POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI

Marek LIBURA

Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część II.
Modelowanie dyskretne i optymalizacja w analizie portfelowej na rynku papierów dłużnych

$$f_t = \frac{(1+y_{t+1})^{t+1}}{(1+y_t)^t} - 1 \tag{29b}$$

$$\underline{\alpha} \le \alpha \le \overline{\alpha}$$

$$\underline{d}_t \le d_t \le \overline{d}_t$$

$$\underline{y}_t \le y_t \le \overline{y}_t$$

$$\underline{f}_t \le f_t \le \overline{f}_t$$

Znajomość funkcji stóp procentowych, w każdym momencie czasu i dla całego horyzontu czasowego inwestycji, ma kluczowe znaczenie dla poprawnej wyceny wartości strumienia wpływów, oraz dla ustalenia przedsięwzięć osłonowych, dla portfela instrumentów zależnych od stóp procentowych, adekwatnych do rozwoju sytuacji na rynku. Ograniczone ramy tej monografii i jej ukierunkowanie tematyczne sprawiają, że tę problematykę jedynie zasygnalizowaliśmy.

3. Parametry strumienia i ryzyko inwestycji

3.1. Parametry strumienia pieniądza

Strumień wpływów pieniężnych wynikający z posiadania papierów dłużnych jest określony warunkami emisji. Jego wartość obecna i przyszła zależą od aktualnej i oczekiwanej funkcji czasowej stóp procentowych i od innych warunków rynkowych mających wpływ na poziom składowych wektora ryzyka. We wcześniejszych rozdziałach dawaliśmy przykłady instrumentów dłużnych i przypisanych im parametrów takich jak: wartość nominalna, okres do zapadalności, wartość i częstość wypłaty kuponu, warunki wcześniejszego wykupu itp. Są to parametry typowe dla bonów skarbowych i obligacji różnych typów. Instrumenty pochodne papierów dłużnych (opcje na obligacje, kontrakty FUTURES i opcje na te kontrakty, kontrakty: CAP, SWAP i inne) są charakteryzowane parametrami specyficznymi dla nich, takich jak: wartość jednostki kontraktu i termin jego zapadalności, cena nabycia kontraktu, cena zakontraktowana, itp. Wszystkie te parametry będziemy nazywać **parametrami pierwotnymi strumienia pieniężnego**.

Do oceny wartości rynkowej - obecnej i przyszłej - posiadanego portfela, jego zyskowności i ryzyka, inwestorzy używają wielu mierników. Mierniki te, oparte na parametrach pierwotnych instrumentów i przewidywane zachowanie rynku, będziemy nazywać ogólnie parametrami **wtórnymi** strumienia pieniężnego.

Na rynku papierów dłużnych dwa parametry wtórne - **trwałość** i **krzywizna** (w literaturze polskiej używane są także nazwy: „czas trwania" i „wypukłość") odgrywają rolę pierwszoplanową. Parametry te są używane do szacowania wrażliwości (zmienności) z jaką wartość strumienia pieniądza (cena instrumentu lub portfela) reaguje na marginalne (nieduże) zmiany wartości stopy procentowej, do podejmowania decyzji osłonowych dla zajmowanych pozycji, do podejmowania decyzji o immunizacji, dedykacji i do innych przedsięwzięć zabezpieczających portfel inwestycyjny.

Niech będzie dany strumień $\mathbf{S}_T = \{W_t \mid t = 1,2, ..., T\}$, o zakontraktowanych wartościach wpływu W_t, generowanych przez pewien instrument dłużny, i niech $r(t)$ będzie funkcją czasową stopy procentowej, z którą dyskontowany jest w każdej chwili t wpływ W_t. Cenę instrumentu w chwili t niech przedstawia funkcja $P[r(t), t]$. Wartość obecną strumienia przedstawia wzór:

$$P[r(t),\ t] = \sum_{t=1}^{T} W_t \left(1 + r_t\right)^{-t} \tag{30}$$

gdzie r_t jest stopą zwrotu adekwatną do odstępów czasowych między wpływami, a symbol $P[r(t), t]$ podkreśla zależność ceny instrumentu od zachowania się stopy procentowej w czasie.

Jeżeli w pewnej chwili nastąpi jednoczesna i jednakowa dla wszystkich przyszłych momentów czasu (równoległe przemieszczenie funkcji stóp procentowych), zmiana funkcji $r(t)$ o marginalną wartość Δr, tzn. $r_1(t) = r(t) + \Delta r$, to wartość strumienia zmieni się o wartość $\Delta P = P[r_1(t), t] - P[r(t), t]$. Przedstawmy tę zmianę w postaci rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{d^2 P}{dr^2}(\Delta r)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 P}{dr^3}(\Delta r)^3 + \ldots \quad (31)$$

Różne definicje trwałości i krzywizny funkcji $P[r(t), t]$ wykorzystują dwie pierwsze składowe tego szeregu. Literatura poświęcona rynkom finansowym, poza literaturą zajmującą się matematyką finansową, niechętnie korzysta z pojęć analizy matematycznej i pozostaje niezmiennie mocno przywiązana do terminologii ukształtowanej historycznie i stosowanej przez praktyków. Stąd barwne nazewnictwo stosowane chętnie nawet dla określenia prostych pojęć matematycznych, jak pierwsza czy druga pochodna funkcji prostej lub funkcji uwikłanej. Z funkcją uwikłaną mamy do czynienia, gdy cena P jest ceną instrumentu pochodnego (np. opcji) będącą funkcją ceny instrumentu bazowego (np. obligacji bezopcyjnej). Zauważmy, że instrumentem bazowym może być zarówno instrument prosty jak i instrument pochodny. Staramy się zachować tę tradycję w nazewnictwie z niewielkimi odstępstwami. Podamy ważniejsze definicje trwałości i scharakteryzujemy związki zachodzące między nimi, a następnie uczynimy to samo w odniesieniu do pojęcie krzywizny. W obydwu przypadkach definicje te zostaną rozszerzone na funkcje wartości obligacji opcyjnych i dłużnych instrumentów pochodnych.

3.1.1. Trwałość obligacji prostej

Cenę stałokuponowej obligacji prostej (bez opcji), przy założeniu dyskonta z wewnętrzną stopą dochodu $r_t = y$, przedstawia równanie

$$P = \frac{C}{(1+y)^1} + \frac{C}{(1+y)^2} + \ \dots \ + \frac{C}{(1+y)^T} + \frac{N}{(1+y)^T} \tag{32}$$

gdzie:

P - obecna cena obligacji,
C - wartość kuponu,
y - stopa dochodu w okresie do zapadalności,
T - liczba lat do zapadalności,
N - wartość nominalna obligacji.

Aby określić zmianę ceny obligacji spowodowaną niewielką zmianą stopy y, należy zróżniczkować $P[y, t]$ względem y:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{(-1)C}{(1+y)^2} + \frac{(-2)C}{(1+y)^3} + \dots + \frac{(-T)C}{(1+y)^{T+1}} + \frac{(-T)N}{(1+y)^{T+1}} \tag{33}$$

Pochodną dP/dy nazywamy **trwałością pieniężną** (ang. *dollar duration*) obligacji i będziemy ją oznaczać jako D_{doll}

$$D_{doll} = \frac{dP}{dy} \tag{34}$$

Wyprowadzając w (33) przed nawias wyrażenie [-1/(1+y)] otrzymamy

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{TC}{(1+y)^T} + \frac{TN}{(1+y)^T}\right] \tag{35}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest średnim ważonym czasem, w okresie do zapadalności, strumienia pieniądza generowanego przez obligację, przy czym wagami są wartości obecne strumieni. Względną zmianę ceny *dP/dy* otrzymamy dzieląc obie strony równości (35) przez cenę instrumentu P :

$$\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = -\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{TC}{(1+y)^T} + \frac{TN}{(1+y)^T}\right]\frac{1}{P} \tag{36}$$

Równość (36) pomnożona przez (-1) definiuje tzw. **trwałość zmodyfikowaną** (*modified duration*), którą będziemy oznaczać przez D_{mod}:

$$D_{mod} = -\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} \tag{37}$$

Niektórzy autorzy, Ho (1990), identyczną postać formalną prawej strony wzoru (37) nazywają **trwałością efektywną,** $D_E = -(dP/dy)P^{-1}$ i rozszerzają jej zastosowanie na przypadek, gdy stopa dochodu jest nie tylko wewnętrzną stopą dochodu y, ale - dowolną funkcją czasu $y(t)$.

Zawartość nawiasu kwadratowego wzoru (36) pomnożona przez $1/P$, oraz przy ograniczeniu interpretacji stopy y do stopy dochodu w okresie do zapadalności, jest dobrze znanym wzorem na **trwałość Macaulaya** (*Macaulay duration*, Macaulay (1938)), oznaczaną przez D_M

$$D_M = \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{TC}{(1+y)^T} + \frac{TN}{(1+y)^T}\right]\frac{1}{P} \tag{38}$$

lub

$$D_M = \left[\sum_{t=1}^{T}\frac{tC}{(1+y)^t} + \frac{TN}{(1+y)^T}\right]\frac{1}{P} \tag{38a}$$

Wzory na trwałość Macaulaya i na trwałość zmodyfikowaną łączy relacja

$$D_{mod} = -\frac{1}{(1+y)} D_M \tag{39}$$

Wychodząc z innej postaci wzoru (32) na cenę obligacji:

$$P = C\left[1 - \frac{y}{(1+y)^T}\right] + \frac{N}{(1+y)^T} \tag{32a}$$

otrzymamy wygodniejszą do obliczeń z użyciem kalkulatora postać wzoru na trwałość zmodyfikowaną

$$D_{mod} = \left\{ \frac{C}{y^2}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^T}\right] + \frac{T\left(N - \frac{C}{y}\right)}{(1+y)^{T+1}} \right\} \frac{1}{P} \tag{39a}$$

Wzory w postaci danej przez (39a) noszą nazwę wzorów w postaci **zamkniętej** i są cenione przez praktyków finansowych, gdyż nie wymagają w obliczeniach sumowania składników numerowanych indeksem od 1 do T.

Jeszcze inną postać trwałości, wygodną do obliczeń ręcznych, otrzymamy przez równie prostą transformację wzoru (38a). Oznaczając: $w_t = \frac{tC}{(1+y)^t}\frac{1}{P}$ dla $t = 1, 2, \ldots, T$-1, oraz $w_t = \frac{TN}{(1+y)^T}\frac{1}{P}$ dla $t = T$,

mamy:

$$D_M = \sum_{t=1}^{T} t w_t = \frac{1+y}{y} - \frac{(C-y)T + (1+y)}{C(1+y)^T - (C-t)} \tag{38b}$$

Pierwszy człon ułamkowy w (38b) przedstawia trwałość obligacji wieczystej.

Na zakończenie podamy kilka komentarzy do przedstawionych definicji trwałości:

- Dokładność, z jaką trwałość pozwala oszacować zmiany ceny instrumentu (portfela), wywołane zmianą stopy dochodu, zależy - jak dla każdego liniowego przybliżenia funkcji nieliniowej - od spodziewanej dynamiki zmian stopy i od stopnia nieliniowości funkcji przybliżanej.
- Wszystkie miary trwałości, niezależnie od tego, co może sugerować nazwa lub rzeczywiste miano, są przedstawiane zwyczajowo w latach.
- We wszystkich przypadkach przyjmowano, że trwałość jest wyznaczana w momencie realizacji płatności wynikającej ze strumienia wpływów (*duration on the coupon date*).
- Jeżeli rozważamy strumień o częstości wypłat w roku równej k, to w powszechnie przyjętej praktyce, dokonuje się podstawień: $C' = C/k$, $y' = y/k$, $T' = kT$. Aby otrzymać trwałość w latach, wartość D dzielimy przez k.
- W ujęciu Macaulaya trwałość instrumentu jest interpretowana jako średni ważony czas do zapadalności jego strumienia wpływów. Zmodyfikowana trwałość Macaulaya mierzy procentową zmianę ceny wywołaną niewielką zmianą stopy dochodu w okresie do zapadalności.
- W zastosowaniach, trwałość jako parametr wtórny dla strumienia wpływów ma różne ograniczenia, o których należy pamiętać:
  - Oszacowanie zmiany ceny, mierzone iloczynem trwałości i zmiany wartości stopy procentowej obowiązuje dla niewielkich zmian tej stopy.
  - Wszystkie definicje trwałości, napotykają na trudność metodologiczną przy obliczaniu trwałości **portfela**, która uwidacznia się wtedy, gdy odstępujemy od założenia o równoległych przesunięciach krzywej stóp procentowych.

- Tylko trwałość efektywna ma bezpośrednie zastosowanie do obligacji opcyjnych, pozostałe definicje mają zastosowanie jedynie do obligacji prostych.

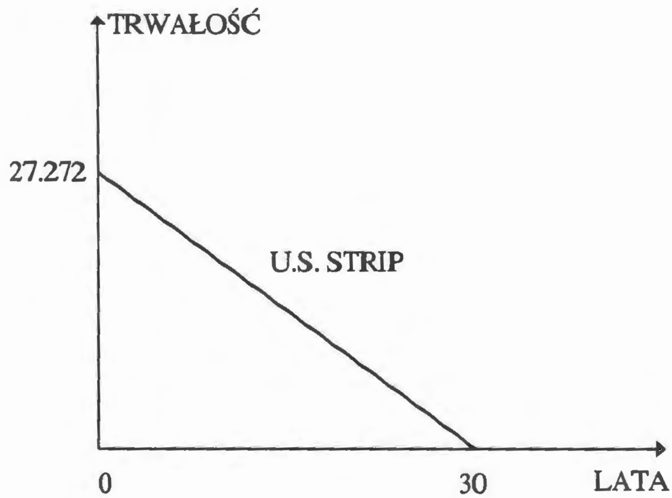
Przykłady trwałości zmodyfikowanej (efektywnej) dla obligacji prostych

1. Obligacja bezkuponowa (bon skarbowy). Cena papieru dana jest wzorem:

$$P = \frac{N}{(1+y)^T} \tag{40}$$

Wzór na trwałość zmodyfikowaną tego instrumentu przyjmuje postać:

$$D_{mod} = -\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = \frac{T}{(1+y)} \tag{41}$$



Rys. 8. Trwałość obligacji bezkuponowej

Rysunek 8 pokazuje zmianę trwałości w funkcji okresu do zapadalności, obliczaną według wzoru (41), dla zdyskontowanego instrumentu STRIP (obligacja bezkuponowa) przy rocznej stopie dochodu $y = 0{,}10$.

Tabela 3 zawiera wartości trwałości i ceny obligacji bezkuponowych dla kilku okresów do zapadalności ($T = 1, 5, 10, 20$ i 30 lat).

Tabela 3. Trwałość efektywna i ceny obligacji bezkuponowych

Okres do wykupu T	Trwałość D_E	Cena dla założonych zmian Δy (w p.b.)				
		–50	–17	0	+17	+50
1 rok	0,953	92,74	92,47	92,32	92,18	91,89
5 lat	4,798	67,67	66,60	66,07	65,54	64,51
10 lat	9,574	44,38	42,99	42,31	41,64	40,33
20 lat	19,14	18,15	17,58	17,03	16,50	14,99
30 lat	28,87	9,60	8,72	8,31	7,92	7,20

Trwałość jest obliczana według wzoru (41), dla wartości y otrzymanych z relacji ceny odpowiadającej kolumnie o $\Delta y = 0$. Zmiana chwilowa stopy procentowej o $\Delta y = \pm 17$ p.b. jest traktowana jako wahanie „małe”. Zmiana o $\Delta y = \pm 50$ p.b. jest traktowana jako zmiana „duża”. Zmienione ceny są obliczane z przybliżenia liniowego dla zależności ceny obligacji P od y, z wykorzystaniem trwałości: $P_1 \cong P + \Delta P = P + P(- D_E\, \Delta y)$. Przykładowo, dla obligacji 5-letniej i $\Delta y = + 0{,}0017$, mamy ($P = 66{,}07$):

$$\Delta P = - P(D_E \Delta y) = - 66{,}07 \times (4{,}789 \times 0{,}0017) \cong - 0{,}54$$

Łatwo zauważamy, że dla obligacji bezkuponowej trwałość efektywna jest nieco mniejsza niż okres do zapadalności. Pamiętamy, że trwałość Macaulaya jest, w tym przypadku, równa okresowi do zapadalności. Warto również zwrócić uwagę na pewną konwencję w podawaniu wartości trwałości D dla obligacji, przyjętą w literaturze amerykańskiej. Mianowicie, dla obligacji cena, **zawsze**, zmienia swą wartość ze znakiem przeciwnym do znaku zmiany stopy, i stąd znak przy D jest pomijany. Wyjątkiem są pozycje „krótkie" i opcje sprzedaży, dla których znak przy trwałości nie jest pomijany. Znak ujemny przy wartości D dla opcji sprzedaży, pokazuje, że kierunek zmiany ceny opcji sprzedaży jest zgodny z kierunkiem zmiany wartości stopy procentowej.

2. Obligacja wieczysta (konsola):

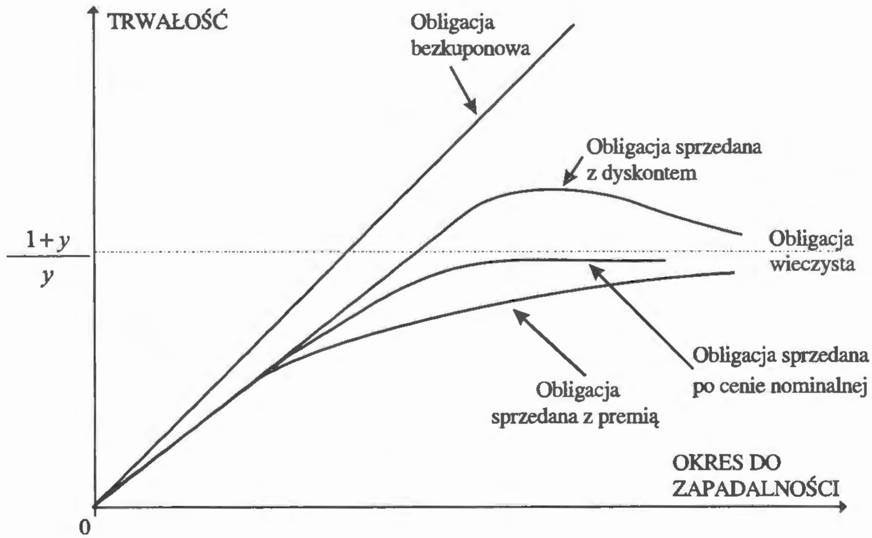
$$P = \frac{C}{y}; \quad D_E = -\frac{dP}{dy}\frac{1}{P} = \frac{1}{y} \tag{42}$$

3. Obligacja z kuponem odsetkowym (skończony okres do zapadalności, wzory (38a) i (39a)).

$$D_M = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{tC}{(1+y)^t} + \frac{TN}{(1+y^T)}\right]\frac{1}{P} \tag{38a}$$

$$D_{mod} = D_E = \left\{\frac{C}{y^2}\left[1 - \frac{1}{(1+y)^T}\right] + \frac{T\left(N - \frac{C}{y}\right)}{(1+y)^{T+1}}\right\}\frac{1}{P} \tag{39a}$$

Trwałość obligacji jest w ogólnym przypadku nieliniową funkcją jej wartości nominalnej, bieżącej ceny rynkowej, wartości kuponu, stopy dochodu w okresie do zapadalności i okresu zapadalności. Na Rysunku 9 naszkicowano kształt trwałości zmodyfikowanej, w funkcji okresu do zapadalności T, dla różnych obligacji bezopcyjnych, przy zachowaniu stałości parametrów *N, C, y* i *P*. Trwałość jest funkcją liniową dla obligacji bezkuponowej, zachowuje wartość stałą dla obligacji wieczystej, jest funkcją wklęsłą dla obligacji kuponowej sprzedanej po cenie nominalnej lub po cenie emisyjnej większej od wartości nominalnej (sprzedaż z premią) i funkcją wklęsło-wypukłą dla obligacji kuponowej sprzedanej po cenie emisyjnej znacznie mniejszej od wartości nominalnej (sprzedaż z dyskontem).



Rys. 9. Trwałość zmodyfikowana różnych obligacji

3.1.2. Trwałość obligacji z opcją wykupu

Inwestorzy często nabywają obligacje z opcją wykupu. Zachętą do nabywania takich instrumentów jest ich wyższa rentowność, okupiona – rzecz jasna – ryzykiem nie otrzymania planowanego wpływu po terminie wcześniejszego wykupu. Jedno z możliwych podejść do wyprowadzenia wzoru na trwałość w tym przypadku polega na tzw. trwałości skorygowanej (*option-adjusted duration*). Za punkt wyjścia przyjmiemy naturalną zależność:

$$P_W = P_{BW} - P_O \tag{43}$$

gdzie: P_W jest ceną obligacji z opcją wykupu, P_{BW} jest ceną obligacji bez opcji wykupu, a P_O jest ceną jaką płaci emitent za opcję wykupu. Różniczkujemy powyższą funkcję względem stopy zwrotu do zapadalności, otrzymując:

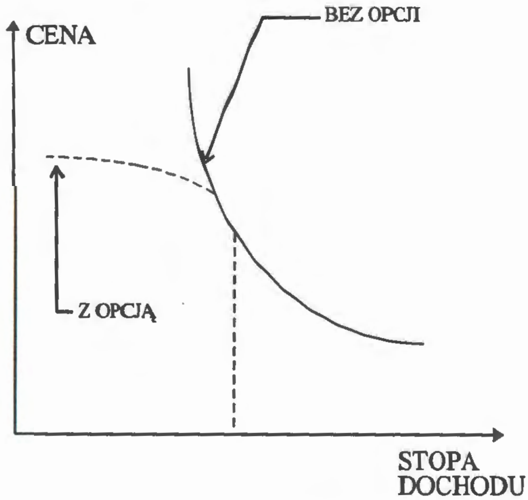
$$\frac{dP_W}{dy} = \frac{dP_{BW}}{dy} - \frac{dP_o}{dy} \tag{44}$$

Dzielimy obydwie strony przez P_W, następnie mnożymy licznik i mianownik prawej strony przez P_O i wykonując przekształcenia otrzymamy:

$$D_W = D_{BW} \frac{P_{BW}}{P_W}\left(1 - \delta_{opc}\right) \tag{45}$$

gdzie: $\delta_{opc} = \frac{D_o}{D_{BW}} \frac{P_o}{P_{BW}}$.

Jakościową zależność ceny obligacji opcyjnej i jej trwałości od stopy dochodu w okresie do zapadalności pokazuje Rysunek 10.



Rys. 10. Funkcja ceny obligacji prostej i obligacji opcyjnej

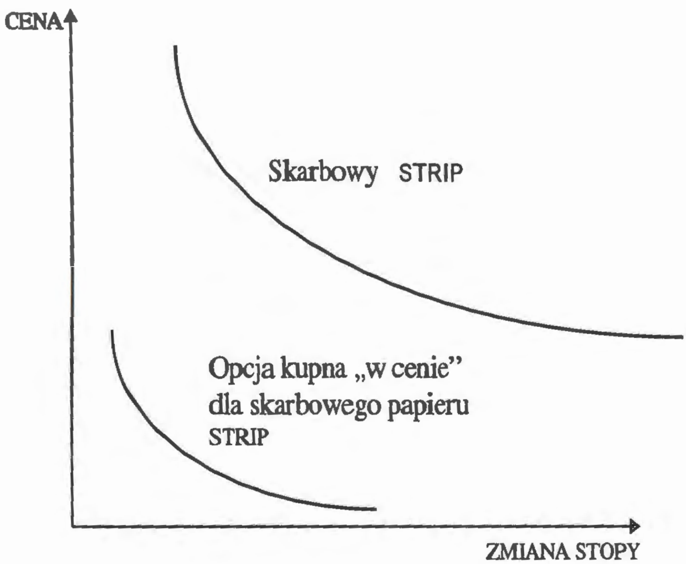
Wyjaśnienie takiego właśnie zachowania się ceny obligacji opcyjnej jest stosunkowo proste. Przede wszystkim, krzywa „bez opcji" jest typową funkcją opisującą zależność ceny obligacji prostej od zmiany wartości stopy zwrotu do zapadalności.

Załóżmy, że bieżąca stopa zwrotu dla obligacji porównywalnej jest wyższa od stopy odsetkowej (kuponu) obligacji opcyjnej. Jest oczywiste, że w tej sytuacji emitent nie skorzysta z prawa do odkupienia obligacji, gdyż kupon odsetkowy nowej emisji obligacji musiałby być wyższy. Nawet w przypadku, gdy stopa odsetkowa jest nieznacznie poniżej bieżącej stopy rynkowej, to inwestorzy nie będą skłonni płacić pełnej ceny za obligację opcyjną, gdyż jest duża szansa na dalszy spadek stopy rynkowej, co zachęci emitenta do wykupienia długu. Dalszy spadek stopy rynkowej w porównaniu do stopy kuponu wzmaga prawdopodobieństwo wykupu i skutkuje przyśpieszonym trendem spadkowym ceny obligacji opcyjnej. Posługując się Rysunkiem 10, łatwo możemy prześledzić, jak zmienia się trwałość w funkcji stopy dochodu dla obligacji z opcją.

3.1.3. Trwałość instrumentów pochodnych

Wyznaczanie postaci analitycznej parametrów wtórnych dla instrumentów pochodnych papierów dłużnych jest znacznie trudniejsze w porównaniu z instrumentami bazowymi. Wynika to z faktu, że funkcja ceny instrumentu pochodnego jest złożoną funkcją uwikłaną czasu i stóp procentowych. Dla przykładu, wartość opcji na obligacje ma postać ogólną: $P_B = P[B(\mathrm{r}(t)), t]$, gdzie: $B(r(t))$ jest funkcją ceny obligacji. Funkcja $B(r(t))$ może być także funkcją wartości innego instrumentu pochodnego: $B = B[F(r(t)), t]$, gdzie $F(r(t))$ jest np. funkcją ceny kontraktu terminowego FUTURES na obligacje lub na indeks rynkowy obligacji, itp. Z tego powodu postacie analityczne funkcji wartości instrumentów pochodnych dla papierów dłużnych są znane dla raczej szczególnych przypadków, przy spełnieniu ostrych ograniczeń na stosowalność. Dynamicznie rozwijają się sposoby oparte na komputerowym modelowaniu zachowania się cen w czasie, wykorzystujące metodę scenariuszy. Metoda drzewa dwumianowego dla wyceny opcji na obligacje była zaprezentowana w rozdziale 8 części I niniejszej pracy. W tym paragrafie zajmiemy się trwałością instrumentów pochodnych w dużym skrócie, kładąc nacisk na aspekty jakościowe i praktyczne.

Trwałość opcji na obligacje. Rozważmy europejską opcję kupna, dla obligacji bezopcyjnej, będącą „w cenie” (*in-the-money option*). Funkcja wartości takiej opcji naśladuje zachowanie się funkcji wartości obligacji (Rysunek 11).



Rys. 11. Zależność wartości obligacji i opcji na obligację od r

Jeżeli weźmiemy pod uwagę proporcjonalną zmianę wartości (przy tej samej wartości Δr), czyli trwałość zmodyfikowaną lub efektywną, to jest ona większa dla opcji niż dla jej instrumentu bazowego. Wytłumaczenie jest proste: opcja jest prawem, nie przymusem, do zakupu ustalonego instrumentu w określonym czasie, za ustaloną cenę. Za to prawo inwestor płaci niewielką cenę - premię. Dowolna zmiana wartości początkowej instrumentu bazowego przekłada się na proporcjonalnie większą zmianę wartości początkowej opcji.

Zmiana wartości opcji przy zadanej zmianie wartości stopy, jest iloczynem elastyczności cenowej instrumentu bazowego i stosunku zmiany ceny opcji do zmiany ceny instrumentu bazowego (parametr „delta" opcji, patrz niżej)

$$\frac{\Delta c}{\Delta r} = \frac{\Delta B}{\Delta r} \times \frac{\Delta c}{\Delta B} \qquad (46)$$

gdzie: c = wartość początkowa opcji,
Δc = zmiana bezwzględna wartości opcji,
Δr = zmiana stopy procentowej,
B = cena obligacji,
ΔB = bezwzględna zmiana ceny obligacji,
$\Delta c/\Delta B$ = współczynnik osłony, oznaczany symbolem δ (dla opcji kupna będącej „w cenie" $\delta = 1$).

Wzór (46) można łatwo rozszerzyć na przypadek zmiany proporcjonalnej, wykorzystując trwałość obligacji: $D_B = \Delta B/(\Delta rB)$

$$\frac{\Delta c}{c\Delta\, r} = \frac{\Delta B}{\Delta\, rcB} \mathrm{B} \left(\frac{\Delta c}{\Delta Bc} \right) \qquad (47)$$

Dla opcji będącej „nie w cenie" (*out-of-the-money option*), parametr δ ma wartość mniejszą od jedynki. Jest to równoważne posiadaniu obligacji o wartości mniejszej od N, gdyż cena obligacji nie osiągnęła jeszcze ceny zakontraktowanej. Wartość opcji leży w tym, że istnieje szansa wzrostu ceny instrumentu bazowego, przed terminem wygaśnięcia opcji.

To co powiedzieliśmy o trwałości opcji kupna ma także zastosowanie do opcji sprzedaży, z tym istotnym zastrzeżeniem, że wartość opcji sprzedaży obligacji rośnie ze wzrostem stopy procentowej, więc opcja ta ma **trwałość ujemną**.

Tabela 4. Trwałość i elastyczność cenowa opcji na obligacje

10-letnia obligacja zdyskontowana, y = 9%, P = 42,31 (Patrz Tabela 3.)						
	Cena kontraktowa = 40		Cena kontraktowa = 42		Cena kontraktowa = 44	
	Sprzedaż	Kupno	Sprzedaż	Kupno	Sprzedaż	Kupno
Cena	0,32	4,08	0,88	2,59	1,97	1,45
Trwałość	-205,86	82,43	-169,46	107,42	-138,98	139,06
Elastyczność	- 21,50	8,61	-17,70	11,22	-4,52	14,52

3.1.4. Krzywizna obligacji i instrumentów pochodnych

Opcje na obligacje są dobrą okazją do pokazania wpływu krzywizny na elastyczność cenową instrumentu. Jednym z najważniejszych aspektów opcji (obojętnie kupna czy sprzedaży) jest ograniczenie ryzyka od dołu do poziomu zainwestowanego kapitału, podczas gdy zwrot jest potencjalnie nieograniczony. Właśnie ten aspekt pozostaje w ścisłym związku z krzywizną. Obligację prostą cechuje niska wartość krzywizny i z tego powodu jej wpływ na zmianę ceny jest zwykle pomijalny w porównaniu z trwałością. Krzywizna opcji na obligacje (także krzywizna obligacji opcyjnej) może mieć istotny wpływ na zmianę ceny spowodowanej zmianą stopy procentowej i nie należy jej pomijać. Najpierw zajmiemy się krzywizną obligacji prostej, a następnie - krzywizną opcji.

Krzywizna obligacji. Przedstawmy wzór (31) w postaci

$$\Delta P = \frac{dP}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dr^2}(\Delta y)^2 + \varepsilon \tag{31a}$$

gdzie ε traktujemy jako wartość małego rzędu względem sumy dwóch pierwszych składowych. Dzieląc obie strony równości przez P otrzymujemy proporcjonalną zmianę ceny:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{dP}{dy}\frac{1}{P}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2}\frac{1}{P}(\Delta y)^2 + \frac{\varepsilon}{P} \tag{48}$$

Pierwszy człon prawej strony wzoru (31a) przedstawia przybliżoną wartość, o którą zmienia się cena obligacji w wyniku marginalnej zmiany stopy zwrotu i ograniczeniu się do liniowej postaci funkcji ceny, reprezentowanej trwałością pieniężną. Pierwszy człon prawej strony wzoru (48) przedstawia to samo przybliżenie, wykorzystując trwałość zmodyfikowaną. Drugi człon po prawej stronie obydwu równości zawiera drugą pochodną funkcji $P(y)$, którą, w literaturze, nazywa się **krzywizną pieniężną** (*dollar convexity*), dla pierwszego równania lub po prostu **krzywizną**, dla równania drugiego. Mamy zatem

$$\text{Krzywizna pieniężna} = Q_{doll} = \frac{d^2P}{dy^2} \tag{49}$$

$$\text{Krzywizna} = Q = \frac{d^2P}{dy^2}\frac{1}{P} \tag{50}$$

Zalecana jest ostrożność przy interpretowaniu wartości liczbowych otrzymanych ze wzorów (49) i (50), gdyż niektórzy autorzy definiują obydwie trwałości ze współczynnikiem 1/2. Część zmiany ceny instrumentu, za którą odpowiada krzywizna wynosi

$$(\Delta P)_Q = \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2}(\Delta y)^2 \tag{51}$$

dla krzywizny pieniężnej, a dla krzywizny zwykłej

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_Q = \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dy^2}\frac{1}{P}(\Delta y)^2 \tag{52}$$

Przykłady krzywizny funkcji ceny dla obligacji prostych.

1. Krzywizna zdyskontowanej obligacji bezkuponowej.

$$\text{Cena: } P = \frac{N}{(1+y)^T};$$

$$\text{Krzywizna: } \frac{d^2P}{dy^2}\frac{1}{P} = \frac{T(T+1)}{(1+y)^2} \tag{53}$$

Zauważamy, że krzywizna ma tutaj wartość dodatnią. Oznacza to, że wartość obligacji rośnie (spada) z przyśpieszeniem, wraz ze spadkiem (wzrostem) stopy procentowej. Praktycznie można się przekonać, że dla wielu prostych instrumentów krzywizna stanowi niewielką procentową część trwałości. Tym samym jej wpływ na zmianę ceny instrumentu, wywołaną nawet znacznymi przesunięciami krzywej stóp procentowych nie jest istotny.

2. Krzywizna obligacji wieczystej

$$Q = y^{-2} \tag{54}$$

3. Krzywizna prostej obligacji kuponowej. Dla krzywizny pieniężnej mamy zależność

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C}{(1+y)^{t+2}} + \frac{T(T+1)N}{(1+y)^{T+2}} \tag{55}$$

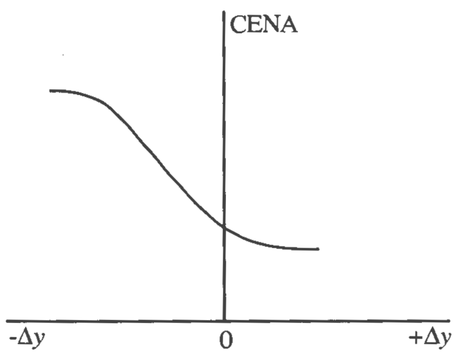
lub w innej postaci

$$\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{C}{y^3}\left[1-\frac{1}{(1+y)^T}\right]-\left[\frac{CT}{y^2(1+y)^{T+1}}+\frac{T(T+1)\left(N-\frac{C}{y}\right)}{(1+y)^{T+2}}\right] \qquad (56)$$

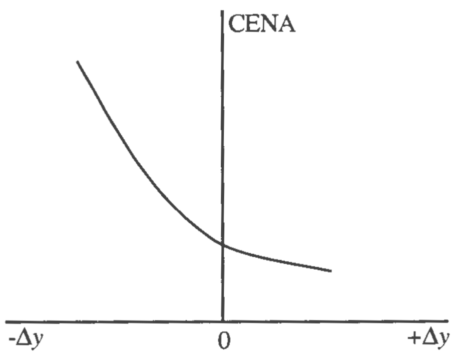
Badając wzór (56) stwierdzimy, że obligacje o identycznych trwałościach, lecz o różnych okresach do zapadalności nie mają równych krzywizn - obligacja o większym okresie do zapadalności ma większą krzywiznę. Krzywizna rośnie ze wzrostem wartości kuponu i okresu do zapadalności.

Krzywizna opcji na obligacje i krzywizna obligacji opcyjnych.

Opcje kupna i sprzedaży typu europejskiego lub amerykańskiego mają dużą dodatnią krzywiznę, która rośnie im bardziej opcja jest „nie w cenie". Gdy opcja jest mocno „nie w cenie" to jej pozycja ma dużą dźwignię (stosunek możliwego zwrotu kapitału do wartości kapitału zainwestowanego).



Rys. 12a. Dodatnia trwałość, ujemna krzywizna



Rys. 12b. Dodatnia trwałość, dodatnia krzywizna

Krzywizna obligacji opcyjnych zachowuje się inaczej niż krzywizna obligacji zwykłych o identycznych pozostałych parametrach pierwotnych, przy czym konkretne odmienności zależą od typu dołączonej opcji. Rysunki 12a,b pokazują charakterystyczne kształty zmiany ceny obligacji opcyjnej przy niedużych zmianach stopy zwrotu.

Dla Rysunku 12a, gdy stopa procentowa maleje, to cena obligacji rośnie, ale ten wzrost jest wolniejszy i ograniczony poczynając od pewnej wartości y (dla obligacji odwoływalnej jest to cena wykupu). Jest to przebieg charakterystyczny dla złożenia obligacji prostej z pozycją krótką na opcję kupna. Rysunek 12b pokazuje przypadek, gdy cena rośnie nieograniczenie dla malejącej stopy dochodu i maleje, dążąc do pewnej wartości stałej, gdy stopa dochodu rośnie. Cena przestaje maleć poczynając od pewnej wartości y (efekt osłony pozycji od dołu). Takie zachowanie jest charakterystyczne dla pozycji utworzonej ze złożenia obligacji prostej z pozycją długą dla opcji sprzedaży (dla obligacji z dołączoną opcją sprzedaży inwestor ma prawo odsprzedać obligację emitentowi, po terminie prekluzji, za ustaloną wcześniej cenę).

Można podać wzór do obliczania krzywizny obligacji opcyjnej:

$$Q_W = \frac{P_{BW}}{P_W}\left[Q_{BW}\left(1-\delta_o\right) - P_{BW}\Gamma_o D_{BW}^2\right] \tag{57}$$

gdzie: P_{BW} - cena obligacji bez opcji wykupu,
P_W - cena obligacji z opcją wykupu,
Q_W - krzywizna obligacji z opcją wykupu,
Q_{BW} - krzywizna obligacji bez opcji wykupu,
D_W - trwałość obligacji z opcją wykupu,
D_{BW} - trwałość obligacji bez opcji wykupu,
δ_O - parametr „delta” opcji,
Γ_O - parametr „gamma” opcji (patrz dalszy tekst).

Wzór uogólniony na krzywiznę funkcji ceny obligacji prostej

Podamy postać zamkniętą wzoru na krzywiznę, wygodną do użycia dla obligacji prostych o stałym i zmiennym kuponie, z uwzględnieniem kumulacji odsetek od kuponu, w przypadku, gdy interesuje nas termin między płatnością kolejnych kuponów. Strumień wpływów pieniężnych został opisany w paragrafie 2.1 i ma postać

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{C}{(1+y_S)^{i-f}} + \frac{N}{(1+y_S)^{T-f}} \tag{58}$$

Różniczkując dwukrotnie P względem y_s i dzieląc wynik przez P, otrzymamy

$$\frac{d^2P}{dy_s^2}\frac{1}{P} = \frac{D(1)+D(2)}{(1+y_s)^2}, \tag{59}$$

gdzie:

$$D(m) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C(i-f)^m}{(1+y_S)^{i-f}} + \frac{N(n-f)^m}{(1+y_S)^{T-f}},\ m = 1 \text{ lub } 2. \tag{60}$$

Zilustrujemy użycie tego wzoru dla przypadku obligacji o zmiennym kuponie, przy założeniu, że wartość kuponu jest ustanawiana w terminie jego wypłaty i przyjmując obligację bez ryzyka niewypłacalności.

Tabela 5. Zbiór danych wejściowych

Wejście	y_s	C/N	N	T	f
Obligacja zwykła	0,05	0,06	100	10	0,5
Renta annuitetowa	0,05	-	-	10	0,5
Konsola	0,05	-	-	-	0,5
Obligacja o $y_s = C/N$	0,05	-	-	10	0,5
Obligacja zmiennokuponowa	0,05	-	-	-	0,5

Tabela 6. Krzywizna portfela złożonego z obligacji zwykłej i obligacji o strumieniu specjalnym, użytych w równych proporcjach wagowych

Obligacja zwykła z:	Krzywizna portfela	Procent zmiany w stosunku do krzywizny obligacji zwykłej
Rentą annuitetową	47,770	–26,3
Konsolą	422,757	+552,5
Obligacją o $y_s = C/N$	66,103	–1,9
Obligacją zmiennokuponową	32,735	–49,5

Łatwo zauważymy, że inwestor preferujący portfel o małej wartości krzywizny będzie zainteresowany obligacjami zmiennokuponowymi, podczas gdy inwestor preferujący wysoką wartość krzywizny będzie inwestować w obligacje wieczyste. Obligacje annuitetowe można używać do obniżania trwałości posiadanego portfela.

3.1.5. Trwałość i krzywizna portfela papierów dłużnych

Trwałość portfela

Dla wielu istotnych przypadków, trwałość portfela jest **sumą** ważoną trwałości tworzących go instrumentów. Sytuacje, w których twierdzenie to nie obowiązuje będą zaznaczane odrębnie. Niech P oznacza zbiór instrumentów tworzących portfel, wybranych z uniwersum U ($\mathrm{P} \subseteq U$) i ponumerowanych indeksem $i = 1, ..., n$. Niech: V_i oznacza wartość pozycji odpowiadającej i-tej obligacji, V - wartość portfela, D_i - jest trwałością i-tego instrumentu, W_i - oznacza wagę cenową instrumentu i, $W_i = V_i/V$, W_P - oznacza wagę cenową portfela (suma wag cenowych instrumentów wchodzących do portfela). Trwałość D_P portfela P przedstawia wzór:

$$D_\mathrm{P} = \sum_{i \in \mathrm{P}} \left(W_i / W_\mathrm{P} D_i \right) \tag{61}$$

Portfel o określonej trwałości można utworzyć na wiele sposobów, tzn. używając różnych instrumentów. Poszerza to możliwości inwestora. Można próbować formułować problem portfela optymalnego, ze względu na zadane kryterium, o ustalonej trwałości.

Zwrócić należy uwagę na fakt, że trwałość portfela **nie jest większa** od największej trwałości pojedynczego instrumentu w portfelu i **nie jest mniejsza** od najmniejszej z nich (dotyczy to trwałości instrumentów, definiowanej jako ważone uśrednienie czasów, w których mają miejsce wpływy składające się na strumień danego instrumentu).

Krzywizna portfela

Argumentacja podobna do użytej dla trwałości portfela bezopcyjnych instrumentów dłużnych, pozwala na konkluzję, że krzywizna portfela jest średnią ważoną krzywizn tworzących go instrumentów. Zwróćmy uwagę na krzywiznę portfela sztangowego, złożonego z obligacji zdyskontowanych o terminach zapadalności T_1 i T_2. Przyjmijmy równość wag obu obligacji w portfelu. Podobnie jak w przypadku trwałości, krzywizna portfela jest średnią ważoną krzywizn poszczególnych obligacji. Zwróćmy jednak uwagę na prosty fakt, że krzywizna portfela sztangowego obligacji zdyskontowanych jest większa od krzywizny pojedynczego bonu pieniężnego o trwałości równej trwałości rozważanego portfela.

3.1.6. Wpływ łączny różnych parametrów na zmianę ceny

Dla szacowania zmiany ceny instrumentu skupiliśmy się wyłącznie na wpływie niewielkiej zmiany wartości stopy procentowej, ograniczając się do składowej liniowej - trwałość, i kwadratowej - krzywizna. Cena instrumentu dłużnego zależy również od upływu czasu i od wpływu rozrzutu zmian stopy procentowej w interesującym nas przedziale czasu, wyrażanym odchyleniem standardowym σ

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\Delta r + Q(\Delta r)^2 + \Theta\Delta t + \upsilon\Delta\sigma \tag{62}$$

Współczynniki Θ (*teta*) i υ (*vega*) należą do obszerniejszej grupy współczynników, mających wpływ na cenę instrumentu pochodnego, i które otrzymujemy biorąc pochodną cząstkową ceny względem każdego z parametrów pierwotnych, od których ona zależy. Niech *P* oznacza cenę instrumentu pochodnego, a *B* - instrumentu bazowego:

- Parametr **teta** ($\Theta = \partial P/\partial t$), gdzie *t* jest czasem pozostałym do wygaśnięcia kontraktu pochodnego.
- Parametr **vega** ($\upsilon = \partial P/\partial\sigma$) jest pochodną cząstkową ceny instrumentu pochodnego względem odchylenia standardowego rozkładu ceny instrumentu bazowego. Parametr ten spotyka się także pod nazwami: **lambda, kappa** lub **sigma**).
- Parametr **delta** (Δ lub $\delta = \partial P/\partial B$) instrumentu pochodnego przedstawia pochodną cząstkową ceny instrumentu pochodnego (*P*) względem ceny jego instrumentu bazowego (*B*). Jest to więc nachylenie stycznej w punkcie dla funkcji ceny instrumentu pochodnego, której argumentem jest cena instrumentu bazowego. W zastosowaniach do osłony pozycji (*hedging*) parametr δ nazywa się współczynnikiem osłony.
- Parametr **gamma** ($\Gamma = \partial\delta/\partial B = \partial^2 P/\partial B^2$) przedstawia pochodną cząstkową parametru δ względem ceny *B*.
- Parametr **ro** ($\rho = \partial P/\partial r$) jest pochodną cząstkową ceny instrumentu pochodnego względem stopy procentowej wolnej od ryzyka.

Uwagi:

1. Definicje parametrów podane przez nas dla pojedynczych instrumentów pochodnych zachowują cechę addytywności i sumują się dla portfeli tych instrumentów.
2. Dla instrumentów pochodnych zależnych od stóp procentowych postaci analityczne ceny nie są, w większości przypadków, znane. Dlatego do wyznaczania cen i ich wrażliwości względem różnych

oddziaływań korzysta się z modeli komputerowych. Jednym z wyjątków jest opcja na kontrakt terminowy FUTURES wystawiony na bony i obligacje skarbowe.

Black (1976), zaproponował model analityczny dla wyceny opcji na kontrakty FUTURES dla papierów skarbowych, który jest bezpośrednim uogólnieniem powszechnie znanego modelu Blacka-Sholesa, właściwego dla opcji na akcje. Model jest znany pod nazwą „Black76" i różni się od swojego pierwowzoru tym, że cena bieżąca obligacji S (Rozdz. 8 części I monografii) jest zastąpiona ceną F kontraktu FUTURES, zdyskontowaną w sposób ciągły stopą wolną od ryzyka r_f, mającą gaussowski rozkład prawdopodobieństwa i obowiązującą w okresie życia kontraktu FUTURES. Wzór na cenę opcji kupna podany przez Blacka ma postać

$$c(F,t) = e^{-r_f T}\left[FN(d_1)\right] - EN(d_2)$$

$$d_1 = \left[\ln(F/E) + (1/2)T\right] / \sigma\sqrt{T} \tag{63}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

gdzie:

$N(.)$ - symbol rozkładu gaussowskiego odpowiedniej zmiennej losowej,
T - okres do zapadalności opcji,
F - cena kontraktu FUTURES,
E - cena zakontraktowana.

W Tabeli 7 podajemy wartości parametrów D, Q, Θ i υ, mające wpływ na zmianę ceny instrumentu pochodnego (wzór (63)). Dane zaczerpnięto z Figlewski i in. (1990), a wszystkie wyniki wymagające modelowania przeliczono na modelu komputerowym udostępnionym autorowi na Uniwersytecie w Bergamo.

Tabela 7. Składowe zmiany ceny opcji sprzedaży i kupna na kontrakt FUTURES dla obligacji skarbowych

CENA *E*	Miesiąc	Grudzień		Marzec	
	Parametr	Kupno	Sprzedaż	Kupno	Sprzedaż
88	CENA	2,55	0,58	3,19	1,83
	D	271,13	– 403,98	181,45	– 178,97
	Q	357,50	2155,34	183,08	74,63
	Θ	2,02	8,82	1,09	1,96
	υ	3,93	16,68	6,95	11,56
90	CENA	1,25	1,30	2,14	2,75
	D	378,93	– 358,08	209,58	–167,76
	Q	1590,90	1587,15	256,04	282,37
	Θ	4,60	4,49	1,64	1,26
	υ	9,69	9,45	10,24	7,97
92	CENA	0,55	2,56	1,38	3,91
	D	475,24	– 261,52	240,70	– 146,73
	Q	1657,84	338,75	400,70	152,75
	Θ	9,02	1,88	2,35	0,78
	υ	18,44	3,96	14,74	5,17

UWAGI: - Dane do wyceny pochodzą z 11 X 1988 r.
- Ceny FUTURES: Grudzień = 89,97, Marzec = 89,38
- Wszystkie wartości *Q* jako wartości duże, zgodnie ze zwyczajem stosowanym przez praktyków, są podzielone przez 100.

Komentarz do wyników z Tabeli 7:

- Trwałość opcji kupna rośnie, gdy opcja jest „nie w cenie". Ten sam efekt zauważamy dla opcji sprzedaży (trwałość jest tu liczbą ujemną), gdzie stan „nie w cenie" oznacza niższe ceny kontraktowe. Również krzywizna rośnie, gdy opcje są „nie w cenie". Odmiennie niż ma to miejsce dla trwałości, krzywizna dla obu typu opcji jest dodatnia. Jest to odbiciem faktu, że obydwie opcje ograniczają ryzyko strat i nie ograniczają potencjalnych zwrotów.

- Analizując efekt upływu czasu (parametr Θ) zauważamy, że opcja traci wartość tym szybciej, im bliższy jest termin dopuszczalnego wykupu (sprzedaży) i im bardziej jest ona „nie w cenie".
- Wpływ parametru „vega" rośnie, dla obydwu typów opcji ze wzrostem stanu „nie w cenie". Gdy opcja jest „w cenie" to efekt zmiany σ jest mniej zauważalny, szczególnie dla krótszych odcinków czasu, gdyż ceny instrumentów bazowych (w tym przypadku - obligacji) są bardziej jednorodne. Dla opcji „w cenie", oddziaływanie parametru σ jest podobne dla opcji zakupu i sprzedaży. Zaznaczmy jeszcze, że obserwowany stosunkowo mały wpływ parametru σ na ceny opcji na kontrakty FUTURES, jest zgodny z założeniem, leżącym u podłoża stosowalności modelu Black76 o stałości σ (σ = const).

3.2. Specyfika ryzyka dla rynku papierów dłużnych

Ryzyko inwestycji w papiery dłużne polega na niepewności co do terminów i wartości obiecanych lub oczekiwanych wpływów, a więc co do wartości strumienia wpływów, za który zapłaciliśmy określoną cenę. Podstawowym źródłem ryzyka inwestycji na rynku papierów dłużnych jest niemożliwe do dokładnego ustalenia zachowanie się funkcji stóp procentowych w okresie objętym horyzontem interesującym inwestora.

Ryzyko inwestycji należy traktować jak wektor o wielu składowych, których waga i znaczenie zależy od charakteru instrumentów i warunków panujących na rynku.

Na ryzyko związane z funkcją stóp procentowych mają wpływ następujące czynniki:

- Poziom stopy dochodu.

- Kształt funkcji i charakter jej zmian. Za regularne uważane są funkcje monotoniczne: płaska, normalna, odwrócona. Za nieregularne uważa się funkcje typu: wygięta, motylek zwykły (wzrost stóp krótko- i długoterminowych), motylek odwrócony (spadek stóp krótko- i długoterminowych). W najbardziej uproszczonej analizie ryzyka inwestowania na rynkach papierów dłużnych i ich pochodnych przyjmuje się, że funkcja czasowa stóp procentowych jest płaska i że jej zmiana polega na jednoczesnym równoległym przesunięciu (w górę lub w dół) o stałą wartość. Zaawansowane metody oceny skutków wywołanych ruchami stóp procentowych, starają się brać pod uwagę ich dynamikę oraz losowość.
- Przewidywany przedział wahań wartości stopy dochodu wokół wartości przeciętnej w określonym przedziale czasu (rodzaj ryzyka szczególnie ważny dla instrumentów pochodnych).

Jedną z podstawowych funkcji rynku finansowego jest przenoszenie (redystrybucja) ryzyka. Funkcja redystrybucji polega na tym, że w wyniku działania prawa podaży i popytu, rynek wyznacza **cenę** dla każdego rodzaju ryzyka w odniesieniu do każdego instrumentu. Chociaż oznacza to, że w warunkach równowagi rynkowej każdy rodzaj ryzyka ma swoją realną rynkową wartość i tym samym każdy instrument finansowy ma identyczną spodziewaną stopę dochodu, to jednak nie można stąd wysnuwać wniosku, że każdy instrument jest jednakowo dobry dla każdego inwestora. Redystrybucja ryzyka jest możliwa dzięki różnym postawom inwestorów, od skrajnej niechęci do ryzyka po gotowość do podejmowania najbardziej ryzykownych decyzji.

Zarządzanie ryzykiem przez decydenta ma na celu ustalenie, dla których rodzajów ryzyka mają być stosowane osłony (immunizacja), a dla których - nie, przypisanie wartości rynkowej ryzyka dla poszczególnych instrumentów oraz skonstruowanie portfela inwestycyjnego według przyjętych kryteriów i ustalonych ograniczeń. Matematyczne modele optymalizacji portfela inwestycji skupiają się głównie na trzecim z wymienionych celów.

Ryzyko finansowe jest wielkością wektorową, zaś wymiar wektora, przedział zmienności dla składowych, jak również stopień korelacji między składowymi zależą od instrumentu. Praktyczny aspekt wektorowego charakteru ryzyka leży w konieczności starannego określenia tych składowych, które są ważne z punktu widzenia konkretnego inwestora. Poniżej wyliczamy typowe rodzaje ryzyka, przy czym uwagę skupimy na najważniejszych z nich:

- Ryzyko rynkowe/Ryzyko stóp procentowych.
- Ryzyko utraty wartości kapitału.
- Ryzyko reinwestycji.
- Ryzyko zmiany kształtu krzywej stóp procentowych.
- Ryzyko wahań wartości stóp procentowych.
- Ryzyko inflacji /Ryzyko utraty siły nabywczej.
- Ryzyko nieokreśloności czasowej - ryzyko wcześniejszego wykupu instrumentu przez emitenta lub wcześniejszej sprzedaży przez nabywcę.
- Ryzyko kredytowe /Ryzyko niewypłacalności.
- Ryzyko utraty płynności.
- Ryzyko sektorowe.
- Ryzyko walutowe /Ryzyko zmiany parytetów na rynku walutowym.
- Ryzyko niestabilności politycznej lub otoczenia prawnego.
- Pozostałe formy ryzyka.

Scharakteryzujemy bliżej wyliczone postacie ryzyka.

Ryzyko rynkowe jest pojmowane nieco odmiennie w różnych segmentach rynku finansowego. Na rynku akcji ryzyko to jest skutkiem zmian rynkowego indeksu zysku z portfela (zwykle przyjmowany jest jeden z ważniejszych indeksów danej giełdy papierów wartościowych). W myśl założeń modelu CAPM (część I monografii) ceny instrumentów rynku giełdowego muszą, w warunkach równowagi, mieć wartości takie, aby spodziewany zysk dla papieru był kombinacją liniową zysku wolnego od ryzyka i zysku reprezentowanego przez rynek papierów. Udział rynku w zysku dla konkretnego papieru wyraża parametr beta (β). Jego wartość oddaje proporcję, z jaką zmienia się zysk z papieru w stosunku do zysku całego rynku papierów (zmiana na rynku o 1% powoduje zmianę zysku z papieru o β%).

Na rynku dłużnych papierów wartościowych ryzyko rynkowe jest zwyczajowo reprezentowane przez ryzyko stóp procentowych. Przyjmuje się, mówiąc ogólnie, że ryzyko to jest powodowane zmianą całej funkcji czasowej stóp procentowych dla uniwersum obligacji prostych (bezopcyjnych), wolnych od ryzyka niewypłacalności.

Wyrażając się bardziej precyzyjnie, jest to ryzyko powodowane jednakowym wzrostem stóp procentowych instrumentów o pełnej gwarancji wypłacalności. Dla niewielkiego przyrostu stóp, cena obligacji bezopcyjnej spada proporcjonalnie do trwałości pieniężnej tej obligacji. Zmiana ceny obligacji, wyrażona w części ceny wyjściowej, jest proporcjonalna do wartości parametru definiowanego jako trwałość Macaulaya obligacji. Ogólniejsza postać trwałości Macaulaya - trwałość efektywna (elastyczność cenowa) obligacji, może być stosowana dla obligacji opcyjnych i instrumentów pochodnych.

Model CAPM dla rynku akcji i modele dla rynku papierów dłużnych korzystające z pojęcia trwałości, są modelami jednoczynnikowymi (w obydwu przypadkach przyjmuje się, że jedynym źródłem ryzyka jest rynek). Cechy instrumentu jak - dla przykładu - rozkład strumienia wypłat, determinują wrażliwość instrumentu na zmianę wartości tego czynnika. Stąd, podobnie jak cena ryzyka zależy od ogólnej równowagi na rynku, tak dochód przypadający na instrument wyrażony jest iloczynem ceny i wartości czynnika.

Bardziej ogólne są modele wieloczynnikowe. W tym przypadku bierze się pod uwagę wrażliwość instrumentu na zmianę każdego z czynników. Dla rynku w stanie równowagi, podaż i popyt dla każdego rodzaju ryzyka musi być zrównoważona. Każdy rodzaj ryzyka ma swoją cenę rynkową i w stanie równowagi zwrot dla instrumentu jest sumą zmian względem wszystkich czynników. Hipoteza ta jest znana jako podstawa dla teorii Cen Arbitrażowych wiązanej z nazwiskiem Sharpe'a, Elton i Gruber (1995), Haugen (1996). W myśl tej teorii ryzyko rynkowe jest po prostu jedną z wielu składowych wektora ryzyka, wyrażoną parametrem β dla rynku akcji i parametrem trwałości D dla rynku obligacji.

Ryzyko zmiany kształtu (zmiany kształtu krzywej stóp procentowych w czasie) jest ryzykiem charakterystycznym dla rynku instrumentów o stałym strumieniu dochodu. Źródłem tego ryzyka są niejednakowe (w funkcji okresu do zapadalności) zmiany stóp procentowych dla prostych wolnych od ryzyka niewypłacalności instrumentów.

Aby ocenić skutki ryzyka zmiany kształtu rozważmy funkcję czasową stóp procentowych jako funkcję płaską na poziomie 10%. Ceny dwóch obligacji bezkuponowych o wartościach nominalnych 100 oraz o okresie do zapadalności odpowiednio 1 rok i 10 lat, wynoszą (co łatwo wyliczyć) 90,91 i 38,55. Trwałość (efektywna) pierwszego instrumentu wynosi 1 rok, a drugiego - 10 lat, z tego względu cena drugiego instrumentu zmienia się 10-krotnie szybciej w stosunku do zmiany ceny pierwszego z nich przy jednakowej zmianie stopy procentowej. Inwestor oczekujący zmniejszenia stopy procentowej będzie preferował drugą obligację, gdyż obiecuje ona większy dochód. Niemniej, jeżeli krzywa stóp procentowych zmieni kształt w ten sposób, że jednoroczna stopa zmaleje do 9%, a dziesięcioletnia stopa wzrośnie do 11%, to decyzja inwestowania w obligację 10-cioletnią przyniesie inwestorowi stratę w wysokości 9,56%, w porównaniu do decyzji o inwestycji w obligację jednoroczną.

Ryzyko zmienności stóp procentowych charakteryzuje dynamikę ich wahań w określonym przedziale czasu i jest zwykle wyrażane odchyleniem standardowym (lub amplitudą). Do ilustracji skutków tego ryzyka najlepiej jest posłużyć się przykładem opcji. Zwrot nakładów na inwestycje w opcje charakteryzuje się znaczną asymetrią. Jeżeli cena instrumentu bazowego opcji kupna, w terminie zapadalności opcji, jest większa od ceny wykonania, to kontrakt zostanie zrealizowany i inwestor zanotuje zysk. Dla odwrotnej relacji cen, kontrakt wygaśnie i inwestor poniesie stratę w wysokości ceny opcji. Opcję można więc traktować jak umowę ubezpieczeniową, z której wypłatę otrzymujemy pod warunkiem zaistnienia określonego zdarzenia. Im większa jest zmienność stóp na rynku, tym trudniejsza do przewidzenia jest wartość stopy dochodu w terminie zapadalności opcji i tym droższa jest opcja. Dlatego ryzyko zmienności ma duże znaczenie dla opcji i kontraktów z dołączoną opcją (np. obligacje odwoływalne, papiery dłużne pod zastaw hipoteczny z opcją wcześniejszej spłaty, itp.), nawet jeżeli inne parametry rynku pozostają niezmienione.

Ryzyko zmienności ma znaczenie także dla instrumentów różnych od opcji. Dotyczy to także, dla przykładu, obligacji bezopcyjnych, a to ze względu na charakter nieliniowości krzywej cena - stopa dochodu dla tych instrumentów, która powoduje większą zmianę ceny gdy stopa maleje o jednostkę niż gdy stopa wzrasta o jednostkę. Dlatego większa dynamika zmienności stóp wokół spodziewanej wartości przeciętnej powiększa wartość oczekiwaną dochodu dla obligacji. Efekt ten jest tym większy im jest większa krzywizna funkcji cena-dochód (tzn. dłuższy okres do zapadalności, większa wartość i częstość wypłat odsetek). Dochód z inwestycji dla instrumentów wrażliwych na nieliniowość funkcji cena-dochód (obligacje, opcje) można przybliżać uwzględniając krzywiznę.

Ryzyko inflacji jest obecne na wielu rynkach. Ten rodzaj ryzyka wymaga szczególnej uwagi dla instrumentów z dłuższym horyzontem inwestycyjnym (dla rynków z dwucyfrową inflacją może to być nawet horyzont jednego miesiąca). Inwestowanie w warunkach wysokiej inflacji wymaga odrębnego traktowania. Miarą ryzyka inflacji może być stopa inflacji, którą wyraża wzór Fishera, Jajuga i Jajuga (1996):

$$1 + r = (1 + r_r)(1 + r_i)$$

gdzie: r - nominalna stopa zwrotu; r_r - realna stopa procentowa; r_i - stopa inflacji.

Ryzyko nieokreśloności czasowej - ma związek z inwestycjami w papiery dłużne o niepewnym strumieniu wpływów. Najważniejsze przykłady to: obligacje opcyjne i ryzyko wcześniejszej spłaty w przypadku hipotecznych papierów dłużnych.

Ryzyko kredytowe - ryzyko niewypłacalności kredytobiorcy (ma związek z jego pozycją na listach wiarygodności). Malejąca wiarygodność kredytobiorcy podraża koszt udzielanego mu kredytu, a wartość rynkowa dla chcącego sprzedać dług maleje - są to typowe sytuacje ryzyka dla inwestora. Ryzyko kredytowe jest ważne dla obligacji i innych papierów dłużnych sektora municypalnego, sektora przedsiębiorstw i sektora instytucji finansowych. Obligacja obciążona ryzykiem kredytowym może być traktowana jak instrument pochodny zależny od określonej sytuacji na rynku. Dlatego ryzyko to ma związek z ryzykiem zmiany kształtu i zmienności krzywych czasowych dla stóp procentowych. Analiza kondycji kredytobiorców jest dziedziną aktywności wyspecjalizowanych firm.

Ryzyko braku płynności określa niepewność inwestorów co do możliwych ograniczeń w operacjach kupno/sprzedaż dla instrumentów o różnych terminach do zapadalności. Instrumenty o dłuższych terminach zapadalności mają zwykle wyższe stopy zwrotu niż instrumenty o krótkich terminach wykupu, co można traktować jako premię dla inwestora za podjęcie ryzyka płynności. Dla instrumentów o większym ryzyku płynności rozstęp cen zakupu i cen sprzedaży jest większy. Ten rodzaj ryzyka jest szczególnie ważny dla inwestorów stosujących aktywne strategie zarządzania swoimi portfelami (różne strategie ubezpieczania portfela, wymagające częstych operacji wymiany instrumentów).

Ryzyko branżowe wyraża zależność ruchów stóp procentowych dla odrębnych sektorów, takich jak sektor instrumentów Skarbu Państwa, sektor instrumentów władz municypalnych, lub branż, np. branża bankowa itp. Ponieważ branża/sektor instrumentów poddane są podobnym wpływom, to ich instrumenty reagują podobnie na wspólne czynniki ryzyka.

Ryzyko walutowe wynika z fluktuacji współczynników wymiany dla walut. Inwestorzy rynku walutowego mający w swym portfelu waluty obce tracą, gdy waluta krajowa podlega deprecjacji i zyskują, gdy podlega aprecjacji. Rynek ten jest także wrażliwy na sytuację gospodarczą konkretnego kraju, w tym na jego sytuację społeczno-polityczną. Rządy zmieniają politykę podatkową, handlową, a także mogą ograniczać w różny sposób operacje walutowe.

Ryzyko niestabilności politycznej i ryzyko rezydualne obejmują wiele czynników ryzyka o mniejszej wadze dla każdego odrębnie, ale o niepomijalnym znaczeniu, gdy są traktowane łącznie.

4. Modelowanie zagadnień analizy portfelowej przy użyciu zmiennych mieszanych

Ten rozdział poświęcamy w całości przykładom modelowania matematycznego zagadnień decyzyjno-analitycznych i optymalizacyjnych, z którymi mogą mieć do czynienia podmioty rynku kapitałowego. Uwagę skupiamy, zgodnie z wielokrotnymi wcześniejszymi zapowiedziami, na modelach ze zmiennymi decyzyjnymi mieszanymi, tzn. ze zmiennymi reprezentowanymi przez dowolne liczby ze skończonego zbioru, liczby rzeczywiste, liczby całkowite, w tym zero-jedynkowe. Modelowane problemy obejmują zagadnienia związane z warunkami i ograniczeniami wprowadzanymi przez zorganizowane

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl