

INSTYTUT AUTOMATYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P R A C E
INSTYTUTU AUTOMATYKI PAN

Zeszyt 71

JAKUB GUTENBAUM

ZAGADNIENIA ADAPTACYJNEGO STEROWANIA
WIELOWYMIAROWYMI OBIEKTAMI DYNAMICZNYMI



WARSZAWA

1968

INSTYTUT AUTOMATYKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

P R A C E
INSTYTUTU AUTOMATYKI PAN

Zeszyt 71

JAKUB GUTENBAUM

ZAGADNIENIA ADAPTACYJNEGO STEROWANIA
WIELOWYMIAROWYMI OBIEKTAMI DYNAMICZNYMI



WARSZAWA

1968

47471



Część trzecia

PREDYKCJA CAŁKOWEGO WSKAŹNIKA JAKOŚCI PROCESÓW DYNAMICZNYCH

Przedstawiono metodę predykcji całkowego wskaźnika jakości o kwadratowej funkcji kosztów. Podstawą metody jest wykorzystanie zależności wartości tego wskaźnika od współrzędnych stanu w chwili początkowej. Podano algorytm adaptacji wykorzystujący tę zależność. Zastosowanie tego algorytmu umożliwia wyznaczenie wartości wskaźnika jakości dla zadanych standardowych warunków początkowych niezależnie od rzeczywistych warunków początkowych pomiaru. Rozpatrzono modyfikację metody w przypadku działania na układ addytywnych zakłóceń przypadkowych. Przedstawiono sposób doboru optymalnego przedziału czasu całkowania przy predykcji wskaźnika jakości. Omówione warunki inwariantności optymalnych parametrów regulatora względem niektórych współczynników funkcji kosztów.

1. UWAGI OGÓLNE

Identyfikacja właściwości dynamicznych złożonych układów sterowania, wykonywana w celach automatycznej optymalizacji przebiegów w stanach nieustalonych, jest zagadnieniem, które nie znalazło dotychczas zadowalającego rozwiązania.

W literaturze zagadnienie to jest rozumiane bardzo często jako zadanie wyznaczania odpowiedzi impulsowej układu analizowanego. Abstrahując od trudności, z jakimi związane jest rozwiązanie tego zadania, należy stwierdzić, że znajomość charakterystyki impulsowej układu tylko w nielicznych przypadkach może być efektywnie wykorzystana do celów optymalizacji automatycznej.

Identyfikacja polegająca na wyznaczeniu modelu matematycznego obiektu sterowania, np. w postaci równań różniczkowych, które całkowicie charakteryzują właściwości dynamiczne tego obiektu, jest zadaniem trudnym i w ogólnym przypadku dotychczas jeszcze nie rozwiązany. Jeżeli jednak celem jest ekstremalizacja zadanego wskaźnika jakości, zagadnienie identyfikacji można w pewnych przypadkach sprowadzić do wyznaczenia tego wskaźnika.

Interesują nas przypadki, w których wskaźnik jakości jest funkcjonalem przebiegów w układzie w stanach nieustalonych. Jak wspomniano w części pierwszej niniejszej pracy, takiego funkcjonau w rzeczywistym układzie sterowania nie można wyznaczać bezpośrednio, to znaczy przez całkowanie w określonym przedziale czasu zadanej funkcji kosztów.

Przede wszystkim jakość procesów dynamicznych jest określona całym okresem trwania stanu nieustalonego, a więc - teoretycznie biorąc - od pewnej chwili początkowej do nieskończoności, a - praktycznie biorąc - do czasu, po którym odchylenia od stanu nieustalonego są pomijalnie małe. Jednak informacja o wartości wskaźnika jakości uzyskana dopiero po zakończeniu stanu nieustalonego może być już nie do wykorzystania do celów optymalizacji. Korzystne byłoby uzyskanie tej informacji jeszcze w czasie trwania stanu nieustalonego, tak aby było można wykorzystać ją na bieżąco. Powstaje więc problem predykcji wskaźnika jakości.

Dodatkowa trudność wykorzystania do optymalizacji bezpośredniego pomiaru wskaźnika jakości wynika z konieczności uwzględnienia warunków początkowych. Porównanie wartości wskaźników jakości różnych procesów dynamicznych ma sens jedynie wtedy, kiedy pomiar był wykonywany od takich samych warunków początkowych.

Oprócz tego, w układach nieautonomicznych należy wyróżnić w mierzonych sygnałach wyjściowych składowe charakteryzujące stan nieustalony, co nie jest zadaniem łatwym, zwłaszcza gdy na układ działają zakłócenia przypadkowe.

W tej części pracy przedstawiono metodę predykcji całkowego wskaźnika jakości o kwadratowej funkcji kosztów w przypadku obiektów sterowania, których równania można linearyzować dla przyrostów sygnału wejściowego, i wykorzystujący tę metodę algorytm adaptacji umożliwiający szukanie optymalnych parametrów regulatora bez konieczności rozpoczynania pomiaru zawsze od takich samych warunków początkowych. Algorytm ten może mieć szczególne zastosowanie przy stosunkowo szybkich zmianach parametrów obiektu. Rozpatrzono również możliwość upraszczania postaci zadanego wskaźnika jakości.

2. POSTAWIENIE PROBLEMU

Rozpatrujemy obiekt sterowania opisany wektorowym liniowym rów-

naniem różniczkowym

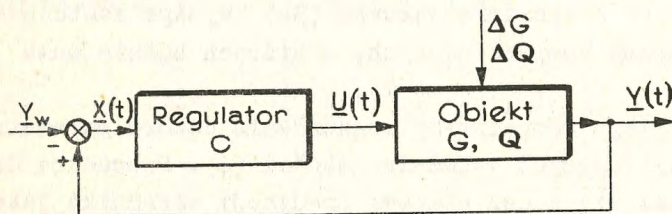
$$\frac{d\underline{Y}(t)}{dt} = Q \underline{Y}(t) + G \underline{U}(t) \quad (1)$$

w którym: $\underline{Y}(t)$ - wektor sygnałów wyjściowych n -wymiarowy; $\underline{U}(t)$ - wektor sygnałów sterujących m -wymiarowy; Q, G - macierze współczynników o wymiarowości $n \times n$ oraz $n \times m$ - odpowiednio,

Zakłada się, że proces sterowania jest całkowicie obserwowalny, a więc liczba składowych wektora stanu jest równa liczbie składowych sygnału wyjściowego.

Na obiekt działają zakłócenia multiplikatywne powodujące zmiany jego parametrów, czyli współczynników macierzy Q oraz G . O zakłóceniach tych zakłada się, że są wolnozmiennie, co pozwala traktować współczynniki macierzy Q i G jako wielkości stałe w pewnym przedziale czasu T . Jednakże są to wielkości niemierzalne bezpośrednio.

Sterowanie obiektem odbywa się w układzie zamkniętym, którego schemat przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat blokowy układu regulacji

Na układ działają wymuszenia skokowe \underline{Y}_w . Taki rodzaj zmian sygnału \underline{Y}_w może wynikać zarówno z zadania układu regulacji, jak i z dodania sygnału próbnego do stałego (lub wolnozmiennego) sygnału wejściowego. W szczególnym przypadku skokowe zmiany \underline{Y}_w mogą być spowodowane układem optymalizacji statycznej, który drogą szukania automatycznego wybiera optymalny punkt pracy na charakterystyce statycznej obiektu sterowania.

Przebiegi dynamiczne w układzie będziemy opisywać za pomocą wek-

tora stanu $\underline{X}(t) = \underline{Y}(t) - \underline{Z}_w$, przy czym $\underline{Z}_w = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{Y}(t)$.

Jakość przebiegów dynamicznych jest określona wartością funkcjonału $I(t_0)$ przy ruchu swobodnym od warunków początkowych $\underline{X}(t_0) = \underline{X}_0$

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\underline{X}^T(t) B \underline{X}(t) + \underline{U}^T(t) H U(t) \right] dt \quad (2)$$

przy czym B, H - macierze współczynników - kwadratowe, symetryczne, dodatnio określone, o wymiarowości $n \times n$ oraz $m \times m$, odpowiednio.

Zakładamy ponadto, że są spełnione warunki

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad (3a)$$

oraz

$$\underline{Z}_w = \underline{Y}_w \quad (3b)$$

co oznacza, że rozpatrywany układ jest układem *s t a b i l n y m*, a obiekt ma właściwości *a s t a t y c z n e*. W przypadku obiektów statycznych spełnienie warunku (3b) wymaga zastosowania specjalnych sprzężeń kompensacyjnych, o których będzie mowa w punkcie 3.9.

W dalszym ciągu rozpatrzmy zagadnienie doboru parametrów regulatora minimalizujących wskaźnik jakości (2). Procedura doboru parametrów składa się z dwu etapów: predykcji wskaźnika jakości oraz nastrajania parametrów drogą szukania automatycznego.

Wobec tego że minimalizacja wskaźnika jakości o kwadratowej funkcji kosztów przy obiekcie liniowym wymaga regulatora liniowego, przy poczynionych założeniach możemy w celu wyznaczenia optymalnych parametrów regulatora rozpatrywać przebiegi w układzie autonomicznym.

Konieczność uwzględnienia wymuszenia \underline{Y}_w powstaje przy rozpatrywaniu układów z obiektami statycznymi.

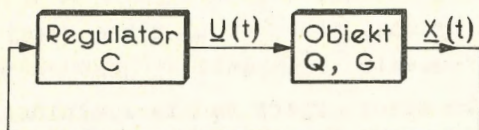
3. PREDYKCJA CAŁKOWEGO WSKAŹNIKA JAKOŚCI W UKŁADZIE AUTONOMICZNYM

Model rozpatrywanego obecnie układu przedstawiono na rys. 2.

Jak wiadomo /61, 84/, optymalizacja wskaźnika jakości (2) liniowego procesu sterowania (1) wymaga statycznego regulatora liniowego o równaniu

$$\underline{U}(t) = C \underline{X}(t) \quad (4)$$

w którym C - macierz współczynników o wymiarowości $m \times n$.



Rys. 2. Schemat blokowy autonomicznego układu regulacji

Równanie układu autonomicznego ma więc postać

$$\frac{d\underline{X}(t)}{dt} = Q^C \underline{X}(t) ; \quad \underline{X}(0) = \underline{X}_0 \quad (5)$$

gdzie $Q^C = Q + GC$.

Po podstawieniu (4) do (2) otrzymuje się

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \underline{X}(t)^T B^C \underline{X}(t) dt \quad (6)$$

gdzie $B^C = B + C^T H C$.

Całki (6) będziemy szukać w postaci formy kwadratowej współrzędnych wektora stanu

$$\int_{t_0}^{\infty} \underline{X}^T(t) B^C \underline{X}(t) dt = \underline{X}^T(t_0) A \underline{X}(t_0) \quad (7)$$

gdzie A - macierz współczynników, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona.

W dalszym ciągu wyznacza się współczynniki macierzy A , dla których równanie (7) jest spełnione. W tym celu zróżniczkuje się wzglę-

dem czasu t_0 obie strony równania (7). Po uwzględnieniu równania (5) otrzymuje się

$$-\underline{X}^T(t_0) B^C \underline{X}(t_0) = \underline{X}^T(t_0) \left[(Q^C)^T A + A Q^C \right] \underline{X}(t_0) \quad (8)$$

Macierz

$$(Q^C)^T A + A Q^C$$

jest macierzą symetryczną, jest bowiem równa swej macierzy transponowanej. A więc równanie (8) będzie spełnione dla wszystkich $\underline{X}(t_0)$ wtedy i tylko wtedy, kiedy będzie spełniona równość

$$-B^C = (Q^C)^T A + A Q^C \quad (9)$$

Współczynniki a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, macierzy A można wyznaczyć z zależności otrzymanych z przyrównania do siebie elementów o takich samych indeksach w równaniu macierzowym (9). Rozwiązujemy równanie (9) względem współczynników a_{ij} na zasadach przedstawionych w /8/. Równanie (9) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 - \begin{bmatrix} \underline{B}_1^C \\ \underline{B}_2^C \\ \dots \\ \underline{B}_i^C \\ \dots \\ \underline{B}_n^C \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} q_{11}^C \mathbf{I} & q_{21}^C \mathbf{I} & \dots & q_{n1}^C \mathbf{I} \\ q_{12}^C \mathbf{I} & q_{22}^C \mathbf{I} & \dots & q_{n2}^C \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1i}^C \mathbf{I} & q_{2i}^C \mathbf{I} & \dots & q_{ni}^C \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1n}^C \mathbf{I} & q_{2n}^C \mathbf{I} & \dots & q_{nn}^C \mathbf{I} \end{bmatrix} \right. + \\
 &+ \left. \begin{bmatrix} (Q^C)^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (Q^C)^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (Q^C)^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \\ \dots \\ \underline{A}_i \\ \dots \\ \underline{A}_n \end{bmatrix} \quad (10)
 \end{aligned}$$

przy czym: q_{ij}^c - elementy macierzy Q^c , $i, j = 1, 2, \dots, n$;

I - macierz jednostkowa n -tego rzędu;

$\underline{B}_i^c = (b_{i1}^c, b_{i2}^c, \dots, b_{in}^c)^T$ - wektor n -wymiarowy złożony z współczynników i -tego wiersza macierzy B^c ; $i = 1, 2, \dots, n$;

$\underline{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ - wektor n -wymiarowy złożony z współczynników i -tego wiersza macierzy A ; $i = 1, 2, \dots, n$).

Równanie (10) można zapisać w skrócie w postaci

$$-\underline{B}^c = [(Q^c)^T \times I + I \times (Q^c)^T] \underline{A} \quad (11)$$

gdzie: $\underline{B}^c = (\underline{B}_1^c, \underline{B}_2^c, \dots, \underline{B}_n^c)^T$

$\underline{A} = (\underline{A}_1^T, \underline{A}_2^T, \dots, \underline{A}_n^T)^T$

$(Q^c)^T \times I, I \times (Q^c)^T$ - iloczyny Kroneckera /8/.

Z (11) wynika bezpośrednio

$$\underline{A} = -[(Q^c)^T \times I + I \times (Q^c)^T]^{-1} \underline{B}^c \quad (12)$$

Układ równań (12) ma rozwiązania względem współczynników a_{ij} macierzy A wówczas, gdy pierwiastki równania charakterystycznego macierzy Q^c są różne od zera. Układ ten składa się z n^2 równań o n^2 niewiadomych. Jednak wobec tego, że macierze A i B^c są macierzami symetrycznymi ($a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij}^c = b_{ji}^c$), przed wykorzystaniem w praktyce równań (1) lub (11) do obliczeń a_{ij} należy z nich wyeliminować powtarzające się niewiadome. Najłatwiej tego dokonać przez napisanie równań (10) w postaci rozwiniętej, ujednolicenie indeksów przy takich samych niewiadomych, wyeliminowanie równań, w których z lewej strony znajduje się taki sam współczynnik b_{ij}^c oraz zgrupowanie współczynników po prawej stronie równań (10) przy takich samych niewiadomych a_{ij} . W ten sposób z układu równań o n^2 niewiadomych przechodzi się na układ o $n(n+1)/2$ niewiadomych.

Dla macierzy A , której współczynniki są określone równaniem (12), dla dowolnych czasów t_0 obowiązuje równanie (7), które po

uwzględnieniu (6) można napisać w postaci

$$I(t_0) = \underline{X}^T(t_0) A \underline{X}(t_0) \quad (13)$$

Z wzoru (13) wynika, że przy przyjętych założeniach całkowity wskaźnik jakości o kwadratowej funkcji kosztów może być wyznaczony zarówno przez całkowanie w przedziale od $t = t_0$ do nieskończoności, jak i bezpośrednio w chwili t_0 na podstawie współrzędnych wektora stanu $\underline{X}(t_0)$. Jednakże, jeżeli wyznaczanie wskaźnika jakości za pośrednictwem całkowania wymaga jedynie mierzenia sygnałów sterujących i współrzędnych stanu, to obliczanie tego wskaźnika na podstawie pomiaru sygnałów wyjściowych w chwili t_0 wymaga również znajomości parametrów obiektu Q i G oraz regulatora C , gdyż współczynniki macierzy A są na ogół bardzo złożonymi funkcjami tych parametrów. W dalszym ciągu, gdy będziemy chcieli podkreślić ten fakt, będziemy używać oznaczenia $A = A(Q, G, C)$.

4. ALGORYTM ADAPTACJI

Rozpatrzmy obecnie możliwość zastosowania przedstawionej uprzednio metody predykcji całkowego wskaźnika jakości do sterowania obiektami o niepełnej informacji początkowej. W takim przypadku nie można korzystać bezpośrednio z wzoru (13), gdyż parametry obiektu są nieznane. W związku z tym można by początkowo identyfikować te parametry, a następnie obliczać wskaźnik jakości. Jednak ten sposób postępowania jest kłopotliwy, jeżeli uwzględnić, że zależności współczynników macierzy A od parametrów obiektu (wzór (12)) są bardzo skomplikowane. Dlatego przedstawimy metodę bezpośrednią obliczania wskaźnika jakości, nie wymagającą uprzedniej identyfikacji parametrów obiektu.

Równanie (7) można przepisać dla chwil początkowych $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$. Z równań takiego typu dla przyrostów czasu $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ wynika

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{X}^T(t) B^C \underline{X}(t) dt =$$

$$= \underline{X}^T(t_{k+1}) A \underline{X}(t_{k+1}) - \underline{X}^T(t_k) A \underline{X}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n(n+1)/2 \quad (14a)$$

lub

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\underline{X}^T(t) B \underline{X}(t) + \underline{U}^T(t) H \underline{U}(t) \right] dt =$$

$$= \underline{X}^T(t_{k+1}) A \underline{X}(t_{k+1}) - \underline{X}^T(t_k) A \underline{X}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n(n+1)/2 \quad (14b)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ $n(n+1)/2$ równań. Lewe strony tych równań można uzyskać przez całkowanie w przedziałach czasu Δt zadanej funkcji kosztów. Po prawej stronie równań (14) oprócz elementów macierzy A , które są funkcjami nieznanymi parametrów obiektu, figurują współrzędne wektora stanu $\underline{X}(t)$ w odpowiednich chwilach; wartości te można mierzyć bezpośrednio. Tak więc po dokonaniu właściwych pomiarów i po podstawieniu uzyskanych wyników w równania (14) otrzymuje się układ $n(n+1)/2$ algebraicznych równań liniowych, z których można wyznaczyć niewiadome a_{ij} .

Podstawiając, wyznaczone przez rozwiązanie układu równań liniowych współczynniki a_{ij} do zależności (13), można otrzymać wartość wskaźnika jakości dla dowolnych warunków początkowych $\underline{X}(t_0)$ niezależnie od tego, przy jakich warunkach początkowych współczynniki te były wyznaczone. Zwłaszcza np. dla warunków początkowych $\underline{X}(t_0) = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ otrzymuje się

$$I(t_0) = a_{11} \quad (15a)$$

Algorytm adaptacji w tym przypadku sprowadza się więc do obliczenia wartości a_{11} , a następnie do wyznaczenia drogą szukania automatycznego optymalnych parametrów regulatora C^0 , dla których obowiązuje

$$a_{11}(C, Q, G) \Big|_{C=C^0} = \min_C a_{11} \quad (15b)$$

Należy jednak pamiętać, że równania (13) - (15) obowiązują jedynie dla układu stabilnego. W związku z powyższym obszar zmian parametrów regulatora powinien być ograniczony warunkami stabilności układu (5).

Można łatwo udowodnić, że funkcjonal (2) ma tylko jedno ekstremum w obszarze parametrów C przy zachowaniu warunków stabilności układu.

Podstawą dowodu jest twierdzenie, że istnieje tylko jedno sterowanie, które minimalizuje funkcjonal (2) /60/, równe

$$\underline{U}^0(t) = C^0 \underline{X}(t) \quad (16a)$$

Załóżmy, że istnieje inny regulator, opisany macierzą C^{0*} , który dla określonego $\underline{X}(t) = \underline{X}^*(t)$ minimalizuje funkcjonal (2). Wobec tego musi być spełnione równanie

$$\underline{U}^0(t) = C^{0*} \underline{X}^*(t) \quad (16b)$$

Wektor $\underline{X}^*(t)$ musi jednocześnie spełniać równanie (16a), gdyż obowiązuje ono dla wszystkich $\underline{X}(t)$. Wobec tego z (16a) dla $\underline{X}(t) = \underline{X}^*(t)$ i z (16b) wynika

$$\underline{U}^0(t) = (C^0 - C^{0*}) \underline{X}^*(t)$$

a więc dla $\underline{X}^*(t) \neq 0$ musi być spełnione równanie

$$C^0 = C^{0*} \quad (17)$$

Dzięki temu, że funkcjonal (2) ma tylko jedno ekstremum w obszarze parametrów regulatora C , do wyznaczenia tego ekstremum można stosować dowolną spośród znanych metod szukania automatycznego, jak np. metodę Gaussa-Seidla, metodę gradientu lub największego spadku.

Za pomocą przedstawionej metody wskaźnik jakości może być wyznaczony w przedziale czasu

$$T_A = \frac{n(n+1)}{2} \Delta t + \tau$$

przy czym τ - czas rozwiązania układu $n(n+1)/2$ algebraicznych równań liniowych.

Dobór przedziałów czasu Δt w rozpatrywanym przypadku zależy przede wszystkim od dokładności pomiaru współrzędnych stanu, od dokładności, z jaką dokonuje się operacji mnożenia w równaniu (14), oraz od szybkości zmian parametrów obiektu. Z jednej strony, im dłuższy jest ten czas, tym mniejszą rolę odgrywają błędy pomiarowe; z drugiej zaś strony, im mniejszy jest przedział czasu Δt , tym bardziej uzasadnione jest założenie o stałości parametrów obiektu podczas wyznaczania wskaźnika jakości.

W wielu przypadkach parametry obiektu zmieniają się dostatecznie wolno i ciągle zakłócenie procesu przez zmiany nastaw regulatora nie jest potrzebne. W omawianym układzie można łatwo tego uniknąć.

Założmy, że regulator w procesie szukania w chwili t_r nastroił się optymalnie. Oznaczmy macierz optymalnych parametrów regulatora symbolem $C^0(t_r)$, a obliczony przy tych parametrach regulatora wskaźnik jakości dla standardowych warunków początkowych - symbolem $I_S^0(t_r)$.

W przypadku gdy dla całego obszaru zmienności parametrów regulatora wskaźnik jakości ma tylko jedno ekstremum względem parametrów obiektu, stopień rozstrojenia się układu od optymalnego może być określony wielkością

$$\Delta I_S = I_S(t) - I_S^0(t_r), \quad t > t_r \quad (18)$$

przy czym $I_S(t)$ - wartość wskaźnika jakości dla standardowych warunków początkowych przy parametrach regulatora $C^0(t_r)$, obliczona dla bieżącej chwili czasu t .

Jeżeli parametry obiektu w przedziale czasu $(t - t_r)$ nie uległy zmianie, oba składniki w (18) są sobie równe. Przekroczenie przez ΔI_S pewnej wartości progowej świadczy o tym, że nastąpiły istotne zmiany parametrów obiektu. Należy wtedy przystąpić do ponownego nastrojania układu. W ten sposób można uniknąć ciągłych,

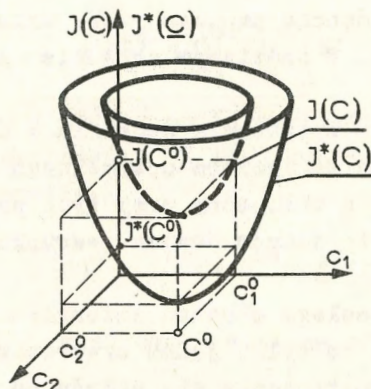
często niepotrzebnych zmian parametrów regulatora i związanych z tym strat.

5. INWARIANTNOŚĆ PARAMETRÓW REGULATORA OPTIMALNEGO WZGLĘDEM WSPÓŁCZYNNIKÓW FUNKCJI KOSZTÓW

Proces adaptacji opisany w pktcie 4 ma na celu takie nastrojenie regulatora, żeby była spełniona zależność

$$\frac{\partial I(C)}{\partial c_{ij}} = 0 ; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array} \quad (19)$$

Macierz parametrów regulatora spełniających tę zależność oznaczono symbolem C^0 .



Rys. 3. Charakterystyki dwóch wskaźników jakości o jednakowych parametrach punktu ekstremalnego

Efekt adaptacji pozostanie bez zmiany, jeżeli zamiast ekstremalizacji wskaźnika jakości $I(C)$ będzie ekstremalizowany wskaźnik zastępczy $I^*(C)$, dla którego jest spełniony warunek (rys. 3)

$$\left. \frac{\partial I^*(C)}{\partial c_{ij}} \right|_{C=C^0} = 0 , \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array} \quad (20)$$

W związku z tą możliwością powstaje problem doboru najbardziej odpowiedniego - z punktu widzenia realizacji układu pomiarowego - zastępczego wskaźnika jakości.

Macierz parametrów regulatora optymalnego w rozpatrywanym przypadku jest określona zależnością otrzymaną przez R.E. Kalmana /60/

$$C^0 = -H^{-1}A^0G \quad (21)$$

w której $A^0 = A(Q, G, C^0)$ spełnia warunek

$$\min_C I(C, t_0) = \underline{X}^T(t_0) A^0 \underline{X}(t_0) \quad (22)$$

Rozpatrzmy obecnie przypadek szczególny, a mianowicie obiekt sterowania o jednym wejściu przy wskaźniku jakości

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\underline{X}_p^T(t) B \underline{X}_p(t) + h^2 u^2(t) \right] dt \quad (23)$$

gdzie $\underline{X}_p(t)$ - wektor fazowych współrzędnych stanu.

Oznacza to, że dla układu autonomicznego o równaniu

$$\ddot{x}^{(n)} + \alpha_n \dot{x}^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$$

składowymi wektora stanu są współrzędne

$$\begin{aligned} x_{1f} &= x \\ x_{2f} &= \dot{x} \\ &\dots \dots \dots \\ x_{if} &= x^{(i-1)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$x_{nf} = -[\alpha_n x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x]$$

W takim przypadku obowiązuje

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{n-1} & q_{nn} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{bmatrix} \quad (25)$$

Optymalny regulator jest określony /60/ przez wektor parametrów

$$\underline{c}^0 = -\frac{1}{h^2} A^0 \underline{g}$$

lub po uwzględnieniu (25)

$$\underline{c}^0 = -\frac{g}{h^2} \underline{A}_n^0 \quad (26)$$

gdzie $\underline{A}_n^0 = (a_{1n}^0, a_{2n}^0, \dots, a_{nn}^0)^T$.

Z drugiej strony po podstawieniu (25) do (9) otrzymuje się następujące zależności (dodatek D.I)

$$-b_{ij}^c = a_{j,i-1} + a_{i,j-1} + q_{nj}^c a_{in} + q_{ni}^c a_{jn}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

Zgodnie z (26), w rozpatrywanym obecnie przypadku, do wyznaczenia parametrów regulatora optymalnego konieczna jest jedynie znajomość n elementów macierzy A^0 , a mianowicie $a_{1n}^0, a_{2n}^0, \dots, a_{nn}^0$, wchodzących w skład wektora \underline{A}_n^0 .

Z (27) wynika, że do wyznaczenia tych elementów niepotrzebne są równania, w których z prawej strony znajdują się współczynniki $b_{k,k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), gdyż elementy a_{kk} wchodzą tylko do tych równań, a ich znajomość nie jest potrzebna do wyznaczenia \underline{A}_n^0 .

Wynika z tego wniosek, że optymalne parametry regulatora są inwariantne w odniesieniu do elementów $b_{k,k+1}$ macierzy określającej funkcję kosztów.

Na przykład dla układu drugiego rzędu C^0 jest inwariantne w stosunku do b_{12} , dla układu trzeciego rzędu - w stosunku do b_{12} oraz b_{23} i tak dalej.

Ta interesująca właściwość ma duży sens praktyczny, gdyż umożliwia zmniejszenie liczby członów mnożących przy pomiarze wskaźnika jakości w układach adaptacyjnych. Można bowiem optymalizować układ nie na podstawie pomiaru rzeczywistego wskaźnika jakości, lecz na podstawie wskaźnika zastępczego (rys. 3) prowadzącego do tego samego co wskaźnik rzeczywisty optymalnego algorytmu sterowania.

Minimalna liczba elementów mnożących przy wyznaczaniu wskaźnika jakości jest wymagana w przypadku, gdy składnik $\underline{x}^T(t) B \underline{x}(t)$ w funkcji kosztów jest kwadratem sumy.

Warunki tego, aby forma kwadratowa była kwadratem sumy, czyli

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right)^2 \quad (28)$$

mają postać

$$\Delta_1 = 0, \quad 1 = 2, 3, \dots, n \quad (29)$$

gdzie Δ_1 - główne podwyznaczniki macierzy współczynników pełnej formy kwadratowej. Wobec tego że liczba warunków (29) równa się $(n - 1)$, to przez odpowiedni wybór $(n - 1)$ współczynników $b_{k'k+1}$ można wskaźnik jakości układu rzeczywistego (23) zamienić wskaźnikiem zastępczym o postaci

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_{i_f}(t) \right]^2 + h^2 u^2(t) \right\} dt \quad (30)$$

gdzie $\beta_i = \sqrt{b_{ii}}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

W ten sposób w celu doboru optymalnych parametrów regulatora można posługiwać się wskaźnikiem jakości zastępczym, którego pomiar wymaga jedynie dwóch kwadratorów, podczas gdy pomiar wskaźnika jakości w przypadku ogólnym wymaga $(n + 1)$ kwadratorów oraz $[(n + 1)$

$\cdot(n - 2)]/2$ członów mnożących.

Na przykład dla układu drugiego rzędu o wskaźniku jakości

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} [b_{11}x_{1f}^2(t) + 2b_{12}x_{1f}(t)x_{2f}(t) + b_{22}x_{2f}^2(t) + h^2u^2(t)] dt \quad (31)$$

optymalizacja może być prowadzona na podstawie wskaźnika zastępczego

$$I^*(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \left[\sqrt{b_{11}}x_{1f}(t) + \sqrt{b_{22}}x_{2f}(t) \right]^2 + h^2 u^2(t) \right\} dt \quad (32)$$

Rozpatrzmy obecnie przykład, gdy współrzędne stanu nie są współzrędnymi fazowymi.

Założmy, że w układzie o wskaźniku jakości

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\underline{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{B} \underline{\mathbf{X}}(t) + h^2 u^2 \right] dt \quad (33)$$

dla współrzędnych fazowych $\underline{\mathbf{X}}_f(t)$ i współrzędnych stanu $\underline{\mathbf{X}}(t)$ istnieje wzajemnie jednoznaczna zależność

$$\underline{\mathbf{X}}(t) = \alpha \underline{\mathbf{X}}_f(t) \quad (34)$$

gdzie α - macierz współczynników o wymiarowości $n \times n$ - nieosobliwa.

Zgodnie z (34) obowiązuje

$$\underline{\mathbf{X}}^T(t) \mathbf{B} \underline{\mathbf{X}}(t) = \underline{\mathbf{X}}_f^T(t) \alpha^T \mathbf{B} \alpha \underline{\mathbf{X}}_f(t) \quad (35)$$

Po podstawieniu (35) do (33) otrzymuje się

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[\underline{\mathbf{X}}_f^T(t) \alpha^T \mathbf{B} \alpha \underline{\mathbf{X}}_f(t) + h^2 u^2 \right] dt \quad (36)$$

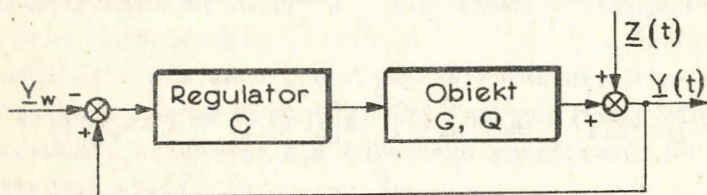
Optymalne parametry regulatora są inwariantne względem elementów $(b_{k,k+1})_f$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$ macierzy

$$B_f = \alpha^T B \alpha \quad (37)$$

uczestniczącej we wskaźniku jakości (36). W tym więc przypadku wykorzystanie zastępczego wskaźnika jakości ma sens jedynie wtedy, kiedy jakieś współczynniki macierzy B obliczone na podstawie równania macierzowego (37) są funkcjami jedynie współczynników $(b_{k,k+1})_f$ macierzy B_f . Można bowiem wtedy dobrać je w sposób najdogodniejszy.

6. ESTYMACJA WARTOŚCI WSKAŹNIKA JAKOŚCI W UKŁADZIE NIEAUTONOMICZNYM

Rozpatrujemy obecnie układ, którego schemat przedstawiono na rys. 4. Nie czynimy przy tym założeń odnośnie do astatycznych właściwości obiektu sterowania.



Rys. 4. Schemat blokowy nieautonomicznego układu regulacji

W sygnale wyjściowym $\underline{Y}(t)$ mierzonym bezpośrednio jest zawarta składowa $\underline{X}(t)$, która nas interesuje i która stanowi rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego (5), i składowa $\underline{X}_w(t)$ wynikająca z działania na układ wymuszeń \underline{Y}_w oraz $\underline{Z}(t)$

$$\underline{Y}(t) = \underline{X}(t) + \underline{X}_w(t) \quad (38)$$

Z kolei w składowej $\underline{X}_w(t)$ jest zawarta składowa stała \underline{Z}_w i składowa zmienna $\underline{\tilde{Z}}(t)$:

$$\underline{X}_w(t) = \underline{Z}_w + \underline{\tilde{Z}}(t) \quad (39)$$

O $\underline{\tilde{Z}}(t)$ zakładamy, że jest to wektor, którego składowe $\tilde{z}_1(t)$, $\tilde{z}_2(t)$, ..., $\tilde{z}_n(t)$ są realizacjami procesów przypadkowych, stacjonarnych, ergodycznych, o zerowej wartości średniej

$$M\{\tilde{z}_i(t)\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

i funkcji korelacji

$$M\{z_i(t_k)z_j(t_l)\} = R_{ij}(t_k - t_l), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (41)$$

W dalszym ciągu sprawdzimy możliwość predykcji wskaźnika jakości (6) w układzie nieautonomicznym, przedstawionym na rys. 4.

Po podstawieniu (38) do (14) otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\underline{Y}(t) - \underline{X}_w(t)]^T B^C [\underline{Y}(t) - \underline{X}_w(t)] dt = \\ & = [\underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{X}_w(t_{k+1})]^T A [\underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{X}_w(t_{k+1})] + \\ & - [\underline{Y}(t_k) - \underline{X}_w(t_k)]^T A [\underline{Y}(t_k) - \underline{X}_w(t_k)] \end{aligned} \quad (42)$$

Równanie (42) po uwzględnieniu (39) i dokonaniu odpowiednich przekształceń przyjmie postać

$$\begin{aligned} \Delta I_k &= \underline{Y}^T(t_{k+1}) A \underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{Y}^T(t_k) A \underline{Y}(t_k) + \\ & + \underline{D}^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{Y}(t) dt + M^T \Delta \underline{Y}_k + \underline{\xi} + F_k(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) \end{aligned} \quad (43)$$

przy czym: $\underline{D} = 2B^C \underline{Z}_w$, $\underline{M} = -2A \underline{Z}_w$, $\underline{\xi} = \underline{Z}_w^T B^C \underline{Z}_w \Delta t$,

$$\Delta I_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{Y}^T(t) B^C \underline{Y}(t) dt \quad (44)$$

$$\Delta \underline{Y}_k = \underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{Y}(t_k)$$

$$F_k(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{N}^T(t) B^C \underline{N}(t) dt + \\ - \left[\underline{N}^T(t_{k+1}) A \underline{N}(t_{k+1}) - \underline{N}^T(t_k) A \underline{N}(t_k) \right] \quad (45)$$

$$\underline{N}(t) = \underline{X}(t) + \underline{\tilde{Z}}(t) \quad (46)$$

Gdy $\underline{Z}(t) = 0$, wówczas i $F_k(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) = 0$ i dla odpowiedniej liczby przedziałów czasu Δt można ułożyć odpowiednią liczbę równań typu (43), wyznaczyć niewiadome, którymi są w tym przypadku nie tylko współczynniki macierzy A , lecz również składowe wektorów \underline{D} i \underline{M} oraz wartość $\underline{\xi}$.

Gdy natomiast $\underline{Z}(t) \neq 0$, dokładne wyznaczenie interesujących nas współczynników z równań typu (42) nie jest możliwe, albowiem do każdego równania ułożonego dla kolejnego przedziału Δt dochodzi nowa niewiadoma $F_k(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X})$.

W związku z powyższym możliwa jest jedynie estymacja niewiadomych współczynników na podstawie zależności

$$\Delta I_k = \underline{Y}^T(t_{k+1}) \hat{A} \underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{Y}^T(t_k) \hat{A} \underline{Y}(t_k) + \\ + \hat{\underline{D}}^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{Y}(t) dt + \hat{\underline{M}}^T \Delta \underline{Y}_k + \hat{\underline{\xi}} \quad (47)$$

gdzie: \hat{A} , \hat{D} , \hat{M} , $\hat{\xi}$ - estymatory A , D , M , $\xi + M\{F_k(\tilde{Z}, X)\}$ - odpowiednio.

Oczywiście, w tym przypadku liczba równań, które należy uwzględnić, musi być większa niż liczba niewiadomych, co powoduje znaczne zwiększenie czasu wyznaczania wskaźnika jakości.

Estymowanych wartości współczynników można szukać np. z warunku minimalizacji sumy kwadratów:

$$\min_{A, D, M, \xi} \sum_{k=1}^N \left[\Delta I_k - \varepsilon_k(A, D, M, \xi) \right]^2 = \sum_{k=1}^N \left[\Delta I_k - \varepsilon_k(A, D, M, \xi) \right]^2 \quad (48)$$

przy czym N - liczba równań wykorzystanych do estymacji,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(\hat{A}, \hat{D}, \hat{M}, \hat{\xi}) &= \underline{Y}^T(t_{k+1}) \hat{A} \underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{Y}(t_k) \hat{A} \underline{Y}(t_k) + \\ &+ \hat{D}^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{Y}(t) dt + \hat{M}^T \Delta \underline{Y}_k + \hat{\xi} \end{aligned} \quad (49)$$

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, iż $F_k(\tilde{Z}, X)$ ma bardzo złożony rozkład gęstości prawdopodobieństwa, zależny od czasu t_k i t_{k+1} .

7. WYBÓR OPTIMALNEGO PRZEDZIAŁU CZASU CAŁKOWANIA

W układzie, na który działają addytywne zakłócenia przypadkowe, wybór przedziału czasu $\Delta t = t_k - t_{k+1}$ jest uwarunkowany nie tylko dokładnością pomiarów, jak to można przyjąć przy rozpatrywaniu modelu układu zdeterminowanego, lecz i dokładnością estymacji wskaźnika jakości.

Pewien pogląd na dokładność estymacji może dać wielkość

$$\delta(\Delta t) = \frac{\sigma^2 \left[M \left\{ F_0(\tilde{Z}, X) | t \right\} \right]_{\underline{X}_0}}{M \left\{ M \left\{ \Delta I_0 | t \right\} \right\}_{\tilde{Z} \left[\underline{X}_0 \right]}} \quad (50)$$

przy czym

$$F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) = F_k(\tilde{Z}, \underline{X}) \Big|_{t_k = 0, t_{k+1} = \Delta t} \quad (51)$$

$$\Delta I_0 = \Delta I_k \Big|_{t_k = 0, t_{k+1} = \Delta t} \quad (52)$$

$$\underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) | t \} = \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) p(\underline{X}_0) d\underline{X}_0 \quad (53)$$

$$\underline{M}_{\underline{X}_0} \{ I_0 | t \} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta I p(\underline{X}_0) d\underline{X}_0 \quad (54)$$

$$\underline{M}_{\tilde{Z}} \left\{ \underline{M}_{\underline{X}_0} \{ I_0 | t \} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{M}_{\underline{X}_0} \{ \Delta I_0 | t \} p[\tilde{Z}(t) | t] d[\tilde{Z}(t) | t] \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left[\underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) | t \} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) | t \} + \right. \\ &- \left. \underline{M}_{\tilde{Z}} \left\{ \underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) | t \} \right\} \right]^2 p[\tilde{Z}(t) | t] d[\tilde{Z}(t) | t] = \\ &= \underline{M}_{\tilde{Z}} \left\{ \underline{M}_{\underline{X}_0}^2 \{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) | t \} \right\} - \underline{M}_{\tilde{Z}}^2 \left\{ \underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) | t \} \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

Zakłada się przy tym, że warunki początkowe \underline{X}_0 są zmiennymi przypadkowymi o rozkładzie normalnym i o zerowej wartości średniej

$$\underline{M} \{ \underline{X}_0 \} = 0 \quad (57)$$

Zakłada się ponadto niezależność procesów $\underline{X}(t)$ i $\tilde{Z}(t)$

$$M\{\underline{X}(t) \underline{\tilde{Z}}(t) | t\} = M\{\underline{X}(t) | t\} M\{\underline{Z}(t) | t\} \quad (58)$$

Przypomina się, że $\underline{X}(t)$ jest rozwiązaniem liniowego jednorodnego równania różniczkowego (5), które można przedstawić w postaci

$$\underline{X}(t) = \underline{X}_0 \exp(Q_c t) \quad (59)$$

gdzie $\exp(Q_c t)$ - macierz fundamentalna rozwiązań równania (5).
Zgodnie z (59) obowiązuje

$$M\{\underline{X}(t) | t\} = M\{\underline{X}_0\} \exp Q_c t \quad (60)$$

Z (57), (58) i (60) wynika

$$M\{\underline{X}(t) \underline{\tilde{Z}}(t) | t\} = 0 \quad (61)$$

Oblicza się początkowo licznik wielkości $\delta(\Delta t)$. W tym celu należy określić

$$M\left\{F_0(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) | t\right\}_{\underline{X}_0} \quad \text{oraz} \quad M\left\{M\left\{F_0(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) | t\right\}\right\}_{\underline{\tilde{Z}}(\underline{X}_0)}$$

Z (45) po uwzględnieniu (46) oraz (51) wynika

$$F_0(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) = \int_0^{\Delta t} [2\underline{X}(t) + \underline{\tilde{Z}}(t)]^T B^C \underline{\tilde{Z}}(t) dt + \\ - \underline{\tilde{Z}}^T(\Delta t) A [2\underline{X}(\Delta t) + \underline{\tilde{Z}}(\Delta t)] + \underline{\tilde{Z}}^T(0) A [2\underline{X}(0) + \underline{\tilde{Z}}(0)] \quad (62)$$

Po uśrednieniu (62) względem \underline{X}_0 i uwzględnieniu równania (61) otrzymuje się

$$\underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\underline{Z}, \underline{X}) | t \} =$$

$$= \int_0^{\Delta t} \underline{Z}^T(t) B^C \underline{Z}(t) dt - \left[\underline{Z}^T(\Delta t) A \underline{Z}(\Delta t) - \underline{Z}^T(0) A \underline{Z}(0) \right] \quad (63)$$

Uśrednienie (63) po $\underline{Z}(t)$ daje w wyniku

$$\underline{M}_{\underline{X}_0} \left\{ \underline{M}_{\underline{Z}} \{ F_0(\underline{Z}, \underline{X}) | t \} \right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^C R_{ij}(0) \Delta t \quad (64)$$

Po podniesieniu (63) do kwadratu i uśrednieniu po $\underline{Z}(t)$ otrzymuje się (zoh. dodatek D.II).

$$\begin{aligned} \underline{M}_{\underline{X}_0} \left\{ \underline{M}_{\underline{Z}}^2 \{ F_0(\underline{Z}, \underline{X}) | t \} \right\} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ b_{ij}^C b_{kl}^C [R_{ij}(0) R_{kl}(0) \Delta t^2 + \right. \\ &+ 2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} R_{ij}(t - \tau) R_{kl}(t - \tau) dt d\tau] + \\ &+ 4a_{ij} a_{kl} [R_{ij}(0) R_{kl}(0) - R_{ij}(\Delta t) R_{kl}(\Delta t)] + \\ &+ 4a_{ij} b_{kl}^C \left. \int_0^{\Delta t} [R_{ij}(t) R_{kl}(t) - R_{ij}(t - \Delta t) R_{kl}(t - \Delta t)] dt \right\} \quad (65) \end{aligned}$$

Z (64) i (65) wynika

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left[\underline{M}_{\underline{X}_0} \{ F_0(\underline{Z}, \underline{X}) | t \} \right] &= \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ 2b_{ij}^C b_{kl}^C \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} R_{ij}(t - \tau) R_{kl}(t - \tau) dt d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$+ 4a_{ij}a_{kl} [R_{ij}(0)R_{kl}(0) - R_{ij}(\Delta t)R_{kl}(\Delta t) + \\ + 4a_{ij}b_{kl}^c \int_0^{\Delta t} [R_{ij}(t)R_{kl}(t) - R_{ij}(t - \Delta t)R_{kl}(t - \Delta t)] dt \} \quad (66)$$

Następnie oblicza się mianownik wielkości $\delta(\Delta t)$. Po uwzględnieniu w (44) zależności (52) i (38), (39) oraz uśrednieniu otrzymuje się

$$\underline{\tilde{z}} \left\{ \underline{\tilde{M}} \left\{ \underline{\Delta I}_0 | t \right\} \right\} = \underline{\tilde{z}} \left\{ \underline{\tilde{M}} \left\{ \underline{\tilde{X}}_0 \left\{ \int_0^{\Delta t} \underline{Y}^T(t) B^C \underline{Y}(t) dt \right\} \right\} \right\} = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \left[\underline{\tilde{M}} \left\{ \underline{\tilde{X}}_0 \left\{ \int_0^{\Delta t} x_i(t)x_j(t) dt + R_{ij}(0) \Delta t + z_{wi}z_{wj} \Delta t \right\} \right\} \right] \quad (67)$$

przy czym z_{wi} ($i = 1, 2, \dots, n$) - składowe wektora \underline{z}_w .

Całkę $\int_0^{\Delta t} x_i(t)x_j(t) \cdot dt$ oblicza się w sposób przybliżony. W tym celu zakłada się, że w przedziale Δt wielkość $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, zmienia się liniowo, czyli

$$x_i(t) \approx \gamma_i t, \quad 0 < t < \Delta t \quad (68)$$

przy czym

$$\gamma_i = \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} \quad (69)$$

Z (5) otrzymuje się

$$\gamma_i = \sum_{k=1}^n q_{ki}^c x_k(0) \quad (70)$$

Tak więc

$$\int_0^{\Delta t} x_i(t)x_j(t)dt \sim \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n q_{li}^c q_{kj}^c x_l(0)x_k(0) \int_0^{\Delta t} t^2 dt =$$

$$= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n q_{li}^c q_{kj}^c x_l(0)x_k(0) \frac{\Delta t^3}{3} \quad (71)$$

Po podstawieniu (71) do (67) otrzymuje się

$$\frac{M}{Z} \left\{ \frac{M}{X_0} \left\{ \Delta I_0 \right\} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^c \left[\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n q_{li}^b q_{kj}^c S_{kl} \frac{\Delta t^2}{3} + R_{ij}(0) + z_{wi} z_{wj} \right] \Delta t \quad (72)$$

gdzie S_{kl} - odpowiednie elementy macierzy kowariancji wektora X_0 .

Ostatecznie, po podstawieniu (66) i (72) do (50) otrzymuje się interesującą nas wielkość $\delta(\Delta t)$.

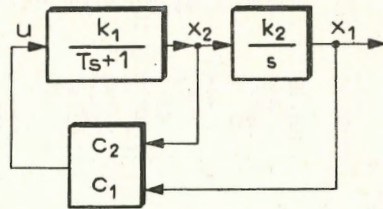
Dla konkretnego wykorzystania wielkości $\delta(\Delta t)$ należy więc znać macierz kowariancji warunków początkowych X_0 i funkcje korelacji zakłócenia $\tilde{z}(t)$. Znając te charakterystyki można wyznaczyć optymalną wartość przedziału całkowania Δt z warunku minimalizacji $\delta(\Delta t)$. W tym celu należy znaleźć wartość Δt z warunku

$$\frac{\partial \delta(\Delta t)}{\partial (\Delta t)} = 0 \quad (73)$$

Otrzymana z zależności (73) wielkość $\Delta^0 t$ będzie funkcją parametrów obiektu i regulatora. Wobec tego dla wyznaczenia konkretnej wartości $\Delta^0 t$ otrzymany wynik można uśrednić względem parametrów obiektu przyjmując, że regulator nastrojony jest optymalnie, zgodnie z zależnością (21).

8. PRZYKŁAD

Jako ilustrację przeprowadzonych rozważań rozpatrzmy przykład serwomechanizmu rzędu drugiego. Obiekt sterowania stanowi szeregowo połączenie członu inercyjnego o wzmacnieniu k_1 i stałej czasowej T oraz członu całkującego o wzmacnieniu k_2 (rys. 5).



Rys. 5. Schemat blokowy serwomechanizmu rzędu drugiego

Równania opisujące obiekt, w przyjętej przez nas symbolice, mają postać

$$\frac{dx_1}{dt} = q_{12}x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = q_{22}x_2 + gu \quad (74)$$

przy czym

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (75)$$

$$q_{12} = k_2, \quad q_{22} = -\frac{1}{T}, \quad g = \frac{k_1}{T} \quad (76)$$

Zakłada się, że wskaźnik jakości, który należy minimalizować doбором parametrów regulatora, jest wyrażony zależnością

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + h^2u^2) dt \quad (77)$$

Zgodnie z (12) wektor \underline{A} jest wyrażony wzorem

$$\underline{A} = - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ gc_1 & q_{22}+gc_2 \end{bmatrix}^T \times I + I \times \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ gc_1 & q_{22}+gc_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{B}_1^c \\ \underline{B}_2^c \end{bmatrix} \quad (78)$$

w którym: $\underline{B}_1^c = (b_{11} + h^2 c_1^2 ; b_{12} + h^2 c_1 c_2)^T ;$

$$\underline{B}_2^c = (b_{12} + h^2 c_1 c_2 ; b_{22} + h^2 c_2^2)^T .$$

Po obliczeniu ilorazów Kroneckera, zgodnie z (10) otrzymuje się

$$\underline{A} = - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & gc_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gc_1 \\ q_{12} & 0 & q_{22}+gc_2 & 0 \\ 0 & q_{12} & 0 & q_{22}+gc_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & gc_1 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{22}+gc_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gc_1 \\ 0 & 0 & q_{12} & q_{22}+gc_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \times \begin{bmatrix} b_{11} + h^2 c_1^2 \\ b_{12} + h^2 c_1 c_2 \\ b_{12} + h^2 c_1 c_2 \\ b_{22} + h^2 c_2^2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Po zsumowaniu macierzy w (70), po uwzględnieniu, że $a_{12} = a_{21}$, $b_{12}^c = b_{21}^c$, oraz po odwróceniu macierzy otrzymuje się

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2gc_1q_{12}(q_{22} + gc_2)} \begin{bmatrix} q_{22} + gc_2 - q_{12}gc_1; & -2gc_1(q_{22} + gc_2); & g^2c_1^2 \\ -q_{12}(q_{22} + gc_2); & 0; & 0 \\ q_{12}^2; & 0; & -q_{12}gc_1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} b_{11} + h^2c_1^2 \\ b_{12} + h^2c_1c_2 \\ b_{22} + h^2c_2^2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Z (80) wynika

$$a_{11} = \frac{[(q_{22} + gc_2)^2 - q_{12}gc_1](b_{11} + h^2c_1^2) -$$

$$\frac{-2gc_1(q_{22} + gc_1)(b_{12} + h^2c_1c_2) + gc_1^2(b_{22} + h^2c_2^2)}{2gc_1q_{12}(q_{22} + gc_2)}$$

$$a_{12} = - \frac{b_{11} + h^2c_1^2}{2gc_1} \quad (81)$$

$$a_{22} = \frac{q_{12}(b_{11} + h^2c_1^2) - gc_1(b_{22} + h^2c_2^2)}{2gc_1(q_{22} + gc_2)}$$

Zgodnie z (26), optymalne parametry regulatora są określone zależnością

$$c_1^o = \frac{b_{11} + h^2(c_1^o)^2}{2c_1^o h^2}$$

$$c_2^o = \frac{gc_1^o(b_{22} + h^2c_2^o) - q_{12}[b_{11} + h^2(c_1^o)^2]}{2h^2c_1^o(q_{22} + gc_2^o)} \quad (82)$$

skąd wynika

$$c_1^o = -\frac{1}{h} \sqrt{b_{11}}, \quad c_2^o = -\frac{q_{22}}{g} - \sqrt{\frac{q_{22}^2}{g^2} + \frac{b_{22}}{h^2} - \frac{2q_{12}b_{11}}{gc_1^o h^2}} \quad (83)$$

Jak widać z wzorów (83), optymalne parametry regulatora nie zależą od wartości współczynnika b_{12} . Skonfrontujemy ten fakt z naszymi rozważaniami.

Równania obiektu (74) we współrzędnych fazowych mają postać

$$\frac{dx_{1f}}{dt} = x_{2f}, \quad \frac{dx_{2f}}{dt} = q_{22}x_{2f} + q_{12}gu \quad (84)$$

Łatwo sprawdzić, że między wektorami \underline{x} i \underline{x}_f istnieje związek

$$\underline{x} = \alpha \underline{x}_f$$

przy czym

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_{12}} \end{bmatrix} \quad (85)$$

czyli, że zgodnie z (37)

$$B_f = \alpha^T B \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{q_{12}} \\ \frac{b_{12}}{q_{12}} & \frac{b_{22}}{q_{12}^2} \end{bmatrix} \quad (86)$$

Jak wynika z (86), współczynnik b_{12} ma wpływ jedynie na $(b_{12})_f = b_{12}/q_{12}$, względem którego optymalne parametry regulatora są inwariantne. Wobec tego są one inwariantne również względem współczynnika b_{12} . Wobec tego dogodnie jest, w przypadku konieczności dokonywania pomiarów wskaźnika jakości, przyjąć jako wskaźnik zastępczy zależność

$$I^*(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[(\sqrt{b_{11}} x_1 + \sqrt{b_{22}} x_2)^2 + h^2 u^2 \right] dt \quad (87)$$

Następnie oblicza się optymalny przedział czasu Δt przy założeniu, że na obiekt działają zakłócenia $\underline{Z}(t)$ o charakterze losowym. Zakłada się, że składowa $\tilde{Z}(t)$ w sygnale wyjściowym, będąca wynikiem działania na obiekt zakłócenia $\underline{Z}(t)$, jest procesem stacjonarnym o rozkładzie normalnym, o wartości średniej równej zeru i o funkcjach korelacyjnych

$$R_{11}(\tau) = R_{22}(\tau) = \exp(-|\tau|\lambda), \quad \lambda > 0, \quad R_{12}(\tau) = 0 \quad (88)$$

Zakłada się ponadto, że

$$S_{11} = S_{22} = 1, \quad S_{12} = 0, \quad \underline{Z}_w = 0 \quad (89)$$

Po podstawieniu (88) i (89) do wzorów (66) i (72) oraz po dokonaniu całkowania otrzymuje się

$$\sigma^2 \left[M_{\underline{X}_0} \left\{ F_0(\tilde{Z}, \underline{X}) \mid t \right\} \right] = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[b_{ii}^c b_{jj}^c \Delta t + 4a_{ii} a_{jj} \right] \Delta t \quad (90)$$

$$\tilde{z} \left\{ \begin{matrix} M \\ \underline{X}_0 \end{matrix} \{ \Delta I_0 | t \} \right\} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c \left[\sum_{l=1}^2 q_{il}^c q_{lj}^c \frac{\Delta t^2}{3} + 1 \right] \Delta t \quad (91)$$

Z (90) i (91) otrzymuje się zgodnie z (50)

$$\delta(\Delta t) = \frac{2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (b_{i1}^c b_{jj}^c \Delta t + 4a_{i1} a_{jj})}{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c \left(\sum_{l=1}^2 q_{il}^c q_{lj}^c \frac{\Delta t^2}{3} + 1 \right)} \quad (92)$$

Po zróżniczkowaniu (92) względem Δt i po przyrównaniu do zera otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{i1}^c b_{jj}^c \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c \left(\sum_{l=1}^2 q_{il}^c q_{lj}^c \frac{\Delta^0 t}{3} + 1 \right) \right] +$$

$$- \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (b_{i1}^c b_{jj}^c \Delta^0 t + 4a_{i1} a_{jj}) \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c \sum_{l=1}^2 q_{il}^c q_{lj}^c \Delta^0 t \right) = 0$$

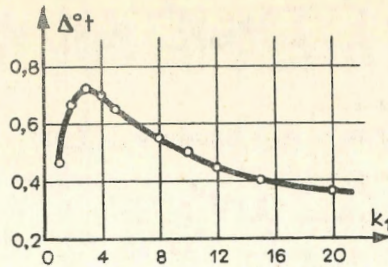
lub

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{i1}^c b_{jj}^c \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c \sum_{l=1}^2 q_{il}^c q_{lj}^c (\Delta^0 t)^2 +$$

$$+ \frac{8}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{i1} a_{jj} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c \sum_{l=1}^2 q_{il}^c q_{lj}^c \Delta^0 t +$$

$$- \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{i1}^c b_{jj}^c \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^c = 0 \quad (84)$$

skąd można obliczyć $\Delta^0 t$.



Rys. 6. Przebieg $\Delta^{\circ}t = f(k_1)$

Na rys. 6 przedstawiono przykładowo zależność $\Delta^{\circ}t = f(k_1)$ dla układu przedstawionego na rys. 5 (wzory (74) do (76)) przy $k_2 = 1$, $T = 1$, $b_{11} = 1$, $b_{12} = b_{22} = 0$, $h^2 = 1$.

9. UKŁADY Z OBIEKTAMI STATYCZNYMI

Przedstawiona poprzednio metoda optymalizacji dynamicznej nie uwzględnia uchybów statycznych. Dlatego też nie można jej w zasadzie stosować do nastrajania regulatorów w przypadku obiektów o właściwościach statycznych, dla których

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) \neq \underline{y}_w$$

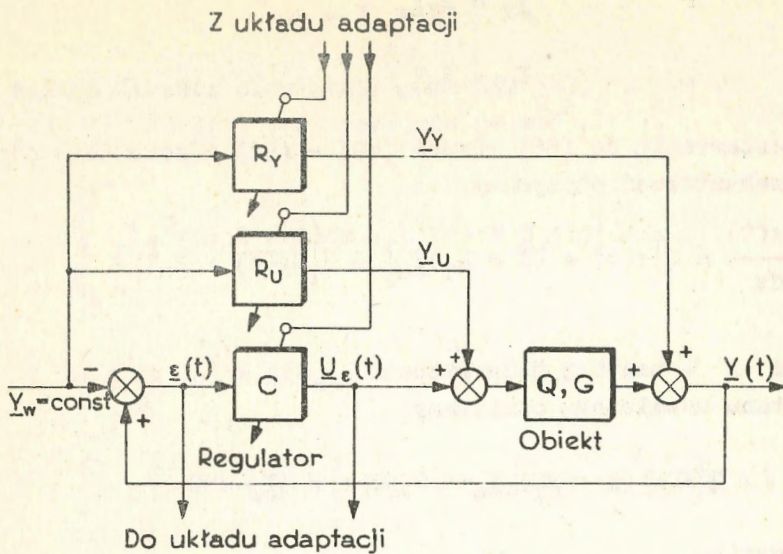
Rozszerzenia metody na układy z tego typu obiektami można dokonać przez dodanie członów kompensujących uchyby statyczne. Ogólny schemat układu z kompensacją przedstawiono na rys. 7.

Oczywista, ze względów technicznych taka kompensacja nie zawsze jest możliwa. Przy całkowitej kompensacji obowiązuje

$$\underline{\varepsilon}(t) = \underline{X}(t) \quad \underline{E} = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\varepsilon}(t) = 0 \quad (85)$$

$$\underline{U}_{\varepsilon}(t) = \underline{U}(t) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{U}_{\varepsilon}(t) = 0 \quad (86)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{Y}(t) - \underline{Y}_w = 0 \quad (87)$$



Rys. 7. Schemat układu z kompensacją uchybu statycznego

przy czym $\underline{X}(t)$ - wektor stanu układu autonomicznego opisanego równaniem

$$\frac{d\underline{X}(t)}{dt} = Q \underline{X}(t) + G \underline{U}(t)$$

$$\underline{U}(t) = C \underline{X}(t)$$

Wyznamy macierze R_Y oraz R_U , dla których występuje całkowita kompensacja uchybów statycznych.

Równania układu przedstawionego na rys. 7 mają postać

$$\frac{d\underline{Y}(t)}{dt} = Q[\underline{Y}(t) + \underline{Y}_Y] + G[\underline{U}(t) + \underline{Y}_U] \quad (88)$$

$$\underline{U}_\epsilon(t) = C \underline{\epsilon}(t) \quad (89)$$

$$\underline{\epsilon}(t) = \underline{Y}(t) - \underline{Y}_w \quad (90)$$

$$\underline{Y}_Y = R_Y \underline{Y}_w \quad (91)$$

$$\underline{Y}_U = R_U \underline{Y}_w \quad (92)$$

Po podstawieniu do (88) równań (89) - (92) i dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymamy

$$\frac{d\underline{\varepsilon}(t)}{dt} = Q \left[\underline{\varepsilon}(t) + (\mathbf{I} + R_Y) \underline{Y}_w \right] + G \left[C \underline{\varepsilon}(t) + R_U \underline{Y}_w \right] \quad (93)$$

przy czym \mathbf{I} - macierz jednostkowa.

Dla stanu ustalonego otrzymamy

$$Q \left[\mathbf{E} + (\mathbf{I} + R_Y) \right] \underline{Y}_w + G (C \mathbf{E} + R_U) \underline{Y}_w = 0 \quad (94)$$

z czego wynika

$$\mathbf{E} = -(Q + GC)^{-1} \left[Q(\mathbf{I} + R_Y) + GR_U \right] \underline{Y}_w \quad (95)$$

Całkowita kompensacja uchybu statycznego wymaga spełnienia równania

$$Q(\mathbf{I} + R_Y) + GR_U = 0 \quad (96)$$

Na uwagę zasługuje fakt, że do równania (96) nie wchodzi parametry regulatora C . Dzięki temu nastrajanie tych parametrów nie powoduje rozstrojenia obwodu kompensacji. Wobec tego jednak, że warunki kompensacji, określone równaniem (96), zależą od parametrów obiektu (elementów macierzy Q oraz G), układy adaptacyjne, w których jest przewidziane przeciwdziałanie zmianom tych parametrów, wymagają nastajania zarówno regulatorów, jak i członów kompensacyjnych.

Algorytm adaptacji przedstawiony dla układów z obiektami o właściwościach astatycznych można łatwo rozszerzyć na układy z obiektami o właściwościach statycznych. Jednak w tym przypadku nastrajane muszą być zarówno regulatory, jak i człony kompensacyjne.

Układ statyczny nieskompensowany można traktować jak układ nieautonomiczny (por. pkt 6), w którym na wyjściu w stanie ustalonym istnieje składowa stała

$$\underline{Z}_w = \underline{Y}_w + \underline{E} \quad (97)$$

Dla takich układów obowiązuje równanie (43), które po podstawieniu (97) i dla $\underline{Z}(t) = 0$ przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\underline{\varepsilon}^T(t) B \underline{\varepsilon}(t) dt + \underline{U}_{\varepsilon}^T(t) H \underline{U}_{\varepsilon}(t) \right] dt = \\ & = \underline{\varepsilon}^T(t_{k+1}) A \underline{\varepsilon}(t_{k+1}) - \underline{\varepsilon}^T(t_k) A \underline{\varepsilon}(t_k) + \\ & = B^C \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\varepsilon}(t) dt - 2\underline{E}^T A \left[\underline{\varepsilon}(t_{k+1}) - \underline{\varepsilon}(t_k) \right] - \underline{E}^T B^C \underline{E} \Delta t \quad (98) \end{aligned}$$

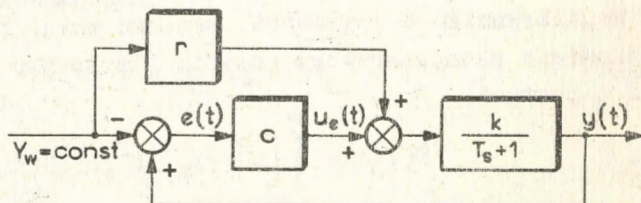
gdzie $B^C = B + C^T H C$.

W równaniu (97) występują jako niewiadome elementy macierzy A oraz wektora \underline{E} .

Algorytm adaptacji powinien przewidywać początkowo nastrajanie członów kompensacyjnych, tak aby sprowadzić do zera elementy wektora \underline{E} , a następnie powodować przestrajanie regulatora tak, aby zminimalizować wskaźnik jakości przebiegów dynamicznych. Takie rozdzielanie tych dwóch operacji jest możliwe dzięki temu, że przestrajanie regulatora nie powoduje rozstrojenia układu kompensacji, o czym poprzednio już wspomniano.

W dalszym ciągu dla ilustracji przeprowadzonych rozważań rozpatrzmy dwa przykłady układów z obiektami statycznymi.

P r z y k ł a d 1. Rozpatrzmy układ regulacji z obiektem w postaci członu inercyjnego rzędu pierwszego i regulatorem proporcjonalnym (rys. 8).



Rys. 8. Schemat układu z obiektem statycznym rzędu pierwszego

Układ ten można opisać równaniami

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{T} y(t) + \frac{k}{T} [u_e(t) + rY_w] \quad (99)$$

$$u_e(t) = c e(t) \quad (100)$$

$$e(t) = y(t) - Y_w \quad (101)$$

Z równań (99) - (101) można wyznaczyć uchyb statyczny, określony wzorem

$$E = \frac{kr - 1}{1 - kc} \quad (102)$$

Równanie, które służy jako podstawa do nastrajania członu kompensacyjnego oraz regulatora, ma postać

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} [e^2(t)h^2 + u_e^2(t)] dt = \\ & = a [e^2(t_{k+1}) - e^2(t_k)] + 2[E(1 + h^2c^2) \int_{t_k}^{t_{k+1}} e(t)] dt - \\ & - 2Ea [e(t_{k+1}) - e(t_k)] - E^2(1 + h^2c^2) \Delta t \end{aligned} \quad (103)$$

Równanie (103) należy traktować jako równanie z dwiema niewiadomymi E oraz a . Przy adaptacji należy - na podstawie pomiarów - wyznaczać te niewiadome, a następnie początkowo dobrać taką wartość r , żeby E sprowadzić do zera. W dalszym ciągu przez dobór c należy zminimalizować wartość a .

Współczynnik a wyznacza wartość wskaźnika jakości układu o całkowicie skompensowanym uchybie statycznym. Przy wskaźniku jakości o postaci

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} [x^2(t) + h^2 u(t)] dt \quad (104)$$

otrzymujemy

$$I(t_0) = a x^2(t_0) \quad (105)$$

gdzie

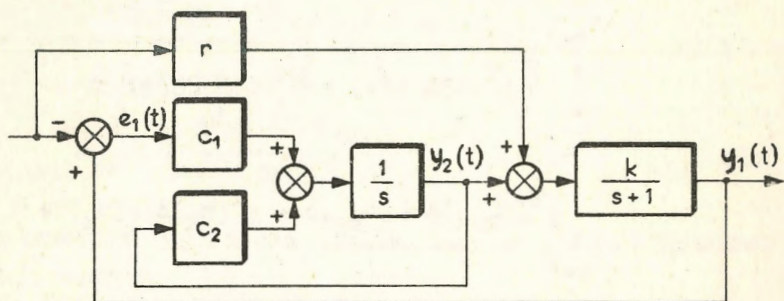
$$a = \frac{(1 + h^2 c^2) T}{2(1 - kc)} \quad (106)$$

Minimalną wartość wskaźnika jakości (104) otrzymujemy przy

$$c = c^0 = + \frac{1}{k} - \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{h^2}} \quad (106)$$

P r z y k ł a d 2 . Rozpatrzmy układ regulacji z obiektem w postaci szeregowego połączenia członu całkującego i członu inercyjnego o stałej czasowej równej jedności i o wzmacnieniu k , regulatora o dwu wejściach i jednym wyjściu oraz członu kompensującego uchyb statyczny (rys. 9).

Rys. 9.
Schemat układu z obiektem statycznym rzędu drugiego



Z rozpatrzenia schematu układu wynika, że dla kompensacji uchybu statycznego należy do wejścia członu inercyjnego doprowadzić składową stałą

$$Y_y = rY_w \quad (107)$$

Układ można opisać równaniami:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1(t) + k y_2(t) - rY_w \quad (108)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = u_e(t) \quad (109)$$

$$u_e(t) = c_1 e_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (110)$$

$$e_1(t) = -Y_w + y_1(t) \quad (111)$$

Na podstawie równania (96) dla $R_U = 0$ można wyznaczyć współczynnik r , przy którym następuje całkowita kompensacja. Jest on określony wzorem

$$r = 1/k \quad (112)$$

Uchyb statyczny przy niecałkowitej kompensacji jest wyrażony wzorem

$$E = \frac{1 - kr}{1 + \frac{c_1}{c_2} k} \quad (113)$$

Równanie, które służy jako podstawa do nastrajania członu kompensacyjnego oraz regulatora, ma postać

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\underline{\varepsilon}^T(t) B \underline{\varepsilon}(t) + \underline{U}_{\varepsilon}^T(t) H \underline{U}_{\varepsilon}(t) \right] dt = \\ & = \underline{\varepsilon}^T(t_{k+1}) A \underline{\varepsilon}(t_{k+1}) - \underline{\varepsilon}^T(t_k) A \underline{\varepsilon}(t_k) + \\ & + 2 \underline{E}^T B^C \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{\varepsilon}(t) dt - 2 \underline{E}^T A \left[\underline{\varepsilon}(t_{k+1}) - \underline{\varepsilon}(t_k) \right] - \underline{E}^T B^C \underline{E} \Delta t \quad (114) \end{aligned}$$

przy czym $\underline{E} = (E_1, E_2)^T$, $E_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t)$, $\underline{\varepsilon}(t) = [e_1(t), e_2(t)]^T$.

Przy wskaźniku jakości

$$I(t_0) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[x_1^2(t) + h^2 u^2(t) \right] dt \quad (115)$$

macierz B^c ma postać

$$B^c = \begin{bmatrix} 1 + h^2 c_1^2 & h^2 c_1 c_2 \\ h^2 c_1 c_2 & h^2 c_2^2 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Przy adaptacji należy początkowo nastrajać r , tak aby sprowadzić do zera E_1 oraz E_2 . Następnie przez zmiany c_1 oraz c_2 minimalizuje się wskaźnik jakości.

Wskaźnik jakości (115) można przedstawić jako funkcję współczynników macierzy A

$$I(t_0) = a_{11} x_1^2(t_0) + 2a_{12} x_1(t_0) x_2(t_0) + a_{22} x_2^2(t_0) \quad (117)$$

gdzie

$$a_{11} = \frac{1}{2} (1 + h^2 c_1^2 + 2c_1 a_{12}) \quad (118)$$

$$a_{12} = \frac{h^2 c_1^2 c_2 k + h^2 c_1 c_2 + k c_2}{2(c_1 k + c_2 - c_2^2 - k c_1 c_2)} \quad (119)$$

$$a_{22} = - \frac{h^2 c_2^2 + 2k a_{12}}{2c_2} \quad (120)$$

Optymalne parametry regulatora minimalizujące wartość wskaźnika jakości wyrażają wzory:

$$c_1^0 = \frac{-(1 - \sqrt{1 + \frac{2k}{h}})^2}{2k} \quad (121)$$

$$c_2^0 = 1 - \sqrt{1 + \frac{2k}{h}} \quad (122)$$

DODATEK I

Wyprowadzenie wzoru (27)

Równanie macierzowe (9) można zapisać w postaci układu następujących równań:

$$-b_{ij}^c = \sum_{k=1}^n (a_{ki}^c q_{kj}^c + a_{kj}^c q_{ki}^c), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.I.1})$$

Dla (25) obowiązuje

$$q_{ij}^c = \begin{cases} q_{nj}^c & \text{przy } i = n \\ 1 & \text{przy } i = j - 1 \\ 0 & \text{przy } i \neq \begin{cases} n \\ j-1 \end{cases} \end{cases} \quad (q_{nj}^c = q_{nj} + g_{cj}) \quad (\text{D.I.2})$$

Z (D.I.1) i (D.I.2) wynika wzór (27).

DODATEK II

Wyprowadzenie wzoru (65)

Z (63) wynika

$$\begin{aligned} & \underline{\tilde{z}} \left\{ \begin{matrix} M^2 \\ \underline{\tilde{x}} \\ \underline{\tilde{c}} \end{matrix} \left\{ F_0(\underline{\tilde{z}}, \underline{\tilde{x}}) | t \right\} \right\} = \\ & = \underline{\tilde{z}} \left\{ \left[\int_0^{\Delta t} \underline{\tilde{z}}^T(t) B^c \underline{\tilde{z}}(t) dt - \underline{\tilde{z}}^T(\Delta t) A \underline{\tilde{z}}(\Delta t) + \underline{\tilde{z}}^T(0) A \underline{\tilde{z}}(0) \right]^2 \right\} \quad (\text{D.II.1}) \end{aligned}$$

Po podniesieniu (D.II.1) do kwadratu otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 & \underline{\tilde{z}} \left\{ \underline{M} \left\{ \underline{F}_0(\underline{\tilde{z}}, \underline{x}) | t \right\} \right\} = \\
 & = \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \underline{\tilde{z}}^T(t) B^C \underline{\tilde{z}}(t) \underline{\tilde{z}}^T(\tau) B^C \underline{\tilde{z}}(\tau) dt d\tau + \\
 & + \left[\underline{\tilde{z}}^T(\Delta t) A \underline{\tilde{z}}(\Delta t) \right]^2 + \left[\underline{\tilde{z}}^T(0) A \underline{\tilde{z}}(0) \right]^2 + \\
 & + 2 \underline{\tilde{z}}^T(0) A \underline{\tilde{z}}(0) \int_0^{\Delta t} \underline{\tilde{z}}^T(t) A \underline{\tilde{z}}(t) dt + \\
 & - 2 \underline{\tilde{z}}^T(\Delta t) B^C \underline{\tilde{z}}(\Delta t) \int_0^{\Delta t} \underline{\tilde{z}}^T(t) B^C \underline{\tilde{z}}(t) dt + \\
 & - 2 \underline{\tilde{z}}^T(\Delta t) A \underline{\tilde{z}}(\Delta t) \underline{\tilde{z}}^T(0) A \underline{\tilde{z}}(0) \quad (D.II.2)
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu przejdziemy od zapisu macierzowego do zapisu zwyczajnego oraz wykorzystamy wzór na czwarty moment procesu przypadkowego o rozkładzie normalnym /1/

$$\begin{aligned}
 & M \{ z_1 z_2 z_3 z_4 \} = \\
 & = M \{ z_1 z_2 \} M \{ z_3 z_4 \} + M \{ z_1 z_3 \} M \{ z_2 z_4 \} + M \{ z_1 z_4 \} M \{ z_2 z_3 \} \quad (D.II.3)
 \end{aligned}$$

Z (D.II.2) po uwzględnieniu (D.II.3) otrzymuje się

$$\underline{\tilde{z}} \left\{ \underline{M}^2 \left\{ \underline{F}_0(\underline{\tilde{z}}, \underline{x}) | t \right\} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ b_{ij}^c b_{kl}^c \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [R_{ij}(0) R_{kl}(0) + \right. \\
&\quad \left. + 2R_{ij}(t - \tau) R_{kl}(t - \tau)] dt d\tau + \right. \\
&\quad \left. + 4a_{ij} a_{kl} [R_{ij}(0) R_{kl}(0) - R_{ij}(\Delta t) R_{kl}(\Delta t)] + \right. \\
&\quad \left. + 4a_{ij} b_{kl}^c \int_0^{\Delta t} [R_{ij}(t) R_{kl}(t) - R_{ij}(t - \Delta t) R_{kl}(t - \Delta t)] dt \right\} \quad (D.II.4)
\end{aligned}$$

Po dokonaniu całkowania otrzymuje się z (D.II.4)

$$\begin{aligned}
&\underline{\tilde{Z}} \left\{ \underline{M} \left\{ F_0(\underline{\tilde{Z}}, \underline{X}) | t \right\} \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ b_{ij}^c b_{kl}^c [R_{ij}(0) R_{kl}(0) \Delta t^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} R_{ij}(t - \tau) R_{kl}(t - \tau)] dt d\tau + \right. \\
&\quad \left. + 4a_{ij} a_{kl} [R_{ij}(0) R_{kl}(0) - R_{ij}(\Delta t) R_{kl}(\Delta t)] + \right. \\
&\quad \left. + 4a_{ij} b_{kl}^c \int_0^{\Delta t} [R_{ij}(t) R_{kl}(t) - R_{ij}(t - \Delta t) R_{kl}(t - \Delta t)] dt \right\} \quad (D.II.5)
\end{aligned}$$

Przy założeniu, że $R_{ij}(\tau) = 0$ dla $i \neq j$, otrzymuje się z (D.II.5)

$$\underline{\tilde{z}} \left\{ \begin{matrix} M \\ M \\ \underline{x}_0 \end{matrix} \left\{ \underline{F}_0(\underline{\tilde{z}}, \underline{x}) | t \right\} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ b_{ii}^c b_{jj}^c \left[R_{ii}(0) R_{jj}(0) \Delta t^2 + \right. \right.$$

$$\left. + 2 \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} R_{ii}(t - \tau) R_{jj}(t - \tau) dt d\tau \right] +$$

$$+ 4a_{ii} a_{jj} \left[R_{ii}(0) R_{jj}(0) - R_{ii}(\Delta t) R_{jj}(\Delta t) \right] +$$

$$\left. + 4a_{ii} b_{jj}^c \int_0^{\Delta t} \left[R_{ii}(t) R_{jj}(t) - R_{ii}(t - \Delta t) R_{jj}(t - \Delta t) \right] dt \right\} \quad (D.II.6)$$

IBS PAN

47471