



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

STANISŁAW PIASECKI

**ELEMENTY TEORII NIEZAWODNOŚCI
I EKSPLOATACJI OBIEKTÓW
O ELEMENTACH WIELOSTANOWYCH**

dla inżynierów

Warszawa 1995

**ELEMENTY TEORII NIEZAWODNOŚCI
I EKSPLOATACJI OBIEKTÓW
O ELEMENTACH WIELOSTANOWYCH**

dla inżynierów

STANISŁAW PIASECKI

Warszawa 1995

11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200

O NIEZAWODNOŚCI ELEMENTU

Przypomnijmy podstawowe założenia klasycznej, dwustanowej teorii niezawodności. Opiera się ona o pojęcie prawdopodobieństwa przejścia ze stanu "0" do stanu "1" lub przeciwnie, przy tym prawdopodobieństwo przejścia ze stanu "0" do stanu "1" nazywamy prawdopodobieństwem uszkodzenia. Wielkość tę oznaczamy symbolem $P_{ij}(t, \tau)$ i odczytujemy jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $i = 0, 1$, w jakim znajdował się element w chwili t do stanu $j = 0, 1$ po upływie czasu τ (w chwili $t + \tau$). Przedział $(0, t)$ jest dotychczasowym czasem pracy elementu. Dla elementu nowego mamy $t = 0$. Jeżeli proces uszkodzeń jest procesem jednorodnym w czasie, to wartość $P_{ij}(t, \tau)$ nie zależy od t , co w skrócie zapisujemy w postaci $P_{ij}(\tau)$ i interpretujemy jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j po upływie czasu τ .

W tym miejscu teoria niezawodności styka się z teorią odnowy i teorią masowej obsługi. W klasycznej teorii niezawodności przyjmuje się bowiem, że elementy są nieanaprawialne, to znaczy $p_{10}(t, \tau) = 0$. W odróżnieniu od powyższego, w teorii masowej obsługi przejście ze stanu $i = 1$ do stanu $j = 0$ jest możliwe i następuje po pewnym czasie zwanym czasem obsługi. Zdarzeniu nazywanym w teorii niezawodności uszkodzeniem, w teorii masowej obsługi odpowiada zdarzenie polegające na zgłoszeniu klienta do obsługi. Z kolei, zdarzenie przeciwne w teorii masowej obsługi jest nazywane zakończeniem obsługi.

Teoria odnowy zakłada także możliwości przejścia ze stanu $i = 1$ do stanu $j = 0$ nazywając to zdarzenie odnową, z tym zastrzeżeniem, że klasyczna teoria odnowy zakłada, iż jest to zdarzenie natychmiastowe, tak że zdarzenie uszkodzenia pociąga za sobą natychmiastowe zdarzenie odnowienia. Próby rozszerzenia zastosowań teorii odnowy prowadzą do uwzględnienia faktu, że odnowa nie występuje natychmiast i wtedy różnica między teorią odnowy a teorią masowej obsługi sprowadza się do jednego, lecz istotnego faktu. W teorii masowej obsługi uwzględnia się skończone możliwości systemu obsługi, a więc że system obsługi nie może jednocześnie odnawiać nieskończenie wiele zgłoszeń.

Wracając do klasycznej teorii niezawodności wiemy, że będą nas interesowały dwie wielkości: $p_{01}(t, \tau)$ oraz $p_{00}(t, \tau) = 1 - p_{01}(t, \tau)$, ponieważ $p_{10}(t, \tau) = 0$ i $p_{11}(t, \tau) = 1$. Charakterystyczną cechą procesów teorii niezawodności jest więc to, że rozpatrujemy je przy warunku początkowym *element nieuszkodzony* (stan $i = 0$).

Ważną charakterystyką procesu uszkodzeń jest *szybkość narastania wartości* $p_{01}(t, \tau)$ w zależności od wzrostu τ . Wielkość tę nazywamy *intensywnością uszkodzeń*, oznaczamy symbolem $\lambda_{01}(t)$ oraz definiujemy następująco:

$$\lambda_{01}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(t, \tau) - p_{01}(t, 0)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} p_{01}(t, \tau) \Big|_{\tau = 0}$$

Definiuje się także intensywność przeciwną

$$\lambda_{00}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{00}(t, \tau) - p_{00}(t, 0)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} p_{00}(t, \tau) \Big|_{\tau=0}$$

Zauważmy, że biorąc pod uwagę warunki początkowe

$$p_{01}(t, 0) = 0$$

$$p_{00}(t, 0) = 1$$

możemy także napisać:

$$\lambda_{01}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(t, \tau)}{\tau}$$

$$\lambda_{00}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{00}(t, \tau) - 1}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-p_{01}(t, \tau)}{\tau} = -\lambda_{01}(t)$$

Z ostatniej równości wynika:

$$\lambda_{01}(t) + \lambda_{00}(t) = 0$$

co jest odpowiednikiem równości:

$$p_{01}(t) + p_{00}(t) = 1$$

Ponieważ, jak wiemy, proces uszkodzeń jest procesem Markowa, więc dla procesu dwustanowego ogólne równania Kolmogorowa będą miały postać:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{01}(t, \tau) = p_{00}(t, \tau) \cdot \lambda_{01}(t+\tau) + p_{01}(t, \tau) \cdot \lambda_{10}(t+\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{00}(t, \tau) = p_{00}(t, \tau) \cdot \lambda_{00}(t+\tau) + p_{01}(t, \tau) \cdot \lambda_{10}(t+\tau)$$

Ponieważ $\lambda_{10}(t) = \lambda_{11}(t) = 0$, to układ równań sprowadza się do dwóch (zależnych) równań różniczkowych.

Rozwiązując drugie równanie z określonym poprzednio warunkiem początkowym otrzymamy:

$$p_{00}(t, \tau) = \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda_{01}(u) du \right\} ,$$

a stąd

$$p_{01}(t, \tau) = 1 - p_{00}(t, \tau) = 1 - \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda_{01}(u) du \right\} .$$

Wielkość $p_{01}(t, \tau)$ nazywamy *funkcją niezawodności* i oznaczamy symbolem $R(t, \tau)$. Wartość $R(t, \tau)$ jest prawdopodobieństwem, że w odcinku czasu $[t, t+\tau]$ nie nastąpi uszkodzenie (oczywiście, jeżeli element w chwili t był nieuszkodzony).

Wielkość $p_{01}(t, \tau)$ nazywamy *prawdopodobieństwem uszkodzenia* i oznaczamy ją zwykle symbolem $F(t, \tau)$. Wartość $F(t, \tau)$ jest prawdopodobieństwem uszkodzenia elementu w odcinku czasu $(t, t+\tau)$ (oczywiście, w chwili t nieuszkodzonego).

Między wielkościami $R(t, \tau)$ i $F(t, \tau)$ zachodzą oczywiste związki:

$$R(t, \tau) = 1 - F(t, \tau)$$

oraz

$$\frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} = -f(t, \tau); \quad \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = f(t, \tau)$$

Jeżeli proces uszkodzeń jest jednorodny w czasie, to funkcje $\lambda_{01}(t)$ oraz $\lambda_{00}(t)$ oznaczamy często symbolami $\lambda_1(t) = \lambda$ i $\lambda_0(t) = -\lambda$. Są one funkcjami stałymi, a więc liczbami. W takim przypadku proces uszkodzeń elementu scharakteryzowany jest jedną liczbą λ .

Zwróćmy uwagę na to, że każda dystrybuanta uszkodzeń $F(t, \tau)$ jest w pełni zdefiniowana funkcją $\lambda(t)$, gdyż

$$f(t, \tau) = 1 - \exp \left\{ - \int_t^{t+\tau} \lambda(u) du \right\}$$

Przebieg funkcji $f(0, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(0, \tau)$; $R(0, \tau)$ oraz $\lambda(t)$ dla rozkładu logarytmo-normalnego i Weibulla są pokazane na rys. 1 i 2.

O NIEZAWODNOŚCI SYSTEMU

Rozpatrzmy system składający się z dwóch elementów A i B. Jak wiemy z klasycznej teorii niezawodności, w takim przypadku mogą występować tylko dwie sensowne struktury niezawodnościowe:

równoległa: system jest uszkodzony (w stanie 1) wtedy i tylko wtedy kiedy obydwa elementy są uszkodzone, a więc gdy para elementów jest w stanie (1, 1).

szeregowa: system jest zdalny (w stanie 0) wtedy i tylko wtedy kiedy obydwa elementy są nieuszkodzone, a więc gdy para elementów jest w stanie (0,0).

Znając więc niezawodność elementów i rodzaj struktury (równoległa czy szeregową) możemy wyznaczyć niezawodność systemu. Dla struktury:

- równoległej

$$F(\tau) = P_{01}^A(\tau) \cdot P_{01}^B(\tau)$$

oraz

$$R(\tau) = 1 - F(\tau) = 1 - P_{01}^A(\tau) \cdot P_{01}^B(\tau)$$

- szeregowej

$$R(\tau) = P_{00}^A(\tau) \cdot P_{00}^B(\tau)$$

oraz

$$F(\tau) = 1 - R(\tau) = 1 - P_{00}^A(\tau) \cdot P_{00}^B(\tau)$$

W szczególności, jeżeli

$$P_{01}^A(\tau) = F^A(\tau) = 1 - e^{-\lambda^A \cdot \tau}$$

$$P_{01}^B(\tau) = F^B(\tau) = 1 - e^{-\lambda^B \cdot \tau}$$

to otrzymamy dla struktury

- równoległej

$$F(t) = \left(1 - e^{-\lambda^A \cdot \tau}\right) \left(1 - e^{-\lambda^B \cdot \tau}\right) = \left(1 - e^{-\lambda \cdot \tau}\right)^2 \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

$$R(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \tau}\right)^2 \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

- szeregowej

$$R(\tau) = e^{-(\lambda^A + \lambda^B) \cdot \tau} = e^{-2\lambda \tau} \quad \text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

$$F(\tau) = 1 - R(\tau) = 1 - e^{-2\lambda\tau}$$

$$\text{dla } \lambda^A = \lambda^B = \lambda$$

Jednakże tak proste rozważania wystarczą tylko w tym przypadku gdy uszkodzenia elementów są od siebie całkowicie niezależne. Jest to założenie w wielu przypadkach niemożliwe do przyjęcia. Wtedy niezbędnym staje się aparat procesów wielostanowych. Oczywiście, także niezbędna jest znajomość struktury uwarunkowań procesu uszkodzeń poszczególnych elementów. Fizycznie, uszkodzenie elementu może zależeć od stanu innych współpracujących elementów. Może się zdarzyć także sytuacja, że uszkodzenie elementów zależy od czynnika zewnętrznego: stresu. W takim przypadku czynnik zewnętrzny należy włączyć jako dodatkowy element systemu sprowadzając ten przypadek do poprzedniego, gdy uszkodzenie jednego elementu zależy od stanu innego (lub innych).

Przykładem zależności uszkodzeń jest praca dwóch elementów na wspólne obciążenie (np. dwóch prądnic). Wtedy uszkodzenie jednego z nich powoduje, że drugi musi przyjąć na siebie całość obciążenia, co oczywiście zwiększa możliwość jego uszkodzenia.

Oznaczmy symbolem $p_{00,1}^A(t,\tau)$ prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu A (przejście w stan $j = 1$) po czasie τ , jeżeli w chwili t obydwa elementy (A, B) były zdadne w stanie (0, 0). Podobnie $p_{01,1}^A(t,\tau)$ odczytujemy jako prawdopodobieństwo uszkodzenia elementu A po czasie τ , jeżeli w chwili t element B był uszkodzony, zaś element A - nieuszkodzony.

W przypadku uszkodzeń zależnych mamy:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) \neq p_{01,1}^A(t,\tau)$$

natomiast dla uszkodzeń niezależnych:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) = p_{01,1}^A(t,\tau)$$

co umożliwia nam uproszczenie oznaczeń według następującej zasady:

$$p_{00,1}^A(t,\tau) = p_{01,1}^A(t,\tau) = p_{0,1}^A(t,\tau)$$

W rezultacie, dla dwóch elementów możemy wyróżnić następujące cztery sensowne struktury uwarunkowań:

1. Uszkodzenie elementu A nie zależy od stanu B i przeciwnie - uszkodzenie B nie zależy od stanu A).
2. Uszkodzenie elementu A zależy od stanu elementu B, lecz uszkodzenie elementu B nie zależy od stanu elementu A.
3. Uszkodzenie elementu B zależy od stanu elementu A, lecz uszkodzenie elementu A nie zależy od stanu elementu B,
4. Uszkodzenie elementu A zależy od stanu elementu B i podobnie - B zależy od A.

Jeżeli system składa się z większej liczby elementów, to możliwe przypadki struktury uwarunkowań mogą być bardzo skomplikowane.

Przyjmując, przykładowo, czwartą strukturę uwarunkowań i szeregową strukturę niezawodności, otrzymamy:

$$P_{00,00}(t,\tau) = P_{00,0}^A(t,\tau) \cdot P_{00,0}^B(t,\tau) = R(t,\tau)$$

Zauważmy, że w przypadku gdy struktura niezawodnościowa systemu jest szeregową, nieważna jest struktura uwarunkowań. Prawdopodobieństwo uszkodzenia takiego systemu nie zależy od tego, czy uszkodzenia są zależne czy też nie. Dotyczy to każdego systemu szeregowego, niezależnie od liczby jego elementów.

Wracając do naszego przykładu systemu o strukturze równoległej i zależnych uszkodzeniach, zauważmy że wtedy dla wyznaczenia wartości

$$P_{00,11}(t,\tau) = F(t,\tau)$$

potrzebna jest znajomość zależności:

$$P_{00,10}(t,\tau) = P_{00,1}^A(t,\tau) \cdot P_{00,0}^B(t,\tau)$$

$$P_{10,11}(t,\tau) = P_{10,1}^A(t,\tau) \cdot P_{10,1}^B(t,\tau) = P_{10,1}^B \quad \text{gdyż } P_{10,1}^A(t,\tau) = 1$$

oraz

$$P_{00,01}(t,\tau) = P_{00,0}^A(t,\tau) \cdot P_{00,1}^B(t,\tau)$$

$$P_{01,11}(t,\tau) = P_{01,1}^A(t,\tau) \cdot P_{01,1}^B(t,\tau) = P_{01,1}^A(t,\tau) \quad \text{gdyż } P_{01,1}^B(t,\tau) = 1$$

Procedurą wyznaczania wartości $F(t,\tau)$ dla takiego przypadku zajmiemy się nieco dalej. Obecnie zwróćmy uwagę, że dla opisu zachowania się dwuelementowego równoległego systemu, przy zależnych uszkodzeniach, konieczna i wystarczająca jest znajomość czterech funkcji:

$$P_{00,01}(t,\tau) ; \quad P_{00,1}^B(t,\tau) ;$$

$$P_{01,1}^A(t,\tau) ; \quad P_{10,1}^B(t,\tau) ;$$

lub odpowiednio funkcji intensywności:

$$\lambda_{00,1}^A(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_{00,1}^B(t) = \alpha^B(t)$$

$$\lambda_{01,1}^A(t) = \beta^A(t)$$

$$\lambda_{10,1}^B(t) = \beta^B(t)$$

Jeśli natomiast uszkodzenia są niezależne, to do opisu wystarcza znajomość tylko dwóch funkcji

$$P_{01}^A(t,\tau)$$

$$P_{01}^B(t,\tau)$$

lub odpowiednio funkcji

$$\lambda_0^A(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_0^B(t) = \alpha^B(t)$$

Jeżeli zaś procesy uszkodzeń są jednorodne w czasie, to - odpowiednio czterech liczb: α^A , α^B , β^A , β^B (dla uszkodzeń zależnych) lub dwóch liczb α^A , α^B (dla uszkodzeń niezależnych).

Celem wyznaczenia wartości $F(t, \tau)$ dla takiego dwuelementowego systemu, widoczną staje się potrzeba wyróżnienia czterech stanów: (0,0); (0,1); (1,0) i (1,1) o intensywnościach przejścia:

$$\lambda_{00,10}(t) = \alpha^A(t)$$

$$\lambda_{00,01}(t) = \alpha^B(t)$$

$$\lambda_{01,11}(t) = \beta^A(t)$$

$$\lambda_{10,11}(t) = \beta^B(t)$$

przy czym

$$\alpha^A(t) \leq \beta^A(t);$$

$$\alpha^B(t) \leq \beta^B(t).$$

Jednakże trudności opisu procesu uszkodzeń systemu składającego się z dwóch fizycznych elementów komplikują się dalej, jeżeli zwrócimy uwagę, że uszkodzenia mogą być różnego rodzaju. Jednocześnie zauważmy, że jeżeli celem naszych wysiłków jest podniesienie niezawodności wyrobów, to istotną jest dla nas informacja o rodzaju uszkodzenia, a nie tylko stwierdzenia faktu, że nastąpiło uszkodzenie. Wynika to z tego, że znając rodzaj uszkodzenia możemy znaleźć przyczynę uszkodzenia, a ta informacja pozwala na przedsięwzięcie odpowiednich zabiegów technologicznych celem usunięcia przyczyn powstawania uszkodzeń. W rezultacie, praktycznie zawsze podczas badań niezawodności, mamy do czynienia z wieloma stanami - jednym stanem zdatności i wieloma, różniącymi się rodzajem uszkodzeń, stanami niezdatności. W rezultacie, w wyniku badań otrzymujemy oszacowanie wielu funkcji intensywności przejścia $\lambda_1(t)$; $\lambda_2(t)$; $\lambda_3(t)$... ze stanu zdatności (0) do poszczególnych rodzajów stanów niezdatności 1, 2, 3, Przy tym, w wielu przypadkach proste sumowanie tych intensywności dla wyznaczenia intensywności uszkodzeń w ogóle nie ma sensu.

Sytuację taką przedstawia nam następujący przykład:

PRZYKŁAD I. O NIEZAWODNOŚCI I STRUKTURZE NIEZAWODNOŚCIOWEJ SYSTEMU DWUELEMENTOWEGO

Żałómy, że prostownik, przekształcający prąd przemienny na prąd stały składa się z dwóch szeregowo połączonych ogniw półprzewodnikowych, które wraz z kondensatorami i dławikami tworzą układ prostowniczy. Układ ten jest w małym stopniu obciążony, natomiast pracuje pod dużym napięciem (jak, na przykład, w układzie zasilania lampy kineskopowej w odbiorniku telewizyjnym). W celu

zwiększenia niezawodności układu, połączono szeregowo dwa wspomniane ogniwa półprzewodnikowe A i B obniżając w ten sposób dwukrotnie napięcie pracy każdego z nich.

Jeżeli symbolem $\lambda(v)$ oznaczamy zmierzoną laboratoryjnie intensywność uszkodzenia ogniwa, która jest zależna od napięcia pracy v , to opisany sposób podwyższenia niezawodności zasilania ma tylko wtedy sens gdy zachodzi nierówność:

$$\lambda(v) > 2 \cdot \lambda\left(\frac{v}{2}\right)$$

gdzie: v - jest napięciem pracy prostownika. Załóżmy, że równość ta jest spełniona.

W celu uproszczenia zapisu dalej będziemy stosowali oznaczenia

$$\lambda(v) = \alpha \quad \lambda\left(\frac{v}{2}\right) = \beta$$

Ponieważ połączenie ogniw jest szeregowo, więc funkcja niezawodności $R(t)$ prostownika (pomijając uszkodzenia innych elementów) będzie wyrażała się wzorem:

$$R(t) = P_{00,00}(t) = P_{00,0}^A(t) \cdot P_{00,0}^B(t) = e^{-2\beta t}$$

i to niezależnie od tego czy uszkodzenia ogniw są zależne, czy też nie.

Jednakże zagadnienie określenia struktury niezawodnościowej komplikuje się, gdy zwrócimy uwagę, że uszkodzenia ogniw półprzewodnikowych mogą być dwójakiego rodzaju, bowiem intensywność uszkodzeń $\lambda(v)$ w rzeczywistości jest sumą dwóch składników:

$\lambda_1(v)$ - intensywności uszkodzeń polegających na zniszczeniu (przebicciu) warstwy izolacyjnej półprzewodnika, co prowadzi do zwarcia ogniwa,

$\lambda_2(v)$ - intensywności uszkodzeń polegających na całkowitej utracie zdolności przewodzenia co prowadzi do powstania przerwy w obwodzie ogniwa.

Przy tym, oczywiście:

$$\lambda(v) = \lambda_1(v) + \lambda_2(v)$$

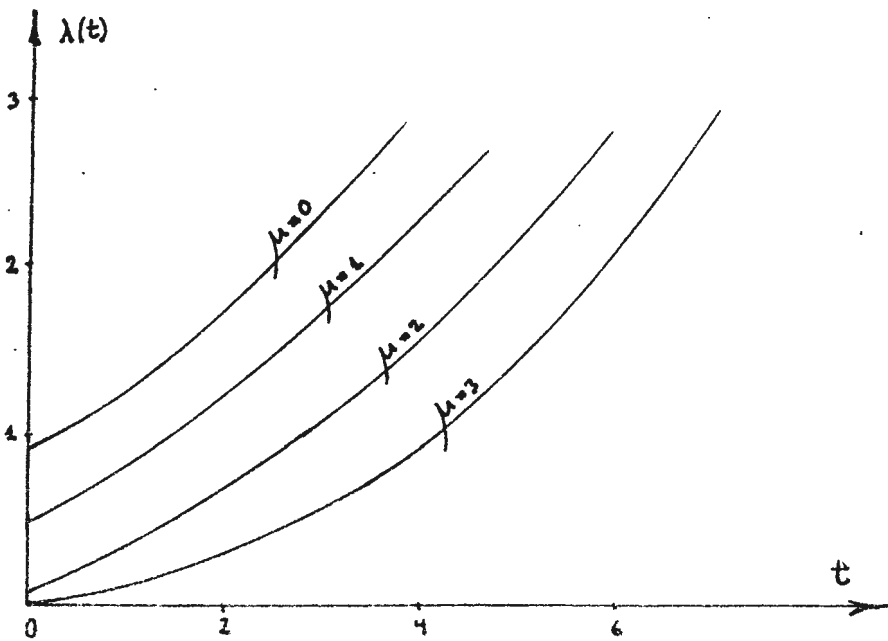
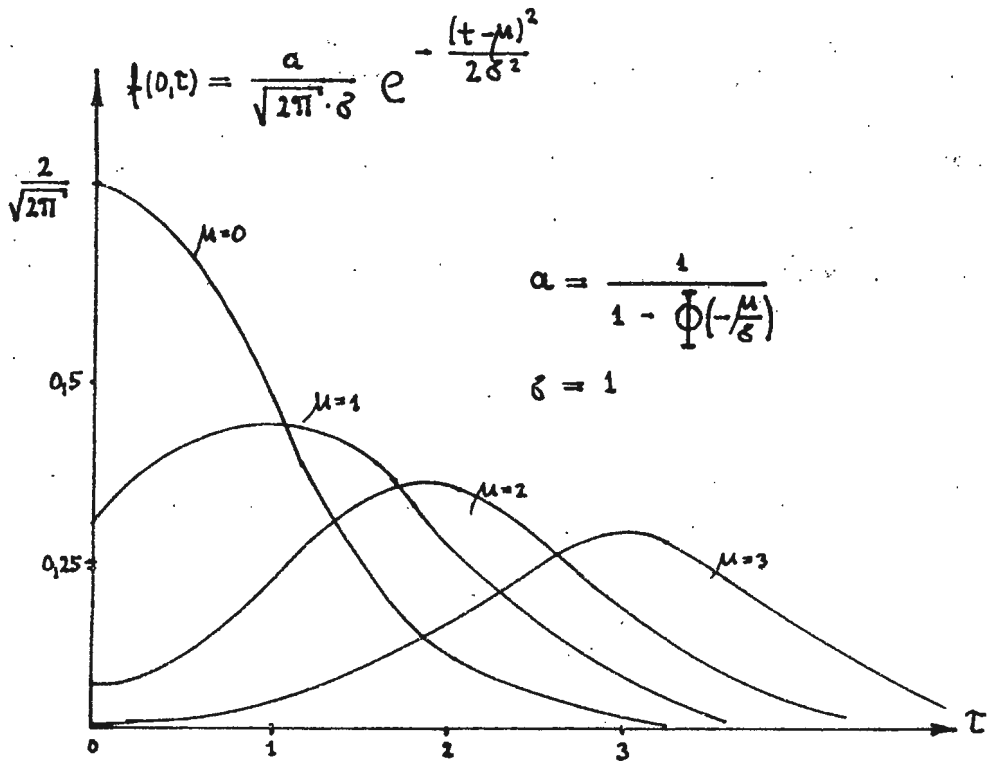
Jeżeli będziemy rozpatrywali tylko pierwszą składową (zakładając, że druga składowa jest pomijalnie mała), to niezawodnościowa struktura układu jest równoległa. Jeżeli ponadto nie uwzględnimy, że wartość λ_1 zależy od v , a więc jeżeli założymy, że

$$\lambda_1(v) = \alpha_1 = \text{const.}$$

to przy niezależnych uszkodzeniach ogniw otrzymamy funkcję niezawodności układu o postaci:

$$R(t) = 1 - P_{00,11}(t) = 1 - \left[1 - P_{00}^A(t)\right] \cdot \left[1 - P_{00}^B(t)\right] = 1 - \left(1 - e^{-\alpha_1 t}\right)^2$$

Założmy obecnie, że wartość λ_1 zależy od v , tak jak to jest w rzeczywistości. Wtedy nie możemy już przyjąć, że uszkodzenia są niezależne, gdyż uszkodzenie



Rys.1 Uciety rozkład normalny

ogniwa zależy od tego, czy drugie ogniwo jest uszkodzone (wtedy pracuje pod napięciem v), czy też nie (wtedy pracuje pod napięciem $\frac{v}{2}$).

Aby wyznaczyć $R(t)$ gdy $\lambda_2 \approx 0$, a więc dla struktury równoległej, należy zauważyć, że uszkodzenie układu prostowniczego jest określone sumą następujących elementarnych, wzajemnie wykluczających się zdarzeń.

- że w chwili τ ($0 < \tau \leq t$) uszkodzi się jedno z dwóch ogniw (i żadne nie uszkodziło się do tej chwili), a następnie, że w pozostałym odcinku czasu (τ, t) uszkodziło się pozostałe ogniwo.

Prawdopodobieństwo takiego, elementarnego zdarzenia jest równe:

$$2\beta_1 \cdot e^{-2\beta_1\tau} \cdot \left[1 - e^{-\alpha_1 \cdot (t-\tau)} \right] d\tau$$

Sumując elementarne prawdopodobieństwa w odcinku czasu od $\tau = 0$ do $\tau = t$ i odejmując od jedności otrzymamy:

$$R(t) = 1 - 2\beta_1 \int_0^t e^{-2\beta_1\tau} \left[1 - e^{-\alpha_1(t-\tau)} \right] d\tau =$$

$$= \frac{\alpha_1 e^{-2\beta_1 t} - 2\beta_1 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_1 - 2\beta_1}$$

Zauważmy, że gdy podstawiamy

$$\alpha_1 = \beta_1 = \lambda_1$$

to otrzymamy poprzedni wzór na wartość $R(t)$, gdy uszkodzenia były niezależne. Pozostaje jednak dalej problem, co zrobić, gdy obie składowe (λ_1 oraz λ_2) są współmierne? Jaka jest struktura niezawodnościowa prostownika - szeregowy czy równoległy?

Przeanalizujemy ten przypadek. Początkowo określimy zbiór elementarnych zdarzeń, wzajemnie wykluczających się, które powodują uszkodzenia prostownika. Zauważmy, że w tym przypadku mamy dwa rodzaje uszkodzeń.

Pierwszego rodzaju zdarzeniem będzie występowanie przerwy w którymkolwiek z ogniw przed wystąpieniem zwarcia. Drugiego rodzaju zdarzenie to wystąpienie zwarcia w którymkolwiek ogniwie przed wystąpieniem przerwy, a następnie wystąpienie zwarcia lub przerwy w pozostałym ogniwie.

Prawdopodobieństwo elementarnego zdarzenia pierwszego rodzaju, jeżeli przerwa wystąpiła dokładnie w chwili τ , będzie równe:

$$2\beta_2 e^{-2\beta_2\tau} e^{-2\beta_1 t}$$

Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia pierwszego rodzaju będzie równe wartości wyrażenia:

$$2\beta_2 \int_0^t e^{-2(\beta_1 + \beta_2)\tau} d\tau = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \left[1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} \right]$$

Zdarzenie drugiego rodzaju składa się z dwóch kolejnych zdarzeń elementarnych:

- zwarcia jednego z ogniw w chwili τ przy czym $0 < \tau \leq t$

oraz

- zwarcia lub przerwy drugiego ogniwa w chwili x przy czym $\tau < x \leq t$.

Prawdopodobieństwo drugiego w kolejności zdarzenia elementarnego jest równe:

$$\alpha_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(x - t)} dx + \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(x - \tau)} dx$$

Stąd, całkując po x otrzymamy prawdopodobieństwo drugiego w kolejności zdarzenia

$$1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)}$$

Jest to prawdopodobieństwo, że w odcinku czasu $(t - \tau)$ nastąpi uszkodzenie pozostałego ogniwa, bądź z powodu zwarcia, bądź przerwy. Ostatecznie prawdopodobieństwo elementarnego zdarzenia drugiego rodzaju będzie określone wyrażeniem:

$$2\beta_1 e^{-2(\beta_1 + \beta_2)\tau} \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right] d\tau$$

Całkując to wyrażenie względem τ otrzymamy:

$$\beta_1 \frac{1 - e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t}}{\beta_1 + \beta_2} + 2\beta_2 \frac{e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2}$$

Sumując prawdopodobieństwo zdarzeń pierwszego i drugiego rodzaju oraz odejmując tę sumę od jedności, otrzymamy następującą postać funkcji niezawodności.

$$R(t) = e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - 2\beta_1 \frac{e^{-2(\beta_1 + \beta_2)t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta_1 - 2\beta_2}$$

W przypadku gdy $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ otrzymamy wzór poprzedni. Jeżeli dodatkowo $\alpha_1 = \beta_1 = \text{const.}$, to otrzymamy znany wzór dla struktury równoległej i niezależnych uszkodzeń. W przypadku gdy $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ otrzymamy znany wzór dla struktury szeregowej.

Rozważmy teraz przypadek, gdy celem zwiększenia niezawodności prostownika połączono równolegle dwa ogniwa półprzewodnikowe A i B. Ponieważ obciążenie prądowe prostownika wysokiego napięcia jest niewielkie, to chociaż prądowe obciążenie każdego z dwóch ogniw zmniejszyło się dwukrotnie, to nie wpłynęło to znacząco na zmianę ich niezawodności. Załóżmy, że w przybliżeniu niezawodność każdego z nich nie zmieniła się. Przyjmijmy, tak jak poprzednio, że występują uszkodzenia ogniwo dwójakiego rodzaju - typu zwarcie lub przerwa.

Zauważmy, że - podobnie jak poprzednio - w przypadku uszkodzenia typu przerwa, jak również w przypadku uszkodzenia typu zwarcie, prawdopodobieństwo takiego uszkodzenia elementarnego będzie równe:

$$2\alpha_1 e^{-2\alpha_1 \tau} + 2\alpha_2 e^{-2\alpha_2 \tau} dt$$

Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia typu zwarcie będzie równe:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right]$$

Dla elementarnego, podwójnego zdarzenia typu przerwa, a następnie zwarcie lub przerwa, prawdopodobieństwo takiego zdarzenia będzie równe:

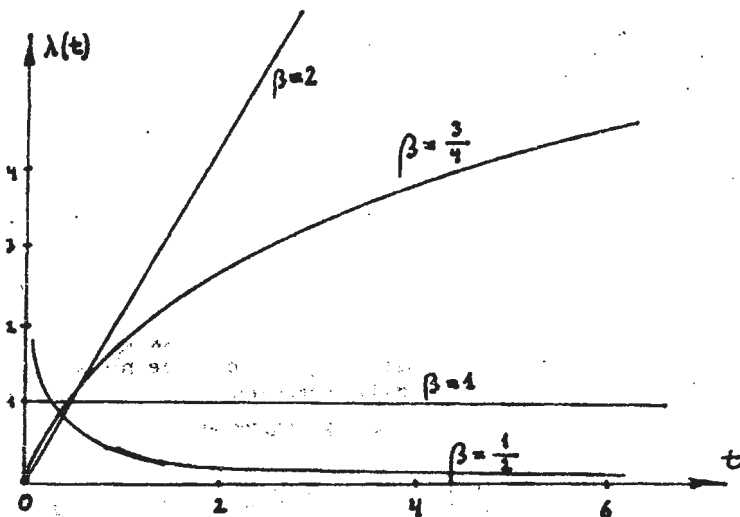
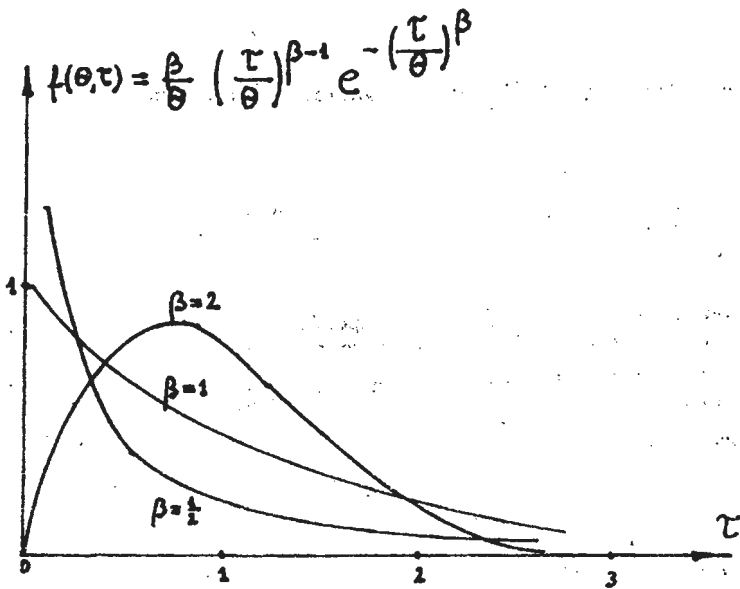
$$2\alpha_2 e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right] dt$$

Stąd prawdopodobieństwo uszkodzenia typu przerwa będzie równe:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \tau)} \right]$$

Odejmując sumę prawdopodobieństw obu typów uszkodzeń od jedności otrzymamy funkcję niezawodności takiego układu:

$$R(t) = \frac{e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[2\alpha_2 - (\alpha_2 - \alpha_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right]$$



Rys.2 Rozkład Weibulla

Zauważmy, że w przypadku gdy $\alpha_2 = 0$ otrzymamy funkcję niezawodności dla układu szeregowego:

$$R(t) = e^{-2\alpha_1 t}$$

choć ogólnie są połączone równolegle. Przeciwnie, jeżeli $\alpha_1 = 0$, to otrzymamy:

$$R(t) = 2e^{-\alpha_2 t} - e^{-2\alpha_2 t} = 1 - [1 - e^{-\alpha_2 t}]^2$$

Można także zauważyć, że taki sposób zwiększania niezawodności układu ma sens tylko wtedy, kiedy zachodzi nierówność $\alpha_1 < \alpha_2$.

To, który z tych dwóch sposobów zwiększania niezawodności układu należy wybrać zależy od stosunku wartości α_1 , α_2 , $2\beta_1$, $2\beta_2$. Decyduje o tym porównanie wartości dwóch wyrażeń:

$$R(t) = e^{-2bt} - 2\beta_1 \frac{e^{-2bt} - e^{-at}}{a - 2b}, \quad a - 2b > 0$$

dla szeregowo połączonych ogniw oraz

$$R(t) = \frac{e^{-at}}{a} [2\alpha - ae^{-at}], \quad \alpha_1 < \alpha_2$$

dla równolegle połączonych ogniw, przy tym:

$$a = \alpha_1 + \alpha_2$$

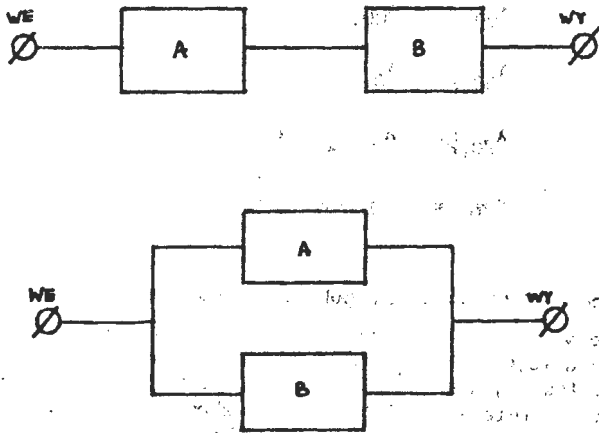
$$b = \beta_1 + \beta_2$$

Rozważony przykład poucza nas, jak wielką lekkomyślnością jest traktowanie różnych uszkodzeń jako uszkodzeń w ogólności i że nie ma sensu suma intensywności $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ różnego rodzaju uszkodzeń.

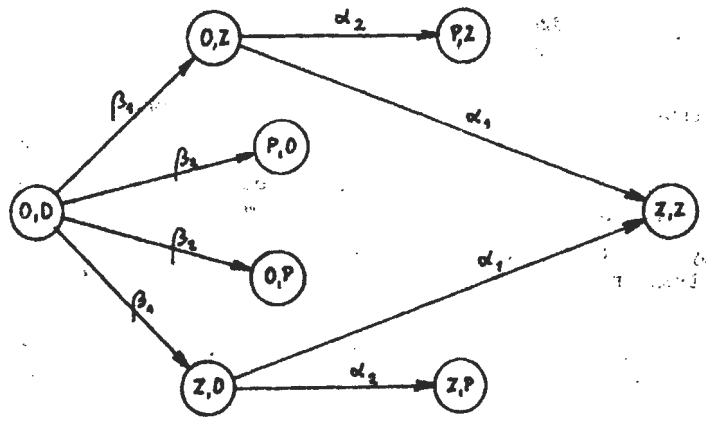
KONIEC PRZYKŁADU

Z przykładu wynika, że istnieje wyraźna zależność struktury niezawodnościowej nie tylko od budowy układu, ale także od rodzaju rozpatrywanego uszkodzenia. W przypadku gdy występują różnego rodzaju (pod względem fizycznym) uszkodzenia, pojęcie struktury niezawodnościowej staje się nieprzydatne. W takich sytuacjach zmuszeni jesteśmy do analizy bardzo złożonych zdarzeń, co znakomicie powiększa możliwość popełnienia pomyłki. Ułatwieniem w takich przypadkach jest rozszerzenie zbioru rozpatrywanych stanów.

Oznaczając symbolem Z - zwarcie, a symbolem P - przerwę, w przypadku szeregowego połączenia prostowników należałoby wyróżnić następujące stany: (0,0) - pełnej zdatności, (Z,0) i (0,Z) - niepełnej zdatności oraz (Z,P); (Z,Z); (P,0)



Rys.3 "Szeregowa" a) oraz "równoległa" struktura niezawodnościowa systemu (obiekту) dwuelementowego



Rys.4 Struktura procesu uszkodzeń dwuelementowego prostownika o szeregowej strukturze niezawodnościowej

1 (0,P) - niezdatności. Intensywności przejścia byłyby równe:

$$\lambda_{00,Z0} = \lambda_{00,OZ} = \beta_1$$

$$\lambda_{00,PO} = \lambda_{00,OP} = \beta_2$$

$$\lambda_{Z0,ZZ} = \lambda_{OZ,ZZ} = \alpha_1$$

$$\lambda_{Z0,ZP} = \lambda_{OZ,PZ} = \alpha_2$$

Struktura takiego procesu uszkodzeń jest pokazana na rys. 4.

Następnie należy rozwiązać zadanie polegające na wyznaczeniu prawdopodobieństw przejść ze stanu (0,0) do poszczególnych interesujących nas stanów. Zauważmy przy tym, że takie przedstawienie procesu umożliwia nam wyznaczenie prawdopodobieństwa szczególnie niebezpiecznego uszkodzenia - zwarcia całego układu. Będzie ono równe prawdopodobieństwu osiągnięcia stanu ZZ.

STRUKTURA SYSTEMU I PROCESU

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na konieczność ścisłego odróżnienia:

- struktury procesu uszkodzeń (rys. 4) oraz
- struktury niezawodnościowej systemu (rys. 3)

W strukturze procesu

- elementami struktury są stany obiektu fizycznego (systemu)

natomiast

- relacjami wiążącymi te stany są możliwości (procesy) przejścia (ze stanu na stan) wyrażone ilościowo intensywnościami lub prawdopodobieństwami przejścia.

W strukturze systemu (obiektu) fizycznego.

- elementami struktury są fizyczne elementy (składniki) systemu (obiektu)

natomiast

- relacjami wiążącymi te elementy są możliwości przepływu czynnika wiążącego je w całość (zwykle jest nim prąd elektryczny, ciecz lub inne czynniki).

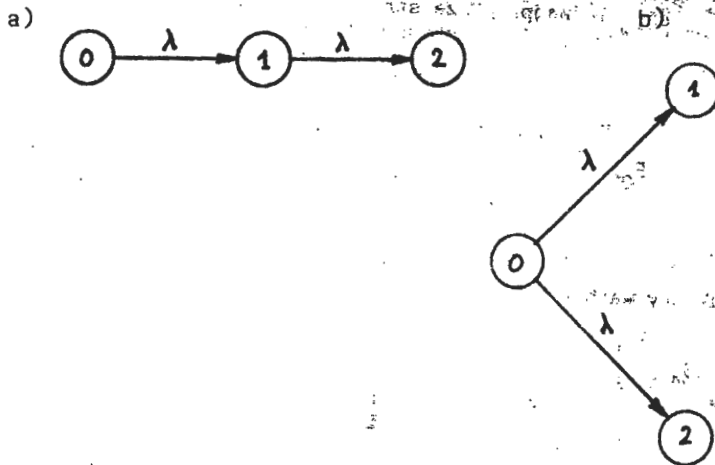
W ostatnim przypadku uszkodzenie równoznaczne jest z przerwaniem możliwości przepływu czynnika z wejścia do wyjścia.

Różnicę między tymi pojęciami pokażemy na najprostszym przykładzie systemu dwuelementowego oraz procesu o dwóch relacjach.

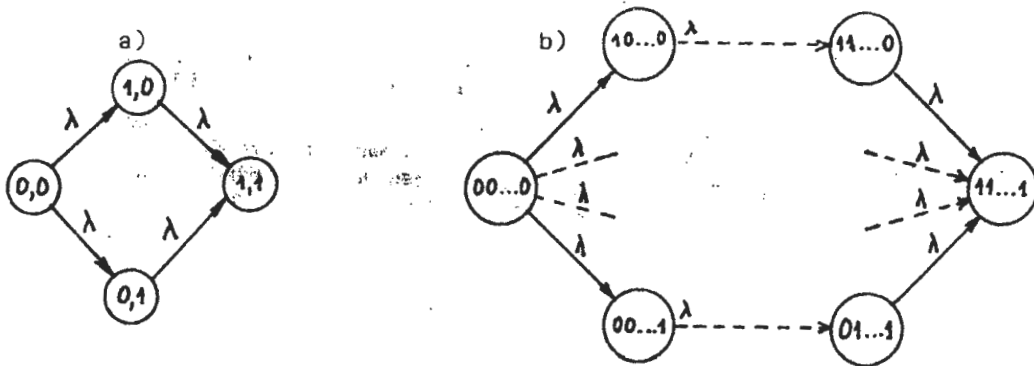
Na rys. 3 mamy pokazane dwie struktury systemu: a) szeregową i b) równoległą.

Jak wiemy, jeśli intensywności uszkodzeń są równe, to dla przypadku a) mamy

$$F(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$$



Rys.5 Struktura a) "łańcuchowa" oraz b) "wachlarzowa" procesu uszkodzeń



Rys.6 Struktura procesu uszkodzeń dla: a) systemu dwuelementowego b) systemu wieloelementowego o strukturze równoległej

oraz

$$f(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^2$$

dla przypadku b) i niezależnych uszkodzeniach.

Dla struktury szeregowej relacjami są pary: (WE,A) (A,B) (B,WY).

Dla struktury równoległej relacjami są pary: (WE,A) (WE,B), (A,WY) (B,WY).

Na rysunku 5 pokazane są dwie najprostsze struktury procesu uszkodzeń. Na rys.

5a struktura łańcuchowa, na rys. 5b struktura typu wachlarz.

Dla struktury łańcuchowej:

$$P_{02}(t) = F(t) = 1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}$$

natomiast dla struktury wachlarzowej mamy:

$$P_{01}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}] \quad P_{02}(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}]$$

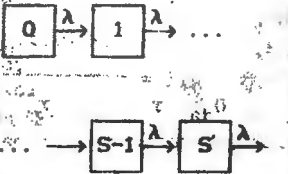
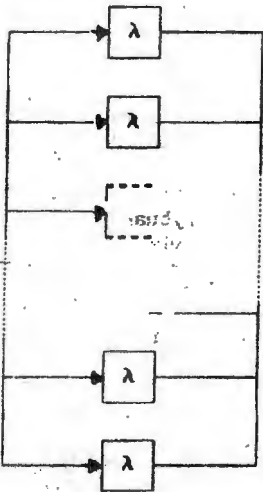
Przyjmując, że obiekt jest uszkodzony jeżeli jest w stanie: 1 lub 2 otrzymamy

$$F(t) = P_{01}(t) + P_{02}(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$$

Dla struktury łańcuchowej relacjami są pary: (0,1) (1,2), a dla wachlarzowej - pary: (0,1) (0,2).

Zauważmy, że o ile dystrybuanta $F(t)$ czasu poprawnej pracy do uszkodzenia jest taka sama dla systemu szeregowego oraz procesu wachlarzowego, to nie zachodzi takie podobieństwo dla systemu równoległego i procesu łańcuchowego.

TABLICA I

Rozkład Erlanga	Rozkład potęgowo-wykładniczy
$m = \frac{S}{\lambda}$	$m = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$
$\sigma^2 = \frac{S}{\lambda^2}$	$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[2 \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n^3(n-1)!} - \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \right]$
$\Lambda(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{S-1}}{(S-1)! \sum_{s=0}^{S-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!}}$	$\Lambda(t) = N\lambda e^{-\lambda t} \frac{[1 - e^{-\lambda t}]^{N-1}}{1 - [1 - e^{-\lambda t}]^N}$
	
$\Lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt} F(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{d}{dt} R(t)}{R(t)}$	
$\int_0^t \Lambda(x) dx = - \int_0^t \frac{\frac{d}{dx} R(x)}{R(x)} dx = - \ln R(t)$	$R(t) = 1 - F(t)$

Weźmy dla przykładu system N-elementowy o strukturze równoległej i niezależnych uszkodzeniach, dla którego dystrybuanta ma postać rozkładu potęgowo-wykładniczego

$$F(t) = [F_1(t)]^N$$

gdzie $F_1(t)$ - dystrybuanta pojedynczego elementu.

W przypadku gdy

$$F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

otrzymamy

$$F(t) = [1 - e^{-\lambda t}]^N$$

Podobnie weźmy proces łańcuchowy składający się z S podprocesów o stanach $s = 0, 1, 2, \dots, S$. Wtedy dystrybuanta dla końcowego stanu S będzie miała postać rozkładu Erlanga

$$P_{OS}(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!}$$

Jeżeli intensywności przejścia mają te same wartości λ , a dystrybuanta czasu każdego podprocesu ma postać wykładniczą. Pełniejszą charakterystykę tych rozkładów znajdzie Czytelnik w TABELI I i na rys. 7.

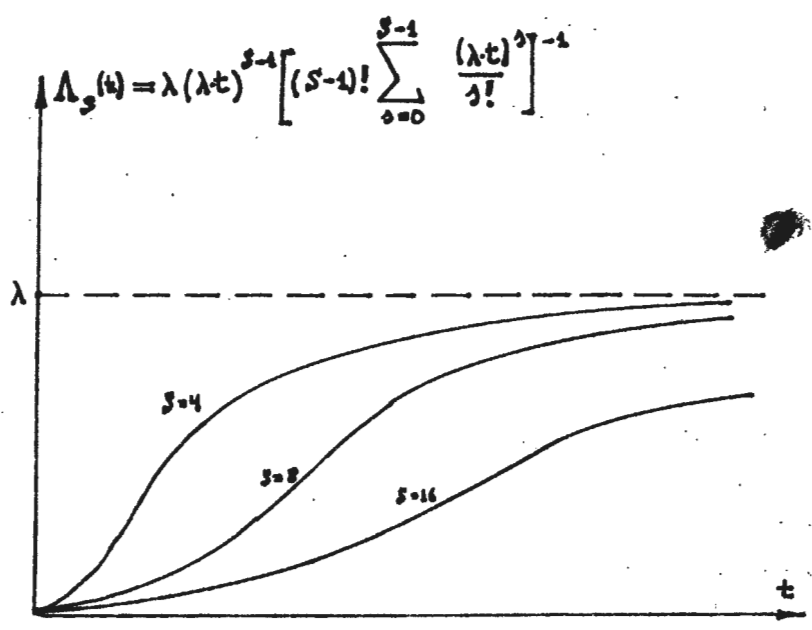
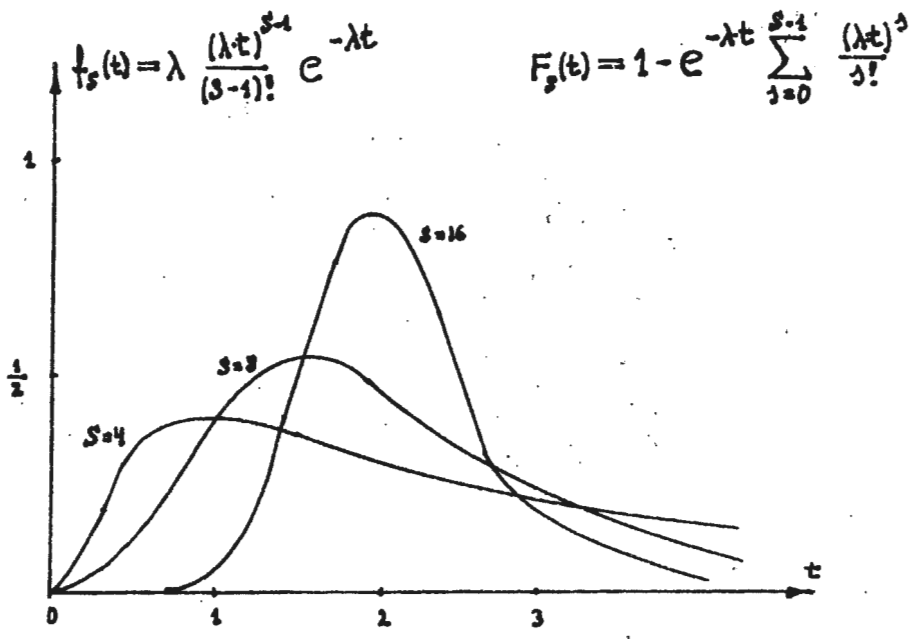
Dystrybuanty te są różne, gdyż mechanizmy procesu uszkodzeń są różne. Zwróćmy uwagę na to, że w systemie o strukturze równoległej zakłada się, że wszystkie elementy rozpoczynają swoją pracę z chwilą rozpoczęcia pracy systemu. System jest uszkodzony, jeżeli wszystkie elementy się uszkodzą. Jeżeli więc symbolami τ_n oznaczylibyśmy losowy czas pracy elementu $n = 1, 2 \dots N$ do chwili uszkodzenia, to czas pracy systemu do chwili uszkodzenia byłby określony wyrażeniem

$$\tau = \max \tau_n$$

W procesie łańcuchowym mechanizm jest inny. Tam każdy ze składowych procesów rozpoczyna się, gdy skończy się poprzedni (to znaczy, gdy proces osiągnie odpowiedni stan zapoczątkowujący następane przejścia). W tym więc przypadku dystrybuanta $F(t)$ jest rozkładem wielkości

$$\tau = \sum_{s=0}^{S-1} \tau_{s,s+1}$$

gdzie $\tau_{s,s+1}$ jest czasem przejścia ze stanu s do stanu s + 1.



Rys.7 Rozkład Erlanga

Można zadać pytanie: Jaka struktura procesu uszkodzeń odpowiada mechanizmowi uszkodzeń w systemie o strukturze równoległej? Na rys. 6 znaleźliśmy odpowiedź na to pytanie, gdzie pary (a,b) określają stan z rys. 3 elementu A - "a" oraz elementu B - "b", przy tym a,b = 0 - element nieuszkodzony, a,b = 1 - uszkodzony.

O POJĘCIU STANU OBIEKTU

Pod pojęciem stanu obiektu będziemy rozumieli jego stan fizyczny określony wartościami odpowiednich wielkości fizycznych. W przypadku przeliczalnego zbioru stanów przez stan o numerze $s = 0, 1, 2 \dots$ S rozumiemy pewien zbiór wartości tych wielkości fizycznych. Jeżeli obiekt jest w stanie s oznacza to, że zmierzone wartości wielkości fizycznych mieszczą się w granicach jakie wyznacza nam zbiór definiujący stan s.

Niekiedy stan fizyczny obiektu nie może być bezpośrednio zidentyfikowany ze względu na trudności pomiarowe. W takich przypadkach możemy rozszerzać pojęcie stanu uciekając się do następującej konstrukcji myślowej. Mianowicie, bardzo często możemy założyć, że między stanem fizycznym obiektu a jego dotychczasowym *napracowaniem* τ (liczonym w godzinach pracy lub przebytych kilometrach lub liczbie zdarzeń lub ... itd) istnieje dość ścisły związek. Ponieważ *napracowanie* obiektu może być łatwo obserwowane i mierzone, to możemy uznać, że pomiar wartości τ może zastąpić właściwą identyfikację stanu fizycznego.

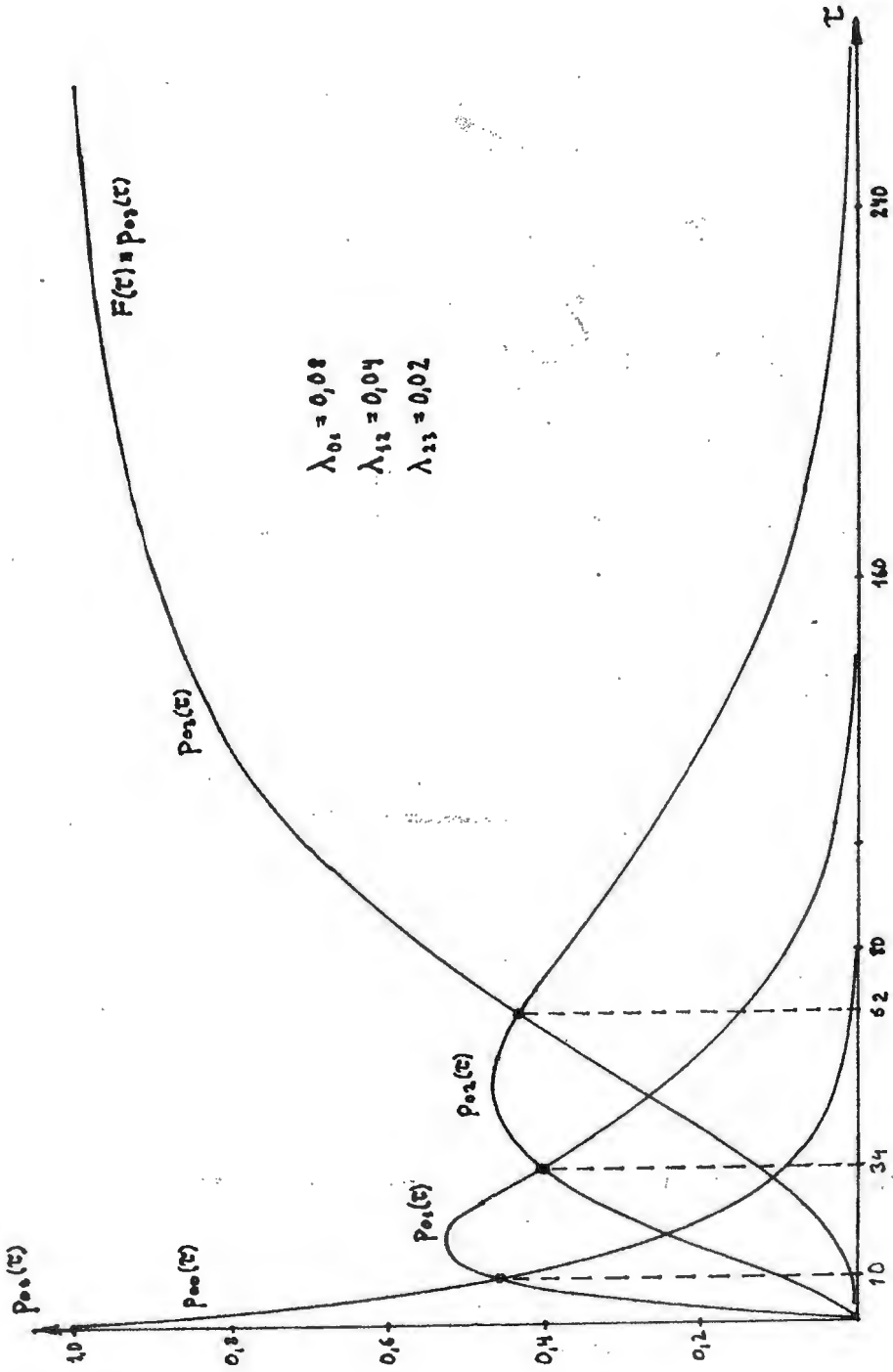
W ten sposób zakładamy istnienie i znajomość funkcji $s(\tau)$ określającej stan obiektu na podstawie jego *napracowania*. Przykład określania takiej funkcji jest pokazany na rys. 8. Mamy na nim wykresy wartości: $P_{00}(\tau)$; $P_{01}(\tau)$; $P_{02}(\tau)$ oraz $P_{03}(\tau)$ dla procesu łańcuchowego, w którym intensywności λ_{01} , $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{2,3}$ mają interpretacje intensywności wzrostu luzu na wale na godzinę pracy obiektu, zaś stany określone są minimalnym i maksymalnym luzem na wale w danej klasie. Ponieważ faktyczne zużycie i wzrost luzu na wale jest wielkością losową, więc wyznaczone zakresy godzin pracy odpowiadające poszczególnym stanom będą tylko pewnym statystycznym przybliżeniem funkcji $s(\tau)$. Wyznaczając punkty krytyczne rozgraniczające obszary na zasadzie równych prawdopodobieństw otrzymamy z rys. 8 następujące przyporządkowania

$S = 0$	$0 \leq \tau < 10$
$S = 1$	$10 \leq \tau < 34$
$S = 2$	$34 \leq \tau < 62$
$S = 3$	$62 \leq \tau$

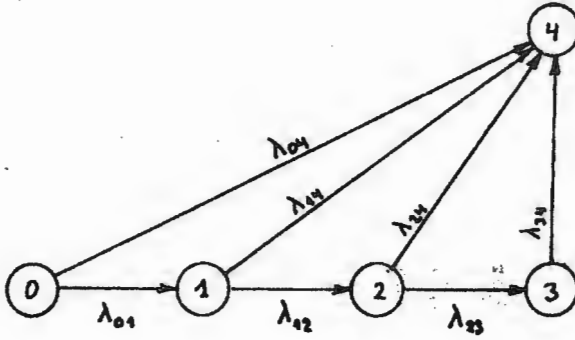
Znając funkcję $s(\tau)$ możemy następnie skonstruować graf procesu uszkodzeń. Mianowicie, oznaczając w naszym przykładzie symbolem $S = 4$ stan uszkodzenia obiektu możemy przyporządkować intensywności nagłych uszkodzeń λ_{04} , $\lambda_{1,4}$, $\lambda_{2,4}$, $\lambda_{3,4}$ zależne od stanu fizycznego obiektu w sposób widoczny na rysunku 9.

Zwróćmy uwagę na intensywności λ_{01} , λ_{12} i λ_{23} . Określają one proces losowy narastania luzu, a stany: 0, 1, 2, 3 są stanami sprawności (malejącej). Natomiast intensywności λ_{04} , λ_{14} , λ_{24} , λ_{34} określają intensywności uszkodzeń nagłych, w tym przypadku pęknięcia łożyska. Oczywiście, zachodzi nierówność $\lambda_{04} < \lambda_{14} < \lambda_{24} < \lambda_{34}$ - wraz z pogorszeniem się stanu rośnie możliwość pęknięcia.

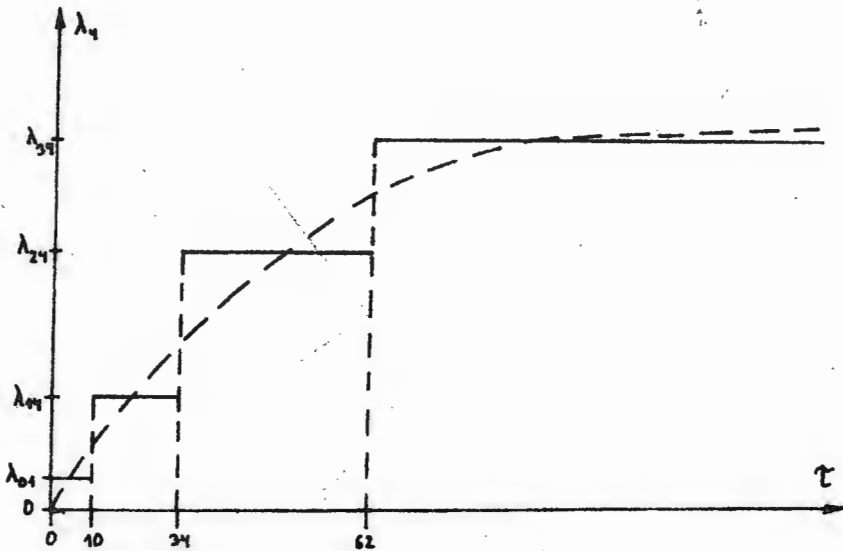
Zauważmy następnie, że ponieważ każdemu stanowi przyporządkowaliśmy odpowiedni odcinek czasu pracy τ , to tym samym przyporządkowaliśmy w postaci funkcji schodkowej wartości λ każdemu zakresowi wartości τ (patrz rys. 10).



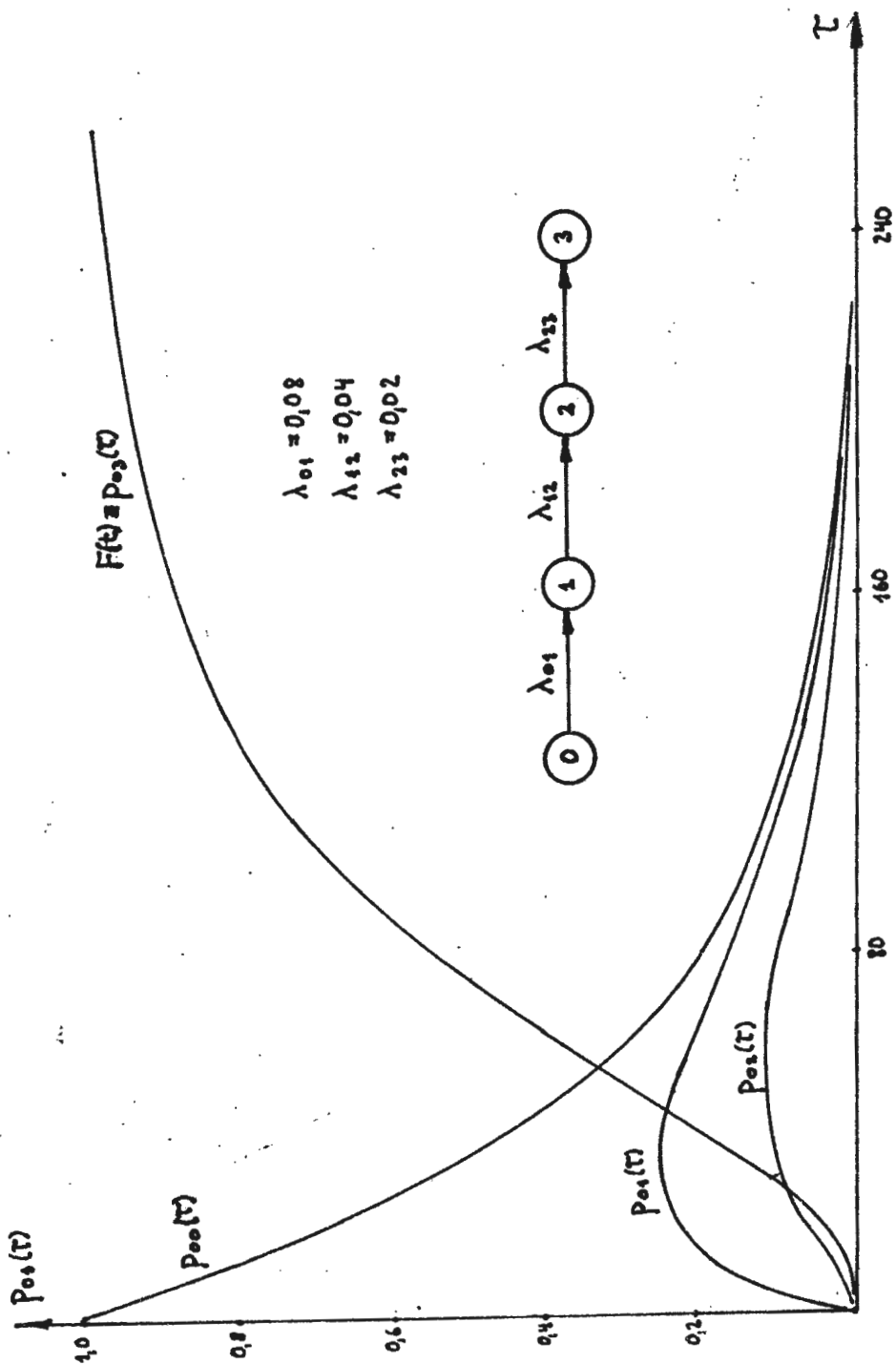
Rys. 8 Wyznaczanie funkcji $S(\tau)$



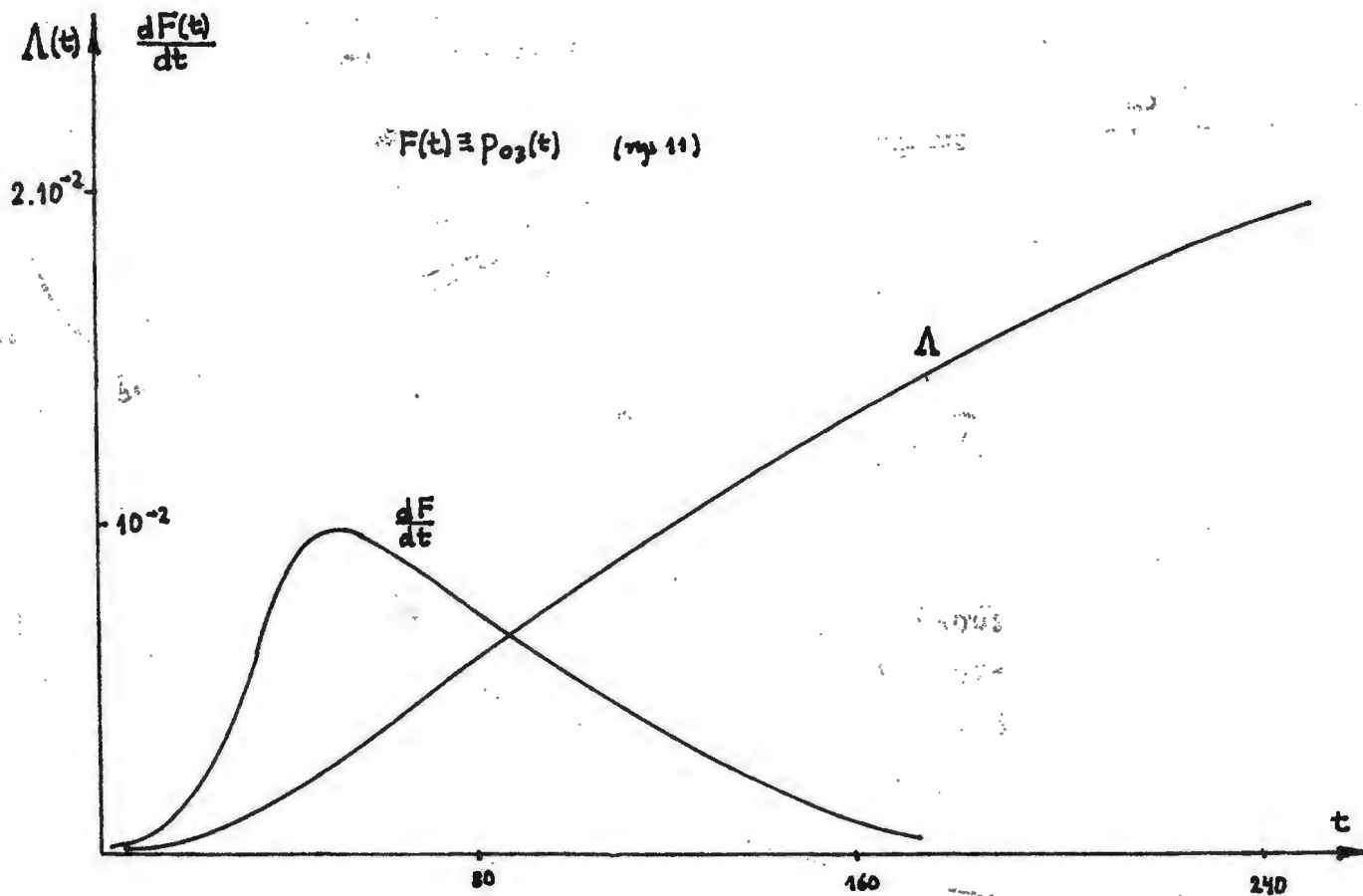
Rys.9 Struktura procesu zużycia ($\lambda_{01}, \lambda_{12}, \lambda_{23}$) oraz uszkodzeń ($\lambda_{04}, \lambda_{14}, \lambda_{24}, \lambda_{34}$)



Rys.10 Przebieg narastania intensywności uszkodzeń w miarę zużycia łożyska



Rys. 11 Dystylna $F(t)$ procesu łańcuchowego



Rys.12 Przebieg intensywności uszkodzeń procesu łańcuchowego z rys.11

Zauważmy następnie, że ponieważ każdemu stanowi przyporządkowaliśmy odpowiedni odcinek czasu pracy τ , to tym samym przyporządkowaliśmy w postaci funkcji schodkowej wartości λ każdemu zakresowi wartości τ (patrz rys. 10).

Jak nietrudno zauważyć, przebieg funkcji λ można uważać za aproksymację ciągłej funkcji $\lambda(\tau)$ zaznaczonej na rys. 10 linią kreskowaną. Powiększając liczbę stanów zdatności możemy dla dostatecznie dużych wartości $S-1$ dostatecznie dokładnie przybliżyć ciągłą funkcję $\lambda(\tau)$ - funkcją schodkową. Należy przy tym podkreślić, że dla elementów mechanicznych zwykle wartości $\lambda_{s,S}$ dla s małych są bliskie zera, natomiast istotna jest wartość $\lambda_{S-1,S}$. W takim przypadku otrzymamy czystą strukturę łańcuchową procesu, w którym tylko ostatnia intensywność jest intensywnością uszkodzeń; wszystkie inne dotyczą tylko intensywności zużycia. Dobierając dostatecznie dużą wartość $S-1$ możemy uzyskać wystarczająco dokładne przybliżenie rozkładu normalnego czasu osiągnięcia stanu $S-1$, którego osiągnięcie zagraża uszkodzeniem obiektu. Wynika to z tego, że dla $\lambda_{s,s+1} = \lambda = \text{const}$ (dla $s = 0, 1, 2, \dots, S-2$) dystrybuanta czasu osiągnięcia stanu $S-1$ będzie miała postać rozkładu Erlanga, który ma tę własność, że dąży (ze wzrostem S) do rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej $1/\lambda \cdot (S-1)$ i odchyleniu standardowym $1/\lambda \cdot \sqrt{S-1}$ (patrz rys. 7)

W ten sposób teoria niezawodności obiektów wielostanowych może być wykorzystana, w przypadku gdy stanu fizycznego obiektu nie można zidentyfikować. Zawsze jednak należy mieć na uwadze fakt, że teoria niezawodności obiektów wielostanowych ma zasadnicze zastosowanie w przypadku istnienia możliwości identyfikacji stanu fizycznego obiektu.

Na zakończenie, na rys 11 i 12 pokazano przebiegi dystrybuanty $F(t)$ czasu pracy do uszkodzenia (stan $S = 3$) oraz $\Lambda(t)$ intensywności uszkodzeń, w funkcji czasu dla procesu łańcuchowego. Przebieg tej ostatniej funkcji $\Lambda(t)$ można porównać z przebiegiem funkcji $\lambda(t)$ z rysunku 1 dla normalnego rozkładu uciętego oraz z przebiegiem funkcji $\lambda(t)$ na rysunku 2 dla rozkładu Weibulla.

Nietrudno się domyśleć, że dla procesów o bardziej złożonej strukturze (nie łańcuchowej) można uzyskać różne przebiegi funkcji $\Lambda(t)$. Pozwala to domniemywać, że zmierzone eksperymentalnie przebiegi funkcji $\Lambda(t)$ nie koniecznie wynikają stąd, że występujące rozkłady nie są wykładnicze. Być może występują tylko rozkłady wykładnicze, lecz dotyczą one składowych podprocesów tworzących złożoną strukturę obserwowanego procesu wielostanowego.

3. Proces użytkowania

3.1 Charakterystyki procesu użytkowania

Założmy, że dla ustalonego urządzenia dany jest ciąg chwil t^k ($k=0,1,2,\dots,K$) wyznaczających początki kolejnych okresów użytkowania i jednocześnie chwil zakończenia kolejnych obsłóg, którym podlega urządzenie w całym okresie eksploatacji. Podobnie, niech będzie znany ciąg chwil t_0^k ($k=0,1,2,\dots,K$) wyznaczających chwile zakończenia okresów użytkowania i jednocześnie rozpoczęcia kolejnych obsłóg nr $k = 0,1,2,\dots,K$ (rys. 35).

Czas trwania e^k poszczególnych okresów użytkowania jest więc równy

$$e^k = t_0^{k+1} - t^k, \quad k = 0,1,2,\dots,K-1,$$

a całkowity czas eksploatacji T urządzenia jest równy

$$T = t_0^K - t_0.$$

Założmy następnie, że znany jest rozkład prawdopodobieństwa stanów

$$p^k(\hat{U}, t^k)$$

w chwili t^k ($k = 0,1,2,\dots,K$) ukończenia obsłogi nr k . Wtedy, przy znajomości rozkładu warunkowego

$$P(\hat{U}, \hat{S}; t^k, t)$$

stanu \hat{S} elementów urządzenia w chwili t , jeżeli stan tych elementów w chwili $t^k < t$ był równy \hat{U} , możemy wyznaczyć rozkład $p^k(\hat{S}, t)$ dla $t > t^k$ ze wzoru

$$p^k(\hat{S}, t) = \sum_{\hat{U}} p^k(\hat{U}, t^k) P(\hat{U}, \hat{S}; t^k, t)$$

W szczególności, dla $t = t_0^{k+1}$ rozkład prawdopodobieństwa stanów urządzenia w chwili rozpoczęcia $k+1$ -szej obsłogi będzie określony wyrażeniem

$$p^k(\hat{S}, t_0^{k+1}) = \sum_{\hat{U}} p^k(\hat{U}, t^k) p(\hat{U}, \hat{S}; t^k, t_0^{k+1})$$

Zauważmy, że jeżeli wektor \hat{S} posiada tylko jedną składową określającą stan n -tego elementu

$$\hat{S} = \langle s_n \rangle,$$

to mamy (opuszczając indeks k w oznaczeniu p_n^k)

$$p_n(s_n; t_o^{k+1}) = \sum_{u_n \in S_n} p_n(u_n, t^k) p(u_n, s_n; t_o^{k+1} - t^k)$$

Jeżeli ponadto założymy, że

$$p_n(u_n, t^k) = \delta_{u_n, 1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } u_n = 1 \\ 0 & \text{dla } u_n \neq 1 \end{cases}$$

to

$$p_n(s_n, t_o^{k-1}) = p(1, s_n; t_o^{k+1} - t^k)$$

W szczególności, jeżeli element jest drugiego rodzaju, to dla $1 < s_n < 3$ oraz $k = 1$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} p_n^{II}(s_n, t_o^1) &= \begin{pmatrix} s_n - 1 \\ s_n - 1 \end{pmatrix} e^{-\lambda^n(t_o^1 - t^0)} \left[1 - e^{-\lambda^n(t_o^1 - t^0)} \right]^{s_n - 1} = \\ &= e^{\lambda^n(t_o^1 - t^0)} \left[1 - e^{-\lambda^n(t_o^1 - t^0)} \right]^{s_n - 1} \end{aligned}$$

przy tym dla $s_n = 3$

$$p_n^{II}(3, t_o^1) = 1 - e^{-\lambda^n(t_o^1 - t^0)} - e^{-\lambda^n(t_n^1 - t)} \left[1 - e^{-\lambda^n(t_o^1 - t^0)} \right]$$

Przypomnijmy, z użytkowaniem urzędnika wiąże się dochód (często nazywany efektywnością użytkownika urzędnika) określony w jednostkach pieniężnych na jednostkę czasu. Dochód ten zależy od stanu urzędnika. Jeżeli urządzenie jest całkowicie niezdatne, to $a = 0$. Stan urzędnika, w którym przynoszony przez to urządzenie dochód jest najwyższy $a = a_{\max}$ będziemy uważali za stan maksymalnej zdatności. W zależności od sytuacji możemy ustalić pewną liczbę rozróżnialnych stanów ze względu na przynoszony dochód.

Numerując poszczególne stany zmienną $s = 1, 2, \dots, S$ tak, że

$$a(s') > a(s'')$$

wtedy i tylko wtedy, kiedy $s' < s''$ możemy wyróżnić pewne poziomy dochodu a_s ($s = 1, 2, \dots, S$), przy czym różnice $a_s - a_{s+1}$ wyznaczają granice rozróżnialności efektu działania urzędnika i rozróżnialności stanów.

Zauważmy, że jeżeli $S = 2$, to wyróżnia się dwa stany: $s = 1$ urządzenie zadane, $s = 2$ niezadane, przy czym $a_1 = a_{\max}$; $a_2 = 0$.

Analizując działanie urządzenia można dla każdej wartości a_s wyznaczyć zbiór Ω_s stanów elementów \hat{S} równoważnych z punktu widzenia użytkownika urządzenia.

Znajomość podziału zbioru Ω na rozłączne podzbiory Ω_s ($s = 1, 2, \dots, S$) umożliwia więc wyznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa stanów użytkowych urządzenia.

$$G^k(s, t) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} p^k(\hat{S}, t)$$

Wartość $G^k(s, t)$ jest wartością prawdopodobieństwa zdarzenia, że urządzenie jako całość w chwili $t > t^k$ będzie w stanie s .

Zauważmy, że $G^k(S, t)$ jest prawdopodobieństwem uszkodzenia urządzenia w okresie od chwili t^k do chwili t . Oznaczmy to prawdopodobieństwo symbolem

$$F^k(t) = G^k(S, t)$$

Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że urządzenie nie ulegnie uszkodzeniu do chwili t będzie równe

$$Q^k(t) = 1 - F^k(t)$$

Wielkość $Q^k(t)$ jest więc miarą niezawodności urządzenia - w tym przypadku w okresie od t^k do $t < t_0^{k+1}$.

W szczególności, gdybyśmy zrezygnowali z wykonania obsługi i urządzenie nieprzerwanie użytkowali aż do chwili uszkodzenia, to oczekiwany czas poprawnej pracy urządzenia po k -tej obsłudze do pierwszego uszkodzenia, byłby określony formułą

$$T^k = \int_{t^k}^{\infty} Q^k(t) dt = \int_{t^k}^{\infty} [1 - G^k(S, t)] dt$$

W szczególności, dla $k = 0$ wielkość

$$T^0 = \int_{t^0}^{\infty} Q^0(t) dt = \int_{t^0}^{\infty} [1 - G^0(S, t)] dt$$

Jest czasem poprawnej pracy urządzenia nowego, a wielkość

$$T^0(K) = \sum_{K=0}^{K=1} T^k Q^k \prod_{l=1}^{k-1} [1 - Q^l] \text{ gdzie } Q^k = Q^k(T^k)$$

jest oczekiwanym, sumarycznym czasem poprawnej pracy urządzenia, uzyskanym przy wykonywaniu wykonanie obsługi. Wielkość

$$\frac{T^0(K)}{T^0}$$

może być traktowana jako miernik skuteczności K obsługi.

Podobnie możemy wyznaczyć intensywność uszkodzeń, której wartość jest określona wzorem

$$\lambda^k(t) = \frac{\frac{d}{dt} \Pi^k(t)}{1 - \Pi^k(t)} = \frac{\frac{d}{dt} G^k(S, t)}{1 - G^k(S, t)}$$

dla t zawartych w przedziale $\langle t^k, t_o^{k+1} \rangle$.

Do oceny skuteczności obsługi może służyć wielkość

$$\frac{\lambda^{k-1}(t_o^k)}{\lambda^k(t^k)}$$

której wartość określa ilokrotnie zmniejszyła się intensywność uszkodzeń po wykonaniu k-tej obsługi.

Podobnie, do oceny na ogół malejącej skuteczności obsługi może służyć ciąg wartości

$$\Pi^k \text{ lub } Q^k, k = 0, 1, \dots, K-1$$

przy czym

$$\Pi^k = \Pi^k(t_o^{k+1}) = G^k(S, t_o^{k+1})$$

$$Q^k = Q^k(t_o^{k+1}) = 1 - G^k(S, t_o^{k+1})$$

Wartości te określają, odpowiednio, prawdopodobieństwo uszkodzenia urządzenia lub niezawodność urządzenia w okresie użytkowania od t^k do t_o^{k+1} .

Znając rozkład $G^k(s, t)$, możemy następnie wyznaczyć oczekiwaną wartość dochodu w chwili t uzyskaną w rezultacie użytkowania urządzenia.

$$\bar{a}^k(t) = \sum_{s=1}^S a_s G^k(s, t)$$

Jeżeli następnie przez ΔA^k oznaczymy skumulowany dochód, jaki przynosi użytkowanie maszyny w okresie od t^k do t_0^{k+1} wtedy

$$\Delta A^k = \int_{t^k}^{t_0^{k+1}} \bar{a}^k(t) dt = \sum_{s=1}^S a_s \int_{t^k}^{t_0^{k+1}} G^k(s, t) dt = \sum_{s=1}^S a_s \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} \int_{t^k}^{t_0^{k+1}} p^k(\hat{S}, t) dt$$

W rezultacie, proces użytkowania powoduje przekształcenie rozkładów

$$p(\hat{S}, t^k) \rightarrow p(\hat{S}, t_0^{k+1}),$$

oraz dochodu skumulowanego

$$A^k \rightarrow A^{k+1},$$

przy czym

$$A^{k+1} = A^k + \Delta A^k.$$

3.2 Przykład IV. Opis prostego procesu użytkowania

Założmy, że tak jak w przykładzie II, urządzenie składa się z dwóch elementów nr ($n = 1, 2$) drugiego rodzaju, a więc których szybkość zużycia rośnie wraz ze stopniem zużycia. Stan elementów urządzenia określony jest wartością wektora:

$$\hat{S} = \langle s_1, s_2 \rangle \quad s_n \in \mathcal{S}_n = \{1, 2, 3\}$$

Zbiór możliwych stanów elementów urządzenia będzie więc równy

$$\Omega = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

Załóżmy następnie, że ze względu na przynieszone efekty, w urzędzeniu można odróżnić trzy stany ponumerowane zmienną $s = 1, 2, 3$, tak, że:

$$a_1 = a_{\max} \quad a < a_2 < a_1, \quad a_3 = 0$$

Stan $s = 3$ jest stanem niezdatności. Określmy następnie funkcję ϕ przy pomocy zbiorów (przekrojów) Ω_s . Mianowicie:

$$\Omega_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle \} .$$

$$\Omega_2 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} .$$

$$\Omega_3 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \} .$$

Przy tym spełnione są warunki podziału

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 = \Omega ,$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset ,$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_3 = \emptyset ,$$

$$\Omega_2 \cap \Omega_3 = \emptyset .$$

W ten sposób określona została funkcja ϕ .

$$\phi(\hat{S}) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \hat{S} \in \Omega_1 \\ 2 & \text{jeżeli } \hat{S} \in \Omega_2 \\ 3 & \text{jeżeli } \hat{S} \in \Omega_3 \end{cases}$$

Kontynuując przykład zauważmy, że tak określona funkcja ϕ odpowiada tak zwanej szeregowej strukturze urzędzenia (Jeżeli założymy, że stan $s_n = 3$ jest stanem, w którym element $n = 1, 2$, nie może spełniać swej funkcji). Struktura szeregową charakteryzuje się tym, że wystarczy iż jeden z elementów urzędzenia nie spełnia swej funkcji aby całe urzędzenie stało się niezdatne. Zauważmy że zbiór

$$\Omega_3 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$$

określający stany elementów, przy których urzędzenie jest niezdatne, spełnia ten warunek.

Przeciwny przypadek, struktury równoległej urzędzenia, otrzymamy wtedy, kiedy niezbędne jest uszkodzenie wszystkich elementów, aby urzędzenie nie mogło wykonać swych zadań. Dla struktury równoległej otrzymalibyśmy:

$$\Omega_3 = \{ \langle 3, 3 \rangle \}.$$

Wszystkie pozostałe przypadki struktur funkcjonalnych urządzenia nazywamy strukturami mieszanymi.

Zauważmy, że jeżeli każdy z dwóch elementów mógłby znajdować się w jednym z dwóch stanów $s_n = 1, 2$, to zbiór Ω miałby postać:

$$\Omega = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}.$$

Jeżeli ponadto dla całego urządzenia także wyróżniliśmy tylko dwa stany $s = 1, 2$, to dla struktury szeregowej

$$\Omega_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle \}, \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1.$$

a dla struktury równoległej

$$\Omega_2 = \{ \langle 2, 2 \rangle \}, \quad \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2.$$

Nietrudno pokazać, że w takim przypadku są dwie, jedynie możliwe struktury (gdyby, na przykład, przyjąć $\Omega_1 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$, to oznaczałoby to, że element $n = 2$ jest zbyteczny w tym urządzeniu i faktycznie składa się ono z jednego elementu nr 1).

Wracając do wyznaczonego w przykładzie II rozkładu:

$$P(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t) = p_1(u_1, s_1; t-t^0) p_2(u_2, s_2; t-t^0)$$

możemy (dla danej funkcji $\phi(\hat{S})$ określonej przy pomocy trzech zbiorów Ω_s , $s = 1, 2, 3$) wyznaczyć:

$$G(s, t) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} \sum_{\hat{U}} P(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t) P(\hat{U}^0, t^0) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} P(\hat{U}^0, \hat{S}; t^0, t)$$

gdzie $\hat{U}^0 = \langle u^0_1, u^0_2 \rangle$ stan początkowy, w chwili t^0 . W tym przypadku mamy:

a) dla $\hat{U}^0 = \langle 1, 1 \rangle$, $\Delta t = t - t^0$, $\lambda^1 = \mu^1$, $\lambda^2 = \mu^2$

$$G^0(1, t) = e^{-(\mu^1 + \mu^2)\Delta t}$$

$$G^0(2, t) = e^{-(\mu^1 + \mu^2)\Delta t} \left\{ \left[1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] + \left[1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \left[1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] + \left[1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] \right\}$$

$$G^0(3, t) = e^{\mu^1 \Delta t} \left\{ 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} - e^{-\mu^2 \Delta t} \left[1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] \right\} \left[1 + 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] +$$

$$+ \left\{ 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} - e^{-\mu^2 \Delta t} \left[1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] \right\} \left\{ 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} - e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \right\} \times$$

$$\times e^{-\mu^2 \Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] \left\{ 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} - e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \right\}$$

b) Dla $\hat{U}^0 = \langle 1, 2 \rangle$

$$G^0(1, t) = 0$$

$$G^0(2, t) = e^{-(\mu^1 + 2\mu^2)\Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right]$$

$$G^0(3, t) = e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 - e^{-2\mu^2 \Delta t} \right] \left[1 + 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] + \left\{ 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} - e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \right\}$$

$$\times \left\{ 1 - e^{-2\mu^2 \Delta t} + e^{-\mu^2 \Delta t} \right\}$$

c) dla $\hat{U} = \langle 2, 1 \rangle$

$$G^0(1, t) = 0$$

$$G^0(2, t) = e^{-(2\mu^1 + \mu^2)\Delta t} \begin{bmatrix} 1 + 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \end{bmatrix}$$

$$G^0(3, t) = \left\{ 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \quad -e^{-\mu^2 \Delta t} \begin{bmatrix} 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \end{bmatrix} \right\} \left\{ e^{-2\mu^1 \Delta t} + 1 - e^{-2\mu^1 \Delta t} \right\} + \\ + e^{-\mu^2 \Delta t} \begin{bmatrix} 1 - e^{-2\mu^1 \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \end{bmatrix}$$

d) Dla $\hat{U}^0 = \langle 2, 2 \rangle$

$$G^0(1, t) = 0$$

$$G^0(2, t) = e^{-2(\mu^1 + \mu^2)\Delta t}$$

$$G^0(3, t) = e^{-2\mu^2 \Delta t} \begin{bmatrix} 1 - e^{-2\mu^2 \Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-2\mu^1 \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^{-2\mu^2 \Delta t} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 1 - e^{-2\mu^1 \Delta t} \end{bmatrix} \cdot e^{-2\mu^2 \Delta t}$$

e) dla $\hat{U}^0 = \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle$

$$G^0(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } s = 1, 2 \\ 1 & \text{jeżeli } s = 3 \end{cases}$$

Zauważmy, że wielkość

$$\Pi^0(t) = G^0(3, t)$$

jest prawdopodobieństwem uszkodzenia urządzenia do chwili t , jeżeli w chwili t^0 urządzenie było w stanie \hat{U}^0 . Podobnie mamy:

$$Q^0(t) = 1 - \Pi^0(t)$$

prawdopodobieństwo nieprzerwanej (bez uszkodzenia) pracy urządzenia w czasie od t^0 do t . W szczególności, jeżeli urządzenie w chwili t^0 rozpoczęcia eksploatacji było w stanie $\hat{U} = \langle 1, 1 \rangle$, a więc gdy

$$p^0(\hat{U}, t^0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \hat{U} = \langle 1, 1 \rangle \\ 0 & \text{dla pozostałych wartości } \hat{U} \end{cases}$$

to wielkość $\Pi^0(t)$ jest określona wzorem

$$\begin{aligned} \Pi^0(t) = G^0(3, t) = & e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \left\{ 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] \right\} + \\ & - \left\{ 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \right\} \left\{ 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right] \right\} + \\ & - \left\{ 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \left[1 + 1 - e^{-\mu^1 \Delta t} \right] \right\} \left\{ 1 + 1 - e^{-\mu^2 \Delta t} \right\} e^{-\mu^2 \Delta t} \end{aligned}$$

Zauważmy następnie, że jeżeli każdy z dwóch elementów naszego urządzenia mógłby znajdować się tylko w dwóch stanach: $s_n = 1$ - stanie zdatności oraz $s_n = 2$ - stanie niezdatności i analogicznie całe urządzenie w stanach $s = 1$ oraz $s = 2$, to:

- elementy pierwszego (I) i drugiego (II) rodzaju przestają się różnić między sobą

$$\Lambda_I^n = \Lambda_{II}^n = \begin{bmatrix} -\mu^n & \mu^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- proces zużycia byłby określony rozkładem:

$$p(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t) = \prod_{n=1}^N \frac{(\mu^n \Delta t)^{s_n - u_n}}{(s_n - u_n)!} e^{-\mu^n \Delta t}, \quad \Delta t = t - t^0$$

dla $s_1, s_2 \neq 2$; $s_1 \geq u_1$; $s_2 \geq u_2$ i odpowiednimi (patrz przykład II) formułami dla pozostałych wartości s_n . W tym przypadku (dla $S_n = 2$) rozkład ten możemy zapisać także w postaci prostszej przy pomocy formuły:

$$P(U, S, t^0, t) = e^{-\Delta t \sum_{n \in N_1} \mu^n} \prod_{n \in N} (1 - e^{-\mu^n \Delta t})$$

gdzie:

$$N_1 = \{n: s_n = u_n = 1\}$$

$$N_2 = \{n: s_n = 2, u_n = 1\}$$

Jeżeli urządzenie w chwili t^0 było zadane ($u_n = 1$) i posiada szeregową strukturę niezawodnościową (uszkodzenie jednego elementu jest równoznaczne z uszkodzeniem urządzenia jako całości), to dla urządzenia zadanego $s = 1$ mamy:

$$Q_1 = \{ \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle \}$$

oraz

$$Q^0(t) = 1 - p^0(2, t) = p^0(1, t) = e^{-\Delta t \sum_{n=1}^N \mu^n}$$

$$\Pi^0(t) = 1 - Q^0(t) = 1 - e^{-\Delta t \sum_{n=1}^N \mu^n}$$

Jeżeli natomiast urządzenie posiada strukturę równoległą, to dla urządzenia niesprawnego ($s = 2$) mamy

$$Q_2 = \{ \langle 2, 2, \dots, 2 \rangle \}$$

oraz

$$\Pi^0(t) = p^0(2, t) = \prod_{n=1}^N (1 - e^{-\Delta t \mu^n})$$

$$Q^0(t) = 1 - \Pi^0(t) = 1 - \prod_{n=1}^N (1 - e^{-\Delta t \mu^n})$$

Koniec przykładu.

3.3 Przykład V. Opis złożonego procesu użytkowania obiektu

Niech nasze urządzenie składa się z trzech podstawowych zespołów istotnych z punktu widzenia procesu eksploatacji obiektu. Załóżmy, że zespoły te są elementarnymi obiektami opisanymi w przykładzie III. Znamy więc dla tych zespołów (elementów) rozkłady prawdopodobieństw przejścia $p_n(u, s; t^0, t) = p_n(u, s, t)$, dla $t = 0$ oraz sumaryczny rozkład (U, S, t^0, t) zmian stanów elementów urządzenia. Jak wiemy, wszystkie elementy są trójstanowe tak, że

$$n = \{1, 2, 3\} \quad n = 1, 2, 3$$

$$\Omega = s_1 \times s_2 \times s_3$$

przy tym

$$S = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$$

Każdej wartości \hat{S} odpowiada określony stan s całego urządzenia:

$$\phi(\hat{S}) = s$$

Przyjmijmy, że urządzenie może znajdować się w jednym z pięciu rozróżnianych stanów:

$$s = \{A, B, C, D, E\}$$

Stany te są możliwe do odróżnienia bez zatrzymywania pracy urządzenia - są to stany obserwowalne. Oczywiście, po zatrzymaniu obiektu możemy zidentyfikować jego stan o wiele dokładniej - z dokładnością do stanu każdego elementu, a więc z dokładnością do wartości wektora \hat{S} ; Struktura funkcji $\alpha(s) = a$ ma przy tym postać:

$$\alpha(s) = \begin{cases} a > 0 & \text{dla } s = A, B, C \text{ przy czym } \alpha(A) > \alpha(B) > \alpha(C) \\ a < 0 & \text{dla } s = D, E \text{ przy czym } \alpha(D) < \alpha(E) \end{cases}$$

W związku z powyższym, sensownie jest nazwać stan

A - stanem pełnej sprawności charakterystycznej dla urządzenia nowego,

B - stanem poprawnego działania

Stan C - stanem niepełnej sprawności

Stan D - katastrofą

Stan E - stanem niesprawności gdy $a_E = 0$ lub

stanem awarii (uszkodzenia) gdy $a_E < 0$.

Zauważmy, że jeżeli stan D wiąże się z powstaniem zagrożenia dla życia ludzi, to prawdopodobieństwo wystąpienia stanu D utożsamia się z poziomem bezpieczeństwa eksploatacji obiektu. Na przykład, w przypadku reaktora atomowego będzie to prawdopodobieństwo wystąpienia reakcji niekontrolowanej. Zauważmy ponadto, że wyróżniliśmy trzy stany zdadności: A, B i C oraz dwa stany niezdadności: D i E. W klasycznej teorii niezawodności stany te byłyby scalane w dwa: zdadności (A + B + C) i niezdadności (D + E). Z punktu widzenia teorii procesów stochastycznych stany D i E są stanami pochłaniającymi - stopującymi proces. Ponieważ proces jest nieodwracalny, to stany są nietranzytywne.

Określiłmy obecnie funkcję $\phi(\hat{S}) = s$, gdzie $S \in \Omega$, $s \in \mathcal{S}$. Opisowo możemy ją zdefiniować następująco: stan A obiektu występuje wtedy, kiedy każdy element jest w stanie 1. Stan B występuje wówczas, gdy element drugi jest w stanie 1, a pierwszy i trzeci w stanie 1 i 2 lub 2 i 1. Stan C występuje wówczas, gdy element drugi jest w stanie 1, drugi i trzeci zaś w stanie 2.

Katastrofa, stan D, występuje wtedy, kiedy element drugi lub (oraz) trzeci znajduje się w stanie 3. Uszkodzenie obiektu występuje wówczas, gdy element pierwszy znajdzie się w stanie 3 lub (oraz) element drugi w stanie 2.

Celem określenia funkcji ϕ wyznaczmy początkowo strukturę procesu zużycia elementów urządzenia. Przy tym wykorzystamy fakt, że wskutek niezależności procesów zużycia poszczególnych elementów, proces zmiany stanów elementów obiektu jest procesem pojedynczym. Struktura tego procesu jest widoczna na rys. 28b, ale (rys. 30) zbiór Ω' fizycznie możliwych stanów jest mniejszy od zbioru Ω i zawiera tylko 16 stanów zamiast 27. Na zbiorze Ω' łatwo jest obecnie określić funkcję ϕ obiektu przy pomocy ciągu zbiorów $\Omega_s \subset \Omega' \subset \Omega$, $s = A, B, C, D, E$. Mianowicie, wykorzystując opis słowny mamy:

$$\Omega_A = \{ \langle 1, 1, 1 \rangle \} .$$

$$\Omega_B = \{ \langle 1, 1, 2 \rangle, \langle 2, 1, 1 \rangle \} .$$

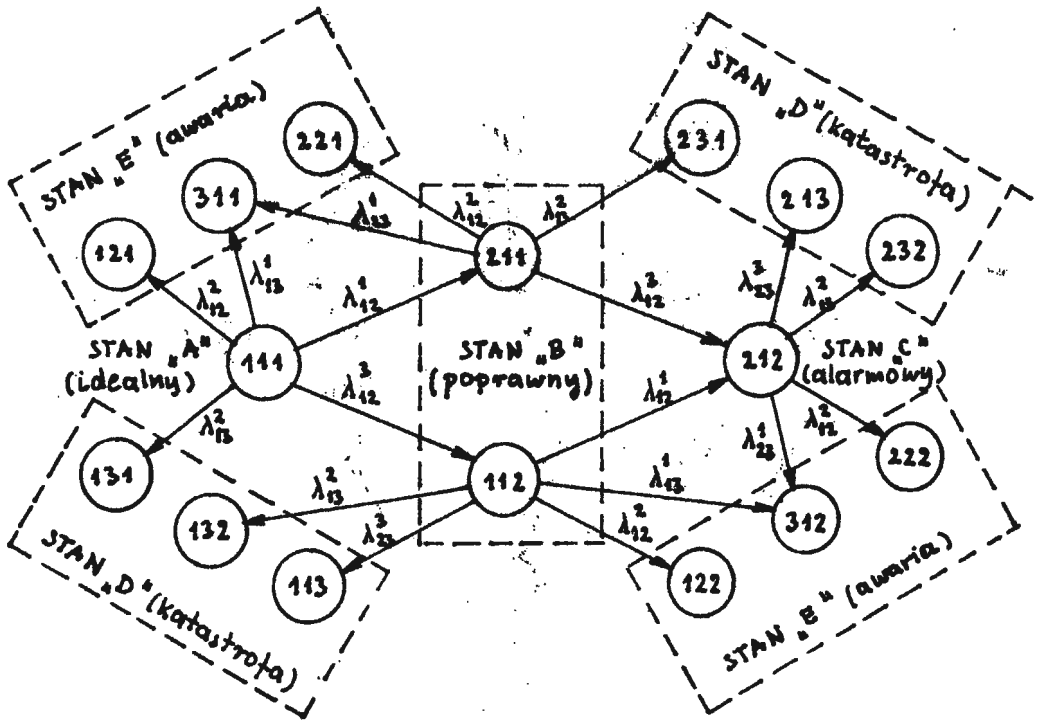
$$\Omega_C = \{ \langle 2, 1, 2 \rangle \} .$$

$$\Omega_D = \{ \langle 2, 3, 1 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 2, 3, 2 \rangle, \langle 1, 3, 1 \rangle, \langle 1, 3, 2 \rangle, \langle 1, 1, 3 \rangle \} .$$

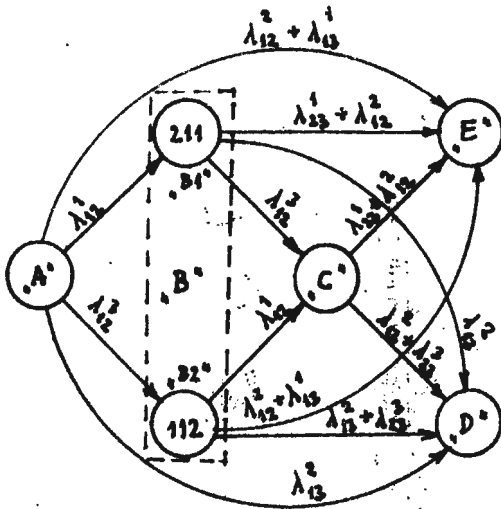
$$\Omega_E = \{ \langle 1, 2, 1 \rangle, \langle 3, 1, 1 \rangle, \langle 2, 2, 1 \rangle, \langle 1, 2, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle, \langle 2, 2, 2 \rangle \} .$$

Poszczególne zbiory Ω_s są widoczne na rysunku 30. Scalając stany pochłaniające, strukturę naszego procesu możemy przedstawić w postaci widocznej na rys. 31. Jednocześnie, sumując odpowiednio intensywności przejść, tak jak to jest pokazane na rysunku 31, możemy przystąpić do wyznaczania wartości prawdopodobieństw przejść

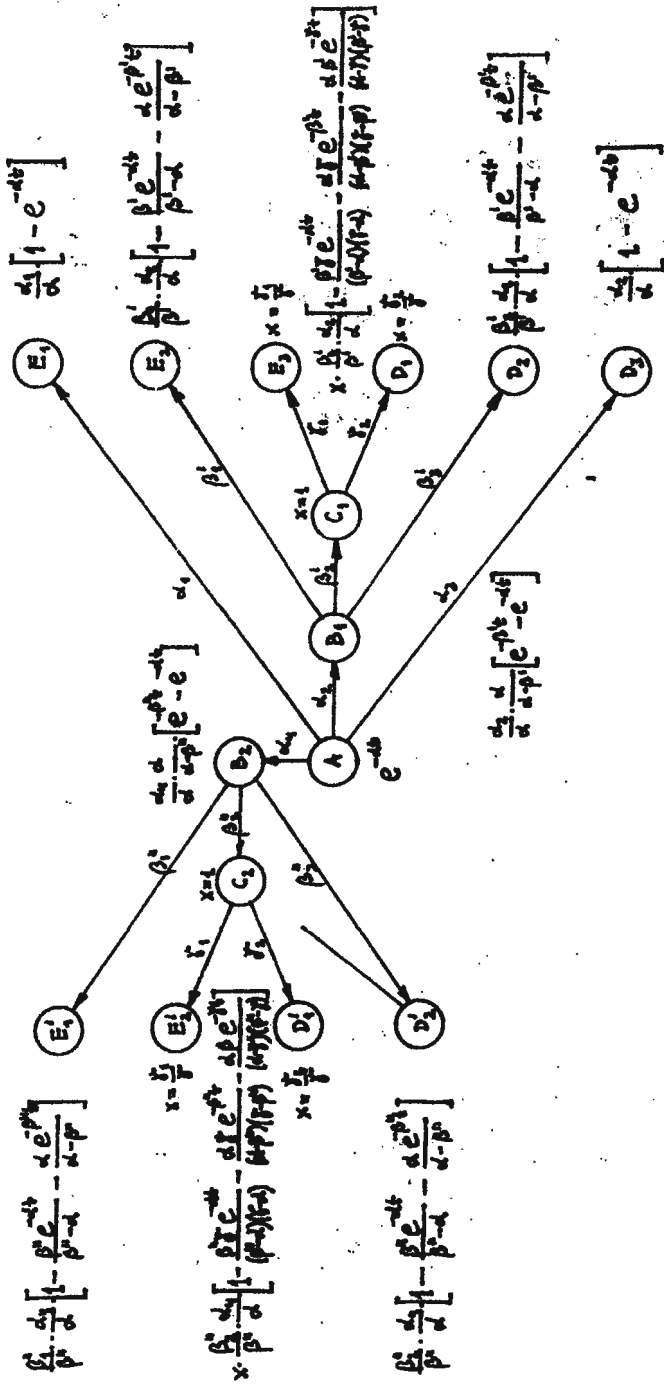
$$g(u, s, t^0, t) = g(u, s, t) \text{ dla } t^0 = 0$$



Rys.30 Struktura procesu zmiany stanu elementów wraz z klasyfikacją wg stanu systemu



Rys.31 Struktura procesu zmian stanu systemu



Rys.32 Struktura procesu zmian stanu systemu, rozwinięta dla celów obliczeniowych (oznaczenie symboli - patrz tekst)

oraz rozkładu prawdopodobieństwa stanów procesu eksploatacji

$$G(s, t) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} P(\hat{S}, t) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} \sum_{\hat{U}} P(\hat{U}, \hat{S}, t^0, t) P(\hat{U}, t^0) = \sum_{\hat{S} \in \Omega_s} \prod_{n=1}^3 g_n(u_n^0, s_n, t)$$

Będziemy przy tym zakładali, że w chwili t^0 znamy stan obiektu z dokładnością do wartości wektora \hat{S} . Zauważmy, że w przypadku gdy w chwili t^0 mamy do czynienia z obiektem znajdującym się w stanie B, to jest zasadniczą różnicą czy wiemy tylko, że obiekt jest w stanie $s = B$, czy też wiemy, że jest on w stanie $\hat{S} = \langle 2, 1, 1 \rangle$ lub $\hat{S} = \langle 1, 1, 2 \rangle$. W przypadku gdy w chwili t^0 obiekt jest w stanie A, to jednocześnie wiemy, że jest on w stanie $\hat{S} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, gdyż zbiór Ω_A jest jednoelementowy.

Przystępując do wyznaczenia wartości $g(u, s, t)$ przedstawimy strukturę procesu w postaci widocznej na rys. 32, dekomponując proces na dwa podprocesy typu wachlarz. Następnie, wykorzystując gotowe wzory, wprowadzone w punkcie 2, (rozdział 2) możemy napisać wzory na prawdopodobieństwo osiągnięcia każdego stanu wyszczególnionego na rys. 32. Wzory te są wypisane przy odpowiednich stanach na tym samym rysunku. Przy tym wprowadzono oznaczenia:

$$\alpha_1 = \lambda_{12}^2 + \lambda_{12}^1 \quad \beta_1' = \lambda_{23}^1 + \lambda_{12}^3 \quad \beta_1'' = \lambda_{13}^1 + \lambda_{12}^2 \quad \gamma_1 = \lambda_{23}^1 + \lambda_{12}^2$$

$$\alpha_2 = \lambda_{12}^1 \quad \beta_2' = \lambda_{12}^3 \quad \beta_2'' = \lambda_{12}^1 \quad \gamma_2 = \lambda_{13}^2 + \lambda_{12}^3$$

$$\alpha_3 = \lambda_{12}^3 \quad \beta_3' = \lambda_{13}^1 \quad \beta_3'' = \lambda_{12}^2 + \lambda_{12}^3$$

$$\alpha_4 = \lambda_{12}^3$$

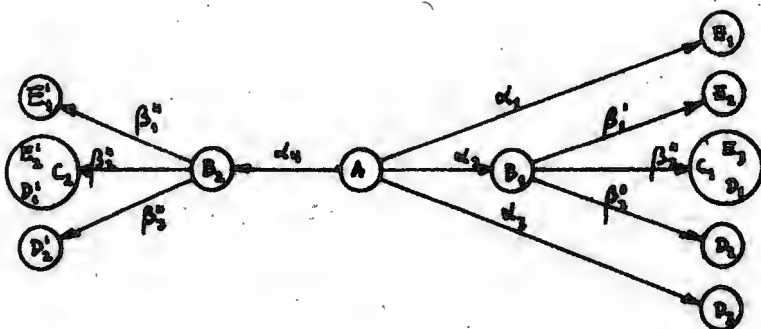
$$\alpha = \sum_{i=1}^4 \alpha_i$$

$$\beta' = \sum_{i=1}^3 \beta_i'$$

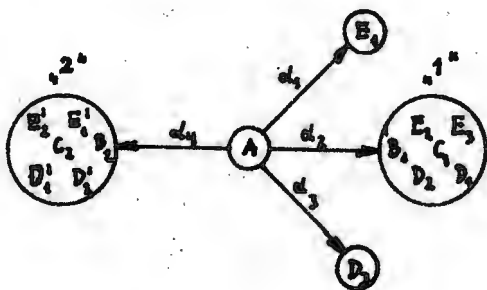
$$\beta'' = \sum_{i=1}^3 \beta_i''$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Na podstawie tych wzorów możemy napisać bezpośrednio postać końcową. Jednakże dla wyjaśnienia przebiegu obliczeń, bez znajomości wzorów wyprowadzonych uprzednio pokażemy, w jaki sposób nie znając ich, możemy wyznaczyć wspomniane prawdopodobieństwo. Mianowicie, strukturę naszego procesu możemy uprościć tak, jak to jest pokazane na rys. 33 a, b, c, d. Na pierwszym jest pokazany graf początkowy, na następnych trzech: grafy procesów zdekomponowanych. Stąd dla grafu "b" mamy bezpośrednio:



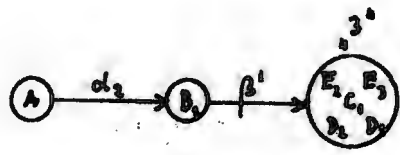
a)



$$g(A,A) = e^{-\alpha t}$$

$$g(A,1) = \frac{\alpha_2}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]$$

b)

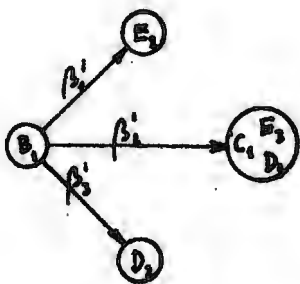


$$g(A,3) = \int_0^t \alpha_2 e^{-\alpha t} [1 - e^{-\beta_1(t-\tau)}] d\tau =$$

$$= \frac{\alpha_2}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}] - \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta_1 t}]$$

$$g(A,B) = \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta_1 t}]$$

c)



$$g(B,B) = e^{-\beta_1 t}$$

$$g(B,E_2) = \frac{\beta_1}{\beta_1} [1 - e^{-\beta_1 t}]$$

d)

$$g(A,E_2) = \int_0^t \frac{d}{dt} g(A,B) \cdot g(B,E_2) dt = \frac{\beta_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha} \left[1 - \frac{\beta_1 e^{-\alpha t}}{\beta_1 - \alpha} - \frac{\alpha e^{-\beta_1 t}}{\alpha - \beta_1} \right]$$

Rys.33 Dekompozycja grafu struktury procesu dla wyznaczenia wartości $g(A, E_2, t)$

$$g(A,A,t) = e^{-\alpha t}; \quad g(A,2,t) = \frac{\alpha_4}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]; \quad g(A,1,t) = \frac{\alpha_2}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]$$

$$g(A,E_1,t) = \frac{\alpha_1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]; \quad g(A,D_1,t) = \frac{\alpha_3}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]$$

Podobnie dla grafu "c":

$$g(B_1,B_1,t) = e^{-\beta' t}; \quad g(B_1,3,t) = 1 - e^{-\beta' t}$$

Dla grafu "d" mamy:

$$g(B_1,B_1,t) = e^{-\beta' t}; \quad g(B_1,E_2,t) = \frac{\beta'_1}{\beta'} [1 - e^{-\beta' t}];$$

$$g(B_1,D_2,t) = \frac{\beta'_3}{\beta'} [1 - e^{-\beta' t}]; \quad g(B_1,C_D^E,t) = \frac{\beta'_2}{\beta'} [1 - e^{-\beta' t}]$$

Wracając obecnie do początkowego grafu otrzymamy:

$$g(A,3,t) = \int_0^t \alpha_2 e^{-\alpha \tau} [1 - e^{-\beta' (t-\tau)}] d\tau = \frac{\alpha_2}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}] - \frac{\alpha_2}{\beta' - \alpha} \times$$

$$\times [e^{-\alpha t} - e^{-\beta' t}]$$

$$g(A,B_1,t) = g(A,1,t) - g(A,3,t) = \frac{\alpha_2}{\beta' - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta' t}]$$

$$g(A,E_2;t) = \int_0^t \left[\frac{d}{d\tau} P(A,B_1,\tau) \right] P(B_1,E_2,t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{\alpha_2 \beta'_1}{\beta' - \alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha - \beta'} [e^{-\beta' t} - e^{-\alpha t}] - t e^{-\beta' t} \right\}$$

itd.

TABELA 2

s	$g(A, s; t)$	Λ_{As}
A	e^{-at}	$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$
B	$\frac{\alpha_2}{\alpha - \beta'} [e^{-\beta' t} - e^{-at}] + \frac{\alpha_4}{\alpha - \beta''} [e^{-\beta'' t} - e^{-at}]$	$\alpha_2 + \alpha_4$
C	$\frac{\beta_2''}{\beta''} \frac{\alpha_4}{a} f_4(\alpha, \beta'', \gamma) + \frac{\beta_2'}{\beta'} \frac{\alpha_2}{a} f_3(\alpha, \beta', \gamma)$	0
D	$\frac{\alpha_3}{a} f_1(\alpha) + \frac{\beta_3}{\beta} \frac{\alpha_2}{a} f_2(\alpha, \beta) +$ $\frac{\alpha_2}{a} \frac{\gamma_2}{\gamma} \frac{\beta_2'}{\beta'} f_3(\alpha, \beta', \gamma) + \frac{\beta_3''}{\beta''} \frac{\alpha_4}{a} f_2(\alpha, \beta'') +$ $\frac{\gamma_2}{\gamma} \frac{\beta_2''}{\beta''} \frac{\alpha_4}{a} f_3(\alpha, \beta'', \gamma)$	α_3
E	$\frac{\alpha_1}{a} f_1(\alpha) + \frac{\beta_1}{\beta} \frac{\alpha_2}{a} f_2(\alpha, \beta) +$ $\frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{\beta_2'}{\beta'} \frac{\alpha_2}{a} f_3(\alpha, \beta', \gamma) +$ $\frac{\alpha_4}{a} \frac{\beta_1''}{\beta''} f_2(\alpha, \beta'') +$ $\frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{\beta_2''}{\beta''} \frac{\alpha_4}{a} f_3(\alpha, \beta'', \gamma)$	α_1

gdzie

$$f_1(a) = 1 - e^{-at}$$

$$f_2(a, b) = 1 - \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$$

$$f_3(a, b, c) = 1 - \frac{bc}{(b-a)(c-a)} e^{-at} - \frac{ac}{(a-b)(c-b)} e^{-bt} - \frac{ab}{(a-c)(b-c)} e^{-ct}$$

Analizując rysunek 32 możemy, wykorzystując wymienione wzory napisać natychmiast:

$$g(A,A,t) = e^{-\alpha t}$$

$$g(A,B,t) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta'} \left[e^{-\beta' t} - e^{-\alpha t} \right] + \frac{\alpha_4}{\alpha-\beta''} \left[e^{-\beta'' t} - e^{-\alpha t} \right]$$

itd.

Ostateczna postać wzorów jest pokazana w TABELI 2.

Jeżeli więc stan urządzenia, w chwili t^0 rozpoczęcia eksploatacji, jest równy $u = A$, to stan obiektu w chwili t będzie określony rozkładem:

$$G(s,t) = g(A,s,t-t^0); \quad s = A,B,C,D,E,$$

a więc wyprawdonymi powyżej wzorami, w których w miejsce wielkości t należy wstawić wielkość $t-t^0$. Różniczkując wyrażenie $g(A,S,t)$ względem t i obliczając wartości pochodnych w punkcie $t = 0$, otrzymamy odpowiednio wartości intensywności przejść Λ_{AS} dla eksploatowanego obiektu, a mianowicie:

$$\Lambda_{AB} = \alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Lambda_{AC} = \beta_2' \alpha_2 \left[\frac{\alpha}{(\beta' - \alpha)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta'}{(\alpha - \beta')(\beta' - \gamma)} + \frac{\gamma}{(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta')} \right] +$$

$$+ \beta_2'' \alpha_4 \left[\frac{\alpha}{(\beta'' - \alpha)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta''}{(\alpha - \beta'')(\beta'' - \gamma)} + \frac{\gamma}{(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta'')} \right] = 0$$

$$\Lambda_{AD} = \alpha_3 + \gamma_2 \beta_2'' \alpha_2 \left[\frac{1}{(\beta' - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{1}{(\alpha - \beta')(\gamma - \beta')} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta' - \gamma)} \right] +$$

$$+ \gamma_2 \beta_2'' \alpha_4 \left[\frac{1}{(\beta'' - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{1}{(\alpha - \beta'')(\gamma - \beta'')} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta'' - \gamma)} \right] =$$

$$\Lambda_{AE} = \alpha_1 + \gamma_1 \beta_2' \alpha_2 \left[\frac{1}{(\beta_2' - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{1}{(\alpha - \beta_2')(\gamma - \beta_2')} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta_2' - \gamma)} \right] +$$

$$+ \alpha_1 \beta_2'' \alpha_4 \left[\frac{1}{(\beta_2'' - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{1}{(\alpha - \beta_2'')(\gamma - \beta_2'')} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta_2'' - \gamma)} \right] = \alpha_1$$

Zauważmy, że identyczny wynik otrzymany odczytując intensywność przejść bezpośrednio z rysunku 31:

$$\Lambda_{AB} = \lambda_{12}^1 + \lambda_{12}^3 = \alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Lambda_{AC} = 0$$

$$\Lambda_{AD} = \lambda_{13}^{III} = \alpha_3$$

$$\Lambda_{AE} = \lambda_{13}^2 + \lambda_{13}^1 = \lambda_1$$

Ponadto mamy:

$$\Lambda_{211,C} = \lambda_{12}^3 \quad \Lambda_{112,C} = \lambda_{12}^1$$

lub

$$\Lambda_{B,C} = \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{12}^1 + \lambda_{12}^3} \lambda_{12}^3 + \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{12}^1 + \lambda_{12}^3} \lambda_{12}^1$$

gdzie liczby

$$\frac{\lambda_{12}^1}{\lambda_{12}^1 + \lambda_{12}^3} \quad \frac{\lambda_{12}^3}{\lambda_{12}^1 + \lambda_{12}^3}$$

spełniają rolę prawdopodobieństw, że jeżeli obiekt jest w stanie B, to z prawdopodobieństwem równym tym liczbom jest w stanie $\hat{S} = \langle 2, 1, 1 \rangle$ lub $\hat{S} = \langle 1, 1, 2 \rangle$, odpowiednio.

Podobnie z rysunku 31 możemy wyznaczyć wartości $\Lambda_{B,s}$ dla pozostałych wartości $s = D, E$. Wartości Λ_{Cs} będą różne od zera wyłącznie dla $s = D$ i E :

$$\Lambda_{CD} = \lambda_{23}^3 + \lambda_{13}^2$$

$$\Lambda_{CE} = \lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^1$$

Koniec przykładu.

3.4 Proces wymian elementów:

Proces wymian elementów możemy uważać za przeciwny do procesu zużycia, a więc zmniejszający zużycie elementu. Proces wymian należy odróżnić od procesu kontroli stanu, który nie powoduje zmiany stopnia zużycia obiektu oraz od procesu konserwacji, który także nie zmienia stopnia zużycia elementu, a jedynie zwalnia szybkość ich zużywania się. Należy przy tym zauważyć, że wszystkie trzy rodzaje procesów składają się na pojęcie procesu obsługi technicznej obiektu.

Proces wymian składa się z ciągu powtarzających się czynności wymiany elementu funkcjonalnego na nowy, w pewnych stałych odstępach czasu, tzw. normatywnych lub zmiennych - zależnych od stanu zużycia $l(t)$ elementu.

Najczęściej dokonanie wymiany elementu wymaga wyłączenia obiektu z ruchu, co przynosi określone straty, niezależnie od kosztów wymiany elementu. Oczywiście niedogodności procesu wymian są rekompensowane przedłużeniem okresu eksploatacji całego obiektu i związaną z tym obniżką kosztów amortyzacji urządzenia.

Zauważmy, że proces wymian może odnosić się nie tylko do elementu obiektu, ale także do całego obiektu. W ostatnim przypadku wymiana (odnowa) całego obiektu jest równoważna jednoczesnej wymianie wszystkich elementów obiektu. W efekcie różne rodzaje napraw różnią się liczbą i rodzajem jednocześnie wymienianych elementów.

Jeżeli w chwili t' , rozpoczęcia wymiany elementu na nowy, jego zużycie było równe $l_n(t')$ to w chwili

$$t'' = t' + \theta_n$$

zakończenia wymiany (przy czym θ_n jest kalendarzowym czasem trwania wymiany) zużycie elementu będzie równe

$$l_n = e_n(t'') = 0$$

Ogólnie będziemy przyjmowali, iż oczekiwana wartość zużycia $L_n(t)$ elementu w chwili $t > t''$ pod warunkiem, że ostatni raz był on wymieniany w chwili t'' zależy od różnicy $t - t''$

$$L_n = L_n(t - t'')$$

Oczywiście, w przypadku gdy stopień zużycia nowego elementu jest znany, wariancja zmiennej losowej $L_n(t)$ dla chwili $t = t''$ jest równa zeru

$$E[L_n(t'') - L_n(t'')]^2 = 0$$

Oznaczmy symbolem N_{odn}^d c N zbiór (numerów) tych elementów, które ulegają wymianie podczas dokonywania wymian rodzaju $d = 1, 2, \dots, D$. Jeżeli symbolem $p =$

1,2,..., P ponumerujemy wszystkie możliwe rodzaje obsługi technicznych urządzeń, wśród których są obsługi zwane konserwacją, kontrolą i naprawą - to dla każdego rodzaju obsługi p możemy określić zbiór $D_p \subset D$ numerów tych rodzajów czynności typu wymiana, które są wykonywane w czasie obsługi rodzaju p. W szczególności dla obsługi zwanych konserwacją i kontrolą, zbiory D_p są zbiorami pustymi.

Znając D_p oraz N_{odn}^d możemy więc określić zbiór

$$N_p^{odn} = \bigcup_{d \in D} N_{odn}^d$$

numerów tych elementów, które są wymienione w czasie obsługi rodzaju p.

3.5 Zabiegi konserwacyjne

Celem zabiegów konserwacyjnych jest zmniejszenie wartości współczynników β_n i b_n w podanym przykładzie funkcji określającej stopień zużycia n-tego elementu

$$l_n = (\beta_n \cdot c_n + b_n) t$$

Przykładowo, szybkość korozji wpływająca na wartość współczynnika b_n zależy od jakości powłoki ochronnej, której skuteczność maleje z upływem czasu. Pokrycie obiektu lub jego elementu nową powłoką powoduje wzrost skuteczności ochrony i znaczne zmniejszenie szybkości korozji. W efekcie końcowym zabiegi konserwacyjne zmniejszają wartości współczynników β_n , b_n .

Ponieważ często wykonywanie zabiegów konserwacyjnych wymaga wyłączenia obiektu z ruchu, więc dobór częstotliwości ich wykonywania powinien uwzględnić zyski spowodowane przedłużeniem czasu eksploatacji obiektu oraz straty wynikłe z unieruchomienia obiektu i kosztu czynności konserwacyjnych.

Niech z każdym rodzajem $g = 1,2,\dots, G$ czynności konserwacyjnych związane jest spowolnienie procesu zużycia elementów, których numery należą do zbioru

$$N_{kons}^g \subset N$$

Oznaczmy następnie symbolen

$$G_p \subset G$$

zbiór czynności konserwacyjnych wykonywanych w p-tym rodzaju obsługi. Wtedy w rezultacie wykonania p-tego rodzaju obsługi następuje spowolnienie zużycia elementów, których numery należą do zbioru

$$N_p^{\text{kons}} = \bigcup_{g \in G_p} N_g^{\text{kons}}$$

Jeżeli T_n^{kons} jest odstępem czasu między kolejnymi konserwacjami elementu n oraz $s_n = 1/n$, to intensywność

$$\lambda^n(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{l_n(t+\Delta t) - l_n(t)}{\Delta t}$$

zużycia elementu może być następującą funkcją T_n^{kons}

$$\lambda^n = a_n(T_n^{\text{kons}}) \cdot c_n + b_n(T_n^{\text{kons}})$$

3.6 Kontrola stanu

Celem kontroli stanu obiektu jest określenie stopnia zużycia elementu (lub obiektu). Znajomość stopnia zużycia umożliwia wyznaczenie chwili jego wymiany lub konserwacji. Kontrole są niezbędne w przypadku, gdy wymianę elementu (lub rzadziej konserwację) uzależniamy od stopnia jego zużycia. Kontrola stanu obiektu byłaby zbyteczna, gdyby zużycie $l(t)$ nie było funkcją losową parametru t .

Czynność kontroli składa się z szeregu pomiarów sprawdzających niekiedy wymagających wyłączenie obiektu z ruchu, dokonywanych w określonych odstępach czasowych. Efektem sprawdzenia elementu nr n jest zmniejszenie stopnia niewiedzy (entropii) o jego zużyciu. Objawia się to zmniejszeniem wariancji wielkości $\tilde{s}_n(t^*)$ w chwili t^* zakończenia sprawdzania. Zauważmy przy tym, że zmniejszenie wariancji do zera nastąpi wówczas, gdy rezultatem sprawdzenia jest dokładne ustalenie stanu. W przypadku gdy dokładność sprawdzania jest ograniczona lub wynik sprawdzania niepewny, efektem końcowym sprawdzania jest tylko zmniejszenie wariancji wielkości $\tilde{s}_n(t)$.

Oczywiście, wykonanie ciągu sprawdzeń, związane jest z określonymi kosztami, które mogą być powiększone o straty wywołane wyłączeniem z ruchu obiektu sprawdzanego. Nakłady powyższe powinny być rekompensowane przez korzyści osiągane podczas realizacji procesu kontroli. Także korzyścią jest, w szczególności uniknięcie przedczesnych wydatków na odnowę urządzenia (lub

konserwację), w sytuacji gdy zidentyfikowany stopień zużycia nie wymaga stosowania powyższego zabiegu. Z możliwością takich przedwczesnych wydatków (związanych z wymianą lub konserwacją) musimy się liczyć, gdy rezygnujemy z procesów kontroli, wyznaczając sztywne (normatywne) okresy czasu, po których dokonujemy wymian lub przeprowadzamy zabiegi konserwacyjne, nie bacząc na rzeczywisty stan zużycia elementu.

Niech rezultatem każdego rodzaju $h = 1, 2, \dots, H$ sprawdzenia jest określenie stanu $s_n(t) = u_n$ tych elementów n , których numery należą do zbioru.

$$N_{\text{kontr}}^h \subset N$$

Oznaczmy następnie symbolem

$$M_p \subset H$$

zbiór sprawdzeń kontrolnych realizowanych w czasie obsługi rodzaju p . Wtedy podczas p -tego rodzaju obsługi następuje określenie stanu elementów, których numery należą do zbioru

$$N_{\text{kontr}}^p = \bigcup_{h \in M_p} N_{\text{kontr}}^h$$

Oczywiście, dla niektórych obsłóg zbioru N_{kontr}^h mogą być zbiorami pustymi.

UWAGI KOŃCOWE

Jak Czytelnik zauważył, ogólny model procesu eksploatacji zbliżony do rzeczywistego jest bardzo złożony. Przy aktualnym stanie rozwoju metod optymalizacji rzadko mogą być wykorzystane do rozwiązywania problemów optymalizacji i konstrukcji obiektów technicznych. W tej sytuacji pozostaje możliwość wykorzystania opisanych modeli do symulacji eksploatacji przy danych parametrach charakteryzujących zarówno konstrukcje, jak strategie obsługi obiektu technicznego.

W tym sensie możliwe jest doskonalenie konstrukcji maszyn i urządzeń przy pomocy komputera symulującego oczekiwany przebieg procesu eksploatacji. Ze względu na to, że symulacja może odtwarzać oczekiwany przebieg całego procesu życia obiektu, to proces doskonalenia maszyny lub urządzenia może dotyczyć zarówno

- struktury konstrukcji, charakterystyk zużycia i niezawodności elementów z uwzględnieniem ich kosztów wytwarzania

jak i

- strategii obsługi, odstępów międzyobsługowych, rodzajów obsługi, zakresów kontrolnych sprawdzeń i wymian z uwzględnieniem wszelkich konsekwencji związanych z kosztami,

W niektórych szczególnych przypadkach istnieje możliwość wykorzystania metod optymalizacji. Dotyczy to w szczególności tych obiektów, dla których wyznaczane są chwile obsługi po wykonaniu określonej pracy lub po upływie określonego czasu niezależnie od ich stanu, a prawdopodobieństwo ich nagłego uszkodzenia jest pomijalnie małe.

Innym szczególnym przypadkiem jest sytuacja, w której obserwowalny stan obiektu jako całości jednoznacznie określa stan jego elementów. Wtedy istnieje możliwość przerywania procesu użytkowania obiektu - gdy osiągnie on określony stan - celem skierowania do odpowiedniej obsługi.

Niestety, wymienione wyżej przypadki nie są zbyt często spotykane w praktyce. Pierwszy dotyczy obiektów, od których wymagana jest wysoka niezawodność, a ich złożoność uniemożliwia łatwą ocenę stanu elementów składowych po efektach pracy. Drugi dotyczy bądź obiektów bardzo prostych (umożliwiających łatwą identyfikację stanu elementów po efektach ich pracy), bądź wyposażonych w systemy ciągłej, automatycznej diagnostyki elementów składowych.

Najprostszym przypadkiem jest sytuacja gdy obiekt podlega tylko jednemu rodzajowi obsługi - pełnej odnowie, a jednocześnie wyróżnia się tylko dwa możliwe stany obiektu (zdalny lub uszkodzony). Wtedy opis procesu eksploatacji sprowadza się do znanego procesu odnowy.

L I T E R A T U R A

1. R. Barlow, R. Proschan - Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rinekat and Winston: N.York 1975.
2. R. Barlow, F. Proschan - Mathematical theory of reliability, N.York J. Wiley 1965.
3. Beichelt F. Franken P. - Zuverlässigkeit Instandhaltung VEB Verlag Technik Berlin 1983.
4. Waprosy matematycznej teorii niezawodności - E.J.Barziłowicz, I.K.Beljew, B.A.Kasztanow i dr.; Pod red. B.W.Gnedenko - M, Radio i Swjaz 1983-376 c.
5. Elements of Theory of Markov Processes and Thier Applications - A.T.Bhorucha - Reid Mc Grow - Hill Book comp. INC N.York, Toronto, Londyn 1960.
6. R.R. Borkow, F. Proschan - Mathematical Theory of Reliability - John Wiley - New. York 1965.
7. Markowskije procesy E.B. Dynkin Fizmatiz 1963.
8. An introduction to probability theory and its applications W. Feller N. York J. Willey 1968-I 1971 II.
9. Gadasin B.A. Uszakow I.A. (1975): Niezawodność złożonych informacyjno - uprawiających. Moskwa: Sow. Radio.
10. Gadasin B.A. Uszakow I.A. Niezawodność złożonych informacyjno - uprawiających system - M. Sow. Radio, 1975 - 191 c.
11. Gercbach J.B.Korbonskij C.H.B. Modeli otkazow - M. Sow. Radio, 1966-166 c.
12. K. Grzesiak - Niezawodność urządzeń elektronicznych - WNT, Warszawa 1983.
13. Gnedenko B.W. Beljajew, J.K. Solowjew, A.D. Matematyckije metody w teorii niezawodności - M. Nauka, 1965 - 524 c.
14. J. Kałuski - Niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych - Skrypt nr 1143 - Politechnika Śląska 1983.
15. Kanarczuk W.E. Osnovy niezawodności maszyn - Kijew: Nauk. dumka 1982 - 246 c.
16. A First course in Stochastic Processes S. Karlin Academic Press N.York, London 1968.
17. Finite Markov Chains J.G.Kemeny J.L Snell Dartmonth College 1959.
18. Kremer G. Libenmer M. Stacjonaryje słucznyje procesy M. Mir 1969-398 c.
19. B. Kopyciński - Zarys teorii odnowy i niezawodności - WNT, Warszawa 1973.
20. Perewerzew E.S. Słucznyje procesy w parametryczeskich modelach niezawodności. Naukowa dumka Kijew 1987.

21. S. Piasecki - Elementy teorii niezawodności i eksploatacji urządzeń, Skrypt serii "Teoria badań operacyjnych, WAT, Warszawa 1974.
22. Polowko A.M. Osnovy teorii nadezhnosti - M. Nauka 1964 - 446 c.
23. Poradnik niezawodności - Podstawy matematyczne - Wyd. Przem. Masz. WEMA, Warszawa, 1982.
24. M. Prażewski, E. Korczak, M. Zaremba - Niezawodność urządzeń elektronicznych - WKiŁ 1987.
25. Rajkin A.L. Elementy teorii nadezhnosti technicheskikh system. Pod red. I.A. Uszkowa - M. sow. Radio 1978 - 280 c.
26. Соловьев А.Д. (1978): Расчет и оценка характеристик надежности Москва: Изд. Знание.
27. Tichonow B.J. Mirnow M.A. Markowskije procesy - M. sow. Radio, 1977-488 c.
28. R. Tomaszek, D. Janicki - Modele niezawodnościowe urządzeń. Materiały "Szkoły Zimowej 74" Problemy i Modele Eksploatacji Maszyn - Ośrodek Postępu technicznego - Katowice 1974.
29. Wencel A.D. Kurs teorii slučajnych procesow - M. Nauka, 1975 - 318 c.
30. W. Zamojski - Teoria i technika niezawodności - Skrypt Politechnika Wrocławska 1976.

ISBN 83-85847-01-4

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN,
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-68-22 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl