu szeregowego oraz procesu wachlarzowego, to nie zachodzi takie podobieństwo dla systemu równoległego i procesu łańcuchowego.

TABLICA I

Rozkład Erlanga	Rozkład potęgowo-wykładniczy
$m = \frac{S}{\lambda}$	$m = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$
$\sigma^2 = \frac{S}{\lambda^2}$	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n^3(n-1)!} - \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \right]$
$\Lambda(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{S-1}}{(S-1)! \sum_{s=0}^{S-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!}}$	$\Lambda(t) = N\lambda e^{-\lambda t} \frac{[1 - e^{-\lambda t}]^{N-1}}{1 - [1 - e^{-\lambda t}]^N}$
	
$\Lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt} F(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)}$	
$\int_0^t \Lambda(x) dx = - \int_0^t \frac{\frac{d}{dx} R(x)}{R(x)} dx = - \ln R(t)$	
$R(t) = 1 - F(t)$	

Weźmy dla przykładu system N-elementowy o strukturze równoległej i niezależnych uszkodzeniach, dla którego dystrybuanta ma postać rozkładu potęgowo-wykładniczego

$$F(t) = [F_1(t)]^N$$

gdzie $F_1(t)$ - dystrybuanta pojedynczego elementu.

W przypadku gdy

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

otrzymamy

$$F(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^N$$

Podobnie weźmy proces łańcuchowy składający się z S podprocesów o stanach $s = 0, 1, 2, \dots, S$. Wtedy dystrybuanta dla końcowego stanu S będzie miała postać rozkładu Erlanga

$$P_{OS}(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!}$$

Jeżeli intensywności przejścia mają te same wartości λ , a dystrybuanta czasu każdego podprocesu ma postać wykładniczą. Pełniejszą charakterystykę tych rozkładów znajdzie Czytelnik w TABELI I i na rys. 7.

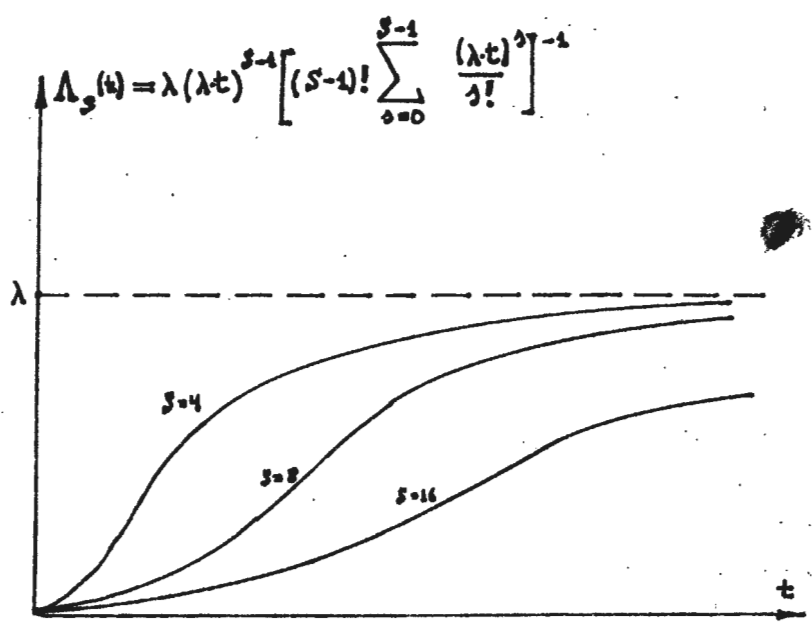
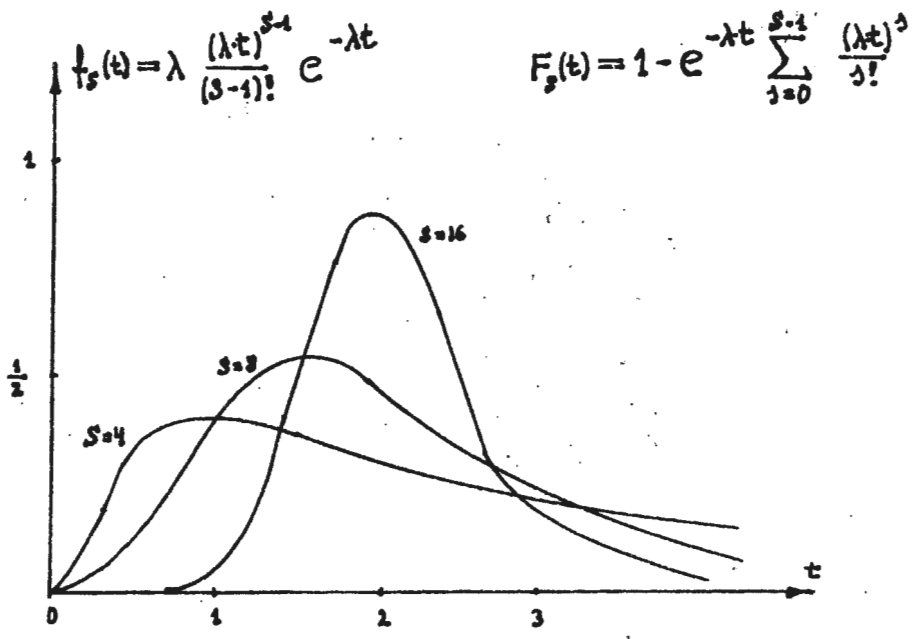
Dystrybuanty te są różne, gdyż mechanizmy procesu uszkodzeń są różne. Zwróćmy uwagę na to, że w systemie o strukturze równoległej zakłada się, że wszystkie elementy rozpoczynają swoją pracę z chwilą rozpoczęcia pracy systemu. System jest uszkodzony, jeżeli wszystkie elementy się uszkodzą. Jeżeli więc symbolami τ_n oznaczylibyśmy losowy czas pracy elementu $n = 1, 2 \dots N$ do chwili uszkodzenia, to czas pracy systemu do chwili uszkodzenia byłby określony wyrażeniem

$$\tau = \max \tau_n$$

W procesie łańcuchowym mechanizm jest inny. Tam każdy ze składowych procesów rozpoczyna się, gdy skończy się poprzedni (to znaczy, gdy proces osiągnie odpowiedni stan zapoczątkowujący następane przejścia). W tym więc przypadku dystrybuanta $F(t)$ jest rozkładem wielkości

$$\tau = \sum_{s=0}^{S-1} \tau_{s,s+1}$$

gdzie $\tau_{s,s+1}$ jest czasem przejścia ze stanu s do stanu s + 1.



Rys.7 Rozkład Erlanga

Można zadać pytanie: Jaka struktura procesu uszkodzeń odpowiada mechanizmowi uszkodzeń w systemie o strukturze równoległej? Na rys. 6 znaleźliśmy odpowiedź na to pytanie, gdzie pary (a,b) określają stan z rys. 3 elementu A - "a" oraz elementu B - "b", przy tym a,b = 0 - element nieuszkodzony, a,b = 1 - uszkodzony.

O POJĘCIU STANU OBIEKTU

Pod pojęciem stanu obiektu będziemy rozumieli jego stan fizyczny określony wartościami odpowiednich wielkości fizycznych. W przypadku przeliczalnego zbioru stanów przez stan o numerze $s = 0, 1, 2 \dots$ S rozumiemy pewien zbiór wartości tych wielkości fizycznych. Jeżeli obiekt jest w stanie s oznacza to, że zmierzone wartości wielkości fizycznych mieszczą się w granicach jakie wyznacza nam zbiór definiujący stan s.

Niekiedy stan fizyczny obiektu nie może być bezpośrednio zidentyfikowany ze względu na trudności pomiarowe. W takich przypadkach możemy rozszerzać pojęcie stanu uciekając się do następującej konstrukcji myślowej. Mianowicie, bardzo często możemy założyć, że między stanem fizycznym obiektu a jego dotychczasowym *napracowaniem* τ (liczonym w godzinach pracy lub przebytych kilometrach lub liczbie zdarzeń lub ... itd) istnieje dość ścisły związek. Ponieważ *napracowanie* obiektu może być łatwo obserwowane i mierzone, to możemy uznać, że pomiar wartości τ może zastąpić właściwą identyfikację stanu fizycznego.

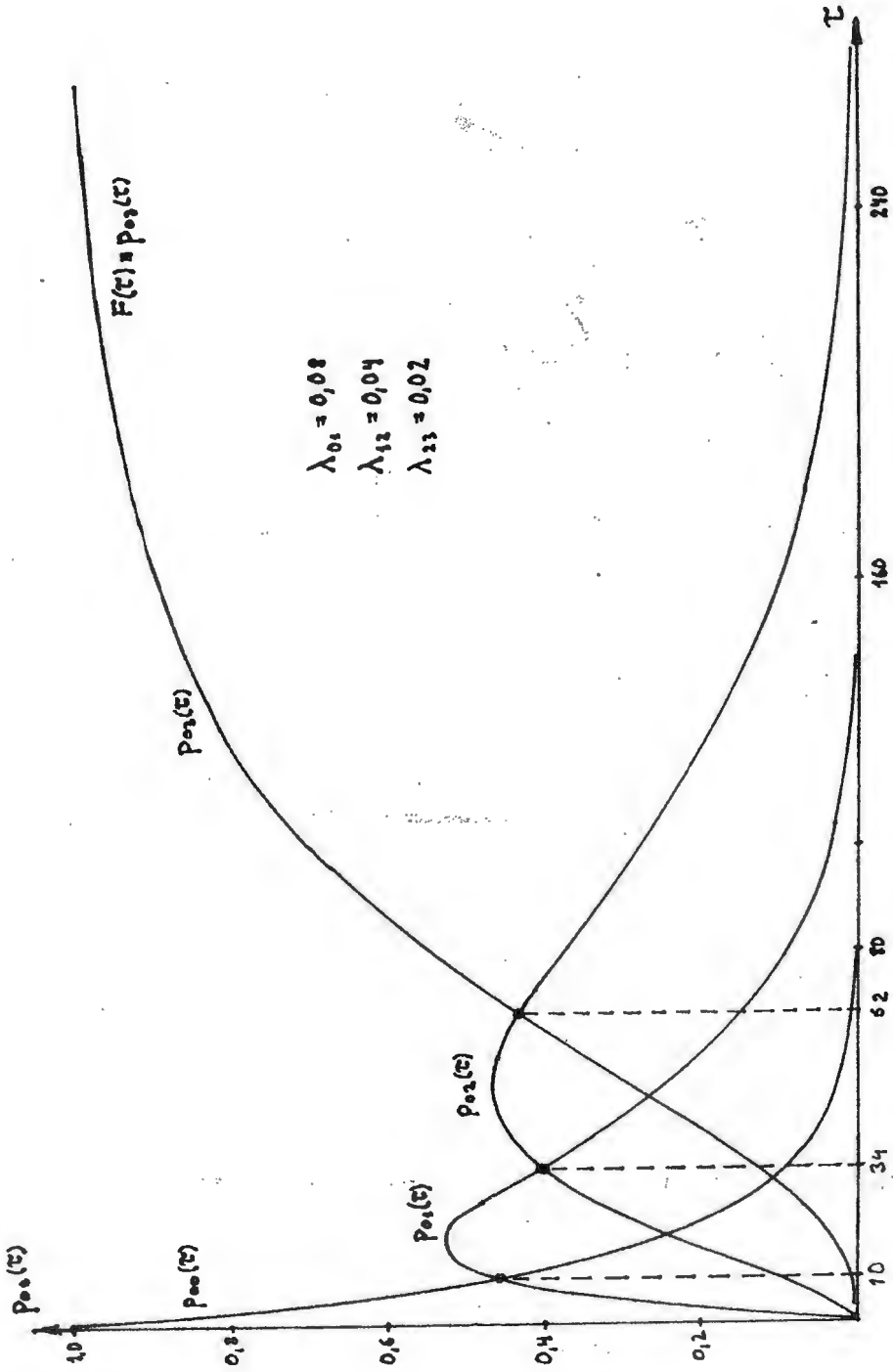
W ten sposób zakładamy istnienie i znajomość funkcji $s(\tau)$ określającej stan obiektu na podstawie jego *napracowania*. Przykład określania takiej funkcji jest pokazany na rys. 8. Mamy na nim wykresy wartości: $P_{00}(\tau)$; $P_{01}(\tau)$; $P_{02}(\tau)$ oraz $P_{03}(\tau)$ dla procesu łańcuchowego, w którym intensywności λ_{01} , $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{2,3}$ mają interpretacje intensywności wzrostu luzu na wale na godzinę pracy obiektu, zaś stany określone są minimalnym i maksymalnym luzem na wale w danej klasie. Ponieważ faktyczne zużycie i wzrost luzu na wale jest wielkością losową, więc wyznaczone zakresy godzin pracy odpowiadające poszczególnym stanom będą tylko pewnym statystycznym przybliżeniem funkcji $s(\tau)$. Wyznaczając punkty krytyczne rozgraniczające obszary na zasadzie równych prawdopodobieństw otrzymamy z rys. 8 następujące przyporządkowania

$S = 0$	$0 \leq \tau < 10$
$S = 1$	$10 \leq \tau < 34$
$S = 2$	$34 \leq \tau < 62$
$S = 3$	$62 \leq \tau$

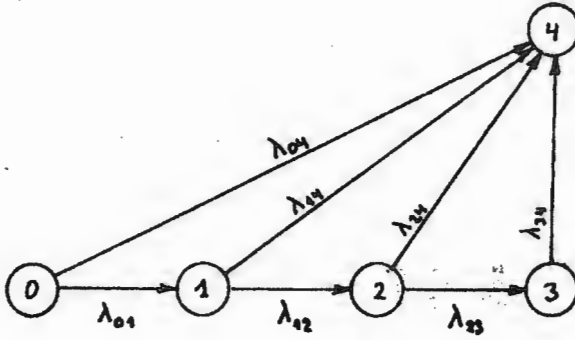
Znając funkcję $s(\tau)$ możemy następnie skonstruować graf procesu uszkodzeń. Mianowicie, oznaczając w naszym przykładzie symbolem $S = 4$ stan uszkodzenia obiektu możemy przyporządkować intensywności nagłych uszkodzeń λ_{04} , $\lambda_{1,4}$, $\lambda_{2,4}$, $\lambda_{3,4}$ zależne od stanu fizycznego obiektu w sposób widoczny na rysunku 9.

Zwróćmy uwagę na intensywności λ_{01} , λ_{12} i λ_{23} . Określają one proces losowy narastania luzu, a stany: 0, 1, 2, 3 są stanami sprawności (malejącej). Natomiast intensywności λ_{04} , λ_{14} , λ_{24} , λ_{34} określają intensywności uszkodzeń nagłych, w tym przypadku pęknięcia łożyska. Oczywiście, zachodzi nierówność $\lambda_{04} < \lambda_{14} < \lambda_{24} < \lambda_{34}$ - wraz z pogorszeniem się stanu rośnie możliwość pęknięcia.

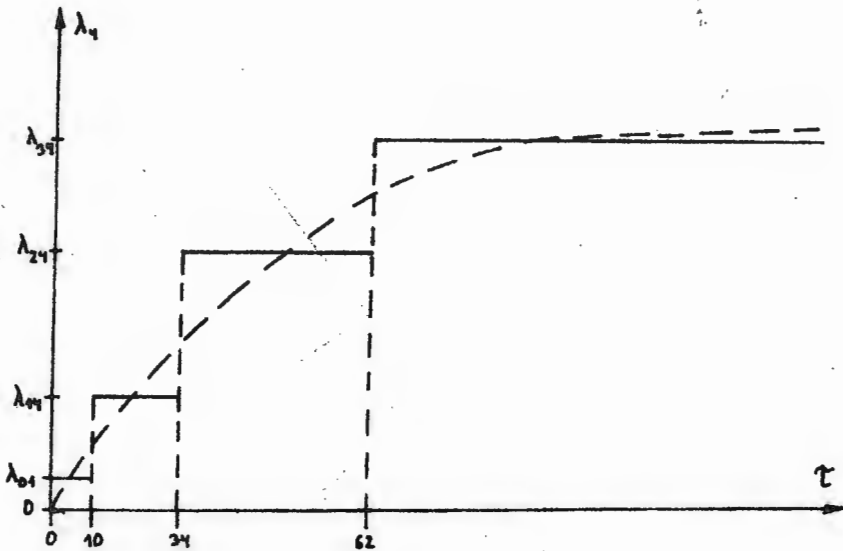
Zauważmy następnie, że ponieważ każdemu stanowi przyporządkowaliśmy odpowiedni odcinek czasu pracy τ , to tym samym przyporządkowaliśmy w postaci funkcji schodkowej wartości λ każdemu zakresowi wartości τ (patrz rys. 10).



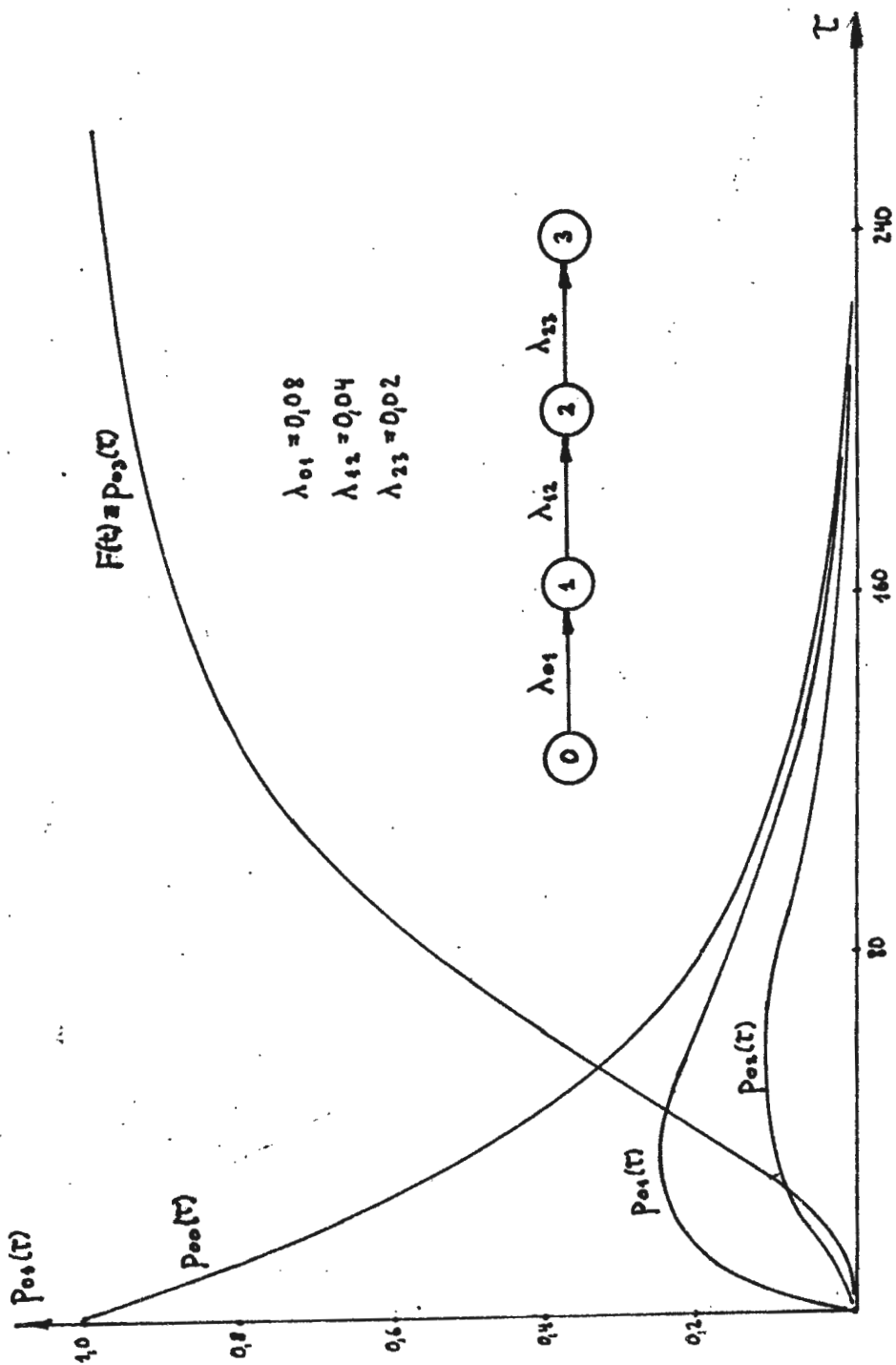
Rys. 8 Wyznaczenie funkcji $S(\tau)$



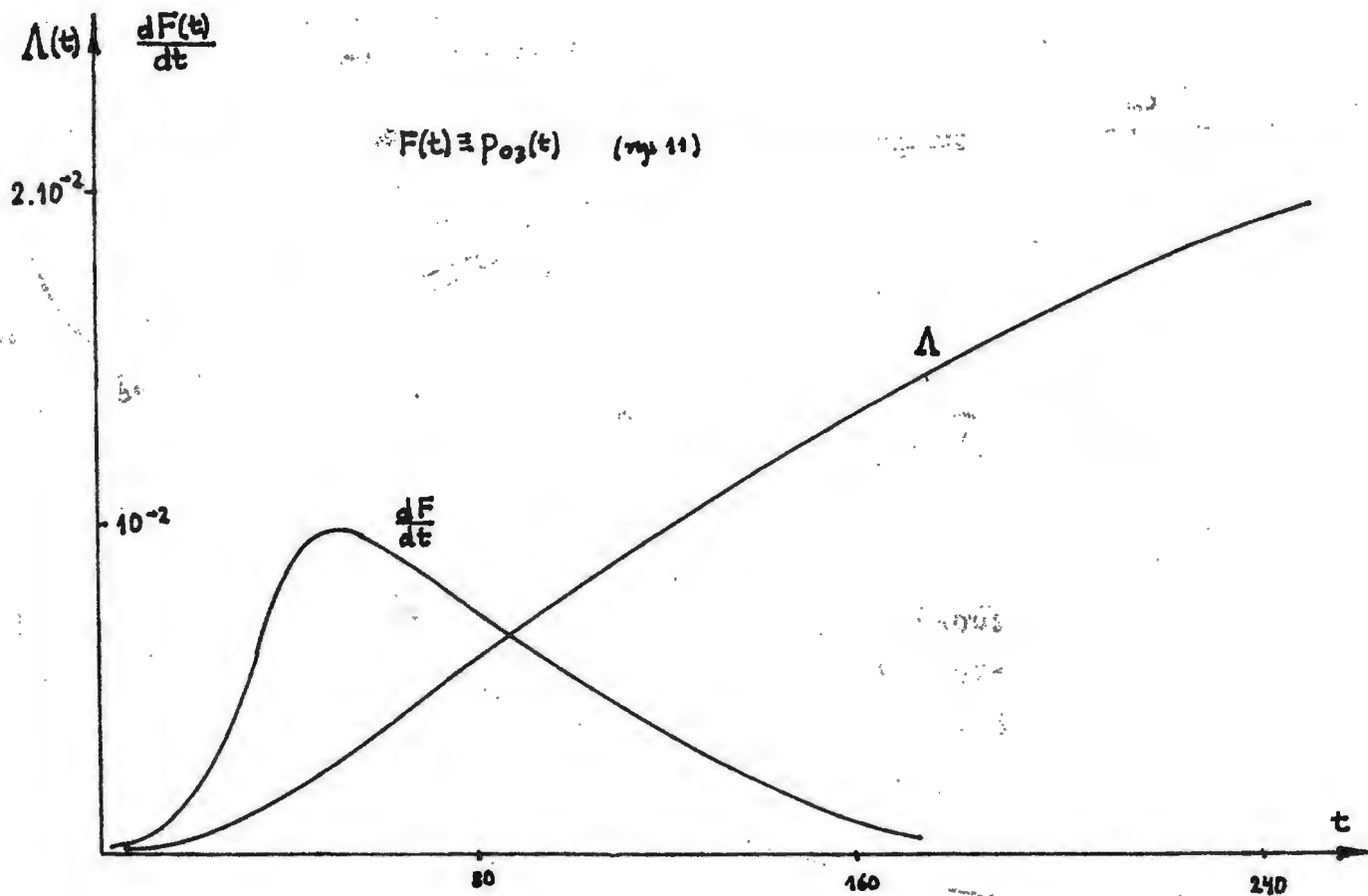
Rys.9 Struktura procesu zużycia ($\lambda_{01}, \lambda_{12}, \lambda_{23}$) oraz uszkodzeń ($\lambda_{04}, \lambda_{14}, \lambda_{24}, \lambda_{34}$)



Rys.10 Przebieg narastania intensywności uszkodzeń w miarę zużycia łożyska



Rys. 11 Dystylnosc funkcji $F(t)$ procesu łańcuchowego



Rys.12 Przebieg intensywności uszkodzeń procesu łańcuchowego z rys.11

Zauważmy następnie, że ponieważ każdemu stanowi przyporządkowaliśmy odpowiedni odcinek czasu pracy τ , to tym samym przyporządkowaliśmy w postaci funkcji schodkowej wartości λ każdemu zakresowi wartości τ (patrz rys. 10).

Jak nietrudno zauważyć, przebieg funkcji λ można uważać za aproksymację ciągłej funkcji $\lambda(\tau)$ zaznaczonej na rys. 10 linią kreskowaną. Powiększając liczbę stanów zdatności możemy dla dostatecznie dużych wartości $S-1$ dostatecznie dokładnie przybliżyć ciągłą funkcję $\lambda(\tau)$ - funkcją schodkową. Należy przy tym podkreślić, że dla elementów mechanicznych zwykle wartości $\lambda_{s,S}$ dla s małych są bliskie zera, natomiast istotna jest wartość $\lambda_{S-1,S}$. W takim przypadku otrzymamy czystą strukturę łańcuchową procesu, w którym tylko ostatnia intensywność jest intensywnością uszkodzeń; wszystkie inne dotyczą tylko intensywności zużycia. Dobierając dostatecznie dużą wartość $S-1$ możemy uzyskać wystarczająco dokładne przybliżenie rozkładu normalnego czasu osiągnięcia stanu $S-1$, którego osiągnięcie zagraża uszkodzeniem obiektu. Wynika to z tego, że dla $\lambda_{s,s+1} = \lambda = \text{const}$ (dla $s = 0, 1, 2, \dots, S-2$) dystrybuanta czasu osiągnięcia stanu $S-1$ będzie miała postać rozkładu Erlanga, który ma tę własność, że dąży (ze wzrostem S) do rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej $1/\lambda \cdot (S-1)$ i odchyleniu standardowym $1/\lambda \cdot \sqrt{S-1}$ (patrz rys. 7)

W ten sposób teoria niezawodności obiektów wielostanowych może być wykorzystana, w przypadku gdy stanu fizycznego obiektu nie można zidentyfikować. Zawsze jednak należy mieć na uwadze fakt, że teoria niezawodności obiektów wielostanowych ma zasadnicze zastosowanie w przypadku istnienia możliwości identyfikacji stanu fizycznego obiektu.

Na zakończenie, na rys 11 i 12 pokazano przebiegi dystrybuanty $F(t)$ czasu pracy do uszkodzenia (stan $S = 3$) oraz $\Lambda(t)$ intensywności uszkodzeń, w funkcji czasu dla procesu łańcuchowego. Przebieg tej ostatniej funkcji $\Lambda(t)$ można porównać z przebiegiem funkcji $\lambda(t)$ z rysunku 1 dla normalnego rozkładu uciętego oraz z przebiegiem funkcji $\lambda(t)$ na rysunku 2 dla rozkładu Weibulla.

Nietrudno się domyśleć, że dla procesów o bardziej złożonej strukturze (nie łańcuchowej) można uzyskać różne przebiegi funkcji $\Lambda(t)$. Pozwala to domniemywać, że zmierzone eksperymentalnie przebiegi funkcji $\Lambda(t)$ nie koniecznie wynikają stąd, że występujące rozkłady nie są wykładnicze. Być może występują tylko rozkłady wykładnicze, lecz dotyczą one składowych podprocesów tworzących złożoną strukturę obserwowanego procesu wielostanowego.

2. Wielostanowe procesy stochastyczne zużycia

2.1 Proces zużycia elementów

Stan każdego funkcjonalnego elementu (lub obiektu) zmienia się w czasie wskutek zachodzących procesów zużycia (starzenia, ścierania, zmęczenia, korozji, itp.), których intensywność zależy od jakości elementu, jego obciążenia pracą, własności smarów, szkodliwości otaczającej atmosfery, odporności powłok ochronnych itp. Stan zmienia się także wskutek działających na niego procesów odnowienia i konserwacji (czyszczenia, regulacji, malowania, wymiany itp.). Najczęściej możemy przyjąć, że zużycie elementu (lub obiektu) jest proporcjonalne do czasu jego pracy e oraz do czasu kalendarzowego t , przy czym, przez czas pracy będziemy rozumieli podzbiór wybranych z kalendarzowego zbioru chwil takich, w których element "pracuje", tzn. wykonuje swoje zadanie.

Jeżeli stopień zużycia elementu oznaczymy symbolem l , to w szczególności mamy:

$$l = \beta e + bt$$

gdzie:

β - współczynnik proporcjonalności zależny od rodzaju pracy elementu, jakości smarów, jakości elementu

b - współczynnik proporcjonalności zależny od szkodliwości otaczającej atmosfery, własności powłok ochronnych, jakości elementu itp.

e - czas pracy elementu

W szczególności, gdy wprowadzimy pojęcie intensywności pracy jako stosunku

$$c(t) = \frac{e(t)}{t}$$

to jeżeli ma on wartość stałą c dla ustalonych odcinków czasu $t = T$ (na przykład, dobowych), wtedy

$$l = (\beta c + b)t$$

Jeżeli β jest małe w porównaniu do b , wtedy mówimy, że zużycie jest proporcjonalne do upływu czasu kalendarzowego. W przeciwnym przypadku powiemy, że zużycie jest proporcjonalne do czasu pracy.

Stopień zużycia elementu l może być mierzony różnymi jednostkami. Na przykład, jeżeli $\beta = 0$, to jednostkami miary zużycia mogą być jednostki czasu kalendarzowego. Przypadek ten dotyczy szczególnie obiektów będących budowlami. Jeżeli $b = 0$, to jednostkami miary zużycia mogą być jednostki czasu pracy lub tzw. *napracowanie* elementu. Przypadek ten szczególnie odnosi się do takich obiektów jakimi są silniki spalinowe.

Zauważmy, że jeżeli $\beta = 0$, a współczynnikiem proporcjonalności b jest na przykład, średni przebieg pojazdu na jednostkę czasu kalendarzowego, to jednostką miary l zużycia pojazdu będzie jednostka przebytej odległości. Jeżeli, przeciwnie, $b = 0$, a współczynnikiem proporcjonalności β jest średni przebieg pojazdu na jednostkę czasu jazdy (średnia szybkość pojazdu) i c jest liczbą godzin jazdy na jednostkę czasu kalendarzowego, to jednostką miary l zużycia pojazdu będą także jednostki przebytej odległości, chociaż przyjęta hipoteza wzrostu zużycia była całkowicie różna.

Dalej będziemy zakładali, że funkcja $l(t)$ jest dana. Zauważmy następnie, że wskutek oddziaływania wielu czynników, których wpływu nie sposób uwzględnić w funkcji $l(t)$, a od których zależy zużycie, trzeba założyć, że jest ono

wielkością losową $L(t)$ o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa

$$F(l, t) = \Pr\{L(t) < l\}$$

i wartości oczekiwanej

$$L(t) = E L(t) = \int_0^{\infty} l dF(l, t)$$

Poszczególne realizacje $l(t)$ funkcji losowej $L(t)$ mogą często znacznie różnić się między sobą. Spowodowane jest to, w przypadku gdy

$$l = (\beta \varepsilon + b)t$$

losowością wielkości β , ε oraz b (rys. 16). Te ostatnie dwie wielkości zależą od jakości elementu (struktury, składu, gładkości powierzchni itp.), która jest różna dla różnych elementów, co spowodowane jest niejednorodnością produkcji. W efekcie końcowym, stan s_n elementu nr n będący funkcją zużycia elementu $L(t)$ jest funkcją losową parametru t

$$s_n(t) = s_n(L_n(t))$$

Funkcję losową zmiennej rzeczywistej t nazywamy ogólnie procesem stochastycznym. Oczywiście, stan elementu zależy także od procesu odnowy.

2.2 O procesach stochastycznych

Przed przystąpieniem do opisu procesu zmiany stanu elementów (a następnie całego obiektu), pozwalającego na wyznaczenie charakterystyk eksploatacyjno-niezawodnościowych obiektu, poznajmy metody opisu procesów.

Ogólnie, procesem stochastycznym nazywamy:

- funkcję $X(t)$ określoną dla rzeczywistego argumentu t (czas), której wartościami są zmienne losowe (Chinczyn) lub
- funkcję $x(U, t)$ określoną dla rzeczywistego argumentu t (czas), zależną od parametru U który jest wielkością losową (Wiener).

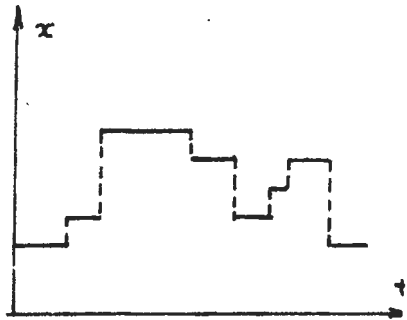
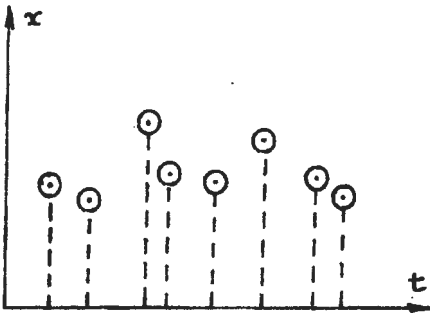
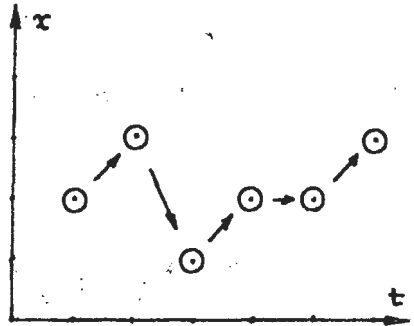
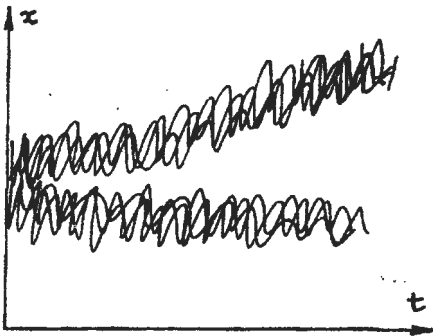
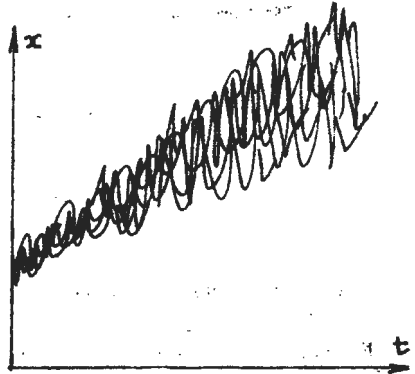
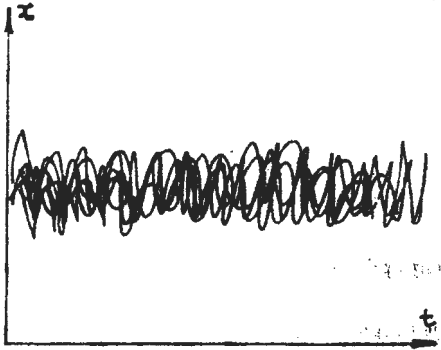
Znajomość procesu sprowadza się do znajomości dystrybuanty

$$F(x_1, x_2, \dots) = \Pr\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots\}$$

dla dowolnych wartości $x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots$

Realizacją procesu jest zwykła funkcja $x(t)$ lub $x(u, t)$ przybierająca wartości z określonego zbioru X i określona na zbiorze chwil T .

Ogólnie wyróżniamy cztery klasy procesów w zależności od natury zbioru X (wartości procesu) i zbioru T (wartości argumentu t). Są więc procesy o nieprzeliczalnym i przeliczalnym zbiorze X oraz o przeliczalnym i nieprzeliczalnym zbiorze T (rys. 19). Do najprostszych należą procesy o przeliczalnych zbiorach X i T , a do najbardziej prostych w tej klasie procesy o niezależnych wartościach.



Rys.19 Przykłady realizacji procesów stochastycznych
 a) ciągły w czasie i przestrzeni, ergodyczny (jednorodny w czasie i przestrzeni,
 b) ciągły w czasie i przestrzeni, niestacjonarny (niejednorodny w czasie)
 c) ciągły w czasie i przestrzeni, niejednorodny w przestrzeni (nieergodyczny)
 d) dyskretny w czasie i przestrzeni (łańcuch Markowa)
 e) dyskretny w czasie, ciągły w przestrzeni (punktowy)
 f) ciągły w czasie, dyskretny w przestrzeni (schodkowy).

Dla procesów o niezależnych wartościach, wielkości

$$X(t_k), k = 1, 2, \dots$$

są niezależnymi wielkościami losowymi, a stąd

$$\Pr \left\{ X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots \right\} = \prod_k \Pr \left\{ X(t_k) = x_k \right\} = \prod_k p(x_k, t_k)$$

Takim procesem jest w szczególności dyskretny proces Wienera, tak zwany dyskretny biały szum.

Następnym rodzajem procesu w tej klasie jest proces o niezależnych przyrostach (dyskretny proces Poissona), w którym wielkości

$$\Delta X(t_k) = X(t_k + \Delta t_k) - X(t_k), k = 1, 2, \dots$$

są niezależnymi wielkościami losowymi. Stąd

$$\Pr \left\{ X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots \right\} =$$

$$\Pr \left\{ X(t_1) = x_1, \Delta X(t_1) = \Delta x_1, \Delta X(t_2) = \Delta x_2, \dots \right\} =$$

$$\Pr \left\{ X(t_1) = x_1 \right\} \prod_k \Pr \left\{ \Delta X(t_k) = \Delta x_k \right\} =$$

$$= (x_1, t_1) \prod_k p(\Delta x_k, t_k, \Delta t_k)$$

gdzie

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

przy czym Δt_k są niezachodzącymi na siebie przedziałami czasowymi.

Bardzo ważnym rodzajem procesów w tej klasie są łańcuchy Markowa, zwane też procesami bez następstw lub procesami bez pamięci, w których wielkość losowa $X(t_{k+1})$ zależy wyłącznie od ostatniej wartości $x(t_k)$ wielkości $X(t_k)$. Dla łańcucha (a ogólnej procesu) Markowa jest więc prawdziwa równość

$$\Pr \left\{ X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots \right\} =$$

$$\Pr \left\{ X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k \right\} = p(x_{k+1}, t_{k+1} \mid x_k, t_k).$$

Stąd

$$\Pr \left\{ X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots \right\} =$$

$$\Pr \left\{ X(t_1) = x_1 \right\} \prod_k \Pr \left\{ X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k \right\} =$$

$$= p(x_1, t_1) \prod_k p(x_{k+1}, t_{k+1} \mid x_k, t_k)$$

Niezależnie od powyższego podziału, procesy możemy podzielić na *jednorodne i niejednorodne* (w czasie).

Procesami jednorodnymi nazwiemy te z nich, dla których rozkład wielkości

$$\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$$

nie zależy od położenia przedziału Δt na osi czasu.

Jeżeli więc proces Markowa jest jednorodny, to prawdziwa jest równość

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k \right\} &= p(x_{k+1}, t_{k+1} \mid x_k, t_k) = \\ &= p(x_k, x_{k+1}; \Delta t) \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

Jeżeli proces o niezależnych przyrostach (Poissona) jest jednorodny, wtedy

$$\Pr \left\{ X(t_k) = x_k \right\} = p(x_k; \Delta t_k, t_k) = p(x_k; t_k)$$

Podobnie, jeżeli proces o niezależnych wartościach (Wienera) jest jednorodny, to

$$\Pr \left\{ X(t_k) = x_k \right\} = p(x_k, t_k) = p(x_k)$$

Rozpatrzmy jednorodny łańcuch Markowa opisany jednoznacznie rozkładem początkowym

$$\Pr \left\{ X(t_0) = x_0 \right\} = p(x_0, t_0) = p_1(0)$$

oraz rozkładem warunkowym

$$\Pr \left\{ X(t_{k+1}) = x_{k+1} \mid X(t_k) = x_k \right\} = p(x_k, x_{k+1}, \Delta t_k) = p(i, j, 1) = p_{ij}$$

gdzie przyjęto

$$x = 1, 2, \dots, i, \dots$$

$$T = 0, 1, 2, \dots, k, \dots$$

$$\Delta t_k = \Delta t = 1, \quad t_0 = 0$$

Elementy macierzy prawdopodobieństw przejść

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

spełniają oczywiste warunki

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

Jeżeli mamy określony rozkład początkowy $\hat{p}(0) = \langle p_1(0), p_2(0) \dots \rangle$ oraz znamy macierz P , wtedy możemy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństw stanów $\hat{p}(k)$ dla każdej chwili $k = 1, 2, \dots$ z zależności rekurencyjnej

$$p_j(k+1) = \sum_1 p_1(k) p_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

który w zapisie wektorowym przyjmie postać

$$\hat{p}(k+1) = \hat{p}(k)P$$

Stąd na zasadzie indukcji mamy

$$\hat{p}(k) = \hat{p}(0)P^k$$

Istotną więc jest umiejętność wyznaczania dowolnej potęgi k macierzy P , przy czym, dla macierzy, mamy w szczególności

$$P^{k+1} = P^k P^1$$

którą to zależność możemy w rozwiniętej postaci zapisać następująco:

$$p_{1j}(k+1) = \sum p_{1s}(k) p_{sj}(1); \quad 1, j = 1, 2, \dots$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} p_{11}(k) \dots \\ p_{21}(k) \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = P^k$$

Zauważmy, że w szczególności

$$P^1 = \begin{bmatrix} p_{11}(1) \dots \\ p_{21}(1) \dots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots \\ p_{21} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = P$$

Przechodząc do bardziej nas interesującej, następnej klasy procesów Markowa, w której X jest przeliczalnym zbiorem, a T nieprzeliczalnym, mamy podobną zależność potęg macierzy dla k, l rzeczywistych. Koźłogomorow udowodnił, że dla procesów Markowa zachodzi identyczna własność, a mianowicie:

$$P^{t+r} = P^t P^r$$

lub w postaci rozwiniętej

$$P_{ij}(t+r) = \sum_s P_{sj}(t) P_{sj}(r); \quad i, j = 1, 2, \dots$$

także dla $r \rightarrow 0$ lub $t \rightarrow 0$.

Odejmując stronami $P_{ij}(t)$ mamy

$$P_{ij}(t+r) - P_{ij}(t) = \sum_{s \neq j} P_{is}(t) P_{sj}(r) + P_{ij}(t) [P_{jj}(r) - 1]$$

Następnie dzieląc stronami przez r otrzymamy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t+r) - P_{ij}(t)}{r} = \frac{d}{dt} P_{ij}(t)$$

Jeżeli następnie oznaczymy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(r) - 1}{r} = \lambda_{jj}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P_{sj}(r)}{r} = \lambda_{sj}$$

dla $s \neq j$ to otrzymamy ostatecznie

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_s P_{is}(t) \lambda_{sj}$$

Z kolei, jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$\frac{d}{dt} P(t) = \frac{d}{dt} [p_{1j}(t)] = \left[\frac{d}{dt} p_{1j}(t) \right]$$

$$P(t) = [p_{1j}(t)]$$

$$\Lambda = [\lambda_{1j}] \text{ przy czym } \sum_j \lambda_{1j} = 0; \lambda_{11} = - \sum_{j \neq 1} \lambda_{1j}$$

to równość tę pod nazwą równania Kołomogorowa możemy zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \Lambda$$

Oczywiście, gdy

$$p_{1j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = i_0 \\ 0 & \text{jeżeli } i \neq i_0 \end{cases}$$

to otrzymamy

$$\frac{d}{dt} p_{i_0 j}(t) = \sum_s p_{i_0 s}(t) \lambda_{sj}$$

lub krócej, opuszczając indeks i_0

$$\frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_s p_s(t) \lambda_{sj}$$

Jeżeli proces Markowa jest ergodyczny, to zgodnie z twierdzeniem Markowa istnieją granice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i0j}(t) = p_j$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} p_{ij}(t) = 0$$

niezależnie od stanu początkowego.

Prawdopodobieństwa graniczne

$$\hat{p} = \langle p_1, p_2, \dots \rangle$$

muszą, jak łatwo stwierdzić, spełniać układ

$$p \Lambda = 0$$

Układ ten jest rzędu o jeden mniejszego niż liczba niewiadomych. Tym niemniej jednoznaczność rozwiązania zapewnia dodatkowe równanie

$$\sum_i p_i = 1$$

W teorii niezawodności szczególną rolę odgrywa jednorodny proces Poissona (proces Markowa o niezależnych nieujemnych przyrostach).

Ogólnie procesy Markowa charakteryzujemy macierzą

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_{00}(t), \lambda_{01}(t), \dots \\ \lambda_{10}(t), \lambda_{11}(t), \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Jeżeli proces jest o niezależnych przyrostach, to

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{j-1}(t)$$

i wtedy

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots \\ \lambda_{-1}(t), \lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Jeżeli proces o niezależnych przyrostach ma wyłącznie przyrosty nieujemne, wtedy

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots \\ 0, \lambda_0(t), \lambda_1(t) \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Jeżeli dodatkowo jest to proces jednorodny, wtedy

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \\ 0, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \\ 0, 0, \lambda_0, \lambda_1, \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

A więc, do scharakteryzowania jednorodnego procesu Poissona wystarczy podać ciąg wartości

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots$$

ponieważ

$$\lambda_0 = - \sum_{i>0} \lambda_i$$

Dla takiego procesu równania Kołomogorowa

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_s p_{is}(t) \lambda_{sj}$$

przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = p_{i1}(t) \lambda_{j-1} + p_{i, i+1}(t) \lambda_{j-1-1} + \dots + p_{ij}(t) \lambda_0$$

Mnożąc obie strony każdego równania przez v^{j-1} i dodając stronami otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dt} p_{1j}(t) v^{j-1} = p_{11}(t) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s v^s + p_{1, 1+1}(t) v \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s v^s + \dots$$

Oznaczając funkcje tworzące

$$\Pi_1(v, t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(t) v^{j-1}$$

$$\Omega(v) = \sum_1 \lambda_1 v^1$$

Otrzymamy ostateczne równanie

$$\frac{d}{dt} \Pi_1(v, t) = \Pi_1(v, t) \Omega(v)$$

którego rozwiązaniem jest zależność

$$\Pi_1(v, t) = C e^{\Omega(v)t}$$

Jeżeli

$$p_{1j}(0) = \delta_{1j}, \quad \text{to} \quad \Pi_1(v, 0) = 1 \quad \text{oraz} \quad C = 1$$

Stąd

$$\Pi_1(v, t) = e^{\Omega(v)t}$$

Rozwińmy powyższe wyrażenie na szereg potęgowy względem v . Wtedy współczynniki przy odpowiednich potęgach v będą wartościami $p_{1j}(t)$ (porównaj oznaczenia funkcji tworzącej). Otrzymamy wtedy

$$\Pi_1(v, t) = 1 + \frac{\Omega(v)}{1!} t + \frac{\Omega^2(v)}{2!} t^2 + \dots$$

Jeżeli jednorodny proces Poissona jest także procesem pojedynczym, dla którego

$$\lambda_0 = -\lambda_1, \lambda_s = 0 \quad \text{dla } s > 1$$

wtedy

$$\Omega(v) = \lambda_0 + \lambda_1 v = -\lambda (1-v)$$

gdzie

$$\lambda_1 = -\lambda_0 = \lambda$$

oraz

$$\Pi_1(v, t) = e^{-\lambda(1-v)t} = e^{-\lambda t} e^{v\lambda t} = e^{-\lambda t} \left[1 + \frac{\lambda t}{1!} v + \frac{(\lambda t)^2}{2!} v^2 + \dots \right]$$

Stąd

$$P_{1,1}(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_{1,1+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda t}{1!}$$

.....

$$P_{1,j}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \quad \text{dla } j > 1$$

Jeżeli $t = 0, i = 0$, to

$$P_{1,j}(t) = p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

Zauważmy przy tym, że $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. Ale ponieważ

$$p_0(t) = p_r \left\{ X(t) = 0 \right\}$$

więc ma ono także interpretację prawdopodobieństwa, że losowy odstęp czasu τ między kolejnymi zmianami stanu będzie większy od t

$$P_r \{ \tau > t \} = p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

lub

$$F(t) = \Pr \{ \tau \leq t \} = 1 - e^{-\lambda t}$$

Odstępy czasu między kolejnymi zmianami stanu mają więc rozkład wykładniczy.

Przypadek I:

Intensywność przejścia jednorodnego procesu ze stanu niższego do wyższego jest stała

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda = \text{const}$$

Wtedy macierz Λ_I posiada postać:

$$\Lambda_I = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy tym stan $i = 0$ odpowiada elementowi nowemu, a stan $i = S$ elementowi zużytemu, niezdatnemu. Rozwiązanie w tym przypadku ma postać

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j < i \\ \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{dla } i \leq j < S \\ 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{S-1} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} & \text{dla } j = S \end{cases}$$

gdzie i jest stanem w chwili $t = 0$, a j - stanem t .

Przypadek II

Intensywność przejścia jednorodnego procesu pojedynczego do wyższego stanu wzrasta liniowo wraz ze wzrostem numeru stanu:

$$\lambda_{i, i+1} = i\lambda$$

Macierz Λ_{II} ma wtedy postać:

$$\Lambda_{II} = \begin{bmatrix} -\lambda, & \lambda, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & -2\lambda, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & -3\lambda, & 3\lambda, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & -(S-1)\lambda, & (S-1)\lambda \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & & 0 \end{bmatrix}$$

Przy tym stan $j = 1$ odpowiada elementowi nowemu, a stan $i = S$ elementowi zużytemu. Rozwiązanie w tym przypadku ma postać:

$$P_{iJ}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j < i \\ \binom{j-1}{j-1} e^{-i\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1} & \text{dla } i \leq S \\ 1 - e^{-i\lambda t} \sum_{j=1}^{S-1} \binom{j-1}{j-1} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1} & \text{dla } j = S \end{cases}$$

Przypadek III

Intensywność przejścia ze stanu wyższego do niższego maleje liniowo wraz z numerem stanu:

$$\lambda_{i, i-1} = i\lambda$$

Macierz Λ_{PI} ma wtedy postać:

$$\Lambda_{III} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ \lambda, & -\lambda, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 2\lambda, & -2\lambda, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots & S\lambda, & -S\lambda \end{bmatrix}$$

Przy tym stan $i = S$ odpowiada elementowi nowemu, a stan $i = 0$ - elementowi zużytemu. Rowiązanie w tym przypadku ma postać:

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \binom{i}{j} e^{-i\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{i-j} & \text{dla } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{dla } j < 0 \end{cases}$$

Zwróćmy uwagę na to, że pierwszy przypadek opisuje sytuację, w której szybkość przyrostu zużycia nie zależy od stopnia zużycia (numeru stanu).

W drugim przypadku wzrasta szybkość przyrostu zużycia (numeru stanu). Odpowiada to najczęściej spotykanemu zjawisku - im starszy element tym szybciej się zużywa - na przykład, zużycie łożysk tocznych, w których wraz ze wzrostem luzu (zużycia) szybkość zużycia (narastania luzu) wzrasta.

Trzeci przypadek odpowiada sytuacji gdy szybkość przyrostu zużycia maleje wraz ze wzrostem zużycia (malenie numeru stanu). Odpowiada to procesom docierania się elementów, jak na przykład w obrabiarkach docieranie się powierzchni prowadzących. Zwróćmy jeszcze raz uwagę na to, że w tym przypadku numeracja stanów zużycia jest przeciwna aniżeli jest to zwykle przyjęte. Stanowi $i = S$ odpowiada element nowy, a stanowi $i = 0$ całkowicie zużyty.

2.3 Metoda dekompozycji wyznaczania prawdopodobieństwa przejścia dla nieodwracalnych procesów zużycia

Ogólną metodą wyznaczania rozkładów prawdopodobieństwa przejścia jest rozwiązanie odpowiedniego układu równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu. Metoda ta jest jednak kłopotliwa dla zastosowań praktycznych. W związku z powyższym, powstała myśl, aby strukturę dowolnego procesu przedstawionego grafem przejść zdekomponować na proste struktury, dla których znane są wyrażenia (wzory) na rozkłady prawdopodobieństwa przejścia. Następnie wykorzystując znane wzory skomponować wzór złożony dla danego grafu złożonego. W ten sposób uniknęlibyśmy rozwiązywania układu równań różniczkowych.

Poniżej przedstawiono wzory dla jednorodnych procesów o prostych strukturach typu łańcuch (szeregowego) i wachlarz (równoległego), (patrz rys. 20a, 20b) dla dowolnych ciągów wartości λ_{ij} .

Typ A - Struktura prostego procesu "łańcuchowego" o S stanach: pełnej sprawności $i = 1$, stanach pośrednich $i = 1, 2, \dots, S-1$ i stanie całkowitego uszkodzenia $i = S$. Przy tym $\lambda_{1,1+1} > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, S-1$ oraz $\lambda_{ij} = 0$ dla pozostałych wartości $i \neq j$ (patrz rys. 20a).

Ponieważ układ równań różniczkowych ma postać

$$\frac{\partial}{\partial r} p_{11}(t, r) = \lambda_{1-1,1} p_{1,1-1}(t, r) - \lambda_{1,1+1} p_{1,1}(t, r)$$

$$i = 1, 2, \dots, S$$

gdzie

$$p_{1,0}(t, r) = 0, \quad \lambda_{S,S+1} = 0$$

z warunkiem początkowym

$$p_{1,1}(t, t) = 1 \quad p_{1,i}(t, t) = 0 \text{ dla } i > 1$$

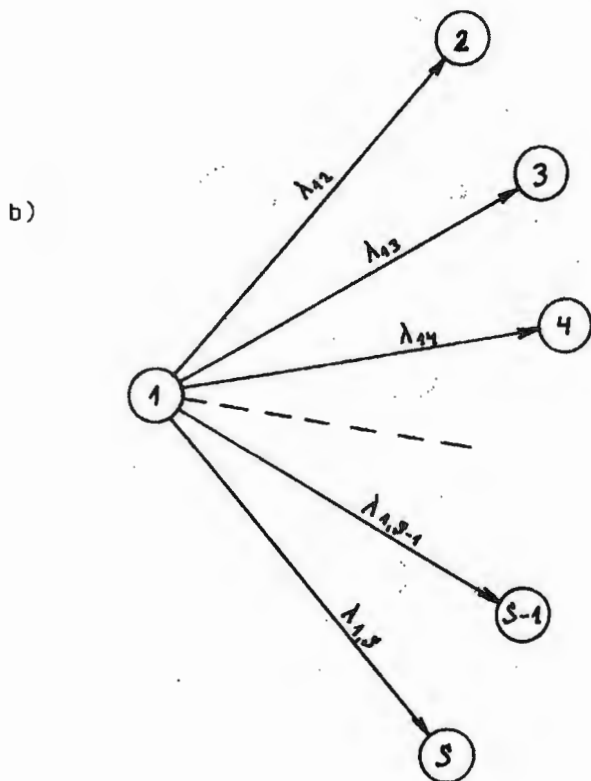
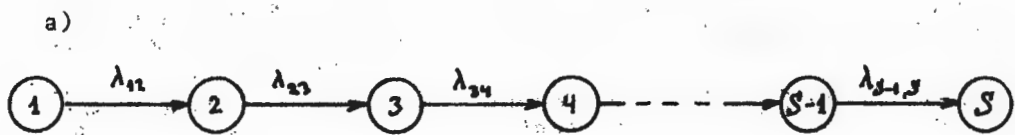
więc ogólnie otrzymamy następujący wzór rekurencyjny

$$p_{1,1}(t, r) = c_1(t, r) e^{-\lambda_{1,1+1}(r-t)}$$

gdzie

$$c_1(t, r) = \lambda_{1-1,1} \int_t^r p_{1,1-1}(t, x) e^{-\lambda_{1,1+1}(x-t)} dx$$

W rezultacie całkowania otrzymamy:



Rys.20 Wielostanowe procesy o strukturze typu
 a) "łańcuch"
 b) "wachlarz"

a) dla $S = 2$

$$p_{1,1}(t,r) = e^{-\lambda_{12}(r-t)} \quad p_{1,2}(t,r) = 1 - e^{-\lambda_{12}(r-t)}$$

b) dla $S = 3, \lambda_{23} \neq \lambda_{12}$

$$p_{1,1}(t,r) = e^{-\lambda_{12}(r-t)}$$

$$p_{1,2}(t,r) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} \left[e^{-\lambda_{12}(r-t)} - e^{-\lambda_{23}(r-t)} \right]$$

$$p_{1,3}(t,r) = \frac{1}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} \lambda_{23} \left[1 - e^{-\lambda_{12}(r-t)} \right] - \lambda_{23} \left[1 - e^{-\lambda_{23}(r-t)} \right] =$$

$$= 1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}(r-t)} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{23}(r-t)}$$

przy czym $\lambda_{12} \neq \lambda_{23}$

c) dla $S = 4$

$$p_{11}(t,r) = e^{-\lambda_{12}(r-t)}$$

$$p_{12}(t,r) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} \left[e^{-\lambda_{12}(r-t)} - e^{-\lambda_{23}(r-t)} \right]$$

$$p_{13}(t,r) = \lambda_{12} \lambda_{23} \frac{e^{-\lambda_{12}(r-t)}}{(\lambda_{23} - \lambda_{12})(\lambda_{34} - \lambda_{12})} + \frac{e^{-\lambda_{23}(r-t)}}{(\lambda_{12} - \lambda_{23})(\lambda_{34} - \lambda_{23})} +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda_{34}(r-t)}}{(\lambda_{12} - \lambda_{23})(\lambda_{23} - \lambda_{34})}$$

$$p_{14}(t,r) = 1 - \frac{\lambda_{23} \lambda_{34} e^{-\lambda_{12}(r-t)}}{(\lambda_{23} - \lambda_{12})(\lambda_{34} - \lambda_{12})} - \frac{\lambda_{12} \lambda_{34} e^{-\lambda_{34}(r-t)}}{(\lambda_{12} - \lambda_{23})(\lambda_{34} - \lambda_{23})} +$$

$$\frac{\lambda_{12} \lambda_{23} e^{-\lambda_{34}(r-t)}}{(\lambda_{12} - \lambda_{34})(\lambda_{23} - \lambda_{34})}$$

przy założeniu, że λ_{ij} są dla różnych par i, j wielkościami różnowartościowymi (jeżeli niektóre są równe sobie to otrzymamy inne wzory).

Dla wartości S większych od liczby 4 możemy w następujący sposób wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa $p_{ij}(t,r)$.

W tym celu oznaczamy symbolem $p_{1,i}^S(t,r)$ prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 1 w chwili t do stanu i w chwili $r > t$ dla procesu S -stanowego. Wtedy prawdziwe jest

Twierdzenie (dla pojedynczych procesów łańcuchowych)

$$p_{1,1}^S(t,r) = p_{1,1}^{S-1}(t,r) \quad \text{dla } 1 \leq i \leq S-2$$

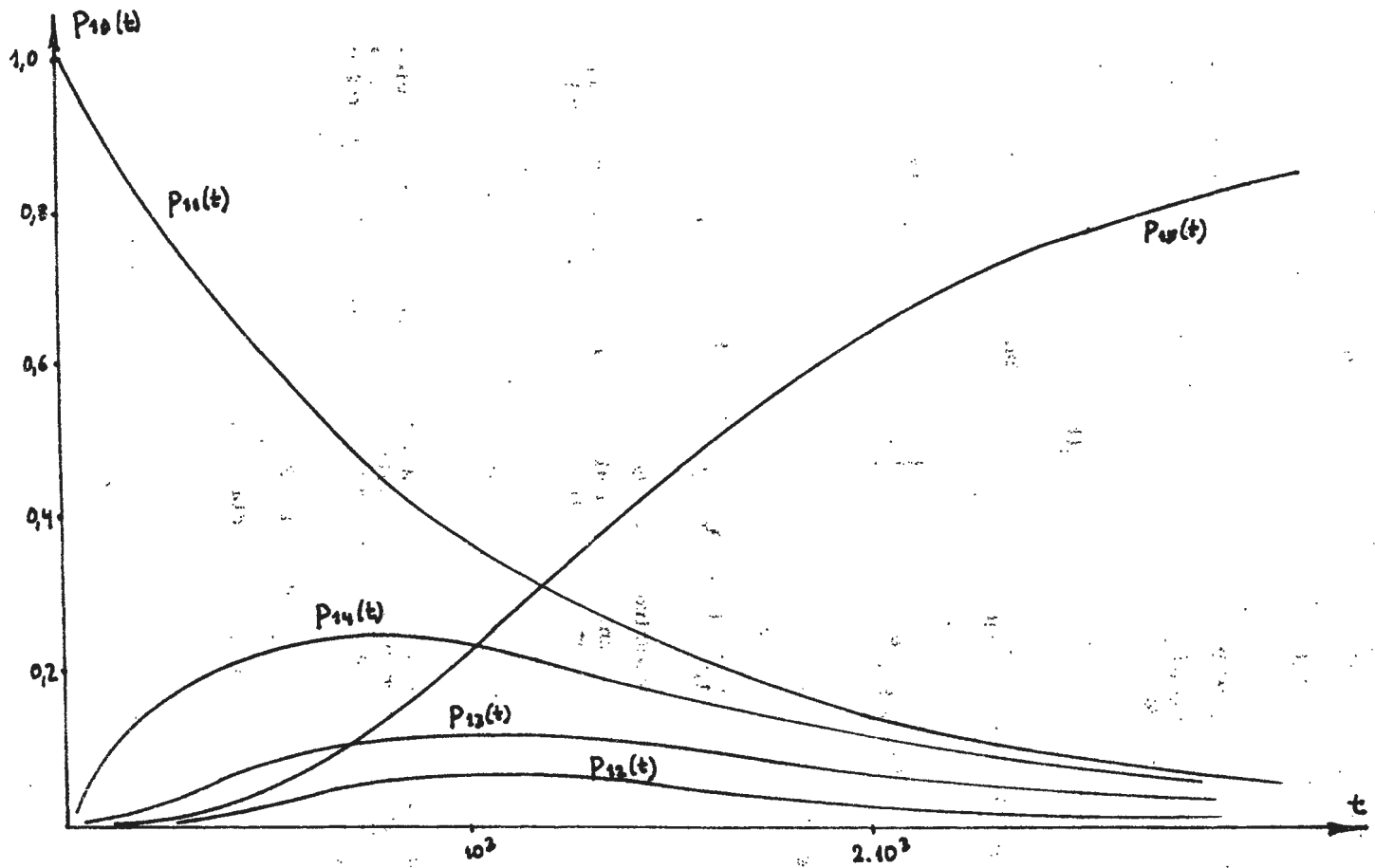
$$p_{1,S-1}^S(t,r) = \lambda_{S-2,S-1} e^{-\lambda_{S-1,S}(r-t)} c_{S-2}^{S-1}(t,r)$$

$$p_{1,S}^S(t,r) = p_{1,S-1}^{S-1}(t,r) - \lambda_{S-2,S-1} e^{-\lambda_{S-1,S}(r-t)} c_{S-2}^{S-1}(t,r)$$

gdzie

$$c_{S-2}^{S-1}(t,r) = \int_t^r p_{1,S-2}^{S-1}(t,x) e^{-\lambda_{S-1,S}(x-t)} dx$$

Na podstawie twierdzenia możemy wyznaczyć rozkład $p_{11}^S(t,r)$, znając rozkład $p_{11}^{S-1}(t,r)$



Rys.21 Wykresy funkcji $P_{1,s}$ (dla $s=1,2,3,4,5$) - proces łańcuchowy

Dowód Twierdzenia

Dowód opiera się na dwóch spostrzeżeniach. Pierwsze dotyczy tego, że prawdopodobieństwo $p(t,r)$ w procesach nieodwracalnych nie zależy od długości S łańcucha, jeżeli r jest mniejsze od $S-1$. Można to zapisać w postaci równości

$$P_{1,1}^S(t,r) = P_{1,1}^R(t,r) \quad \text{dla } 1 \leq r \leq S-2; \quad 1+1 \leq R \leq S$$

Drugie spostrzeżenie określa, że wartość prawdopodobieństwa dla ostatniego (pochłaniającego) stanu w łańcuchu o długości $S-1$ "rozkłada się" na dwie składowe: wartości prawdopodobieństw stanów przedostatniego i ostatniego (pochłaniającego) w łańcuchu o długości S . Fakt ten wyraża równanie

$$P_{1,S-1}^{S-1}(t,r) = P_{1,S-1}^S(t,r) + P_{1,S}^S(t,r), \quad S = 3, 4, \dots$$

Niezależnie, z rozwiązania układu równań różniczkowych dla łańcucha określonego wzorem rekurencyjnym mamy

$$P_{1,S-1}^S(t,r) = \lambda_{S-2,S-1} e^{-\lambda_{S-1,S}(r-t)} \int_t^r P_{1,S-2}^{S-1}(t,x) e^{-\lambda_{S-1,S}(x-t)} dx$$

Wynika więc stąd równość

$$P_{1,S}^S(t,r) = P_{1,S-1}^{S-1}(t,r) - \lambda_{S-2,S-1} e^{-\lambda_{S-1,S}(r-t)} C_{S-2}^{S-1}(t,r)$$

co ostatecznie dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Jak więc widzimy, obliczenie rozkładu dla procesu S -stanowego (przy znajomości rozkładu dla procesu $S-1$ stanowego) sprowadza się do policzenia całki

$$C_{S-2}^{S-1}(t,r) = \int_t^r P_{1,S-2}^{S-1}(t,x) e^{-\lambda_{S-1,S}(x,t)} dx$$

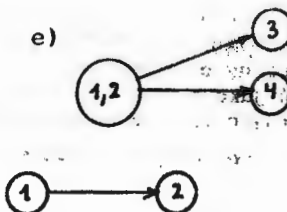
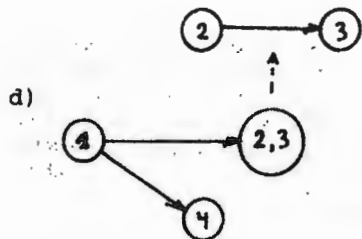
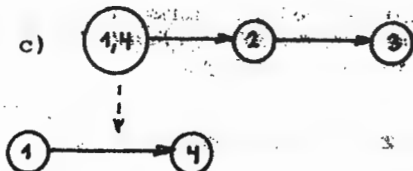
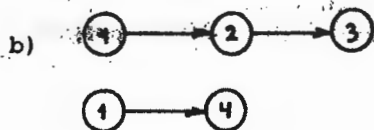
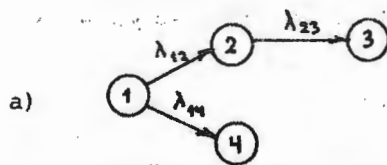
Typ B - Struktura wachlarzowa procesu o stanach pełnej sprawności $i = 1$ i wielu różnych typach uszkodzenia (zatrzymania procesu: $i = 2, 3, \dots, S$ (wynikłych z różnych przyczyn fizycznych i pociągających za sobą różne skutki. Przy tym

$$\lambda_{1,i} > 0, \quad i = 2, 3, \dots, S$$

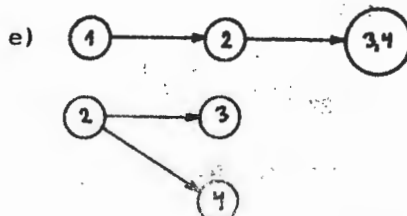
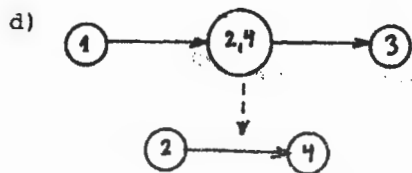
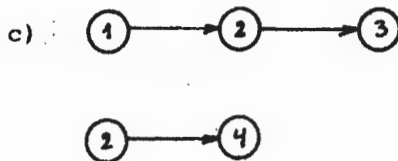
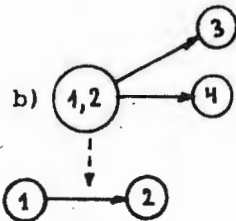
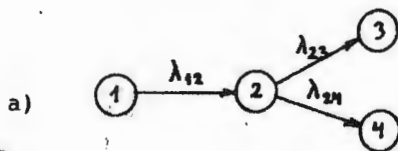
$$\lambda_{1,j} = 0 \quad \text{dla } i \neq 1$$

(patrz rys. 20b.). Oznaczając

$$\lambda = \sum_{i=2}^S \lambda_{1,i}$$



Rys.22 Warianty: b), c), d), e) dekompozycji procesu o strukturze a)



Rys.23 Warianty: b), c), d), e) dekompozycji procesu o strukturze a)

otrzymamy, po rozwiązaniu układu równań różniczkowych wzory

$$P_{11}(t,r) = e^{-\lambda(r-t)}$$

$$P_{1,1}(t,r) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda(r-t)} \right]$$

Obecnie dysponując wzorami dla prostych strukturalnie procesów typu A i B, pokażemy jak możemy je wykorzystać przy bardziej złożonych procesach posługując się metodą dekompozycji.

2.4 Zasada dekompozycji procesów

Niestety, dekomponować procesów złożonych nie można w sposób dowolny. Zasadę dekompozycji pokażemy początkowo na przykładach.

Przykład I

Założmy, że struktura procesu wielostanowego jest określona grafem jak na rysunku 22a. Cztery możliwe sposoby dekompozycji są pokazane na rysunku 22 b, c, d, e, lecz tylko jeden sposób pokazany na rysunku jest prawidłowy. Należy więc proces złożony o strukturze widocznej na rysunku przedstawić w pierwszym etapie obliczeń jako prosty proces wachlarzowy, a następnie stan 2,3 rozbić na dwa stany traktując ten proces jako łańcuchowy (22d).

Prawidłowy sposób obliczeń będzie więc następujący:

I Etap

$$P_{11}(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{gdzie } \lambda = \lambda_{12} + \lambda_{14}$$

$$P_{1,4}(t) = \frac{\lambda_{14}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right]$$

$$P_{1(23)}(t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right]$$

II Etap

Gdyby istniały tylko dwa stany: 2 oraz 3, to dla takiego łańcucha otrzymalibyśmy

$$P_{22}(t) = e^{-\lambda_{23} t}$$

$$P_{23}(t) = 1 - e^{-\lambda_{23} t}$$

Ale ponieważ w naszym przypadku mamy

$$\begin{aligned}
p_{13}(t) &= \int_0^t \frac{d}{dr} p_{1(23)}(r) p_{23}(t-r) dr = \int_0^t \lambda_{12} e^{-\lambda r} \left[1 - e^{-\lambda_{23}(t-r)} \right] dr = \\
&= \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right] - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{23} t} \right] = \\
&= p_{1(23)}(t) - p_{1,2}(t)
\end{aligned}$$

gdź $p_{1,(23)}(t) = p_{1,2}(t) + p_{13}(t)$

to otrzymamy wprost

$$p_{12}(t) = - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{23} t} \right]$$

Powyższy wzór określający wartość całki jest słuszny w przypadku gdy

$$\lambda = \lambda_{12} + \lambda_{14} \neq \lambda_{23}$$

Ogólnie, wzór na wartość tego typu całek ma postać

$$\int_0^t a e^{-br} \left[1 - e^{-c(t-r)} \right] dr = \begin{cases} \frac{a}{b} \left[1 - e^{-bt} \right] - \frac{a}{b-c} \left[e^{-ct} - e^{-bt} \right] & \text{dla } b \neq c \\ \frac{a}{b} \left[1 - e^{-bt} \right] - t \cdot a \cdot e^{-bt} & \text{dla } b=c \end{cases}$$

Przykład II

Załóżmy, że struktura procesu wielostanowego jest określona grafem pokazanym na rysunku 23a. Cztery możliwe sposoby dekompozycji w pierwszym etapie obliczeń są pokazane na rysunku 23, od 23b do 23e, lecz tylko jeden, jest poprawny. Należy więc proces złożony, widoczny na rysunku 23a, potraktować w pierwszym etapie obliczeń jako proces łańcuchowy, a następnie rozbić stan 3 oraz 4 jako proces wachlarzowy (rys. 23e).

Prawidłowy sposób obliczeń będzie więc następujący:

I etap

$$P_{11}(t) = e^{-\lambda_{12}t}$$

$$P_{1(234)} = 1 - e^{-\lambda_{12}t}$$

$$P_{22}(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_{2(34)}(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ gdzie } \lambda = \lambda_{24} + \lambda_{23}$$

Wraz

$$\begin{aligned} P_{1(34)}(t) &= \int_0^t \frac{d}{dr} P_{1(234)}(r) P_{2(34)}(t-r) dr = \\ &= \int_0^t \lambda_{12} e^{-\lambda_{12}r} [1 - e^{-\lambda(t-r)}] dr = \\ &= [1 - e^{-\lambda_{12}t}] - \frac{\lambda_{12}}{\lambda - \lambda_{12}} [e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda t}] \\ &= P_{1(234)}(t) - p_{12}(t) \end{aligned}$$

stąd

$$p_{12}(t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda - \lambda_{12}} [e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda t}] \text{ dla } \lambda_{12} \neq \lambda$$

Wzrost

$$P_{1(234)}(t) = p_{12}(t) + P_{1(34)}(t)$$

II etap

Znając $P_{1(34)}(t)$ możemy dla procesu wachlarzowego napisać od razu

$$P_{13}(t) = \frac{\lambda_{23}}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\lambda_{12}t} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda - \lambda_{12}} [e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda t}] \right\}$$

$$p_{12}(t) = \frac{\lambda_{24}}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\lambda_{12}t} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda - \lambda_{12}} \left[e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda t} \right] \right\}$$

W ten sposób określiliśmy wszystkie wartości $p_{11}(t)$ dla $i = 2, 3, 4, 5$ (ponadto także $p_{21}(t)$) dla $i = 2, 3, 4$.

Analizując te różne przypadki dochodzimy do wniosku, że operowanie stanami zbiorowymi jest jedynie dozwolone gdy są to stany pochłaniające - graficznie będące ostatnimi w grafie.

Możemy to wyrazić w postaci następującej ZASADY DEKOMPOZYCJI: ŁĄCZENIE STANÓW JEST DOZWOLONE TYLKO ZE STANAMI POCHŁANIAJĄCYMI.

Pokażemy następnie wykorzystanie tej zasady dla trzech typów struktur.

Typ C. Struktura procesu, widoczna na rysunku 24, - łańcuchowo-wachlarzowa.

Składając stany: $3, 4, \dots, 1, \dots, S$ w jeden stan C mamy dla tak otrzymanego łańcucha

$$p_{11}(t) = e^{-\lambda_{12}t} \quad p_{12}(t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{12}t} \right]$$

$$p_{1C}(t) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}t} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda} e^{-\lambda t}$$

gdzie

$$\lambda = \sum_{i=3}^S \lambda_{2i}$$

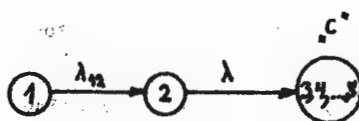
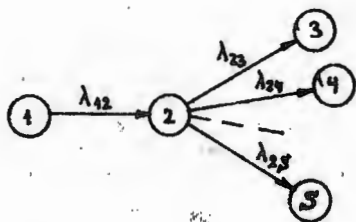
Następnie uwzględniając, że stan C jest zbiorem stanów wachlarza otrzymamy

$$p_{11}(t) = \frac{\lambda_{21}}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}t} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda - \lambda_{12}} e^{-\lambda t} \right\}$$

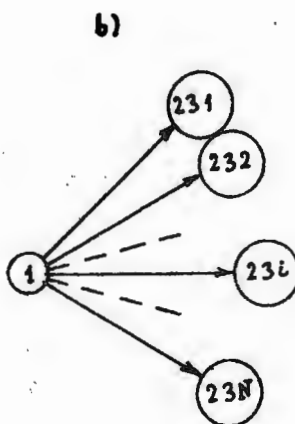
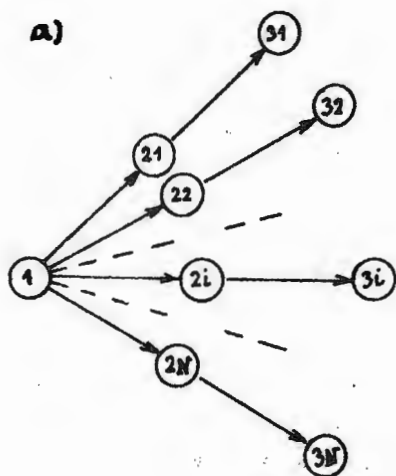
dla $i = 3, 4, \dots, S$.

Typ D. Struktura procesu, widoczna na rysunku 25a typu wachlarz łańcuchów.

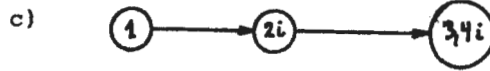
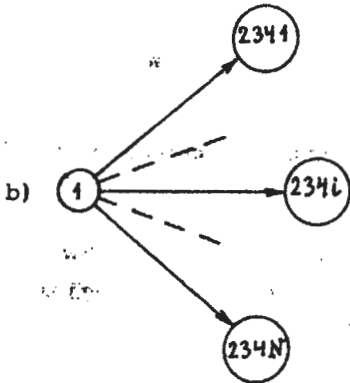
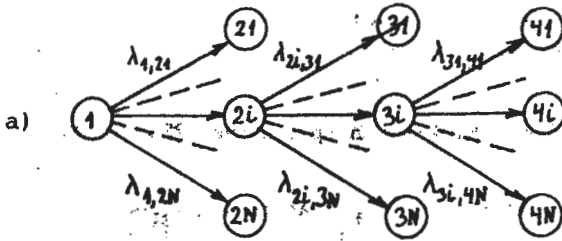
Składając odpowiednio stany poszczególnych łańcuchów otrzymamy, jak to jest pokazane na rysunku 25b, typowy wachlarz, dla którego mamy wprost



Rys.24 Struktura procesu typu C "łańcuch wachlarzowy" i jego dekompozycja



Rys.25 Struktura procesu typu D wachlarz łańcuchów i jego dekompozycja



Rys.26 Struktura procesu typu E "łańcuch wachlarzowy" i sposób dekompozycji

$$P_{1(231)}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right] \quad \text{gdzie } \lambda = \sum_{i=1}^S \lambda_{1,2i}$$

$$P_{11}(t) = e^{-t\lambda}$$

Rozpatrując następnie każdy pojedynczy łańcuch (patrz rys. 25a) otrzymamy

$$P_{1,21}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_{21,31} - \lambda} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{21,31} t} \right]$$

oraz

$$P_{1,31}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{21,31}}{\lambda_{21,31} - \lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\lambda_{21,31} - \lambda} e^{-\lambda_{21,31} t} \right\}$$

dla $i = 1, 2, \dots, N$ oraz $\lambda_{21,31} \neq \lambda$. Przy tym ilość wyróżnionych stanów S jest równa $S = 2N + 1$.

Typ E. Struktura procesu, widoczna na rysunku 26a, typu: łańcuch wachlarzowy.

Składając odpowiednio stany każdego łańcucha do postaci widocznej na rysunku 26b, otrzymamy typowy wachlarz dla, którego mamy wprost

$$P_{11}(t) = e^{-\lambda_{12} t} \quad P_{1,2j}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \left[1 - e^{-\lambda_{12} t} \right]$$

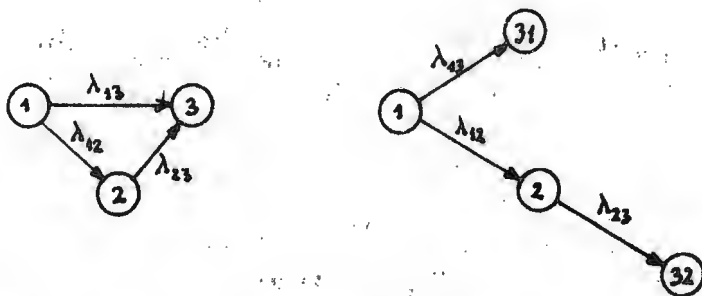
dla $j \neq 1$

$$P_{1(2341)}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \left[1 - e^{-\lambda_{12} t} \right]$$

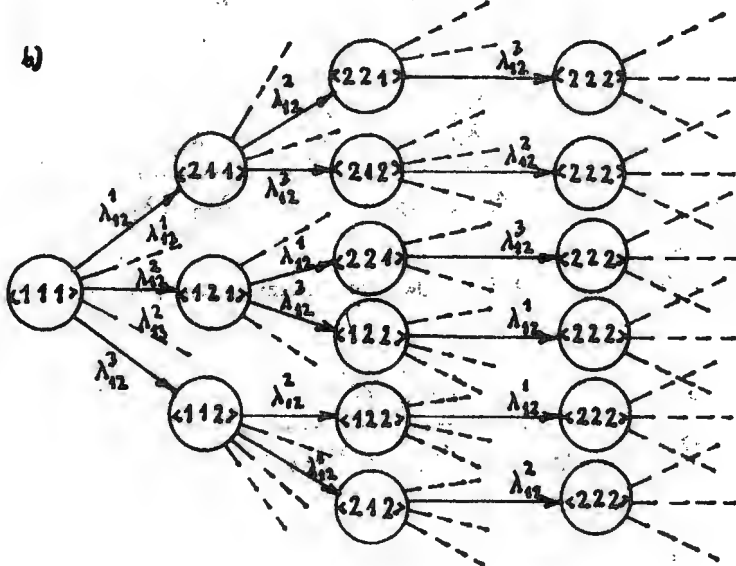
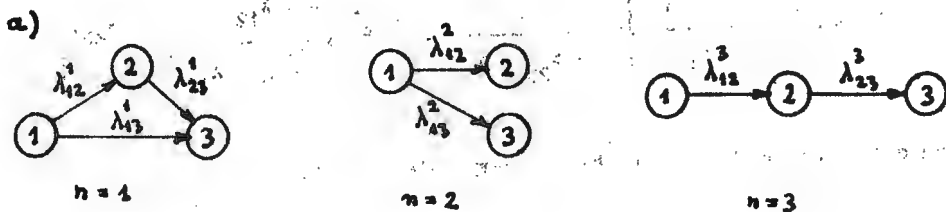
gdzie

$$\lambda_{12} = \sum_{i=1}^S \lambda_{1,2i}$$

Rozpatrując następnie strukturę i -tej całości, patrz rysunek 26c otrzymamy:



Rys.27 Proces o strukturze zamkniętej (nie "drzewo") i jego dekompozycja



Rys.28 Struktura procesu zużycia każdego ($n=1,2,3$) z trzech elementów oraz fragment struktury procesu zmian stanu elementów systemu (patrz przykład III)

$$P_{1,21}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} \left[e^{-\lambda_{12}t} - e^{-\lambda_{23}t} \right]$$

gdzie

$$\lambda_{23} = \sum_{j=1}^N \lambda_{21,3j}$$

oraz

$$P_{1(34)}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{23} - \lambda_{22}} e^{-\lambda_{12}t} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{23}t} \right\}$$

Stąd dalej dla następnego wachlarza mamy (dla $j \neq 1$):

$$P_{1,3j}(t) = \frac{\lambda_{21,3j}}{\lambda_{23}} \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}t} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{23}t} \right\}$$

przy tym

$$P_{1(341)}(t) = \frac{\lambda_{21,31}}{\lambda_{23}} \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}t} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} e^{-\lambda_{23}t} \right\}$$

Rozpatrując dalej strukturę gałęzi i-tej, jak to pokazano na rysunku 26d, otrzymujemy:

$$P_{1,31}(t) = \lambda_{12} \frac{e^{-\lambda_{12}t}}{(\lambda_{23} - \lambda_{12})(\lambda_{34} - \lambda_{12})} + \frac{e^{-\lambda_{23}t}}{(\lambda_{12} - \lambda_{23})(\lambda_{34} - \lambda_{23})} +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda_{34}t}}{(\lambda_{12} - \lambda_{34})(\lambda_{23} - \lambda_{34})} \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \frac{\lambda_{21,31}}{\lambda_{23}}$$

$$P_{1,4}(t) = \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \frac{\lambda_{21,31}}{\lambda_{23}} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{23}\lambda_{34} e^{-\lambda_{12}t}}{(\lambda_{23}-\lambda_{12})(\lambda_{34}-\lambda_{12})} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{34} e^{-\lambda_{23}t}}{(\lambda_{12}-\lambda_{23})(\lambda_{34}-\lambda_{23})} - \frac{\lambda_{12}\lambda_{23} e^{-\lambda_{34}t}}{(\lambda_{12}-\lambda_{34})(\lambda_{23}-\lambda_{34})} \right\}$$

gdzie:

$$\lambda_{34} = \sum_{j1} \lambda_{31,4j}$$

oraz

$$P_{1,4j}(t) = \frac{\lambda_{31,4j}}{\lambda_{34}} \frac{\lambda_{21,31}}{\lambda_{23}} \frac{\lambda_{1,21}}{\lambda_{12}} \left\{ 1 - \frac{\lambda_{23}\lambda_{34} e^{-\lambda_{12}t}}{(\lambda_{23}-\lambda_{12})(\lambda_{34}-\lambda_{12})} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{34} e^{-\lambda_{23}t}}{(\lambda_{12}-\lambda_{23})(\lambda_{34}-\lambda_{23})} - \frac{\lambda_{12}\lambda_{23} e^{-\lambda_{34}t}}{(\lambda_{12}-\lambda_{34})(\lambda_{23}-\lambda_{34})} \right\}$$

Rozpatrzmy następnie przykład zastosowania metody dekompozycji dla procesu o prostej strukturze zamkniętej (nie drzewo) widocznej na rysunku 27 - typu F.

Przekształcając strukturę do postaci drzewa typu D poprzez rozdzielenie stanu pochłaniającego 3 na dwa stany 31 oraz 32, a następnie łącząc stany 2 oraz 31 otrzymujemy prostą strukturę typu B wachlarza o dwóch gałęziach, dla którego dysponujemy wzorami. Ponieważ w naszym przypadku dysponujemy wzorami bezpośrednio dla struktury typu D, więc piszemy wprost:

$$P_{11}(t) = e^{-\lambda t} \quad \lambda = \lambda_{12} + \lambda_{13}$$

$$P_{1,32}(t) = \frac{\lambda_{13}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right]$$

$$P_{1,32}(t) = \frac{\lambda_{13}}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right]$$

$$P_{1,31}(t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \left\{ 1 - e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\lambda_{23}} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{23}t} \right] \right\}$$

$$P_{1,2}(t) = \frac{\lambda}{\lambda_{23} - \lambda} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{23}t} \right]$$

Następnie sumując $p_{1,31}$ oraz $p_{1,32}$ otrzymamy

$$P_{13}(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_{23} - \lambda} \left[e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_{23}t} \right]$$

2.5. Proces zmiany stanów elementów obiektu S^A

Założmy, że zbiór S_n możliwych stanów elementu nr n jest skończony. Ponieważ proces zmiany stanów $s_n(t)$ jest procesem stochastycznym, w którym X jest skończony, a T nieprzeliczalny, więc przebieg tego procesu może być scharakteryzowany macierzą Λ w sposób podany w poprzednim punkcie. Założmy, dla uproszczenia rozważań, że jest to jednorodny proces Markowa o znanej macierzy intensywności przejść

$$\Lambda^n = \left[\lambda_{uv}^n \right], \quad (u, v) \in S_n \times S_n$$

Znając macierz Λ^n możemy wyznaczyć wielkości

$$\Pr \left\{ s_n(t+r) = v \mid s_n(t) = u \right\} = p_n(u, v; r)$$

które opisuje proces zmiany stanów elementów. Zauważmy przy tym, że znajomość tych wielkości dla dowolnego u, v, r jest równoznaczna z pełną (w sensie probabilistycznym) znajomością procesu.

Ogólnie, wartości intensywności przejść zależą od stanu S wszystkich elementów obiektu:

$$\lambda_{uv}^n = \lambda_{uv}^n(S)$$

Jednakże ze względu na trudności obliczeniowe, dalej będziemy przyjmowali, że

λ_{uv}^n nie zależy od \hat{S} (ewentualnie zależy tylko od s_n).

Jest to bardzo silne założenie, z którym możemy się zgodzić tylko w nielicznych przypadkach, gdy z dostateczną dokładnością można przyjąć, że zachowanie każdego elementu obiektu nie zależy od stanu innych elementów.

Reasumując, jeżeli procesy zużycia elementów urządzenia są niezależne, to przeważnie bez większych trudności, posługując się metodą dekompozycji, możemy rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\frac{dp_n(u, v, t)}{dt} = \sum_s p_n(u, s, t) \lambda_{sv}^n$$

$u, v \in S_n$

dla każdego elementu $n = 1, 2, \dots, N$ oddzielnie. Dysponując następnie rozkładami:

$$p_n(u, s, t)$$

możemy określić rozkład prawdopodobieństwa procesu zmian stanów elementów

$$p(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t) = \prod_{n=1}^N p_n(u_n, s_n, t-t^0)$$

$$\hat{U} = \langle u_1, u_2, \dots, u_N \rangle \quad \hat{S} = \langle s_1, s_2, \dots, s_N \rangle$$

wykorzystując ponownie założenie o niezależności procesów.

Jeżeli następnie znany jest rozkład $P(\hat{U}, t^0)$ stanów w chwili początkowej t^0 , to rozkład stanów elementów urządzenia w chwili t będzie określony wzorem

$$P(\hat{S}, t) = \sum_{\hat{U}} P(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t) P(\hat{U}, t^0),$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie możliwe wartości \hat{U} . Ponieważ zwykle przyjmuje się, że rozkład $P(\hat{U}, t^0)$ ma charakter punktowy - całkowita wartość skupiona jest w jednym punkcie $\hat{U} = \hat{u}^0$. W naszym przykładzie przyjęliśmy $\hat{u}^0 = \langle 1, 2, 1 \rangle$. Wówczas

$$p(\hat{S}, t) = P(\hat{u}^0, \hat{S}, t) = \prod_{n=1}^N p_n(\hat{u}_n^0, \hat{S}_n, t-t)$$

Zwróćmy następnie uwagę, że najczęściej struktura procesu zużycia elementów ma postać łańcucha (struktura typu A), a szybkość zużycia elementu zwykle albo nie zależy od stanu elementu (typ I procesu) albo rośnie proporcjonalnie do zużycia (typ II procesu), albo maleje proporcjonalnie do zużycia (typ III procesu). W takich przypadkach możemy niezależnie od ilości wyróżnionych stanów każdego elementu posłużyć się gotowymi wzorami (patrz rozdział o procesach stochastycznych) na rozkłady $p_n(u_n, s_n, t)$, a mianowicie - dla procesu pierwszego typu mamy:

$$p_n^I(u_n, s_n, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s_n < u_n \\ \frac{(\lambda^n t)^{s_n - u_n}}{(s_n - u_n)!} e^{-\lambda^n t} & \text{dla } u_n \leq s_n < S_n \\ 1 - e^{-\lambda^n t} \sum_{s_n = u_n}^{S_n - 1} \frac{(\lambda^n t)^{s_n - u_n}}{(s_n - u_n)!} & \text{dla } s_n = S_n \end{cases}$$

- dla procesu drugiego typu mamy:

$$p_n^{II}(u_n, s_n, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s_n < u_n \\ \binom{s_n - 1}{s_n - u_n} e^{-u_n \lambda^n t} [1 - e^{-\lambda^n t}]^{s_n - u_n} & \text{dla } u_n \leq s_n < S_n \\ 1 - e^{-u_n \lambda^n t} \sum_{s_n = u_n}^{S_n - 1} \binom{s_n - 1}{s_n - u_n} [1 - e^{-\lambda^n t}]^{s_n - u_n} & \text{dla } s_n = S_n \end{cases}$$

dla procesu trzeciego typu mamy:

$$p_n^{III}(u_n, s_n, t) = \begin{cases} \binom{u_n}{s_n} e^{-u_n \lambda^n t} \left[e^{-\lambda^n t} - 1 \right]^{u_n - s_n} & \text{dla } 0 \leq s_n \leq u_n \\ 0 & \text{dla } s_n > u_n \end{cases}$$

Jeżeli założymy, że w naszym urządzeniu występują wszystkie trzy rodzaje elementów, to oznaczając symbolami N^I , N^{II} , N^{III} zbiory numerów tych elementów, których proces zużycia jest odpowiednio pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju otrzymalibyśmy wprost:

$$P(\hat{U}, \hat{S}, t^0) = \prod_{n \in N^I} \frac{[\lambda^n(t-t^0)]^{s_n - u_n}}{(s_n - u_n)!} e^{-\lambda^n(t-t^0)} x$$

$$\prod_{n \in N^{II}} \binom{s_n - 1}{s_n - u_n} \lambda^n u_n (t-t^0) \left[1 - e^{-\lambda^n(t-t^0)} \right]^{s_n - u_n} x$$

$$\prod_{n \in N^{III}} \binom{u_n}{s_n} e^{-\lambda^n u_n (t-t^0)} \left[1 - e^{-\lambda^n(t-t^0)} \right]^{s_n - u_n} x$$

dla $s_n, u_n \in S_n$, $n \in N^I \cup N^{II}$.

W przypadku gdy $s_n = S_n$ czynniki

$p_n^I(u_n, s_n; t-t^0)$ oraz $p_n^{II}(u_n, s_n; t-t^0)$ mają postać:

$$p_n^I(u_n, s_n; t-t^0) = 1 - e^{-\lambda^n(t-t^0)} \sum_{s_n - u_n}^{S_n - 1} \frac{[\lambda^n(t-t^0)]^{s_n - u_n}}{(s_n - u_n)!}$$

$$p_n^{II}(u_n, s_n, t-t^0) = 1 - e^{-\lambda^n u_n (t-t^0)} \sum_{s_n=u_n}^{s_n-1} \binom{s_n-1}{s_n-u_n} [1 - e^{-\lambda^n (t-t^0)}]^{s_n-u_n}$$

2.6 Przykład II. Określenie procesu zmian stanu elementów obiektu

Załóżmy, że urządzenie składa się z dwóch ($N=2$) elementów nr $n = 1, 2$, drugiego II rodzaju, tak że

$$N_I = \emptyset, \quad N_{II} = \{1, 2\}, \quad N_{III} = \emptyset$$

Każdy z tych elementów może niezależnie od pozostałego przebywać w jednym z trzech stanów ($S_n = 3$) nr $s_n = 1, 2, 3$; $n = 1, 2$.

Stan elementów urządzenia jest więc określony wartością wektora

$$\hat{S} = \langle s_1, s_2 \rangle$$

Zbiór możliwych stanów Ω jest iloczynem kartezjańskim zbiorów

$$S_n = \{1, 2, 3\}$$

możliwych stanów elementów $n = 1, 2$

$$\Omega = S_1 \times S_2 = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

Uwzględniając niezależność procesów zużycia oraz rodzaj II elementów otrzymamy

$$P(\hat{U}, \hat{S}; t^0, t) = p_1(u_1, s_1, t-t^0) p_2(u_2, s_2, t-t^0) \dots$$

przy czym

$$p(\hat{U}, \hat{S}; t^0, t) = 0 \text{ dla } s_1 < u_1 \text{ lub } s_2 < u_2$$

$$p(\hat{U}, \hat{S}; t^j, t) = \begin{pmatrix} s_1-1 \\ s_1-u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2-1 \\ s_2-u_2 \end{pmatrix} e^{-(u_1 \lambda^1 + u_2 \lambda^2)(t-t^0)} \left[1 - e^{-\lambda^1(t-t^0)} \right]^{s_1-u_1} \times \\ \times \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right]^{s_2-u_2} \quad \text{dla } s_1, s_2 \neq 3$$

$$p(\hat{U}, \hat{S}; t^j, t) = 1 - e^{-u_1 \lambda^1(t-t^0)} \sum_{s_1=u_1}^2 \begin{pmatrix} s_1-1 \\ s_2-u_2 \end{pmatrix} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right]^{s_1-u_1} \times \\ \times \begin{pmatrix} s_2-1 \\ s_2-u_2 \end{pmatrix} e^{-u_2 \lambda^2(t-t^j)} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right]^{s_2-u_2} \\ \text{dla } \hat{S} = \langle 3, s_2 \rangle$$

$$p(\hat{U}, \hat{S}; t^j, t) = \begin{pmatrix} s_1-1 \\ s_1-u_1 \end{pmatrix} e^{-u_1 \lambda^1(t-t^0)} \left[1 - e^{-\lambda^1(t-t^0)} \right]^{s_1-u_1} \times \\ \times 1 - e^{-u_2 \lambda^2(t-t^0)} \sum_{s_2=u_2}^2 \begin{pmatrix} s_2-1 \\ s_2-u_2 \end{pmatrix} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right]^{s_2-u_2} \\ \text{dla } \hat{S} = \langle s_1, 3 \rangle$$

$$p(\hat{U}, \hat{S}; t^j, t) = 1 - e^{-u_1 \lambda^1(t-t^0)} \sum_{s_1=u_1}^2 \begin{pmatrix} s_1-1 \\ s_1-u_1 \end{pmatrix} \left[1 - e^{-\lambda^1(t-t^0)} \right]^{s_1-u_1} \times \\ \times 1 - e^{-u_2 \lambda^2(t-t^0)} \sum_{s_2=u_2}^2 \begin{pmatrix} s_2-1 \\ s_2-u_2 \end{pmatrix} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right]^{s_2-u_2} \\ \text{dla } \hat{S} = \langle 3, 3 \rangle$$

Uwzględniając, że

$$\binom{s-1}{s-u} = \frac{s-1}{(s-u)! (u-1)!}$$

macierz współczynników liczbowych

$$\begin{pmatrix} s_1-1 \\ s_1-u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2-1 \\ s_2-u_2 \end{pmatrix}$$

dla różnych wartości \hat{U} , \hat{S} będzie miała postać

$\hat{U} \backslash \hat{S}$	11	12	13	21	22	23	31	32	33
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12		1	2		1	2		1	2
13			1			1			1
21				1	1	1	2	2	2
22					1	2		2	4
23						1			
31							1	1	1
32								1	2
33									1

Założmy następnie, że przebieg procesu zużycia elementu nr $n = 1$ praktycznie nie zależy od czynności konserwacyjnych (w przewidywanym okresie eksploatacji). Przeciwnie, element nr $n = 2$ jest czuły na konserwację i wartość λ^2 zależy w sposób istotny od czynności konserwacyjnej. Założmy też, że mamy określoną funkcję $\lambda^2(T_{\text{kons}}^2)$ intensywności zużycia od częstości konserwacji o postaci

$$\lambda^2 = \beta T_{\text{kons}}^2 + b$$

przy czym wykonanie czynności konserwacyjnych (czyszczenia i smarowania) wymaga przerwania pracy urządzenia. W efekcie, do rozkładu $P(\vec{0}, \vec{E}, t^0, t)$ należy w miejsce λ^2 podstawić wielkość $\beta T_{\text{kons}}^2 + b$.

Koniec przykładu

2.7 Przykład III. Określenie procesu zmian stanów elementów obiektu

Założmy, że nasze urządzenie składa się z trzech $N = 3$ elementów nr $n = 1, 2, 3$, których stan decyduje o stanie całego urządzenia. Pozostałe elementy urządzenia nie mają zasadniczego wpływu na jego stan niezawodnościowy. Analiza działania każdego elementu pozwoliła wydzielić charakterystyczne stany każdego elementu i strukturę procesu zużycia. Mianowicie, w każdym elemencie wyróżniono trzy stany $\mathcal{S}_n = \{1, 2, 3\}$, $n = 1, 2, 3$, a strukturę procesu zużycia tych elementów przedstawiono na rysunku 28a. Jeżeli założymy, że w przybliżeniu można uważać, iż każdy z tych elementów jest niezależny od pozostałych, to wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa stanu każdego z tych elementów na podstawie równań Kołmogorowa-Chapmana jest natychmiastowe, gdyż proces zużycia pierwszego elementu jest typu F, drugiego - typu B i trzeciego typu A. Wykorzystując uprzednio wprowadzone wzory otrzymamy:

$p_1(u, v, t)$;

$$p(1,1,t) = e^{-\lambda^1 t} \quad p_1(2,2,t) = e^{-\lambda_{23}^1 t} \quad p_1(2,3,t) = 1 - e^{-\lambda_{23}^1 t}$$

$$p_1(1,2,t) = \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda^1 t} - e^{-\lambda_{23}^1 t} \right] \quad p_1(3,3,t) = 1$$

$$p_1(1,3,t) = 1 - e^{-\lambda^1 t} \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda^1 t} - e^{-\lambda_{23}^1 t} \right] =$$

$$= 1 - \frac{\lambda_{23}^1 - \lambda_{13}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} e^{-\lambda^1 t} + \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} e^{-\lambda_{23}^1 t}$$

gdzie:

$$\lambda^1 = \lambda_{12}^1 + \lambda_{13}^1$$

$p_2(u, v, t)$

$$p_2(1,1,t) = e^{-\lambda^2 t}$$

$$p_2(2,2,t) = 1$$

$$p_2(1,2,t) = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^2} \left[1 - e^{-\lambda^2 t} \right]$$

$$p_2(3,3,t) = 1$$

$$p_2(1,3,t) = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^2} \left[1 - e^{-\lambda^2 t} \right]$$

$$\text{gdzie } \lambda^2 = \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2$$

$p_3(u, v, t)$

$$p_3(1,1,t) = e^{-\lambda_{12}^3 t}$$

$$p_3(2,2,t) = e^{-\lambda_{23}^3 t}$$

$$p_3(2,3,t) = 1 - e^{-\lambda_{23}^3 t}$$

$$p_3(1,2,t) = \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{23}^3 - \lambda_{12}^3} \left[e^{-\lambda_{12}^3 t} - e^{-\lambda_{23}^3 t} \right]$$

$$p_3(3,3,t) = 1$$

$$p_3(1,3,t) = 1 - e^{-\lambda_{12}^3 t} - \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{12}^3 - \lambda_{23}^3} \left[e^{-\lambda_{23}^3 t} - e^{-\lambda_{12}^3 t} \right] =$$

$$= 1 + \frac{\lambda_{23}^3}{\lambda_{12}^3 - \lambda_{23}^3} - e^{-\lambda_{12}^3 t} \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{12}^3 - \lambda_{23}^3} e^{-\lambda_{23}^3 t}$$

Proces zmienny stanów elementów urządzenia będzie więc określony rozkładem warunkowym

$$P_r \left\{ S_1(t) = s_1, S_2(t) = s_2, S_3(t) = s_3 \mid S_1(t_0) = u_1, S_2(t_0) = u_2 \right.$$

$$\left. S_3(t) = u_3 \right\} = P(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t)$$

oraz rozkładem początkowym:

$$p(\hat{U}, t^0)$$

Przykładowo dla $\hat{U} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ rozkład $P(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t)$ będzie miał postać:

$$p(\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle, t^0, t) = e^{-(\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda_{12}^3)(t-t^0)}$$

$$p(\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 2, 1, 2 \rangle, t^0, t) = \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda^1(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] e^{-(\lambda^2 + \lambda_{12}^3)(t-t^0)}$$

$$p(\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 2, 1 \rangle, t^0, t) = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^2} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right] e^{-(\lambda^1 + \lambda_{12}^3)(t-t^0)}$$

$$p(\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle, t^0, t) = \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{23}^3 - \lambda_{12}^3} \left[e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right] e^{-(\lambda^1 + \lambda^2)(t-t^0)}$$

$$p(\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 2, 2, 1 \rangle, t^0, t) = \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda^1(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^2} \times \\ \times \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right] e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)}$$

$$p(\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 2, 1, 2 \rangle, t^0, t) = \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda^1(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] \times \\ \times \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{23}^3 - \lambda_{12}^3} \left[e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right] e^{-\lambda^2(t-t^0)}$$

$$\begin{aligned}
 p(\langle 1,1,1 \rangle, \langle 1,2,2 \rangle, t^0, t) &= \\
 &= \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^2} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right] \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{23}^3 - \lambda_{12}^3} \left[e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right] e^{-\lambda^1(t-t^0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(\langle 1,1,1 \rangle, \langle 2,2,2 \rangle, t^0, t) &= \\
 &= \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda^1(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^2} \left[1 - e^{-\lambda^2(t-t^0)} \right] \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{23}^3 - \lambda_{12}^3} \times \\
 &\quad \times \left[e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right]
 \end{aligned}$$

i.t.d.

Przykładowo dla $\hat{U} = \langle 2,2,2 \rangle$ otrzymamy:

$$p(\langle 2,2,2 \rangle, \langle 2,2,2 \rangle, t^0, t) = e^{-(\lambda_{23}^1 + \lambda_{23}^3)(t-t^0)}$$

$$p(\langle 2,2,2 \rangle, \langle 3,2,2 \rangle, t^0, t) = \left[1 - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)}$$

$$p(\langle 2,2,2 \rangle, \langle 2,3,2 \rangle, t^0, t) = 0$$

$$p(\langle 2,2,2 \rangle, \langle 2,2,2 \rangle, t^0, t) = e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \left[1 - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right]$$

$$p(\langle 2,2,2 \rangle, \langle 3,3,2 \rangle, t^0, t) = 0$$

$$p(\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle 3, 2, 3 \rangle, t^0, t) = \left[1 - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] \left[1 - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right]$$

$$p(\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle 2, 3, 3 \rangle, t^0, t) = 0$$

$$p(\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle 3, 3, 3 \rangle, t^0, t) = 0$$

Zauważmy, że dla $U = \langle 3, 3, 3 \rangle$ otrzymamy:

$$p(\langle 3, 3, 3 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, t^0, t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } v_1 = 3, v_2 = 3, v_3 = 3 \\ 0 & \text{dla } v_1 \neq 3, v_2 \neq 3, v_3 \neq 3 \end{cases}$$

Jeżeli dany byłby rozkład początkowy $P(\hat{U}, t^0)$ w chwili t^0 , na przykład, o postaci:

$$p(\langle u_1, u_2, u_3 \rangle, t^0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } U \end{cases}$$

to wtedy rozkład stanów elementów urzędzenia w chwili t

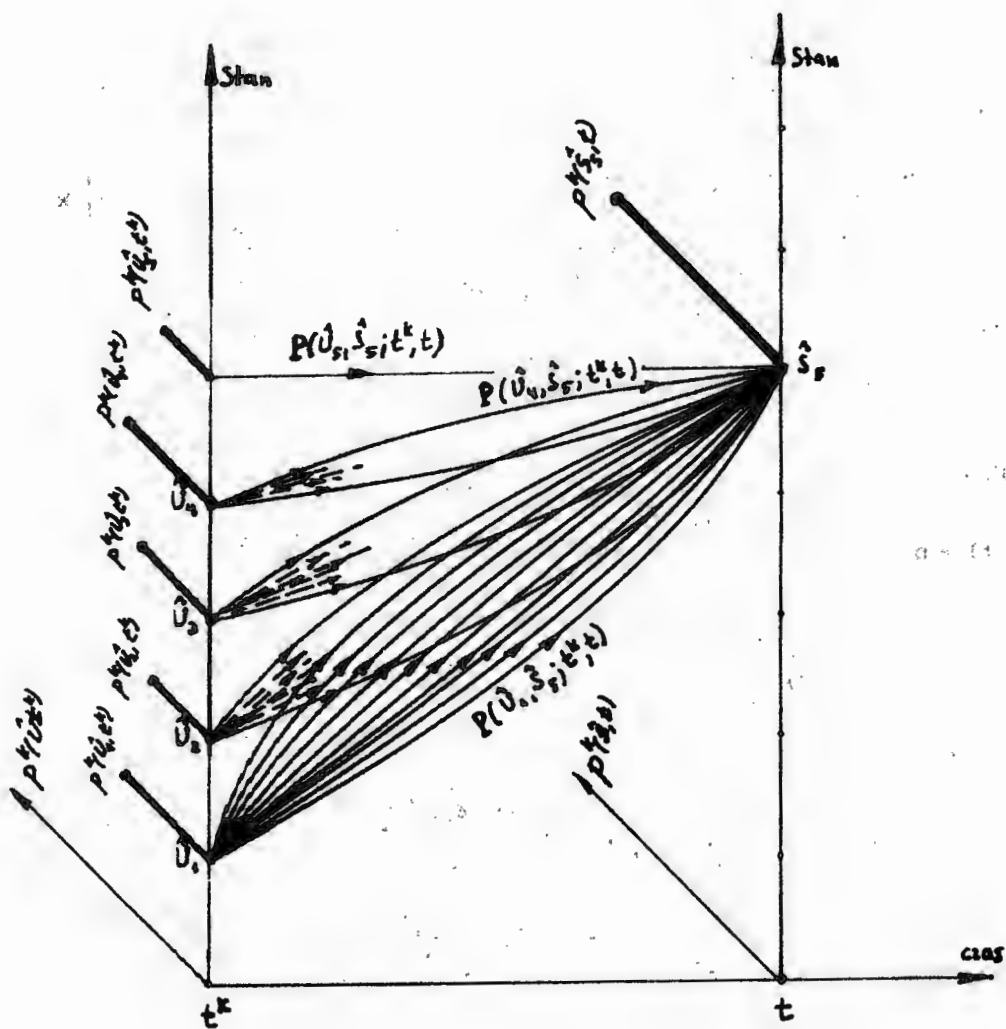
$$P(\hat{S}, t) = \sum P(\hat{U}, \hat{S}, t^0) P(\hat{U}, t^0)$$

miałby postać:

$$p(\langle 1, 2, 1 \rangle, t) = e^{-(\lambda^1 + \lambda_{12}^3)(t-t^0)}$$

$$p(\langle 2, 2, 1 \rangle, t) = \frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{23}^1 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^1(t-t^0)} \right] e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)}$$

$$p(\langle 1, 2, 2 \rangle, t) = e^{-\lambda^1(t-t^0)} \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{23}^3 - \lambda^1} \left[e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right]$$



Rys.29 Konstrukcja wyznaczania wartości $P^k(\hat{S}, t)$ dla danego rozkładu początkowego $P^k(\hat{U}, t^k)$

$$p(\langle 2, 2, 2 \rangle, t) = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} \left[e^{-\lambda_{12}(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}(t-t^0)} \right] \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23} - \lambda_{12}} \times$$

$$\times \left[e^{-\lambda_{12}^3(t-t^0)} - e^{-\lambda_{23}^3(t-t^0)} \right]$$

Zauważmy przy tym, że

$$p(\langle s_1, 3, s_3 \rangle, t) = 0$$

oraz

$$p(\langle s, i, s_3 \rangle, t) = 0$$

dla dowolnych wartości s_1 oraz s_3 .

Koniec przykładu.

UWAGI KOŃCOWE

Jak Czytelnik zauważył, ogólny model procesu eksploatacji zbliżony do rzeczywistego jest bardzo złożony. Przy aktualnym stanie rozwoju metod optymalizacji rzadko mogą być wykorzystane do rozwiązywania problemów optymalizacji i konstrukcji obiektów technicznych. W tej sytuacji pozostaje możliwość wykorzystania opisanych modeli do symulacji eksploatacji przy danych parametrach charakteryzujących zarówno konstrukcje, jak strategie obsługi obiektu technicznego.

W tym sensie możliwe jest doskonalenie konstrukcji maszyn i urządzeń przy pomocy komputera symulującego oczekiwany przebieg procesu eksploatacji. Ze względu na to, że symulacja może odtwarzać oczekiwany przebieg całego procesu życia obiektu, to proces doskonalenia maszyny lub urządzenia może dotyczyć zarówno

- struktury konstrukcji, charakterystyk zużycia i niezawodności elementów z uwzględnieniem ich kosztów wytwarzania

jak i

- strategii obsługi, odstępów międzyobsługowych, rodzajów obsługi, zakresów kontrolnych sprawdzeń i wymian z uwzględnieniem wszelkich konsekwencji związanych z kosztami,

W niektórych szczególnych przypadkach istnieje możliwość wykorzystania metod optymalizacji. Dotyczy to w szczególności tych obiektów, dla których wyznaczane są chwile obsługi po wykonaniu określonej pracy lub po upływie określonego czasu niezależnie od ich stanu, a prawdopodobieństwo ich nagłego uszkodzenia jest pomijalnie małe.

Innym szczególnym przypadkiem jest sytuacja, w której obserwowalny stan obiektu jako całości jednoznacznie określa stan jego elementów. Wtedy istnieje możliwość przerywania procesu użytkowania obiektu - gdy osiągnie on określony stan - celem skierowania do odpowiedniej obsługi.

Niestety, wymienione wyżej przypadki nie są zbyt często spotykane w praktyce. Pierwszy dotyczy obiektów, od których wymagana jest wysoka niezawodność, a ich złożoność uniemożliwia łatwą ocenę stanu elementów składowych po efektach pracy. Drugi dotyczy bądź obiektów bardzo prostych (umożliwiających łatwą identyfikację stanu elementów po efektach ich pracy), bądź wyposażonych w systemy ciągłej, automatycznej diagnostyki elementów składowych.

Najprostszym przypadkiem jest sytuacja gdy obiekt podlega tylko jednemu rodzajowi obsługi - pełnej odnowie, a jednocześnie wyróżnia się tylko dwa możliwe stany obiektu (zdalny lub uszkodzony). Wtedy opis procesu eksploatacji sprowadza się do znanego procesu odnowy.

L I T E R A T U R A

1. R. Barlow, R. Proschan - Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rinekat and Winston: N.York 1975.
2. R. Barlow, F. Proschan - Mathematical theory of reliability, N.York J. Wiley 1965.
3. Beichelt F. Franken P. - Zuverlässigkeit Instandhaltung VEB Verlag Technik Berlin 1983.
4. Waprosy matematycznej teorii niezawodności - E.J.Barziłowicz, I.K.Beljew, B.A.Kasztanow i dr.; Pod red. B.W.Gnedenko - M, Radio i Swjaz 1983-376 c.
5. Elements of Theory of Markov Processes and Thier Applications - A.T.Bhorucha - Reid Mc Grow - Hill Book comp. INC N.York, Toronto, Londyn 1960.
6. R.R. Borkow, F. Proschan - Mathematical Theory of Reliability - John Wiley - New. York 1965.
7. Markowskije procesy E.B. Dynkin Fizmatiz 1963.
8. An introduction to probability theory and its applications W. Feller N. York J. Willey 1968-I 1971 II.
9. Gadasin B.A. Uszakow I.A. (1975): Nadeżnost słożnych informacionno - uprawljaszczych. Moskwa: Sow. Radio.
10. Gadasin B.A. Uszakow I.A. Nadeżnost słożnych informacionno - uprawljaszczych sistem - M. Sow. Radio, 1975 - 191 c.
11. Gercbach J.B.Korbonskij C.H.B. Modeli otkazow - M. Sow. Radio, 1966-166 c.
12. K. Grzesiak - Niezawodność urządzeń elektronicznych - WNT, Warszawa 1983.
13. Gnedenko B.W. Beljajew, J.K. Solowjew, A.D. Matematyckije metody w teorii niezawodności - M. Nauka, 1965 - 524 c.
14. J. Kałuski - Niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych - Skrypt nr 1143 - Politechnika Śląska 1983.
15. Kanarczuk W.E. Osnovy niezawodności maszyn - Kijew: Nauk. dumka 1982 - 246 c.
16. A First course in Stochastic Processes S. Karlin Academic Press N.York, London 1968.
17. Finite Markov Chains J.G.Kemeny J.L Snell Dartmonth College 1959.
18. Kremer G. Libenmer M. Stacjonarnyje słucznyje procesy M. Mir 1969-398 c.
19. B. Kopyciński - Zarys teorii odnowy i niezawodności - WNT, Warszawa 1973.
20. Perewerzew E.S. Słucznyje procesy w parametryczeskich modelach niezawodności. Naukowa dumka Kijew 1987.

21. S. Piasecki - Elementy teorii niezawodności i eksploatacji urządzeń, Skrypt serii "Teoria badań operacyjnych, WAT, Warszawa 1974.
22. Polowko A.M. Osnovy teorii nadezhnosti - M. Nauka 1964 - 446 c.
23. Poradnik niezawodności - Podstawy matematyczne - Wyd. Przem. Masz. WEMA, Warszawa, 1982.
24. M. Prażewski, E. Korczak, M. Zaremba - Niezawodność urządzeń elektronicznych - WKiŁ 1987.
25. Rajkin A.L. Elementy teorii nadezhnosti technicheskikh system. Pod red. I.A. Uszkowa - M. sow. Radio 1978 - 280 c.
26. Соловьев А.Д. (1978): Расчет и оценка характеристик надежности Москва: Изд. Знание.
27. Tichonow B.J. Mirnow M.A. Markowskije procesy - M. sow. Radio, 1977-488 c.
28. R. Tomaszek, D. Janicki - Modele niezawodnościowe urządzeń. Materiały "Szkoły Zimowej 74" Problemy i Modele Eksploatacji Maszyn - Ośrodek Postępu technicznego - Katowice 1974.
29. Wencel A.D. Kurs teorii slučajnych procesow - M. Nauka, 1975 - 318 c.
30. W. Zamojski - Teoria i technika niezawodności - Skrypt Politechnika Wrocławska 1976.

ISBN 83-85847-01-4

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN,
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-68-22 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl