



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:
ŚRODOWISKO NATURALNE,
PRZESTRZEŃ, OPTYMALIZACJA**

**Olgierd Hryniewicz,
Andrzej Straszak,
Jan Studziński
red.**



**BADANIA OPERACYJNE
I SYSTEMOWE:
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZE-
STRZEŃ, OPTIMALIZACJA**

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH • POLSKA AKADEMIA NAUK

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 63

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2008

Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ,
OPTIMALIZACJA**

Publikacja była opiniowana do druku przez zespół recenzentów, którego skład podano w treści tomu

Opinie, wyrażone przez autorów w pracach, zawartych w niniejszym tomie, nie są oficjalnymi opiniami Instytutu Badań Systemowych PAN, ani Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych.

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN & Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
Warszawa 2008

ISBN 83-894-7519-7
EAN 9788389475190

Redakcja i opracowanie techniczne: Jan W. Owskiński, Aneta M. Pielak, Anna Gostyńska

**Lista recenzentów
artykułów, wchodzących w skład tomów serii „Badania Systemowe”
związanych z konferencją BOS 2008**

Dr Paweł Bartoszczuk
Dr inż. Lucyna Bogdan
Dr hab. inż. Zbigniew Buchalski
Mgr inż. Hanna Bury
Prof. dr hab. Marian Chudy
Dr Jan Gadomski
Mgr Grażyna Grabowska
Mgr inż. Andrzej Jakubowski
Dr hab. inż. Ignacy Kaliszewski
Dr Andrzej Kałużko
Dr hab. Leszek Klukowski
Dr hab. inż. Wiesław Krajewski
Dr inż. Lech Kruś
Dr hab. inż. Marek Libura
Dr Barbara Mażbic-Kulma
Dr inż. Edward Michalewski
Dr inż. Jan W. Owiński
Dr inż. Grażyna Petriczek
Dr inż. Henryk Potrzebowski
Dr Maciej Romaniuk
Prof. dr hab. Piotr Sienkiewicz
Dr hab. Henryk Spustek
Prof. dr hab. Andrzej Straszak
Dr hab. inż. Jan Studziński
Prof. dr hab. Tomasz Szapiro
Mgr Anna Szediw
Dr inż. Grażyna Szkatuła
Dr hab. inż. Tadeusz Witkowski
Dr Irena Woroniecka-Leciejewicz
Dr hab. Sławomir Zadrozny
Dr inż. Andrzej Ziółkowski

**Komitety Konferencji
Badania Operacyjne i Systemowe 2008
Rembertów, Akademia Obrony Narodowej**

Patronat honorowy

Bogdan Klich, Minister Obrony Narodowej
Maciej Nowicki, Minister Środowiska i Zasobów Naturalnych

Komitet Sterujący

Janusz Kacprzyk, Prezes Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych
Olgierd Hryniewicz, Dyrektor Instytutu Badań Systemowych
Janusz Kręcikij, Komendant Akademii Obrony Narodowej

Komitet Programowy

Piotr Sienkiewicz, *Przewodniczący*
Jacek Mercik, *Wiceprzewodniczący*

<i>Tomasz Ambroziak</i>	<i>Ryszard Budziński</i>	<i>Wojciech Cellary</i>
<i>Marian Chudy</i>	<i>Ludostaw Drelichowski</i>	<i>Jerzy Hołubiec</i>
<i>Olgierd Hryniewicz</i>	<i>Adam A. Janiak</i>	<i>Jerzy Józefczyk</i>
<i>Ignacy Kaliszewski</i>	<i>Józef Korbicz</i>	<i>Maciej Krawczak</i>
<i>Piotr Kulczycki</i>	<i>Małgorzata Łatuszyńska</i>	<i>Marek J. Malarski</i>
<i>Barbara Mażbic-Kulma</i>	<i>Zbigniew Nahorski</i>	<i>Andrzej Najgebauer</i>
<i>Włodzimierz Ogryczak</i>	<i>Wojciech Olejniczak</i>	<i>Jan W. Owsiański</i>
<i>Andrzej Piegat</i>	<i>Krzysztof Santarek</i>	<i>Roman Słowiński</i>
<i>Honorata Sosnowska</i>	<i>Henryk Spustek</i>	<i>Jan Stachowicz</i>
<i>Andrzej Straszak</i>	<i>Tomasz Szapiro</i>	<i>Andrzej Szymonik</i>
<i>Ryszard Tadeusiewicz</i>	<i>Eugeniusz Toczyłowski</i>	<i>Tadeusz Trzaskalik</i>
<i>Jan Węglarz</i>	<i>Tadeusz Witkowski</i>	<i>Stanisław Zajas</i>
	<i>Bogdan Zdrodowski</i>	

Komitet Organizacyjny

Jan W. Owsiański, Andrzej Kałużko, Mieczysław Pelc, Zbigniew Piątek

Sekretariat

Krystyna Warzywoda, Monika Majkut, Aneta M. Pielak, Krzysztof Sep,
Anna Stachowiak, Halina Świeboda, Tadeusz Winiarski

Redakcja wydawnictw

Janusz Kacprzyk, Piotr Sienkiewicz, Andrzej Najgebauer,
Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński,
Jan W. Owsiański, Zbigniew Nahorski, Tomasz Szapiro

Środowisko i jego ochrona

KOMPUTEROWY MODEL HYDRAULICZNY MIEJSKIEJ SIECI WODOCIĄGOWEJ⁸

Aleksy Barski^{*}, Andrzej Pawlak^{}, Jan Studziński^{*}**

^{*}Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

^{**}Politechnika Wroclawska, Wrocław

W pracy opisano komputerowy model matematyczny opracowany w Instytucie Badań Systemowych PAN i wdrożony w Miejskim Przedsiębiorstwie wodociągów i Kanalizacji w Rzeszowie. Przedstawiono krótko stan komputeryzacji polskich wodociągów, przesłanki, które zadecydowały o wykonaniu własnego modelu oraz jego wady i zalety w porównaniu z innymi modelami dostępnymi na rynku krajowym i światowym.

1. Wstęp

W miejskich wodociągach w Rzeszowie od kilku lat są prowadzone prace dotyczące implementacji zintegrowanego systemu informatycznego wspomagającego sterowanie operacyjne i zarządzanie siecią wodociągową (Studziński, 2007a). Jednym z elementów tego systemu jest komputerowy model hydrauliczny sieci, służący do symulacji pracy sieci, jej optymalizacji, sterownia i projektowania.

Na podstawie wcześniejszych badań stwierdzono, że obecny stan komputeryzacji przedsiębiorstw wodociągowych w Polsce jest niski i że dopiero zaczyna się wdrażać w nich bardziej zaawansowane oprogramowania - systemy monitoringu, mapy numeryczne czy komputerowe modele hydrauliczne (Karczmarska, 2008). Jednak praktycznie te prace nigdzie nie są ukończone i nie było możliwe skorzystanie z użytecznego doświadczenia innych przedsiębiorstw przy komputeryzacji wodociągów rzeszowskich. Dlatego zdecydowano o rozwijaniu własnych programów, w tym również i komputerowego modelu sieci wodociągowej, stwarzając w ten sposób możliwość zastosowania i sprawdzenia w praktyce algorytmów obliczeniowych rozwijanych w IBS PAN. Jednocześnie, w przypadku komputerowego modelu hydraulicznego, decyzja ta umożliwiła zintegrowanie z modelem algorytmów optymalizacji i sterowania, co nie jest stosowane w programach dostępnych na rynku.

Komputerowy model hydrauliczny sieci wodociągowej opracowany w IBS PAN nazwano OHIO od **O**bliczenia **H**ydrauliczne **I** **O**ptymalizacja. Model ten oparto na algorytmach programu autorskiego opracowanego i stosowanego przez Pawlaka (Pawlak, 2007).

2. Zakres funkcjonalny programu OHIO

Program OHIO jest przeznaczony do tworzenia komputerowego modelu systemu dystrybucji wody (sieci wodociągowej) oraz do analizowania stanów hydrau-

⁸ Praca wykonana w ramach projektu rozwojowego MNiSzW nr R11 001 01

licznym systemu w zadanych horyzontach czasowych. Inne zadania programu, to optymalizacja struktury sieci wodociągowej oraz optymalizacja funkcjonowania systemu (Pawlak, 2007).

Optymalizacja struktury sieci jest elementem procesu projektowania systemu zaopatrzenia w wodę, na który składa się sekwencja obliczeń obejmująca:

- dobór optymalnych średnic przewodów (odcinków) wodociągowych,
- lokalizacja i dobór parametrów zaworów redukcyjnych w sieci,
- dobór pomp w pompowniach i ustalanie parametrów ich pracy.

Optymalizacja funkcjonowania systemu dystrybucji wody sprowadza się do eliminacji uchybu między ciśnieniem wymaganym a ciśnieniem obliczonym w węzłach odbiorczych sieci, poprzez:

- zmniejszanie chropowatości przewodów,
- zmianę średnicy rur na ścieżkach największej oporności między źródłami zasilania a węzłami z niedoborem ciśnienia.

3. Podstawy budowy komputerowych modeli hydraulicznych układów dystrybucji wody

Każde z wymienionych zadań programu można podzielić na szereg prostszych podzadań, polegających na wyznaczeniu chwilowego stanu hydraulicznego sieci wodociągowej. Stan hydrauliczny sieci jest określany poprzez wyznaczenie wartości natężeń przepływu wody przez wszystkie elementy systemu oraz wartości ciśnień w każdym punkcie systemu na podstawie strat ciśnień wywołanych przepływem wody przez te elementy.

Stan hydrauliczny sieci opisują równania wynikające z praw *Kirchhoffa*. I prawo *Kirchhoffa* wynika z zasady zachowania masy i mówi, że w każdym węźle w sieci suma strumieni cieczy dopływającej jest równa sumie strumieni cieczy odpływającej, tzn.

$$\forall_w \sum_{i \in \text{dopyw}} q_i \rightarrow w = \sum_{j \in \text{odpyw}} q_j \leftarrow w \quad (1)$$

Liczba równań wynikających z I prawa *Kirchhoffa* jest równa liczbie węzłów w i jest wystarczająca do obliczenia natężeń przepływów cieczy w sieci o strukturze rozgałęznej (bez obwodów). Liczba nieznanymi zmiennymi odpowiadających natężeniom przepływu przez odcinki sieci ograniczone węzłami jest równa:

$$l = w - 1 \quad (2)$$

Dla jednoznacznego wyznaczenia l wartości natężeń przepływów q_i w odcinkach sieci wystarczy układ $(w - 1)$ równań. Ponieważ liczba równań wynikających z I prawa *Kirchhoffa* jest równa w , należy ją zredukować o jedno równanie. W praktyce z układu równań eliminowane jest równanie opisujące bilans natężeń strumieni cieczy w źródle zasilania. W przypadku sieci z wieloma źródłami zasilania

pomijane jest równanie opisujące bilans natężeń strumieni cieczy w jednym dowolnym źródle zasilania.

W przypadku sieci o strukturze obwodowej, w której pojawiają się kolejne odcinki i odpowiadające im zmienne natężeń przepływu, dla jednoznacznego wyznaczenia wartości natężeń przepływu we wszystkich odcinkach konieczne są dodatkowe równania opisujące stan hydrauliczny systemu. Dodatkowe równania buduje się w oparciu o II prawo *Kirchhoffa*. Wynika ono z zasady zachowania energii i mówi, że w każdym zamkniętym obwodzie systemu suma strat ciśnienia wywołanych przepływem strumieni cieczy przez wszystkie elementy systemu należące do zamkniętego obwodu jest równa zero, tzn.

$$\forall o \quad \sum_{l \in \text{obwodu}} \Delta h_l = 0 \quad (3)$$

Liczba równań wynikających z II prawa *Kirchhoffa* jest równa liczbie niezależnych obwodów, które powstają w wyniku dokładania do struktury sieci o budowie rozgałęznej kolejnych odcinków domykających. Zależność na liczbę niezależnych obwodów można wyprowadzić, wychodząc z zależności na liczbę odcinków l w sieci rozgałęznej zbudowanej z w węzłów, tzn.

$$o = l - w + 1 \quad (4)$$

Zależność ta jest znana jako zależność *Eulera* do wyznaczania niezależnych obwodów w sieci zbudowanej z l odcinków i w węzłów. W konsekwencji zbudowania układu $(w - 1)$ równań wynikających z I prawa *Kirchhoffa* oraz $(o = l - w + 1)$ równań wynikających z II prawa *Kirchhoffa* otrzymujemy układ równań

$$w - 1 + o = w - 1 + (l - w + 1) = l \quad (5)$$

jednoznacznie opisujących stan hydrauliczny sieci zawierającej l odcinków odpowiadających l nieznanym wartościom natężeń przepływu w odcinkach.

Czynnikami wpływającym na kształtowanie stanów hydraulicznych sieci są parametry sieci, czyli jej struktura, oraz parametry jej elementów, a także wymuszenia będące efektem oddziaływania otoczenia na system. Otoczeniem kształtującym funkcjonowanie systemu są wartości zapotrzebowania na wodę zgłaszanego przez odbiorców wody oraz założone wydajności pierwotnych źródeł zasilania.

4. Komputerowe modele hydrauliczne elementów sieci wodociągowej

Komputerowy model hydrauliczny elementu sieci wyraża zależność strat ciśnienia w funkcji natężenia przepływającej cieczy oraz parametrów charakteryzujących oporność tego elementu, zależną od rodzaju materiału i jego cech konstrukcyjnych (kształtu). Podstawowym elementem każdej sieci są przewody wodociągowe o przekroju kołowym wywołujące opory liniowe. Pozostałymi elementami sieci wywołującymi straty ciśnienia są elementy armatury (zasuwy, zawory, kolanka, trójniki, kłapy zwrotne, hydranty itp.) wywołujące miejscowe straty ciśnienia. Do elementów czynnych zaliczamy pompownie, zbiorniki wyrównawcze oraz hydrofony.

4.1. Model hydrauliczny przewodu wodociągowego

Podstawowa zależność określająca *opory miejscowe tarcia* w kołowym przewodzie wodociągowym mówi, że straty ciśnienia są wprost proporcjonalne do współczynnika tarcia λ , długości przewodu L i kwadratu prędkości przepływu cieczy v oraz odwrotnie proporcjonalne do średnicy d . Jest ona wyrażona wzorem *Darcy-Weisbacha*

$$\Delta h = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{L}{d} \quad (6)$$

który po wyrażeniu prędkości w funkcji natężenia przepływu przez przewód o przekroju kołowym:

$$v = \frac{4q}{\pi d^2} \quad (7)$$

przyjmuje postać

$$\Delta h = \lambda \frac{8}{g \pi^2} \frac{L}{d^5} q^2 \quad (8)$$

Współczynnik tarcia λ jest wyrażony wzorem *Colebrooka-White'a*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71 d} \right) \quad (9)$$

gdzie: k – współczynnik zastępczej chropowatości będący miarą chropowatości ścian wewnętrznych przewodu, liczba *Reynoldsa* $\text{Re} = v d / \nu$ jest wprost proporcjonalna do prędkości v i średnicy przewodu d , a odwrotnie proporcjonalna do współczynnika lepkości kinematycznej cieczy ν .

Wyrażając oporność właściwą przewodu przez

$$c = \lambda \frac{8}{g \pi^2} \frac{1}{d^5} \quad (10)$$

otrzymujemy wzór

$$\Delta h = c L q^2 = K q^2 \quad (11)$$

gdzie K jest *opornością hydrauliczną* przewodu.

4.2. Model hydrauliczny oporów miejscowych

Opory miejscowe tarcia powodują powstanie strat ciśnienia w zależności od cech konstrukcyjnych przewodu w danym miejscu, takich jak:

- Zwężenie lub rozszerzenie przewodu
- Zmiana kierunku przewodu (kołanka)
- Częściowe zamknięcie przekroju przewodu (zasuwy, zawory)
- Odgałężenie lub dołączenie innego przewodu (trójniki).

Każda strata miejscowa jest proporcjonalna do kwadratu prędkości przepływu cieczy v oraz współczynnika strat miejscowych ζ zależnego od konstrukcji przewodu w danym miejscu:

$$\Delta h_m = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (12)$$

Wzór ten po wyrażeniu prędkości w funkcji natężenia przepływu przez przewód o przekroju kołowym przyjmie postać

$$\Delta h_m = \zeta \frac{8}{g\pi^2} \frac{1}{d^4} q^2 \quad (13)$$

Porównując otrzymany wzór ze wzorem na straty ciśnienia w przewodzie:

$$\lambda \frac{8}{g\pi^2} \frac{L}{d^5} q^2 = \zeta \frac{8}{g\pi^2} \frac{1}{d^4} q^2 \quad (14)$$

uzyskujemy wzór na długość zastępczą ekwiwalentnego przewodu o średnicy d dla strat miejscowych ζ :

$$L_z = \frac{\zeta d}{\lambda} \quad (15)$$

a wzór na opór miejscowy tarcia można wyrazić w postaci

$$\Delta h_m = cL_z q^2 = K_z q^2 \quad (16)$$

4.3. Model hydrauliczny zbiornika wyrównawczego

Parametrem istotnym z punktu widzenia hydrauliki sieci wodociągowej jest poziom zwierciadła wody w zbiorniku w określonym momencie czasu. Do analiz funkcjonowania systemu w zadanym horyzoncie czasowym należy zamodelować zmianę poziomu wody w zależności od kształtu oraz zmian objętości wody w zbiorniku.

Charakterystyka hydrauliczna zbiornika wyrażająca wysokość zwierciadła wody H_z w funkcji objętości może być opisana wielomianem interpolacyjnym 3 stopnia postaci:

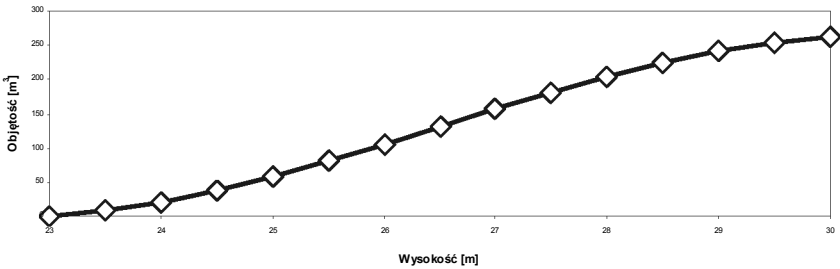
$$H_z = H_{z \min} + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3 \quad (17)$$

gdzie:

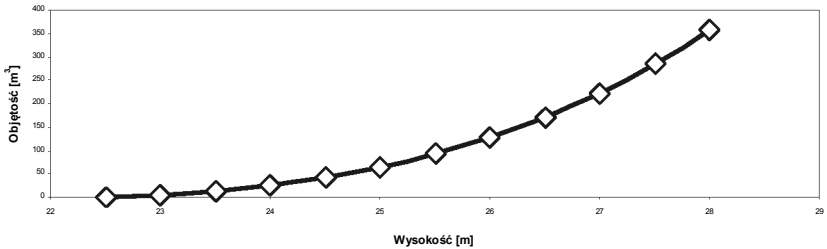
$H_{z \min}$ – minimalny poziom zwierciadła wody w zbiorniku w [m H₂O]

V – objętość wody w zbiorniku w [m³]

a_i – współczynniki wielomianu.



Charakterystyka objętości zbiornika o kształcie odwróconego ściętego stożka



Rys. 1. Charakterystyki objętości zbiorników (źródło własne).

4.4. Model hydrauliczny pompowni

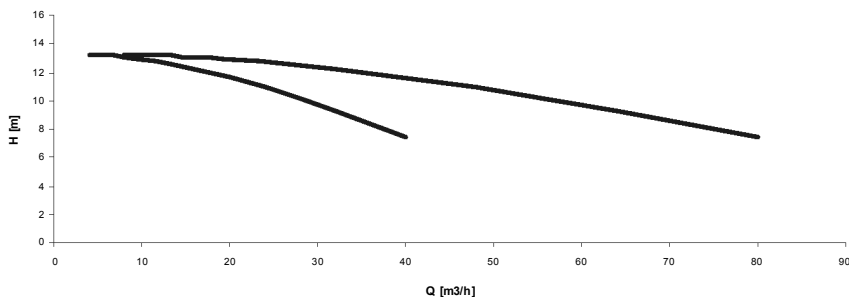
Pompownie pracujące w systemach dystrybucji wody wyposażone są najczęściej w pompy o charakterystykach diagonalnych, które przedstawiają zależność wysokości podnoszenia H_p od wydajności pompy Q_p .

Pompy w pompowniach pracują zazwyczaj w układzie równoległym i są najczęściej pompami tego samego typu, o identycznych charakterystykach.

Na zamieszczonym wykresie przedstawione są charakterystyki jednej oraz dwóch identycznych pomp pracujących w układzie równoległym. Charakterystyki pomp pracujących w układzie równoległym są sumowane według wydajności (wzdłuż osi x (Q_p)).

Do opisu charakterystyki układu pomp pracujących równolegle wykorzystuje się także wielomiany interpolacyjne 2 stopnia. Aby nie budować wielu wielomianów dla wielu zestawów równolegle pracujących identycznych pomp należy dokonać transformacji standaryzującej charakterystyki jednej lub wielu równolegle pracujących pomp przy pomocy przekształcenia standaryzującego o postaci:

$$q_p = \frac{2Q_p - (Q_{\max} + Q_{\min})}{Q_{\max} - Q_{\min}} \quad (18)$$



Rys. 2. Przykładowe charakterystyki pomp (źródło własne).

Przekształcenie to, zarówno dla jednej pompy jak i dla n równolegle pracujących pomp, sprowadza charakterystykę do przedziału standaryzowanego $\langle -1, +1 \rangle$. Dzięki temu wielomian aproksymujący charakterystyki pompy w przedziale wydajności standaryzowanych $\langle -1, +1 \rangle$ jest identyczny dla jednej, jak i dla wielu pomp o tych samych charakterystykach.

Charakterystyka hydrauliczna układu n równolegle pracujących pomp może być opisana wielomianem:

$$H_p = a_0 + a_1 q_p + a_2 q_p^2 \quad (19)$$

na podstawie co najmniej 3 punktów o współrzędnych $\{Q_p; H_p\}$ odczytanych z charakterystyki hydraulicznej pompy, gdzie:

H_p – wysokość podnoszenia pomp pracujących równolegle w [m H₂O]

q_p – znormalizowana wydajność zestawu n pomp pracujących równolegle

a_i – współczynniki wielomianu.

Często, w celu dostosowania dostawy wody do zmieniającego się zapotrzebowania, regulowana jest wydajność pompy przez zmianę jej prędkości obrotowej. Ten rodzaj regulacji powoduje zmianę charakterystyki pompy według następujących zależności:

$$\frac{Q_p}{Q_p} = \frac{n}{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{H_p}{H_p} = \left(\frac{n}{n}\right)^2 \quad (20)$$

gdzie: Q_p i H_p – wydajność i wysokość podnoszenia pompy przy nominalnej prędkości obrotowej

Q'_p i H'_p – wydajność i wysokość podnoszenia pompy przy zmienionej prędkości obrotowej

n i n' – nominalna prędkość obrotowa i prędkość po zmianie.

Jeśli znana jest charakterystyka $H_p = f(Q_p)$ pompy przy prędkości obrotowej n , to charakterystykę przy prędkości n' wyznaczamy na podstawie punktów o współrzędnych

$$\left\{ Q'_p = \frac{n'}{n} Q_p \ ; \ H'_p = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 H_p \right\} \quad (21)$$

stosując przekształcenie normalizujące i wyznaczając współczynniki wielomianu interpolacyjnego 2 stopnia.

5. Komputerowe metody obliczania modeli hydraulicznych

5.1. Metody rozwiązywania układów równań opisujących stan hydrauliczny sieci

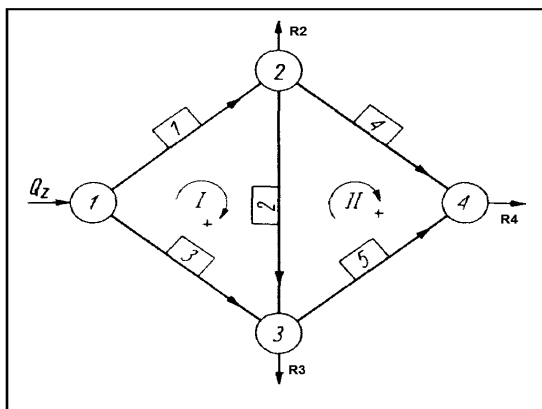
W celu wyznaczenia stanu hydraulicznego sieci wodociągowej opracowane zostały metody iteracyjne rozwiązywania układu równań nieliniowych wynikające z metody *Newton'a-Raphson'a*. Zostały one wyprowadzone przy wykorzystaniu twierdzenia mówiącego, że każdą ciągłą i różniczkowalną funkcję n -tego stopnia możemy w dowolnym punkcie x_0 rozwinąć w szereg *Taylora* w epsilonowym otoczeniu tego punktu:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_l) = f(q_1, q_2, \dots, q_l)_0 + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial q_i^2} (dq_i^2 / 2!) + \dots + \sum_i \frac{\partial^n f}{\partial q_i^n} (dq_i^n / n!)$$

gdzie natężenie przepływu $q_i = q_{i0} + dq_i$ wyrażone jest jako suma stałej założonej *a'propri* wartości natężenia przepływu i zmiennej poprawki korygującej to natężenie w każdym z l odcinków systemu.

Pomijając w uzyskanym szeregu *Taylora* wszystkie wyrazy rozwinięcia oprócz dwóch pierwszych, uzyskujemy liniowe przybliżenie funkcji n -tego stopnia. W rezultacie równanie nieliniowe w funkcji natężeń przepływów w każdym odcinku sieci możemy przedstawić w postaci równania liniowego w funkcji poprawek natężeń przepływów w każdym odcinku sieci z błędem residualnym określonym przez pozostałe $(n - 1)$ wyrazy rozwinięcia funkcji w szereg *Taylora*.

Istotę metody rozwiązywania układów równań nieliniowych opisujących stan hydrauliczny sieci z wykorzystaniem podanych wyżej zasad przybliżymy na przykładzie sieci o dwóch obwodach, w której są znane wymiary geometryczne rurociągów i parametry pozwalające obliczyć oporność przewodów, rozbiory węzłowe R_i i natężenia zasilania sieci Q_z , kierunki przepływu wody w odcinkach, a także jest przyjęty kierunek sumowania strat energii w odcinkach poszczególnych obwodów zgodny z ruchem wskazówek zegara.



Rys. 3. Przykładowy graf sieci wodociągowej (źródło własne).

Stan równowagi hydraulicznej sieci opisują trzy ($w-1 = 4-1$) równania warunku ciągłości przepływu w węzłach:

$$\text{węzeł 2: } q_1 - q_4 - q_2 - R_2 = 0$$

$$\text{węzeł 3: } q_3 + q_2 - q_5 - R_3 = 0$$

$$\text{węzeł 4: } q_4 + q_5 - R_4 = 0$$

oraz dwa ($o = 2$) warunki równowagi strat ciśnienia w obwodach:

$$\text{obwód I: } \Delta h_1 + \Delta h_2 - \Delta h_3 = 0$$

$$\text{obwód II: } \Delta h_4 + \Delta h_5 - \Delta h_2 = 0,$$

które po uwzględnieniu zależności $\Delta h = Kq^2$ przyjmują postać

$$\text{obwód I: } K_1 q_1^2 + K_2 q_2^2 - K_3 q_3^2 = 0$$

$$\text{obwód II: } K_4 q_4^2 - K_5 q_5^2 - K_2 q_2^2 = 0$$

gdzie: Q_z – natężenie dopływu do sieci (zasilanie), [m^3/s]

q_i – natężenie przepływu w odcinkach [m^3/s]

R_j – natężenie rozbiórów w węzłach [m^3/s]

K_k – oporności odcinków [s^2/m^5].

Uzyskany układ 5 równań jest układem równań nieliniowych w funkcji natężeń przepływów opisujących stan hydrauliczny przedstawionej na schemacie sieci. Rozwijając każde z podanych równań w szereg *Taylora* i ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia, wyżej podany układ możemy zapisać w postaci:

$$dq_1 - dq_4 - dq_2 = R_2 - q_{10} + q_{40} + q_{20}$$

$$dq_3 + dq_2 - dq_5 = R_3 - q_{30} - q_{20} + q_{50}$$

$$dq_4 + dq_5 = R_4 - q_{40} - q_{50}$$

$$K_1 q_{10} dq_1 + K_2 q_{20} dq_2 - K_3 q_{30} dq_3 = -(K_1 q_{10}^2 + K_2 q_{20}^2 - K_3 q_{30}^2)/2$$

$$K_4 q_{40} dq_4 - K_5 q_{50} dq_5 - K_2 q_{20} dq_2 = -(K_4 q_{40}^2 - K_5 q_{50}^2 - K_2 q_{20}^2)/2$$

Uzyskany układ równań liniowych można rozwiązać jedną ze standardowych procedur (na przykład metodą eliminacji *Gaussa*). **Wadą** przedstawionej metody jest duża wymiarowość zadania, wynikająca z liczby zmiennych równej liczbie odcinków sieci wodociągowej. W rzeczywistych systemach zaopatrzenia w wodę liczba odcinków może wynosić kilka a nawet kilkanaście czy kilkadziesiąt tysięcy.

Istotną **redukcję** wymiarowości przedstawionego zadania można przeprowadzić, zakładając wartości natężeń *a priori* nie w sposób dowolny, ale taki, aby spełnione były warunki równań wynikające z I prawa *Kirchhoffa*, czyli aby była zachowana równość przepływów w każdym punkcie systemu. Wówczas równania wynikające z I prawa *Kirchhoffa* można zapisać w postaci:

$$dq_1 - dq_4 - dq_2 = R_2 - q_{10} + q_{40} + q_{20} = 0$$

$$dq_3 + dq_2 - dq_5 = R_3 - q_{30} - q_{20} + q_{50} = 0$$

$$dq_4 + dq_5 = R_4 - q_{40} - q_{50} = 0$$

skąd wynikają kolejne równania:

$$\text{dla obwodu II:} \quad dq_4 = -dq_5 = dQ_{II}$$

$$\text{dla obwodu I:} \quad dq_1 = -dq_3 = dQ_I$$

$$dq_2 = dQ_I - dQ_{II}$$

przy czym poprawka na odcinku wspólnym dla obwodów jest różnicą poprawek natężeń przepływu dla obu obwodów.

Podstawiając uzyskane rezultaty do równań wynikających z II prawa *Kirchhoffa* otrzymujemy układ równań:

$$(K_1 q_{10} + K_2 q_{20} + K_3 q_{30}) dQ_I - K_2 q_{20} dQ_{II} = -(K_1 q_{10}^2 + K_2 q_{20}^2 - K_3 q_{30}^2)/2$$

$$(K_4 q_{40} + K_5 q_{50} + K_2 q_{20}) dQ_{II} - K_2 q_{20} dQ_I = -(K_4 q_{40}^2 - K_5 q_{50}^2 - K_2 q_{20}^2)/2$$

W rezultacie redukuje się wymiar zadania z *l* (liczba odcinków, kilka do kilkadziesiąt tysięcy) do *o* (liczba obwodów, do kilkuset).

Kolejnym uproszczeniem obliczania stanów hydraulicznych sieci wodociągowej jest jej **zdekomponowanie** do zbioru niezależnych obwodów. Tym sposobem z równań opisujących stan równowagi energii w każdym obwodzie wyeliminowane zostaną wyrazy odnoszące się do oddziaływań obwodów sprzężonych z danym obwodem. Równania dla przedstawionej na schemacie sieci zapiszemy w postaci:

$$(K_1 q_{10} + K_2 q_{20} + K_3 q_{30}) dQ_I = -(K_1 q_{10}^2 + K_2 q_{20}^2 - K_3 q_{30}^2)/2$$

$$(K_4 q_{40} + K_5 q_{50} + K_2 q_{20}) dQ_{II} = -(K_4 q_{40}^2 - K_5 q_{50}^2 - K_2 q_{20}^2)/2$$

a ich rozwiązania w postaci wzorów:

$$dQ_I = -\frac{K_1 q_1^2 + K_2 q_2^2 - K_3 q_3^2}{2(K_1 q_1 + K_2 q_2 + K_3 q_3)} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

$$dQ_{II} = -\frac{K_4 q_4^2 + K_5 q_5^2 - K_2 q_2^2}{2(K_4 q_4 + K_5 q_5 + K_2 q_2)} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

W ogólności otrzymujemy uniwersalny wzór na poprawkę cyrkulującą w dowolnym obwodzie sieci o układzie zamkniętym:

$$dQ_j = - \frac{\sum_{i=1}^r K_i q_i^2}{\sum_{i=1}^r K_i q_i} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

lub, po uwzględnieniu zależności $\Delta h = Kq^2$, w postaci

$$dQ_j = - \frac{\sum_{i=1}^r \Delta h_i}{\sum_{i=1}^r \frac{\Delta h_i}{q_i}}$$

gdzie: Δh_i – spadek linii ciśnienia w odcinku sieci należącym do obwodu

q_i – natężenie przepływu w odcinku sieci

K_i – oporność hydrauliczna odcinka sieci

r – liczba odcinków w obwodzie j .

Wzory te znane są pod nazwą wzorów *Crossa-Łobaczewa*.

5.2. Algorytm wyznaczania stanu hydraulicznego sieci wodociągowej

Algorytm rozwiązywania zadania wyznaczania stanu hydraulicznego systemu zaopatrzenia w wodę z użyciem wzorów *Crossa-Łobaczewa* jest następujący:

1. Wyznaczyć na podstawie rozbiorów w węzłach sieci wstępne natężenia przepływów q_{oi} w odcinkach sieci tak, aby spełnione były równania ciągłości przepływu wynikające z I prawa *Kirchhoffa*.
2. Obliczyć oporności hydrauliczne K_i odcinków systemu.
3. Sprawdzić, czy dla każdego obwodu systemu spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^r K_i q_i'^2 \leq D_{dop}$$

gdzie D_{dop} jest dopuszczalną odchyłką wyrównywania ciśnień w obwodzie sieci.

4. Jeżeli warunek 3 jest spełniony, zakończyć obliczenia.
5. Jeżeli warunek 3 nie jest spełniony, obliczyć poprawki dQ_j we wszystkich obwodach sieci.
6. Wyznaczyć skorygowane przepływy we wszystkich odcinkach sieci:

$$q'_i = q_i + dQ_j$$

Rozwiązanie tego zadania wymaga przeprowadzenie analizy struktury sieci przy pomocy narzędzi i metod wywodzących się z teorii grafów.

5.3. Komputerowe modelowanie struktury sieci wodociągowej

Struktura sieci przedstawiana jest najczęściej w postaci schematu graficznego, na którym poszczególne elementy systemu są określone za pomocą umownych symboli rysunkowych. Jednak forma ta jest niewystarczająca do przeprowadzania analiz struktury systemu wymaganych przy formułowaniu i rozwiązywaniu zadań wyznaczania stanów hydraulicznych systemu. Jednym ze sposobów prezentowania

struktury systemu w takich zadaniach jest zamodelowanie jej przy pomocy grafu rozumianego jako zbiór węzłów i łuków.

Łuki grafu odpowiadają takim elementom systemu, jak:

- odcinki przewodów wodociągowych
- opory miejscowe
- pompy wirowe
- zbiorniki.

Węzły grafu są punktami odwzorowującymi:

- początki i końce odcinków przewodów
- miejsca zmian średnicy lub współczynnika chropowatości rurociągu
- miejsca rozgałęzienia rurociągów
- punkty poboru wody
- punkty zasilania w wodę:
 - punkty podłączenia pompowni
 - punkty podłączenia zbiorników.

Do opisu struktury sieci wystarczające jest podanie:

1. listy węzłów w postaci ich unikalnych identyfikatorów
2. listy łuków w postaci ich identyfikatorów oraz identyfikatorów węzłów początku i końca łuku.

Podane w postaci takich list informacje o strukturze grafu umożliwiają określenie wzajemnych relacji topologicznych wszystkich elementów grafu.

Dzięki temu możliwe jest zidentyfikowanie najczęściej popełnianych błędów przy opisie struktury sieci wodociągowej, czyli:

- numerowanie dwóch różnych węzłów lub łuków tymi samymi identyfikatorami
- pominięcie na liście węzłów węzła, który wykorzystany jest do opisu łuku
- stwierdzenie niespójności grafu opisującego strukturę sieci.

Wylimitowanie wymienionych błędów jest warunkiem poprawnego zamodelowania struktury systemu.

W celu przeprowadzenia obliczeń hydraulicznych konieczne jest przeprowadzenie operacji na grafie systemu, których celem jest:

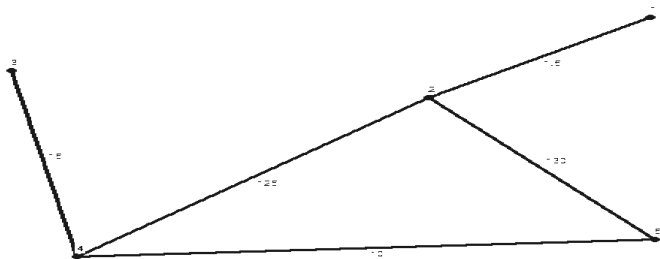
- wyznaczenie minimalnego drzewa grafu
- wyznaczenie kodrzewa grafu
- wyznaczenie wszystkich niezależnych obwodów grafu.

5.4. Algorytm wyznaczenia minimalnego drzewa grafu i kodrzewa

Drzewem grafu nazywamy taki podgraf, który zawiera wszystkie węzły grafu oraz łączące je łuki w taki sposób, aby nie tworzyły obwodów. Dla grafu zbudowanego z w węzłów i l łuków drzewo będzie podgrafem o $(w - 1)$ łukach. Kodrzewem

jest podgraf, który jest dopełnieniem drzewa grafu do grafu wyjściowego. W celu wyznaczenia minimalnego drzewa grafu oraz kodrzewa należy:

1. Dla wszystkich łuków grafu obliczyć ich wagi, którymi są oporności odcinków sieci. Wagi łuków odwzorowujących pompy i zbiorniki są oznaczane minimalnymi wagami, aby zawsze były elementami drzewa grafu.
2. Dla wszystkich węzłów grafu zbudować listy łuków incydentnych.
3. Dla każdego węzła grafu wybrać łuk o najmniejszej wadze.
4. Jeżeli liczba wybranych łuków jest równa $(w - 1)$, zakończyć postępowanie.
5. Jeżeli liczba wybranych łuków jest mniejsza niż $(w - 1)$, należy dopełnić ją do $(w - 1)$ o łuki o najmniejszych wagach z listy pozostałych łuków.
6. Pozostałe $(l - w + 1)$ łuków grafu stanowi kodrzewo grafu zbudowane z łuków o największych wagach.



Rys. 4. Przykład drzewa minimalnego i kodrzewa grafu wyznaczonych według przedstawionego algorytmu (źródło własne).

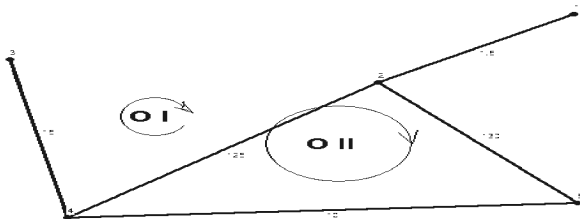
Na schemacie przedstawiony jest graf zbudowany z 5 węzłów i 6 łuków. Drzewem minimalnym tego grafu jest podgraf zbudowany z 5 (w) węzłów i 4 ($w-1$) łuków. Kolorem niebieskim oznaczone są 3 łuki grafu o najmniejszych wagach, które zostały wybrane w punkcie 3 algorytmu. Do skompletowania drzewa według punktu 5 algorytmu, spośród pozostałych łuków został wybrany łuk o najmniejszej wadze. Łukiem tym jest łuk oznaczony kolorem zielonym. Pozostałe 2 ($l-w+1$) łuki oznaczone kolorem czerwonym, o największych wagach, są kodrzewem przedstawionego na schemacie grafu (punkt 6 algorytmu).

5.5. Algorytm wyznaczenia niezależnych obwodów grafu

Liczba niezależnych obwodów grafu wynosi $(l-w+1)$ i jest równa liczbie łuków kodrzewa. Algorytm wyznaczania niezależnych obwodów grafu pozwala zbudować obwody na bazie elementów kodrzewa. W celu wyznaczenia obwodów grafu należy (Barski, 2008; Pawlak, 2007):

1. Dla wszystkich węzłów grafu określić wagi, którymi będą ilości łuków incydentnych z danym węzłem.

2. Dla wszystkich węzłów grafu o wadze większej niż 1 zbudować listy łuków incydentnych pomijając łuki, których waga węzła przeciwstawnego jest równa 1 oraz łuki będące elementami kodrzewa.
3. Dla każdego łuku z kodrzewa zbudować obwód, przeglądając ścieżki grafu według następujących zasad:
 - a. Dla początkowego węzła łuku należącego do kodrzewa wybrać pierwszy łuk z listy łuków incydentnych utworzonej w punkcie 2 algorytmu.
 - b. Sprawdzić, czy waga węzła przeciwnego jest wyższa niż 1.
 - c. Jeżeli tak, to:
 - i. Dopisać łuk do budowanego obwodu i zaznaczyć go jako wybrany.
 - ii. Sprawdzić czy węzeł końcowy wybranego łuku odpowiada węzłowi końcowemu łuku kodrzewa, dla którego budowany jest obwód.
 - x. Jeżeli tak, zakończyć budowę obwodu. Wybrać następny łuk należący do kodrzewa i przejść do punktu a.
 - xx. Jeżeli nie, to przejść dalej do punktu iii.
 - iii. Spośród łuków incydentnych z węzłem końcowym wybranego odcinka wybrać łuk jeszcze nieoznaczony jako wybrany. Przejść do punktu b.
 - d. Jeżeli nie, to:
 - i. Zaznaczyć łuk jako 'ślepa ścieżka' (zablokować).
 - ii. Wrócić do węzła początkowego zablokowanego łuku.
 - iii. Spośród nieoznaczonych łuków incydentnych z tym węzłem wybrać kolejny i przejść do punktu c.ii.
 - iv. Jeżeli nie ma łuków nieoznaczonych, usunąć łuk dopisany do obwodu i przejść do punktu d.i.



Rys. 5. Przykład drzewa minimalnego i kodrzewa grafu wyznaczonych według przedstawionego algorytmu (źródło własne).

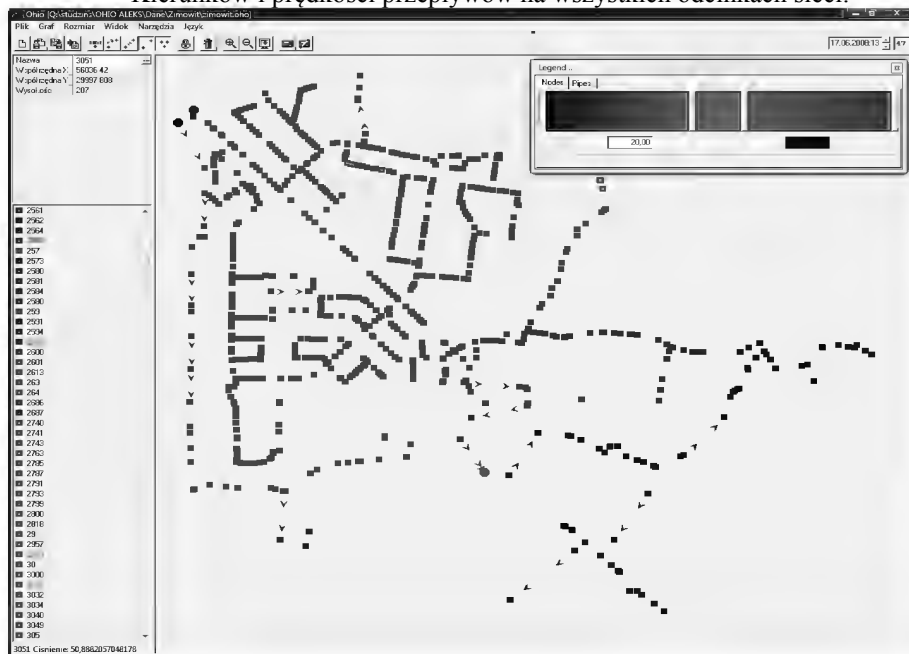
Elementami kodrzewa stanowiącymi bazę do wyznaczania niezależnych obwodów według przedstawionego algorytmu są łuki oznaczone na czerwono o numerach węzłów 2-4 oraz 2-5. Obwód I zbudowany według zasad podanych w algorytmie składa się z łuków o numerach węzłów $\{2-4, 2-3, 3-4\}$. Obwód II zbudowany według tych samych zasad składa się z łuków o numerach węzłów $\{2-5, 2-3, 3-4, 4-5\}$.

Przedstawione algorytmy operacji na grafach oraz opisana metoda rozwiązywania układu równań, opisujące stan hydrauliczny sieci wodociągowej o dowolnej strukturze, zostały zastosowane w programie OHIO, będącym programem z rozbudowanym edytorem graficznym do obliczeń hydraulicznych systemu zaopatrzenia w wodę.

6. Graficzna prezentacja wyników obliczeń

Wyniki obliczeń programem OHIO mogą zostać zaprezentowane w obszarze grafu oraz na liście obiektów. Dla każdej godziny analizowanego horyzontu czasowego możliwe jest wyświetlenie:

- Stanu ciśnień we wszystkich węzłach sieci.
- Kierunków i prędkości przepływów na wszystkich odcinkach sieci.



Rys. 6. Ekran programu OHIO z sygnalizacją stanu ciśnień w węzłach sieci.

Podobne zasady dotyczą informacji o prędkościach i kierunkach przepływu, które są sygnalizowane w postaci kolorowych strzałek wyświetlanych na wszystkich odcinkach sieci (przewody, przewody z oporami miejscowymi, pompownie) dla każdej godziny analizowanego horyzontu czasowego. Strzałki nie są wyświetlane na odcinkach, na których w danej godzinie przepływ nie występuje. Poszczególne kolory, od niebieskiego, poprzez zielony do czerwonego, informują o prędkościach od 20 cm/sek do 70 cm/sek.

Tak w przypadku sygnalizacji ciśnień, jak i prędkości, zarówno kolory, jak i odpowiadające im przedziały wartości, można dowolnie zmieniać.



Rys. 7. Ekran programu OHIO z sygnalizacją stanu przepływów w odcinkach sieci.

Stan ciśnień w węzłach sieci sygnalizowany jest przez wyświetlenie w obszarze grafu symboli ciśnień w postaci kolorowych kwadratów oraz podświetlenie w tych samych kolorach węzłów na liście obiektów. Przyjęto, że kolor: **niebieski** – wskazuje wartości ciśnienia dyspozycyjnego w zakresie do 20 m, **zielony** – wskazuje wartości ciśnienia dyspozycyjnego w zakresie do 50 m, **czerwony** – wskazuje wartości ciśnienia w zakresie do 70 m.

7. Optymalizacja systemu zaopatrzenia w wodę

Program OHIO pozwala także na przeprowadzenie obliczeń optymalizacyjnych systemu zaopatrzenia w wodę w zakresie **optymalizacji parametrów systemu**, która obejmuje zmniejszenie oporności hydraulicznej przewodów sieci poprzez ich wymianę lub renowację.

Scenariusz wyznaczania przewodów do renowacji lub wymiany obejmuje:

1. Obliczenie hydrauliczne sieci w godzinie maksymalnego godzinowego zapotrzebowania na wodę.
2. Wyznaczenie miarodajnego punktu w sieci wodociągowej, czyli takiego, w którym występuje maksymalny niedobór wymaganego ciśnienia.
3. Wyznaczenie wszystkich dróg między źródłami zasilania (pompownie, zbiorniki), a punktem miarodajnym.

4. Zbudowanie tabeli wag przewodów wodociągowych jako iloczynu spadku ciśnienia i liczby ścieżek przechodzących przez ten przewód.
5. Wybór przewodu z największą wagą, a przy równych wagach, o większym oporze.
6. Zasymulowanie renowacji przewodu, czyli redukcja chropowatości przewodu.
7. Powtórzenie scenariusza od 1 do 6 po zmianie chropowatości przewodu.

W przypadku ponownego wybrania w punkcie 5 tego samego przewodu do renowacji należy zmienić przewód na przewód o większej średnicy i przejść do punktu 1.

8. Przebieg obliczeń optymalizacyjnych jest zakończony po zniwelowaniu niedoboru ciśnienia w miarodajnym punkcie sieci, lub po wybraniu 5 przewodów do renowacji lub wymiany.

8. Zakończenie

Przedstawiono dokładny opis programu obliczeń i optymalizacji sieci wodociągowej, opracowany w Instytucie Badań Systemowych PAN dla potrzeb realizowanego tam projektu badawczego. Program jest wdrażany, testowany i stosowany w wodociągach rzeszowskich do operacyjnego sterowania siecią wodociągową (Stużdziński, 2007b). Doświadczenia wynikające z wdrożenia a także z porównań programu OHIO z innymi dostępnymi programami obliczeń sieci wodociągowych były i są przyczyną ciągłego rozwijania i udoskonalania programu.

Wynikiem tych doświadczeń były między innymi:

- zastosowanie algorytmu *Crossa* do rozwiązywania równań sieci wodociągowej,
- opracowanie algorytmu wyznaczania optymalnej kombinacji niezależnych obwodów grafu sieci,
- opracowanie algorytmu dwustopniowej optymalizacji parametrów sieci wodociągowej z wykorzystaniem metody optymalizacji jednokryterialnej,
- opracowanie przejrzystej i wygodnej dla użytkownika struktury pliku danych wejściowych,
- opracowanie bardzo przyjaznego użytkownikowi interfejsu,
- opracowanie systemu sygnalizacji kolorami wartości ciśnień i przepływów w sieci.

Wydaje się, że takie postępowanie doprowadziło do powstania programu bardzo efektywnego i jednocześnie prostego i łatwego w obsłudze. Dostępny w Internecie program EPANET nie dysponuje algorytmem optymalizacji i jednocześnie ma bardzo skomplikowaną strukturę pliku danych wejściowych. Z kolei stosowany w Niemczech program REH-T-NET stosuje wolny algorytm *Newtona-Raphsona* do rozwiązywania układu równań modelu hydraulicznego i bardzo czasochłonny algorytm heurystyczny optymalizacji sieci wodociągowej. W obu wspo-

mnianych programach obsługa interfejsu użytkownika jest złożona i nieprzyjazna z punktu widzenia zastosowań branżowych w przedsiębiorstwach wodociągowych.

Dalsze rozwijanie programu OHIO idzie w kierunku rozbudowy algorytmu optymalizacji o dodatkowe kryteria celu, umożliwiające również sterowanie siecią wodociągową i kalibrację modelu hydraulicznego, a także w kierunku implementacji dodatkowych algorytmów rozszerzających zakres zastosowań programu. Należą do nich na przykład algorytmy wyznaczania rozkładów ciśnień i przepływów w sieci wodociągowej za pomocą aproksymacji krigingowej (Studziński i Bogdan, 2007). Ponadto przewiduje się zastosowanie w przyszłości między innymi programu OHIO w pracach związanych z zarządzaniem środowiskiem (Studziński i Straszak, 2007).

Literatura

- Barski A. (2008) *Algorytm wyznaczania oczek w sieci wodociągowej*. Raport Badawczy IBS PAN, Raport RB 09 2008, Warszawa.
- Karczmarska D. (2008) *Stan komputeryzacji wybranych wodociągów krajowych w zakresie systemów monitoringu, mapy numerycznej i obliczeń hydraulicznych do celów eksploatacji i prac projektowych sieci wodociągowych*. IBS PAN, Raport RB 11 2008, Warszawa.
- Pawlak A. (2007) *OHIO – aplikacja do modelowania i optymalizacji systemu dystrybucji wody*. IBS PAN, Raport RB 04 2007, Warszawa.
- Studziński J. (2007a) Zastosowanie danych z monitoringu w systemie zarządzania siecią w wodociągową. *Studia i Materiały PSZW*, Bydgoszcz, **9**, 154-164.
- Studziński J.(2007b) *Modelowanie, optymalizacja i sterowanie miejskich sieci wodociągowych*. IBS PAN, Raport RB G54/07/2007, Warszawa 2007.
- Studziński J., Bogdan L. (2007) Application of Kriging Algorithms for Environmental and Engineering Parameters Approximation. *Conference ENVIROINFO'2007*, Shaker Verlag Aachen, 185-192
- Studziński J., Straszak A. (red.) (2007) *Ekspertyza w zakresie wykorzystywania modeli matematyczno-systemowych w zakresie zarządzania środowiskiem*. IBS PAN, Warszawa.

IBS PAN *Konf.*

46003

Bibl. podręczna

**Olgierd Hryniewicz, Andrzej Straszak, Jan Studziński
red.**

**BADANIA OPERACYJNE I SYSTEMOWE:
ŚRODOWISKO NATURALNE, PRZESTRZEŃ,
OPTYMALIZACJA**

Książka składa się z artykułów przedstawiających wyniki prac z dziedziny badań operacyjnych i systemowych, poświęconych środowisku naturalnemu i zarządzaniu nim, zwłaszcza w zakresie ochrony atmosfery, globalnego ocieplenia i walki z nim, jakości i zaopatrzenia w wodę. Tematyka ta jest rozszerzona o aspekty przestrzenne, regionalne i samorządowe, a także planowanie i funkcjonowanie infrastruktury. Tom zamykają prace metodyczne, dostarczające technik, będących podstawą prezentowanych zastosowań.

ISBN 83-894-7519-7

EAN 9788389475190

Instytut Badań Systemowych PAN

tel. (4822) 3810241 / 3810273 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl