POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI
Marek LIBURA
Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część I.
Podejmowanie decyzji na podstawie modeli użyteczności

nikowa, jak to wynika z argumentacji Allais'a niezbyt nadaje się do tego celu. Zalety dwuczynnikowej funkcji użyteczności mogą sugerować celowość zwiększenia wymiarowości, tj. zastosowania n-czynnikowej ($n > 2$) funkcji użyteczności. Można by tu na przykład uwzględnić wyższe momenty funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla oczekiwanych zwrotów.

Z drugiej strony operowanie złożonymi funkcjami użyteczności skomplikowałoby jeszcze bardziej i tak już trudny problem identyfikacji subiektywnych parametrów użyteczności inwestora i zwiększyłoby dystans jako dzieli teorię i praktykę inwestowania. Z powyższych względów ograniczamy się tu do względnie skromnego modelu z dwuczynnikową funkcją użyteczności (2).

Funkcja ta nie tylko daje lepszą interpretację zachowania się decydenta w obliczu różnych form ryzyka. Jak zobaczymy w następnych punktach niniejszej pracy umożliwia ona rozwiązywanie problemów optymalizacji portfela, z szeroką gamą walorów, w stosunkowo prosty sposób rachunkowy.

3. Modele równowagi rynku kapitałowego

W § 2 zajmowaliśmy się problemem wyceny lub wyboru obarczonych ryzykiem walorów przez indywidualnego decydenta. Wybór w takich sytuacjach jest możliwy jeśli decydent może określić swoje indywidualne kryterium wyboru lub funkcję użyteczności. Opierając się na tym kryterium konstruuje on linię rozdzielającą w płaszczyźnie parametrów (σ, R).

Przyjmując iż mamy do czynienia ze zbiorem decydentów, którzy działają na rynku kapitałowym, pozostaje do wyjaśnienia problem: w jaki sposób odbywa się wycena zbiorowa poszczególnych walorów, tj. jak ustala się równowaga oraz ceny tych walorów?

Analiza równowagi rynku kapitałowego wymaga wprowadzenia szeregu warunków upraszczających, a zwłaszcza:

1. Pomijane są koszty transakcyjne oraz wpływ opodatkowania transakcji.
2. Decyzje indywidualnego decydenta nie mają wpływu na pozostałych i na równowagę rynkową.
3. Inwestorzy mają jednorodne informacje o walorach i oczekiwania co do ich zwrotów i wariancji.
4. Inwestorzy opierają się w swoich decyzjach na identycznych kryteriach lub funkcjach użyteczności.

W analizie równowagi rynkowej oraz konstrukcji rynkowej linii rozdzielającej, szczególne znaczenie ma warunek 4.

W § 3.1 rozpatrzymy model oparty na stosunku oczekiwanych zwrotów z portfela do odchylenia standardowego.

3.1. Model oparty na kryterium $(R - R_F):\sigma$

Załóżmy, że inwestor występujący na rynku (giełdzie) akcji posiada informacje o zwrotach R_i oraz odchyleniach standardowych σ_i, $i = 1,\dots,n$, gdzie n - liczba akcji. Dysponuje on pewną gotówką X, którą chce zainwestować w akcje. Chodzi mu zwłaszcza o udziały $x_i = X_i / X$, $i = 1,\dots,n$, wydatków X_i, przeznaczonych na poszczególne walory, w całej kwocie X. Jeśli znane są zwroty i kowariancje tych walorów możne on określić zwrot oczekiwany ze swego portfela

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \tag{1}$$

oraz wariancję tego portfela

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} x_i x_k \, \sigma_{ik} \tag{2}$$

gdzie σ_i^2 są to wariancje, zaś σ_{ik} - kowariancje pomiędzy akcjami i oraz k, $\forall i,k$.

Możliwe jest teraz sformułowanie kilku problemów optymalizacyjnych.

a. Problem sformułowany przez H. Markowitza (1987):

$$\min_{x_i} V_p(x) \tag{3}$$

$$\text{p.w.} \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \geq R_p,\ R_p = \text{dana liczba}$$

b.

$$\max_{x_i} \sum_{i=1}^{n} x_i R_p \tag{4}$$

$$\text{p.w. } V_p(x) \leq V,\ V = \text{dana liczba}$$

c.

$$\max_{x_i} \frac{R_p - R_F}{\sigma_p} \tag{5}$$

Rozwiązania powyższych problemów mogą dać ujemne wartości x_i. Realizacja takich strategii wymaga stosowania tzw. krótkiej sprzedaży. Polega ona na tym iż inwestor pożycza akcję (np. u maklera) i sprzedaje ją na giełdzie po to, by w następnym okresie odkupić ją i oddać pożyczkodawcy. Jeśli w międzyczasie ceny akcji poszły w dół inwestor jest w stanie, w wyniku krótkiej sprzedaży, zrealizować zysk finansowy bez angażowania swojej gotówki.

Jeśli inwestor nie chce stosować krótkiej sprzedaży, to należy w uzupełnieniu do sformułowań a, b, c wprowadzić dodatkowe warunki:

$$x_i \geq 0, \quad \forall i, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{7}$$

Zanim przejdziemy do rozwiązywania problemów (3)...(7) omówimy krótko pojęcie granicy efektywnej zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Załóżmy iż dane są dwie akcje (a,b) o parametrach R_a, σ_a, oraz R_b, σ_b oraz współczynniku korelacji wzajemnej $\rho = \dfrac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \sigma_b}$.

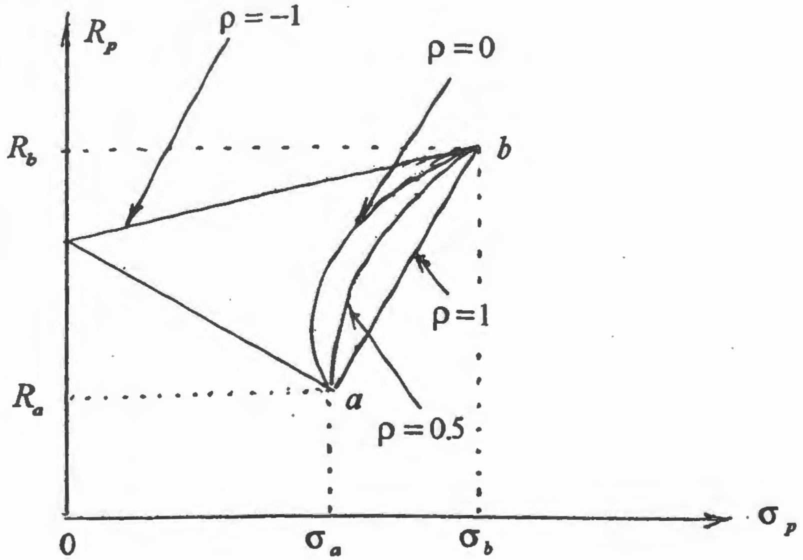
Utworzony z tych akcji portfel charakteryzuje się zwrotem

$$R_p = xR_a + (1-x)R_b. \tag{8}$$

i wariancją

$$\sigma_p^2 = x^2\sigma_a^2 + (1-x)^2\sigma_b^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_a\sigma_b, \tag{9}$$

które zależą od $x \in [0,1]$.



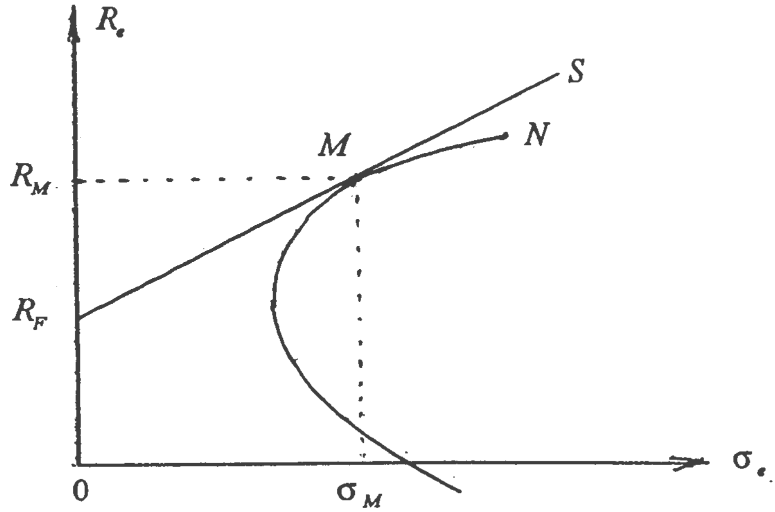
Rys. 10. Trajektorie w płaszczyźnie (R_p, σ_p)

Jeżeli dla ustalonej wartości ρ będziemy w sposób ciągły zmieniać x, poczynając od wartości $x=1$, do $x=0$, to obliczone ze wzorów (8) i (9) wartości $R_p(x)$ oraz $\sigma_p(x)$ pozwolą na wyznaczenie trajektorii łączącej punkt a z punktem b, tak jak to ukazuje Rys. 10. Rozwiązanie któregokolwiek problemu optymalizacyjnego powoduje wyznaczenie punktu $x=\hat{x}$, który leży na trajektorii.

W przypadku większej liczby akcji trajektorie odpowiadające możliwym do utworzenia portfelom zapełniają pewien obszar o granicy (będącej obwiednią tych trajektorii) która jest zwana efektywną granicą tego portfela. Portfel może też, w granicznym przypadku, obejmować wszystkie akcje znajdujące się na rynku. Na Rys. 11 przedstawiono efektywną granicę takiego portfela. Jeśli decydent rozwiązuje problem c) to znajduje on taki punkt M, położony na granicy efektywnej, dla którego nachylenie prostej łączącej punkt R_F z M; czyli $(R_e - R_F){:}\sigma_e$ jest największe. Łatwo zauważyć, że linia łącząca R_F z M posiada równanie

$$R_e = R_F + \frac{R_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_e . \tag{10}$$

Linia ta zwana jest linią rynku kapitałowego (*capital market line*).



Rys. 11. Granica efektywna portfela akcji

Punkt M jest tu określony przez optymalną strategię $x_i = \hat{x}_i$, $\forall i$, czyli optymalne rozwiązanie problemu c). Przy założeniu, że wszyscy decydenci kierują się w wyborze portfela kryterium (5) punkt ten określa również równowagę rynkową. Jeśli inwestor dopuszcza, w uzupełnieniu do portfela złożonego ze wszystkich akcji, również walor bez ryzyka (o zwrocie R_F) to jego efektywna granica będzie obejmowała odcinek $R_F M$ oraz gałąź MN granicy efektywnej. W takiej sytuacji inwestor może dobrać relację „zwrot-ryzyko" z dowolnie małym poziomem ryzyka (σ_e) przez umieszczenie części swych nakładów w walory bezryzykowe (np. obligacje Skarbu Państwa).

Warto zwrócić uwagę na interpretację wzoru (10). Efektywny (oczekiwany) zwrot R_e jest tu sumą R_F (czyli ceny odroczonej w czasie konsumpcji) oraz kosztu ryzyka (σ_e) o cenie $(R_M - R_F):\sigma_M$.

Chociaż równanie (10) opisuje zwroty na portfelach efektywnych nie pozwala ono określić zwrotów na portfelach nieefektywnych lub na oddzielnych akcjach. Aby wycenić te zwroty należy skonstruować rynkową linię rozdzielającą, opartą na kryterium c), czyli na maksymalizacji funkcji

$$Q(x) = \frac{R_p(x) - R_F}{\sigma_p(x)},$$

Można łatwo pokazać, iż warunki konieczne (a zarazem dostateczne) dla optymalności sprowadzają się do równań (por. np. Elton i Gruber (1995)):

$$\frac{dQ}{dx_k} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_{ik} = R_k - R_F, \quad k = 1,\dots,n \tag{11}$$

gdzie $\lambda - const$. Rozwiązanie $x_i \overset{\Delta}{=} x_i^*$, $\forall i$, tych równań reprezentuje strategię wszystkich inwestorów, którzy mają te same (homogeniczne) oczekiwania.

Wprowadzając pojęcie zwrotu na portfelu rynkowym (R_M) (o udziałach x_i^*, odzwierciedlających udziały wszystkich akcji w obiegu rynkowym) można napisać:

$$R_M = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i^*.$$

Wykażemy, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \sigma_{ik} = \text{cov}(\widetilde{R}_k, \widetilde{R}_M),$$

gdzie $E\{\tilde{R}_k\} = R_k$, $E\{\tilde{R}_M\} = R_M$.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\tilde{R}_k \tilde{R}_M) &= E\left[(\tilde{R}_k - R_k)\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}_i x_i^* - \sum_{i=1}^{n} R_i x_i^*\right)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* \, E\left[(\tilde{R}_k - R_k)(\tilde{R}_i - R_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \sigma_{ik} \end{aligned} \quad (12)$$

Porównując (11) z (12) widzimy, że

$$\lambda \operatorname{cov}(\tilde{R}_k \tilde{R}_M) = R_k - R_F, \quad k = 1,\dots,n. \quad (13)$$

Ponieważ równanie (13) musi zachodzić dla wszystkich k, a więc i dla portfela rynkowego, dla którego mamy:

$$\lambda \operatorname{cov}(\tilde{R}_M \tilde{R}_M) = \lambda \sigma_M^2 = R_M - R_F,$$

czyli

$$\lambda = \frac{R_M - R_F}{\sigma_M^2}.$$

Wynika stąd, iż równanie (13) można zapisać jako

$$R_k = R_F + \frac{R_M - R_F}{\sigma_M^2} \operatorname{cov}(\tilde{R}_k, \tilde{R}_M), \quad (14)$$

Wartość kowariancji (pomiędzy zwrotem $\tilde{R}_k$ oraz zwrotem z portfela rynkowego $\tilde{R}_M$, podzielona przez σ_M^2) oznaczana jest zwykle jako parametr β_k. Równanie (14):

$$R_k = R_F + \beta_k (R_M - R_F), \quad \forall k, \quad (15)$$

zwane jest linią kapitałową k-tej akcji.

Pozwala ono dla każdej akcji, o znanym parametrze $\beta_k = \dfrac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_k, \tilde{R}_M)}{\sigma_M^2}$, określić jej wartość rynkową (R_k). Inaczej mówiąc (15) jest linią rozdzielającą opartą na kryterium (5). Kryterium to, zgodnie z warunkiem 4 z § 3, akceptują wszyscy inwestorzy działający na rynku akcji.

Czym większa jest wartość β dla określonej akcji tym większy musi być oczekiwany zwrot (w warunkach równowagi rynkowej) z tej akcji. Porównanie dwóch akcji sprowadza się tu do porównania ich współczynników β.

W literaturze anglosaskiej model wyceny akcji (15) zwany jest „*capital asset pricing model*" (CAPM). Warto zwrócić uwagę na fakt iż w modelu CAPM wartość zwrotu $R_k - R_F$ jest proporcjonalna (ze współczynnikiem β_k) do zwrotu rynku $R_M - R_F$.

Możliwe jest także skonstruowanie modelu wyceny akcji na podstawie znanych metod ekonometrycznych, takich jak regresja liniowa. Zgodnie z takim podejściem zakładamy, iż dane są (*ex post*) szeregi czasowe R_{kt}, R_{Mt}, dla kolejnych momentów czasu $t = 1,2,\ldots$. Możemy wtedy napisać

$$\tilde{R}_{kt} = \alpha_k + \beta_k \tilde{R}_{Mt} + \tilde{e}_{kt}, \quad \forall k,t, \tag{16}$$

gdzie α_k, β_k są to parametry, które należy wybrać w ten sposób, by uzyskać minimum błędu kwadratowego:

$$\sum_t \left[\tilde{R}_{kt} - \alpha_k - \beta_k \tilde{R}_{Mt}\right]^2 .$$

Zakładamy tu, że $\tilde{e}_{kt}$ jest zmienną przypadkową o rozkładzie normalnym z $E\{\tilde{e}_{kt}\} = 0$, $\forall k,t$, i wariancją $E\{\tilde{e}_k\}^2 = \sigma_{ek}^2$; a także:

$$E\left[\tilde{e}_k(\tilde{R}_M - R_M)\right] = 0, \quad \forall k,t,$$

$$E\left[\tilde{e}_k, \tilde{e}_j\right] = 0, \quad \forall k, j,$$

$$\mathrm{cov}(\tilde{e}_k, \tilde{R}_k) = 0, \quad \forall k, t.$$

Można łatwo wykazać (por. np. Elton i Gruber (1995)), że:

$$E(\tilde{R}_k) = E(\alpha_k + \beta_k \tilde{R}_M + \tilde{e}_k) = \alpha_k + \beta_k R_M, \quad \forall k \tag{17}$$

$$\sigma_k^2 = E\left[\tilde{R}_k - R_k\right]^2 = \beta_k^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ek}^2, \quad \forall k \tag{18}$$

$$\sigma_{kj} = E\left[(\tilde{R}_k - R_k)(\tilde{R}_j - R_j)\right] = \beta_k \beta_j \sigma_M^2, \quad \forall k, j \tag{19}$$

Przechodząc na wartości oczekiwane w (16) uzyskujemy

$$R_k = \alpha_k + \beta_k R_M, \quad \forall k \tag{20}$$

gdzie β można obliczyć ze wzoru

$$\beta_k = \frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_t \left[\tilde{R}_{kt} - R_k\right]\left[\tilde{R}_{Mt} - R_M\right]}{\sum_t \left[\tilde{R}_{Mt} - R_M\right]^2},$$

Łatwo zauważyć, iż w przypadku n akcji zarówno CAPM jak i model ekonometryczny (20) operują $3n+2$ parametrami $(\alpha_k, \beta_k, \sigma_{ek}, R_M, \sigma_M)$ podczas gdy modele oparte na kryterium (3)÷(5) wymagają znajomości $n(n-1)/2$ współczynników σ_{ik}.

Warto też zwrócić uwagę na ryzyko konkretnej akcji wyrażone wzorem (18). Składa się ono z dwóch składowych.

Pierwsza, $\beta_k^2 \sigma_M^2$, która zależy od korelacji zwrotów z akcji $(\tilde{R}_k)$ i z rynku $(\tilde{R}_M)$, zwana jest ryzykiem systematycznym. Składowa ta wyraża niejako „wspólny ruch zwrotu z akcji i zwrotu z rynku" (który opisuje np. indeks giełdowy).

Druga składowa jest związana z fluktuacją indywidualną zwrotu z akcji. Nie jest ona związana z fluktuacją zwrotów z rynku i zwana jest ryzykiem niesystematycznym. Łatwo wykazać, że ryzyko niesystematyczne może być znacznie zredukowane przez tzw. dywersyfikację portfela.

W tym celu załóżmy, że portfel składa się z n akcji wziętych w równych proporcjach, tj. $x_i = \frac{1}{n}$, $\forall i$. Współczynnik β_p tego portfela wyniesie

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_i .$$

Dla wariancji portfela mamy:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 e_{ei}^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j \right) \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 e_{ei}^2 = .$$

$$= \beta_p^2 \sigma_M^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{e_{ei}^2}{n}$$

Gdy $n \to \infty$ ostatni wyraz dąży do zera czyli $\sigma_p^2 \to \beta_p^2 \sigma_M^2$. Wynika stąd, że składowa niesystematyczna ryzyka portfela, tj. $\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} \frac{e_{ei}^2}{n}$, dąży do zera gdy liczba akcji rośnie nieograniczenie. Składowa systematyczna $(\beta_p^2 \sigma_M^2)$ nie może być wyeliminowana przez dywersyfikację portfela. Z tego względu β_p jest miarą ryzyka niedywersyfikowanego.

Wracając do interpretacji modelu CAPM (15) widzimy również, iż inwestor jest wynagradzany przez rynek (za to, że zgodził się, kupując akcje, na poniesienie ryzyka) przez składową $\beta_k(R_M - R_F)$. Jeśli $\beta = 1$ to $R_k = R_M$, czyli wynagrodzenie to jest równe zwrotowi rynkowemu. Inaczej mówiąc gdy $\beta > 1$ (lub $\beta < 1$) to akcja jest lepsza/gorsza od przeciętnej akcji rynkowej. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż rynek nie wynagradza inwestora za ryzyko niesystematyczne. Może ono bowiem być wyeliminowane przez dywersyfikację portfela.

Na zakończenie niniejszego punktu warto także zwrócić uwagę na wagę eksperymentalnej weryfikacji modeli równowagi rynkowej, a zwłaszcza modelu CAPM.

Aby zweryfikować CAPM, pod kątem widzenia jego możliwości przewidywania cen akcji, stosuje się zwykle dane historyczne (*ex post*) w celu estymacji parametrów modelu w sensie *ex ante*. Inaczej mówiąc, należy zastosować regresję liniową do modelu:

$$x_{it} = \overline{x}_i + \beta_i x_{mt} + e_i,$$

gdzie x_{it},, x_{mt} są to zwroty i -tej akcji oraz portfela rynkowego w czasie t ; $\overline{x}_i, \beta_i$ są tu parametrami estymowanymi, zaś e_i - zmienne losowe o rozkładzie normalnym.

Niech wartości estymowane ryzyka systematycznego będą β_i^*, $i = 1,2,\dots,n$, przy czym liczba n jest dostatecznie duża. Podobnie załóżmy, iż mamy dostatecznie dużą liczbę obserwacji $t = 1,2,\dots,m$, zwrotów x_{it}, x_{mt}. Możemy zatem dokonać n regresji (szeregu czasowego x_{it} względem x_{mt}), w wyniku których uzyskujemy n par $\{\overline{x}_i, \beta_i^*\}$ (średniego zwrotu $\overline{x}_i$ oraz ryzyka systematycznego β_i^*).

Możemy z kolei dokonać tzw. regresji krzyżowej (*cross-section*) typu:

$$\overline{x}_i = a_0 + a_1\beta_i^* + c_1, \quad \forall i \tag{21}$$

gdzie c_1 - błąd przypadkowy; dla wyznaczania parametrów a_0, a_1.

Ostatnia regresja jest podobna do zależności jaką postuluje CAPM; tj.

$$E(x_i) = R_F + \left[E(x_m) - R_F\right]\beta_i \,. \tag{22}$$

Zachodzą tu jednak następujące różnice:

- w modelu (21) używamy dane *ex post* $\bar{x}_i$, jako miarę oczekiwanego zwrotu $E(x_i)$.
- używamy także estymatory *ex post* β_i^* zamiast prawdziwych (nieznanych) *ex ante* wartości β_i.

Jeśli CAPM stanowi dobrą aproksymację zachowania się cen rynkowych, to należy się spodziewać, że

1. a_0 i a_1 nie będą istotnie różnić się od stopy bez ryzyka R_F oraz $E(x_m) - R_F$ *)
2. kwadrat współczynnika korelacji (ρ^2) jest dostatecznie duży.

Niestety, wiele badań empirycznych (por. Levy i Sarnat (1994)) wskazuje na następujące fakty:

- a_0 jest dużo większe od R_F,
- a_1 jest dużo mniejsze niż $(\bar{x}_m - R_F)$,
- ρ^2 jest bardzo niskie (około 0,2 jeżeli stosuje się dane zwrotów za okres roczny oraz ~ 0 jeśli stosuje się dane miesięczne).

Fakty te podważają użyteczność modelu CAPM w zastosowaniach praktycznych.

Obrońcy modelu CAPM wskazują na fakt, iż CAPM opiera się na danych *ex post*. Model ten traktowany jako model równowagi rynkowej winien raczej opierać się na danych *ex ante* i w tym sensie przeprowadzona weryfikacja niczego nie przesądza. Podkreśla się też, że zwolennicy CAPM winni, jak to nakazuje teoria, posiadać portfele efektywne (którym odpowiada punkt M na Rys. 11). Niestety, jak wskazują Levy i Sarnat (1994), przeciętny portfel inwestora giełdo-

---

*) Ponieważ $E(x_m)$ nie jest obserwowalne, zwykle porównuje się a_1 z uśrednioną (ex post) wartością $\bar{x}_m - R_F$.

wego zawiera nie więcej niż 4 akcje. Badania przeprowadzone w dużych amerykańskich korporacjach, wskazują na małe zainteresowanie modelem CAPM (52% menedżerów twierdzi, że koncepcja ryzyka systematycznego rzadko wpływa na politykę decyzyjną, zaś 40% menadżerów stwierdza, że CAPM nie ma wpływu na decyzje korporacji).

W często cytowanej pracy R. Rolla (1997) wskazuje się na fakt, iż fiasko CAPM może być wynikiem przyjęcia przez konstruktorów modelu niewłaściwego indeksu dla portfela rynkowego. Zgodnie z teorią portfel rynkowy winien zawierać wszystkie walory z ryzykiem, tj. akcje, obligacje, nieruchomości, złoto, kapitał ludzki itp. Zatem przeprowadzone testy nie są w stanie zweryfikować i potwierdzić przydatność tego modelu.

Reasumując powyższe uwagi można stwierdzić, iż model CAPM posiada niewątpliwą atrakcyjność jako prosty model wyjaśniający równowagę rynkową. Bierze się stąd zapewne jego popularność w badaniach teoretycznych. Z drugiej strony model ten nie jest w stanie wyjaśnić zachowania się indywidualnych inwestorów, a także - brak mu zaufania ze strony decydentów (aby w oparciu o ten model mogli oni podejmować lepsze decyzje). Sytuacja powyższa wskazuje na konieczność poszukiwania innych modeli, na których można by oprzeć procesy wspomagania decyzji inwestycyjnych.

3.2. Model APT

Omawiane w § 3.1 niedoskonałości modelu CAPM inspirowały niewątpliwie S. Rossa do opracowania innego modelu równowagi rynku kapitałowego opartego na arbitrażu, który został nazwany APT (*the arbitrage pricing theory*) (Ross, 1976).

W modelu tym nie zakłada się iż inwestorzy opierają swoje decyzje na koncepcjach oczekiwanego zwrotu oraz wariancji. Przyjmuje się natomiast, że zwroty R_i są generowane przez model

$$R_i = E(R_i) + \beta_i[I - E(I)] + e_i, \tag{1}$$

gdzie I jest indeksem o wartości oczekiwanej $E(I)$

β_i - współczynnikiem określającym wagę zmian indeksu I,

e_i - zmienną losową (szumem).

Podstawowa idea APT polega na możliwości utworzenia portfela z zerowym β oraz zerowymi nakładami N. Oznaczając proporcje n akcji w tym portfelu przez q_i, i=1,...,n, można napisać

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} q_i \beta_i = 0, \tag{2}$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} q_i = 0. \tag{3}$$

Równanie (2) oznacza, że ryzyko portfela jest równe zeru. Równanie (3) zakłada możliwość istnienia akcji, które podlegają krótkiej sprzedaży, tj. posiadają ujemne q_i. Dla wyznaczenia oczekiwanego zwrotu rozważanego portfela (R_p) należy pomnożyć (1) przez q_i i przesumować względem i:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} q_i R_i = E(R_p) + [I - E(I)] \sum_{i=1}^{n} q_i \beta_i + \sum_{i=1}^{n} q_i e_i .$$

Zakładając iż mamy do czynienia z dużym n, co umożliwia założenie $\sum_{i=1}^{n} q_i e_i = 0$, otrzymujemy $R_p = E(R_p)$, tj. portfel z zerową fluktuacją i zerowymi inwestycjami netto.

W równowadze oczekiwany zwrot z tego portfela musi być zerowy, $E(R_p) = 0$. W przeciwnym przypadku łatwo pokazać iż można przy pomocy tego portfela uzyskać dodatni zwrot (z zerowymi nakładami i bez ryzyka). Rzeczywiście, niech $E(R_p)$= 100 zł oraz $R_p = E(R_p)$=100 zł. Inwestorzy arbitrażyści będą kupować taki portfel aż do czasu gdy jego cena wzrośnie i zwrot zmaleje do $R_p = E(R_p) = 0$. A więc w wyniku arbitrażu uzyskujemy równowagę, w której nie istnieją już możliwości uzyskania zysku bez ponoszenia ryzyka.

Z formalnego punktu widzenia w modelu mamy trzy równania

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \times 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \beta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i E(R_i) = 0$$

które zgodnie z zasadami algebry pozwalają napisać $E(R_i)$ jako kombinację liniową stałej oraz β_i:

$$E(R_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \beta_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{4}$$

Współczynniki α_0, α_1 mogą być wyznaczone w sposób następujący. Najpierw rozważmy portfel R_z z $\beta = 0$, i $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$,

$$E(R_z) = \sum_{i=1}^{n} q_i E(R_i) = \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} q_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} q_i \beta_i = \alpha_0$$

czyli

$$\alpha_0 = E(R_z).$$

Z kolei rozważmy portfel z $\sum_{i=1}^{n} q_i \beta_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. Mamy tu

$$E(R_i) = E(R_z) + \alpha_1\beta_i, \quad \forall i$$

Mnożąc powyższe równanie przez q_i i sumując otrzymujemy

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} q_i E(R_i) = E(R_z)\sum_{i=1}^{n} q_i + q_1 \sum_{i=1}^{n} q_i\beta_i = E(R_z) + \alpha_1 .$$

Stąd

$$\alpha_1 = E(R_p) - E(R_z)$$

Można zatem napisać (4) w postaci

$$E(R_i) = E(R_z) + \beta_i\left[E(R_p) - E(R_z)\right],$$

gdzie $E(R_p)$ jest zwrotem z portfela o $\beta = 1$, zaś $E(R_z)$ - zwrotem z portfela o $\beta = 0$.

Ponieważ $E(R_p)$ (portfela o $\beta = 1$) musi być równe wartości oczekiwanej dla indeksu I, tj. $E(R_p) = E(I)$, otrzymujemy ostatecznie

$$E(R_i) = E(R_z) + \beta_i\left[E(I) - E(R_z)\right], \quad \forall i . \tag{5}$$

W przypadku gdy indeksem I jest portfel rynkowy o zwrocie R_m, zaś zwrot bez ryzyka $E(R_z) = R_F$ model (5) staje się identyczny z modelem CAPM.

Warto zauważyć, że przy wprowadzeniu modelu APT istotnym jest założenie iż n jest duże ($\sum_{1}^{n} q_i e_i = 0$) oraz, że możliwa jest krótka sprzedaż akcji na rynku kapitałowym.

Rozważmy teraz prosty przykład ilustrujący proces konstrukcji portfela zerowego oraz obliczenie współczynnika a_0, a_1.

Załóżmy że mamy trzy akcje o parametrach

1. $E(R_1) = 0{,}1$, $\beta_1 = 1$

2. $E(R_2) = 0{,}3$, $\beta_2 = 2$

3. $E(R_3) = 0{,}5$, $\beta_3 = 3$

Wartość udziałów q_1, q_2, q_3 w zerowym portfelu znajdujemy rozwiązując równania:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

$$q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + q_3\beta_3 = q_1 + 2q_2 + 3q_3 = 0$$

Ustalając jedną ze zmiennych np. $q_2 = 2$, znajdujemy, że $q_1 = q_3 = -1$, czyli na dwie zakupione akcje Nr 2 możemy sprzedać krótko po jednej akcji Nr 1 i Nr 3.

Łatwo sprawdzić, że $\sum_1^3 q_i E(R_i) = -0{,}1 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0$. W takim przypadku $E(R_i) = \alpha_0 + \alpha_1\beta_i$, $i = 1,2,3$, czyli poszczególne akcje leżą na prostej o nachyleniu

$$\alpha_1 = \left[E(R_3) - E(R_2)\right] : (\beta_3 - \beta_2) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2\,.$$

Dla akcji trzeciej mamy zatem $E(R_3) = \alpha_0 + 0{,}2\,\beta_3 = 0{,}5$ skąd $\alpha_0 = 0{,}5 - 0{,}2 \cdot 3 = -0{,}1$, oraz $E(R_2) = -0{,}1 + 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}3$. Łatwo sprawdzić, że również akcja pierwsza leży na prostej. Mamy bowiem $E(R_1) = -0{,}1 + 0{,}2\,\beta_1 = 0{,}1$.

Główną zaletą modelu APT, poza faktem iż nie wymaga on znacznej (w porównaniu z CAPM) liczby założeń, jest możliwość jego uogólnienia na przypadek wieloczynnikowy, tj. wyrażenia R_i jako liniowej kombinacji różnych indeksów I_k, $k = 1,\ldots,m$. Można bowiem przyjąć model R_i w postaci

$$R_i = E(R_i) + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik}\left[I_k - E(I_k)\right], \quad \forall i \tag{6}$$

gdzie β_{ik} - współczynniki ryzyka związane z indeksem k-tym.

Należy także zauważyć, że testy empiryczne modelu (6) prowadzą do rozbieżnych ocen. Chodzi tu zwłaszcza o ustalenie właściwych czynników tzn. indeksów (takich jak stopa inflacji, stopa procentowa, kurs wymiany walutowej, stopa wzrostu dochodu narodowego itp.), a także zbadanie, metodami analizy czynnikowej, które ze stosowanych czynników są istotne. S. Ross (1976) sugeruje, że tylko kilka (~ 5) czynników jest istotnych.

4. Efektywne metody konstruowania portfela inwestycyjnego

Podstawowy problem optymalizacyjny jaki występuje przy konstrukcji portfela złożonego z akcji można sformułować w sposób następujący. Należy znaleźć strategię $x_i = \hat{x}_i$, $i = 1,\dots,n$ (gdzie x_i reprezentują udziały nakładów na zakup akcji) taką, że dany wskaźnik jakości Q (lub użyteczności) osiąga maksimum, w zbiorze wartości dopuszczalnych Ω.

$$Q(\hat{x}) = \max_{x \in \Omega} Q(x) \tag{1}$$

Wskaźnikiem jakości może być zwłaszcza

$$Q(x) = \frac{R_p(x) - R_F}{\sigma_p(x)} \tag{2}$$

zaś zbiorem dopuszczalnym

$$\Omega = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ \forall i \right\} \tag{3}$$

Trudności związane z efektywnym (numerycznym) rozwiązaniem problemu optymalizacji portfela polegają nie tylko na tym, że są to zagadnienia programowania nieliniowego (w prostym przypadku -

Wspomaganie decyzji inwestycyjr

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.

Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.

Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.

Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl