POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 27

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2001

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński
Dr hab. inż. Józef Żurek

Publikacja współfinansowana przez
KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu badawczego Nr 9 T12C 022 16 nt. "Graniczne funkcje niezawodności dużych systemów wielostanowych oraz ich zastosowania w zagadnieniach transportowych i wytrzymałościowych"

ISBN 83-85847-58-8
ISSN 0208-8029

3. Systemy dwustanowe

Zakładamy, że

E_i, $i = 1,2,\ldots,n$, $n \in N$,

są dwustanowymi elementami systemu mającymi funkcje niezawodności

$R_i(t) = P(T_i > t)$, $t \in (-\infty,\infty)$,

gdzie

T_i, $i = 1,2,\ldots n$,

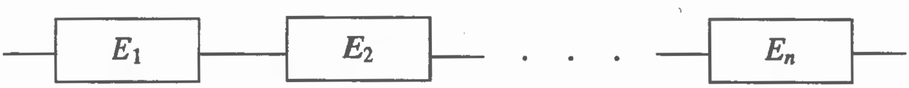
są niezależnymi zmiennymi losowymi reprezentującymi czasy zdatności elementów E_i mającymi dystrybuanty

$F_i(t) = P(T_i \le t)$, $t \in (-\infty,\infty)$.

Najprostszymi dwustanowymi strukturami niezawodnościowymi są systemy szeregowe i równoległe.

Definicja 3.1
System dwustanowy nazywamy szeregowym, jeśli jego czas zdatności T określony jest wzorem

$$T = \min_{1 \le i \le n}\{T_i\}.$$



Rys. 3.1 Schemat systemu szeregowego

Powyższa definicja oznacza, że system szeregowy jest zdatny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego elementy są zdatne. Łatwo można pokazać, że funkcja niezawodności dwustanowego systemu szeregowego określona jest wzorem.

$$\bar{R}_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)\,,\ t \in (-\infty,\infty).$$

Definicja 3.2
Dwustanowy system szeregowy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy zdatności T_i jego elementów mają identyczną dystrybuantę

$$F(t) = P(T_i \le t),\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

tzn., jeśli jego elementy E_i mają taką samą funkcję niezawodności

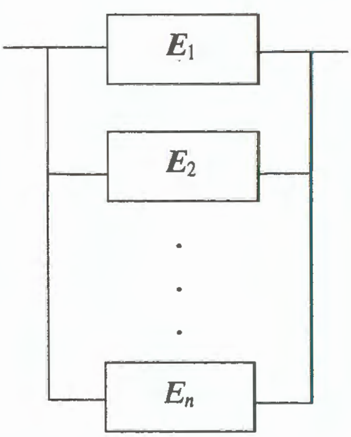
$$R(t) = 1 - F(t),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Funkcja niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu szeregowego określona jest wzorem

$$\bar{R}_n(\mathrm{t}) = [R(t)]^n,\ t \in (-\infty,\infty). \qquad (3.1)$$

Definicja 3.3
System dwustanowy nazywamy równoległym, jeśli jego czas zdatności T określony jest wzorem

$$T = \max_{1 \le i \le n}\{T_i\}.$$



Rys. 3.2 Schemat systemu równoległego

Powyższa definicja oznacza, że system równoległy jest zdatny wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego elementów jest zdatny. Można pokazać, że funkcja niezawodności dwustanowego systemu równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}_n(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Definicja 3.4

Dwustanowy system równoległy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy zdatności T_i jego elementów mają identyczną dystrybuantę

$$F(t) = P(T_i \le t),\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n,$$

tzn., jeśli jego elementy E_i mają taką samą funkcję niezawodności.

$$R(t) = 1 - F(t),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Funkcja niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}_n(t) = 1 - [F(t)]^n,\ t \in (-\infty,\infty). \tag{3.2}$$

Innymi podstawowymi dwustanowymi strukturami niezawodnościowymi są systemy szeregowo-równoległe i równoległo-szeregowe. Aby je zdefiniować przyjmujemy, że

$$E_{ij},\ i = 1,2,...,k_n,\ j = 1,2,...,l_i,\ k_n,\ l_1,\ l_2,...,\ l_{k_n} \in N,$$

są dwustanowymi elementami systemu posiadającymi funkcje niezawodności

$$R_{ij}(t) = P(T_{ij} > t),\ t \in (-\infty,\infty),$$

gdzie

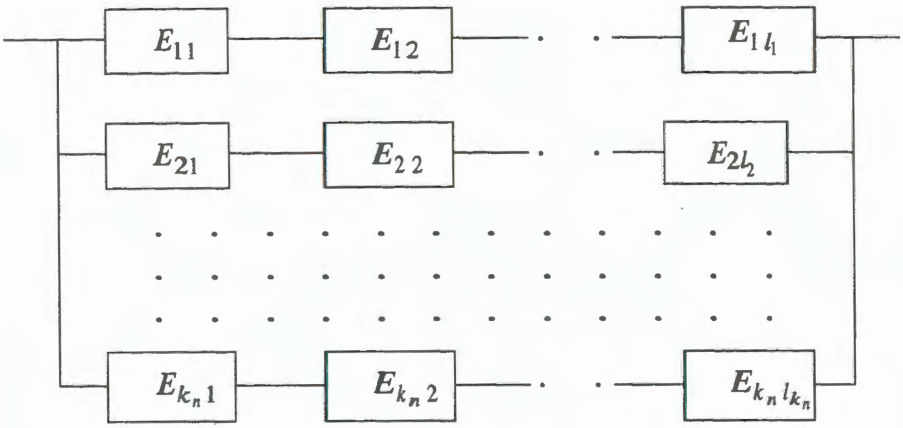
$$T_{ij},\ i = 1,2,...,k_n,\ j = 1,2,...,l_i,$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi reprezentującymi czasy zdatności elementów E_{ij} o dystrybuantach

$$F_{ij}(t) = P(T_{ij} \le t),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Definicja 3.5
System dwustanowy nazywamy szeregowo-równoległym, jeśli jego czas zdatności T określony jest wzorem

$$T = \max_{1 \le i \le k_n}\{\min_{1 \le j \le l_i}\{T_{ij}\}.$$



Rys. 3.3 Schemat systemu szeregowo-równoległego

Można uzasadnić, że funkcja niezawodności dwustanowego systemu szeregowo-równoległego określona jest wzorem

$$R_{k_n, l_1, l_2, \ldots, l_{k_n}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k_n}[1 - \prod_{j=1}^{l_i} R_{ij}(t)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów szeregowych systemu połączonych równolegle oraz l_i są liczbami elementów w podsystemach szeregowych.

Definicja 3.6
Dwustanowy system szeregowo-równoległy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy zdatności T_{ij} jego elementów posiadają identyczną dystrybuantę

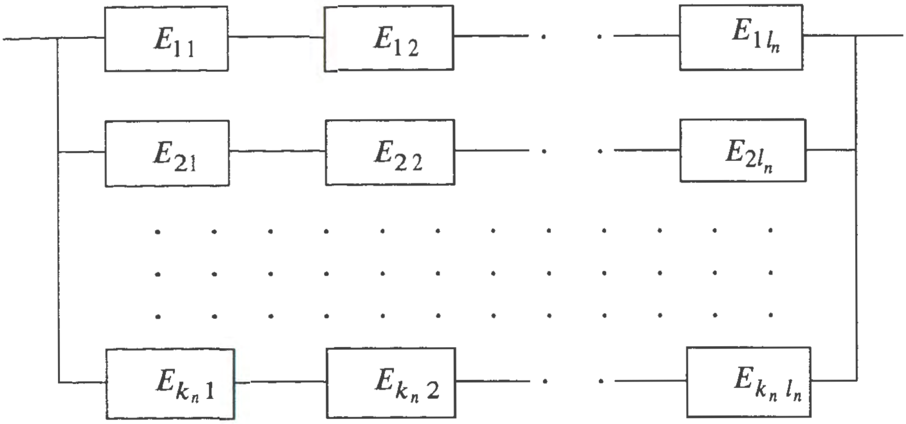
$$F(t) = P(T_{ij} \le t),\ i = 1,2,\ldots,k_n,\ j = 1,2,\ldots,l_i,$$

tzn., jeśli jego elementy E_{ij} mają taką samą funkcję niezawodności

$$R(t) = 1 - F(t),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Definicja 3.7
Dwustanowy system szeregowo-równoległy nazywamy regularnym, jeśli

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_{k_n} = l_n,\ l_n \in N.$$



Rys.3.4 Schemat regularnego systemu szeregowo-równoległego

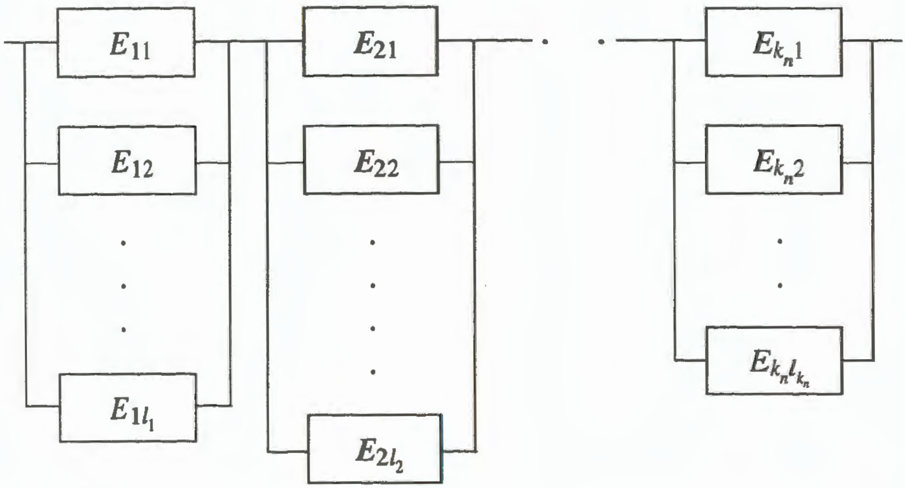
Funkcja niezawodności dwustanowego regularnego jednorodnego systemu szeregowo-równoległego określona jest wzorem

$$R_{k_n,l_n}(t) = 1 - [1 - [R(t)]]^{l_n}]^{k_n},\ t \in (-\infty,\infty), \tag{3.3}$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów szeregowych systemu połączonych równolegle oraz l_n jest liczbą elementów w podsystemach szeregowych.

Definicja 3.8
System dwustanowy nazywamy równoległo-szeregowym, jeśli jego czas zdatności określony jest wzorem

$$T = \min_{1 \le i \le k_n}\{\max_{1 \le j \le l_i}\{T_{ij}\}\}.$$



Rys. 3.5 Schemat systemu równoległo-szeregowego

Można pokazać, że funkcja niezawodności dwustanowego systemu równoległo-szeregowego określona jest wzorem

$$\bar{R}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_{k_n}}(t) = \prod_{i=1}^{k_n}[1-\prod_{j=1}^{l_i} F_{ij}(t)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów równoległych systemu połączonych szeregowo oraz l_i są liczbami elementów w podsystemach równoległych.

Definicja 3.9
Dwustanowy system równoległo-szeregowy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy zdatności T_{ij} jego elementów posiadają identyczną dystrybuantę

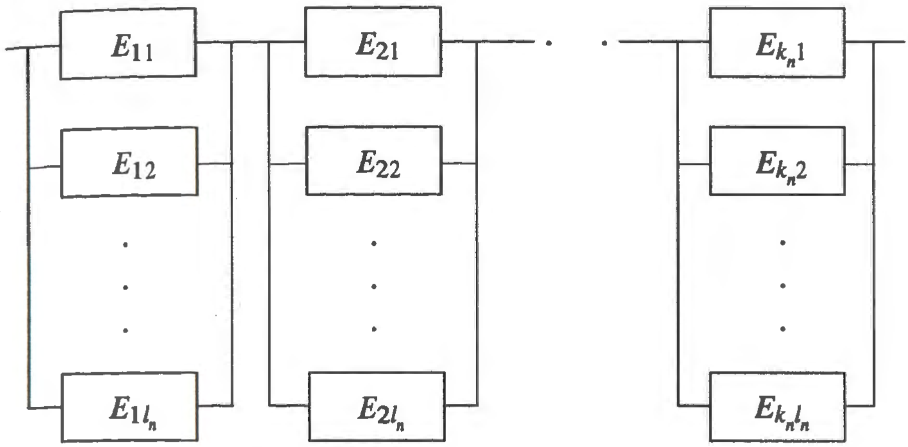
$$F(t) = P(T_{ij} \leq t),\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,k_n,\ j = 1,2,\ldots,l_i,$$

tzn., jeśli jego elementy E_{ij} mają taką samą funkcję niezawodności

$$R(t) = 1 - F(t),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Definicja 3.10
Dwustanowy system równoległo-szeregowy nazywamy regularnym, jeśli

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_{k_n} = l_n,\ l_n \in N.$$



Rys. 3.6 Schemat regularnego systemu równoległo-szeregowego

Funkcja niezawodności dwustanowego regularnego jednorodnego systemu równoległo-szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{R}_{k_n,l_n}(t) = [1- [F(t)]\ ]^{l_n}\ ]^{k_n},\ t \in (-\infty,\infty), \tag{3.4}$$

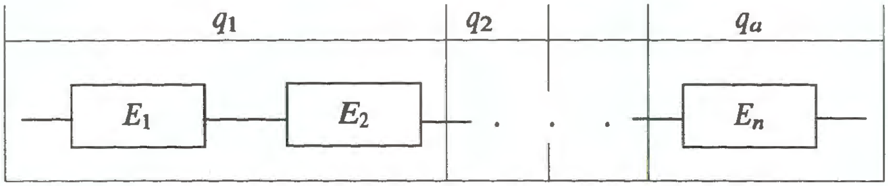
gdzie k_n jest liczbą podsystemów równoległych systemu połączonych szeregowo oraz l_n jest liczbą elementów w podsystemach równoległych.

Definicja 3.11

Dwustanowy system szeregowy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z elementów a typów, $1 \le a \le n$, oraz frakcja elementów i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto

$$R^{(i)}(t) = 1 - F^{(i)}(t),\ i = 1,2,\ldots,a, \tag{3.5}$$

jest funkcją niezawodności elementu i-tego typu.



Rys. 3.7 Schemat niejednorodnego systemu szeregowego

Można uzasadnić, że funkcja niezawodności dwustanowego niejednorodnego systemu szeregowego określona jest wzorem

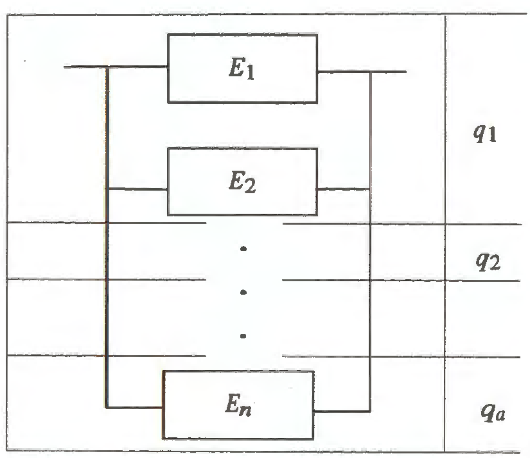
$$\bar{R}'_n(t) = \prod_{i=1}^{a} (R^{(i)}(t))^{q_i n}, \ t \in (-\infty, \infty). \tag{3.6}$$

Definicja 3.12

Dwustanowy system równoległy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z elementów a typów, $1 \le a \le n$, oraz frakcja elementów i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto

$$R^{(i)}(t) = 1 - F^{(i)}(t), \ i = 1,2,\ldots,a, \tag{3.7}$$

jest funkcją niezawodności elementu i-tego typu.



Rys. 3.8 Schemat niejednorodnego systemu równoległego

Można uzasadnić, że funkcja niezawodności dwustanowego niejednorodnego systemu równoległego określona jest wzorem

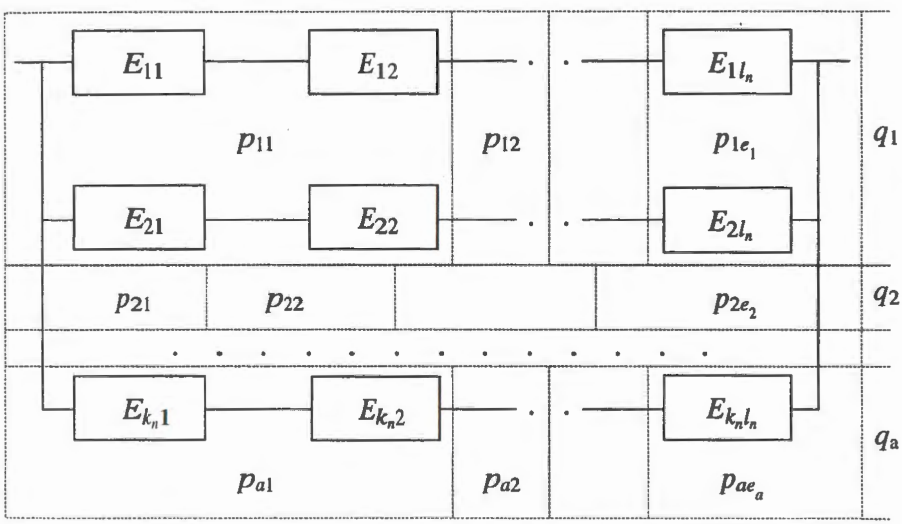
$$\boldsymbol{R}'_n(t) = 1 - \prod_{i=1}^{a} (F^{(i)}(t))^{q_i n},\ t \in (-\infty,\infty). \tag{3.8}$$

Definicja 3.13

Dwustanowy regularny system szeregowo-równoległy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z podsystemów szeregowych a typów, $1 \le a \le k_n$, $k_n \in N$, oraz frakcja podsystemów szeregowych i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto podsystem szeregowy i-tego typu składa się z elementów e_i typów, $1 \le e_i \le l_n$, $l_n \in N$, o funkcjach niezawodności

$$R^{(i,j)}(t) = 1 - F^{(i,j)}(t),\ j = 1,2,\dots,e_i,$$

oraz frakcja elementów j-tego typu w tym podsystemie jest równa p_{ij}, gdzie $p_{ij} > 0$ oraz $\sum_{j=1}^{e_i} p_{ij} = 1$.



Rys. 3.9 Schemat regularnego niejednorodnego systemu szeregowo-równoległego

Funkcja niezawodności dwustanowego regularnego niejednorodnego systemu szeregowo-równoległego określona jest wzorem

$$R'_{k_n,l_n}(t) = 1-\prod_{i=1}^{a}[1-(R^{(i)}(t))^{l_n}]^{q_i k_n}, \; t \in (-\infty,\infty), \tag{3.9}$$

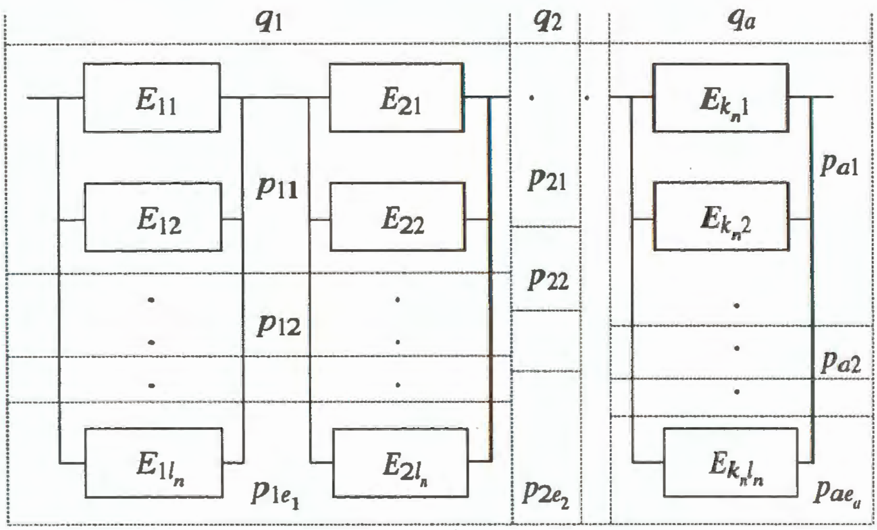
gdzie

$$R^{(i)}(t) = \prod_{j=1}^{e_i}(R^{(i,j)}(t))^{p_{ij}}, \; i = 1,2,\ldots,a. \tag{3.10}$$

Definicja 3.14
Dwustanowy regularny system równoległo-szeregowy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z podsystemów równoległych a typów, $1 \le a \le k_n$, $k_n \in N$, oraz frakcja podsystemów równoległych i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto podsystem równoległy i-tego typu składa się z elementów e_i typów, $1 \le e_i \le l_n$, $l_n \in N$, o funkcjach niezawodności

$$R^{(i,j)}(t) = 1 - F^{(i,j)}(t), \; j = 1,2,\ldots,e_i,$$

oraz frakcja elementów j-tego typu w tym podsystemie jest równa p_{ij}, gdzie $p_{ij} > 0$ oraz $\sum_{j=1}^{e_i} p_{ij} = 1$.



Rys. 3.10 Schemat regularnego niejednorodnego systemu równoległo-szeregowego

Funkcja niezawodności dwustanowego regularnego niejednorodnego systemu równoległo-szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t) = \prod_{i=1}^{a}[1-(F^{(i)}(t))^{l_n}]^{q_i k_n}, \; t \in (-\infty,\infty), \tag{3.11}$$

gdzie

$$F^{(i)}(t) = \prod_{j=1}^{e_i}(F^{(i,j)}(t))^{p_{ij}}, \; i = 1,2,\ldots,a. \tag{3.12}$$

Uwaga 3.1
W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że zarówno n jak i k_n oraz l_n są dodatnimi liczbami rzeczywistymi i rozpatrujemy rodziny funkcji niezawodności $\overline{\boldsymbol{R}}_n(t)$, $\overline{\boldsymbol{R}}'_n(t)$, $\boldsymbol{R}_n(t)$, $\boldsymbol{R}'_n(t)$ dla $n \in (0,\infty)$ oraz rodziny funkcji niezawodności $\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t)$, $\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t)$, $\overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t)$, $\overline{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t)$ odpowiadające parze (k_n, l_n), gdzie $k_n \in (0,\infty)$, $l_n \in (0,\infty)$. Jest to założenie niezbędne do przeprowadzenia dowodów twierdzeń cytowanych w pracy. Z punktu widzenia praktyki istotnym jednakże jest aby n, k_n oraz l_n były liczbami naturalnymi. Powrót do liczb naturalnych, w przypadku gdy są one liczbami rzeczywistymi, jest trywialny, bowiem można je przedstawić w postaci ich części całkowitych oraz reszty rzeczywistej r. Wtedy we wzorach na funkcje niezawodności rozważanych systemów występują wyrażenia typu $[R(t)]^r$, które są funkcjami niezawodności. Oznacza to, że system lub podsystem posiada jeden element o funkcji niezawodności innej niż funkcja niezawodności $R(t)$ pozostałych jego elementów. Element ten, przy dużej liczbie pozostałych elementów, nie ma wpływu na postać granicznej funkcji niezawodności systemu.

Krzysztof Kołowrocki

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Książka zawiera opis metod oraz wyniki badań niezawodności dużych systemów.

Rozważane są nieodnawialne systemy dwustanowe oraz systemy wielostanowe ze starzejącymi się elementami uszkadzającymi się niezależnie.

Ustalone zostały klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności dla dwu i wielostanowych jednorodnych i niejednorodnych systemów szeregowych, równoległych, szeregowo-równoległych i równoległo-szeregowych. Problem wyznaczania granicznych funkcji niezawodności dla tych systemów został rozwiązany całościowo przy dowolnych funkcjach niezawodności ich elementów.

Przytoczone zostały przykłady zastosowań wyników do oceny niezawodności modelowych dużych systemów dwustanowych. Wyniki dotyczące systemów wielostanowych zastosowane zostały do oszacowania charakterystyk niezawodnościowych dużych systemów transportu portowego i stoczniowego.

Sformułowane zostały problemy otwarte oraz wytyczona została perspektywa dalszych badań nad metodami oceny i optymalizacji niezawodności dużych systemów.

Monografia przeznaczona jest dla czytelników zainteresowanych badaniami niezawodności oraz bezpieczeństwa eksploatacji dużych systemów technicznych na etapach ich projektowania i eksploatacji.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-58-8

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl