POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 27

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2001

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński
Dr hab. inż. Józef Żurek

Publikacja współfinansowana przez
KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu badawczego Nr 9 T12C 022 16 nt. "Graniczne funkcje niezawodności dużych systemów wielostanowych oraz ich zastosowania w zagadnieniach transportowych i wytrzymałościowych"

ISBN 83-85847-58-8
ISSN 0208-8029

4. Systemy wielostanowe

W celu zdefiniowania bardziej ogólnych systemów wielostanowych przyjmujemy, że:

- E_i, $i = 1,2,\ldots,n$, są elementami systemu,

- wszystkie rozważane elementy oraz system mają zbiór stanów $\{0,1,\ldots,z\}$, gdzie $z \geq 1$,

- stany są uporządkowane, 0 jest stanem najgorszym, natomiast stan z jest najlepszym,

- $T_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, są niezależnymi zmiennymi losowymi reprezentującymi czasy przebywania elementów E_i w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$, podczas gdy elementy te w chwili $t = 0$ znajdowały się w stanie z,

- $T(u)$ jest zmienną losową reprezentującą czas przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ system ten znajdował w stanie z,

- stany systemu oraz elementów pogarszają się wraz z upływem czasu t bez napraw,

- $e_i(t)$ jest stanem elementu E_i w chwili t, $t \in (-\infty,\infty)$, podczas gdy element w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z,

- $s(t)$ jest stanem systemu w chwili t, $t \in (-\infty,\infty)$, podczas gdy system w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z.

Definicja 4.1
Wektor

$$R_i(t,\cdot) = [R_i(t,0),R_i(t,1),\ldots,R_i(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

gdzie

$$R_i(t,u) = P(e_i(t) \geq u \mid e_i(0) = z) = P(T_i(u) > t),\ t \in (-\infty,\infty), \quad (4.1)$$
$$u = 0,1,\ldots,z,$$

jest prawdopodobieństwem tego, że element E_i w chwili t, $t \in (-\infty,\infty)$, znajduje się w jednym ze stanów podzbioru $\{u,u+1,...,z\}$, przy warunku, że w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z, nazywamy wielostanową funkcją niezawodności elementu E_i.

Przy tej definicji oczywista jest następująca własność

$$R_i(t,0) \geq R_i(t,1) \geq \ldots \geq R_i(t,z),\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n.$$

Jeśli

$$p_i(t) = [p_i(t,0),p_i(t,1),...,p_i(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n,$$

gdzie

$$p_i(t,u) = P(e_i(t) = u \mid e_i(0) = z),\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 0,1,...,z,$$

jest prawdopodobieństwem tego, że element E_i w chwili t znajduje się w stanie u, przy warunku, że w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z, to wobec (4.1)

$$R_i(t,0) = 1,\ R_i(t,z) = p_i(t,z),\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n, \tag{4.2}$$

oraz

$$p_i(t,u) = R_i(t,u) - R_i(t,u+1),\ u = 0,1,...,z-1,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n. \tag{4.3}$$

Ponadto, gdy

$$R_i(t,u) = 1 \text{ dla } t \leq 0,\ u = 1,2,...,z,$$

to wartością oczekiwaną (średnią) czasu przebywania elementu E_i w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$ jest

$$M_i(u) = \int_0^\infty R_i(t,u)dt,\ u = 1,2,...,z,\ i = 1,2,...,n, \tag{4.4}$$

natomiast odchyleniem standardowym czasu przebywania elementu E_i w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$ jest

$$\sigma_i(u) = \sqrt{N_i(u) - [M_i(u)]^2},\ u = 1,2,...,z,\ i = 1,2,...,n, \tag{4.5}$$

gdzie

$$N_i(u) = 2\int_0^{\infty} tR_i(t,u)dt\,,\ u = 1,2,...,z,\ i = 1,2,...,n, \tag{4.6}$$

oraz

$$\bar{M}_i(u) = \int_0^{\infty} p_i(t,u)dt,\ u = 1,2,...,z,\ i = 1,2,...,n, \tag{4.7}$$

jest wartością oczekiwaną czasu przebywania elementu E_i w stanie u, w przypadku gdy całki określone wzorami (4.4), (4.6) oraz (4.7) istnieją. Wtedy, zgodnie z (4.2), (4.3), (4.4) oraz (4.7), mamy

$$\bar{M}_i(u) = M_i(u) - M_i(u+1),\ u = 1,2,...,z\text{-}1,\ \bar{M}_i(z) = M_i(z),\ i = 1,2,...,n. \tag{4.8}$$

Definicja 4.2
Wektor

$$\boldsymbol{R}_n(t,\cdot) = [\boldsymbol{R}_n(t,0),\boldsymbol{R}_n(t,1),...,\boldsymbol{R}_n(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}_n(t,u) = P(s(t) \geq u \mid s(0) = z) = P(T(u) > t),\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 0,1,...,z, \tag{4.9}$$

jest prawdopodobieństwem tego, że system w chwili t, $t \in (-\infty,\infty)$, znajduje się w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$, przy warunku, że w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z, nazywamy wielostanową funkcją niezawodności systemu.

Przy tej definicji prawdziwa jest następująca własność

$$\boldsymbol{R}_n(t,0) \geq \boldsymbol{R}_n(t,1) \geq \ldots \geq \boldsymbol{R}_n(t,z),\ t \in (-\infty,\infty).$$

Jeśli

$$p(t) = [p(t,0),p(t,1),...,p(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),$$

gdzie

$$p(t,u) = P(s(t) = u \mid s(0) = z),\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 0,1,\ldots,z, \tag{4.10}$$

jest prawdopodobieństwem tego, że system w chwili t znajduje się w stanie u, przy warunku, że w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z, to wobec (4.9) i (4.10) mamy

$$\boldsymbol{R}_n(t,0) = 1,\ \boldsymbol{R}_n(t,z) = p(t,z),\ t \in (-\infty,\infty), \tag{4.11}$$

oraz

$$p(t,u) = \boldsymbol{R}_n(t,u) - \boldsymbol{R}_n(t,u+1),\ u = 0,1,\ldots,z-1,\ t \in (-\infty,\infty). \tag{4.12}$$

Ponadto gdy

$$\boldsymbol{R}_n(t,u) = 1 \text{ dla } t \le 0,\ u = 1,2,\ldots,z,$$

to średnim czasem przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$ jest

$$M(u) = \int_0^\infty \boldsymbol{R}_n(t,u)dt,\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{4.13}$$

natomiast odchyleniem standardowym czasu przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$ jest

$$\sigma(u) = \sqrt{N(u) - [M(u)]^2}\ ,\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{4.14}$$

gdzie

$$N(u) = 2\int_0^\infty t\,\boldsymbol{R}_n(t,u)dt,\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{4.15}$$

oraz

$$\overline{M}(u) = \int_0^\infty p(t,u)dt,\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{4.16}$$

jest średnim czasem przebywania systemu w stanie u, w przypadku gdy całki (4.13), (4.15) i (4.16) istnieją. Wtedy, zgodnie z (4.11), (4.12), (4.13) i (4.16), mamy

$$\bar{M}(u) = M(u) - M(u+1),\ u = 1,2,...,z-1, \quad \bar{M}(z) = M(z). \tag{4.17}$$

Definicja 4.3
Prawdopodobieństwo

$$r(t) = P(s(t) < r \mid s(0) = z) = P(T(r) \leq t),\ t \in (-\infty,\infty),$$

tego, że system w chwili t znajduje się w podzbiorze stanów gorszych niż stan krytyczny r, $r \in \{1,...,z\}$, przy warunku, że w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z, nazywamy funkcją ryzyka systemu lub krótko ryzykiem.

Przy tej definicji, uwzględniając (4.9), mamy

$$r(t) = 1 - P(s(t) \geq r \mid s(0) = z) = 1 - \boldsymbol{R}_n(t,r),\ t \in (-\infty,\infty). \tag{4.18}$$

Ponadto, jeśli τ jest chwilą, w której ryzyko przekroczy pewien dopuszczalny poziom δ, $\delta \in <0,1>$, to

$$\tau = r^{-1}(\delta), \tag{4.19}$$

gdzie $r^{-1}(t)$, jeśli istnieje, jest funkcją odwrotną funkcji ryzyka $r(t)$.

Definicja 4.4
System wielostanowy nazywamy szeregowym jeśli jego czas $T(u)$ przebywania w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = \min_{1 \leq i \leq n}\{T_i(u)\},\ u = 1,2,...,z.$$

Powyższa definicja oznacza, że wielostanowy system szeregowy znajduje się w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego elementy znajdują się w tym podzbiorze stanów. Łatwo można uzasadnić, że funkcja niezawodności wielostanowego systemu szeregowego określona jest wzorem

$$\bar{\boldsymbol{R}}_n(t,\cdot) = [1,\ \bar{\boldsymbol{R}}_n(t,1),...,\ \bar{\boldsymbol{R}}_n(t,u)\ ],$$

gdzie

$$\bar{\boldsymbol{R}}_n(t,u) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t,u),\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,...,z.$$

Definicja 4.5
Wielostanowy system szeregowy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy $T_i(u)$ przebywania jego elementów w podzbiorach stanów mają identyczną dystrybuantę

$$F_i(t,u) = F(t,u),\ u = 1,2,\ldots,z,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,n,$$

tzn., jeśli jego elementy E_i mają tę samą funkcję niezawodności

$$R_i(t,u) = R(t,u) = 1 - F(t,u),\ u = 1,2,\ldots,z,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Funkcja niezawodności jednorodnego wielostanowego systemu szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{\boldsymbol{R}}_n(t,\cdot) = [1,\ \overline{\boldsymbol{R}}_n(t,1),\ldots,\ \overline{\boldsymbol{R}}_n(t,u)\ ], \tag{4.20}$$

gdzie

$$\overline{\boldsymbol{R}}_n(t,u) = [R(t,u)]^n,\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\ldots,z. \tag{4.21}$$

Definicja 4.6
System wielostanowy nazywamy równoległym, jeśli jego czas $T(u)$ przebywania w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = \max_{1 \le i \le n}\{T_i(u)\},\ u = 1,2,\ldots,z.$$

Powyższa definicja oznacza, że wielostanowy system równoległy znajduje się w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$ wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jeden z jego elementów znajduje się w tym podzbiorze stanów. Łatwo jest uzasadnić, że funkcja niezawodności wielostanowego systemu równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}_n(t,\cdot) = [1,\boldsymbol{R}_n(t,1),\ldots,\boldsymbol{R}_n(t,u)\ ],$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}_n(t,u) = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t,u),\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\ldots,z.$$

Definicja 4.7
Wielostanowy system równoległy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy $T_i(u)$ przebywania jego elementów w podzbiorach stanów mają identyczną dystrybuantę

$$F_i(t,u) = F(t,u),\ u = 0,1,...,z,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n,$$

tzn., jeśli jego elementy E_i mają tę samą funkcję niezawodności

$$R_i(t,u) = R(t,u) = 1 - F(t,u),\ u = 1,2,...,z,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,n.$$

Funkcja niezawodności jednorodnego wielostanowego systemu równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}_n(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}_n(t,1), ..., \boldsymbol{R}_n(t,u)], \tag{4.22}$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}_n(t,u) = 1 - [F(t,u)]^n,\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,...,z. \tag{4.23}$$

Innymi podstawowymi wielostanowymi strukturami niezawodnościowymi są wielostanowe systemy szeregowo-równoległe oraz równoległo-szeregowe. Aby je zdefiniować przyjmujemy, że:

- E_{ij}, $i = 1,2,...,k_n, j = 1,2,...,l_i$, k_n, $l_1, l_2, ..., l_{k_n} \in N$, są elementami systemu,

- wszystkie elementy i rozważane systemy mają, tak jak poprzednio, zbiór stanów $\{0,1,...,z\}$,

- $T_{ij}(u)$, $i = 1,2, ..., k_n$, $j = 1,2,...,l_i$, k_n, $l_1, l_2, ..., l_{k_n} \in N$, są niezależnymi zmiennymi losowymi reprezentującymi czasy przebywania elementów E_{ij} w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$, podczas gdy elementy te w chwili $t = 0$ znajdowały się w stanie z,

- $e_{ij}(t)$ jest stanem elementu E_{ij} w chwili t, $t \in (-\infty,\infty)$, podczas gdy element ten w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z.

Definicja 4.8
Wektor

$$R_{ij}(t,\cdot) = [R_{ij}(t,0), R_{ij}(t,1), ..., R_{ij}(t,z)],\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,k_n, j = 1,2,...,l_i,$$

gdzie

$$R_{ij}(t,u) = P(e_{ij}(t) \geq u \mid e_{ij}(0) = z) = P(T_{ij}(u) > t),\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 0,1,\ldots,z,$$

jest prawdopodobieństwem tego, że element E_{ij} w chwili t, $t \in (-\infty,\infty)$, znajduje się w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$, przy warunku, że w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z, nazywamy wielostanową funkcją niezawodności elementu E_{ij}.

Definicja 4.9
System wielostanowy nazywamy szeregowo-równoległym, jeśli jego czas $T(u)$ przebywania w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = \max_{1\le i\le k_n}\{\min_{1\le j\le l_i}\{T_{ij}(u)\}\},\ u = 1,2,\ldots,z.$$

Funkcja niezawodności wielostanowego systemu szeregowo-równległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_n}(t,\cdot) = [1,\boldsymbol{R}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_n}(t,1),\ldots,\boldsymbol{R}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_n}(t,z)],$$

oraz

$$\boldsymbol{R}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_{k_n}}(t,u) = 1-\prod_{i=1}^{k}[1-\prod_{j=1}^{l_i} R_{ij}(t,u)],\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\ldots,z,$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów szeregowych systemu połączonych równolegle, natomiast l_i są liczbami elementów w podsystemach szeregowych.

Definicja 4.10
Wielostanowy system szeregowo-równoległy nazywamy jednorodnym, jeśli jego czasy $T_{ij}(u)$ przebywania w podzbiorach stanów mają identyczną dystrybuantę

$$F_{ij}(t,u) = F(t,u),\ u = 1,2,\ldots,z,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,k_n,\ j = 1,2,\ldots,l_i,$$

tzn., jeśli jego elementy E_{ij} mają tę samą funkcję niezawodności

$$R_{ij}(t,u) = R(t,u) = 1 - F(t,u),\ u = 1,2,\ldots,z,\ t \in (-\infty,\infty),$$
$$i = 1,2,\ldots,k_n,\ j = 1,2,\ldots,l_i.$$

Definicja 4.11
Wielostanowy system szeregowo-równoległy nazywamy regularnym, jeśli

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_{k_n} = l_n,\ l_n \in N.$$

Funkcja niezawodności jednorodnego regularnego systemu szeregowo-równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,1),\ldots,\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,z)], \tag{4.24}$$

oraz

$$\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t,u) = 1 - [1 - [R(t,u)]^{l_n}]^{k_n},\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,\ldots,z, \tag{4.25}$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów szeregowych systemu połączonych równolegle, natomiast l_n jest liczbą elementów w podsystemach szeregowych.

Definicja 4.12
System wielostanowy nazywamy równoległo-szeregowym, jeśli jego czas $T(u)$ przebywania w podzbiorze stanów $\{u,u+1,\ldots,z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = \min_{1\le i\le k_n}\{\max_{1\le j\le l_i}\{T_{ij}(u)\},\ u = 1,2,\ldots,z.$$

Można pokazać, że funkcja niezawodności wielostanowego systemu równoległo-szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_{k_n}}(t,\cdot) = [1, \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_n}(t,1),\ldots, \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_n}(t,z)],$$

oraz

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_1,l_2,\ldots,l_{k_n}}(t,u) = \prod_{i=1}^{k_n}[1-\prod_{j=1}^{l_i}F_{ij}(t,u)],\ t\in(-\infty,\infty),\ \mathrm{u} = 1,2,\ldots,z,$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów równoległych systemu połączonych szeregowo, natomiast l_i są liczbami elementów w podsystemach równoległych.

Definicja 4.13
Wielostanowy system równoległo-szeregowy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy $T_{ij}(u)$ przebywania jego elementów w podzbiorach stanów mają identyczną dystrybuantę

$$F_{ij}(t,u) = F(t,u),\ u = 1,2,...,z,\ t \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,...,k_n, j = 1,2,...,l_i,$$

tzn., jeśli jego elementy E_{ij} mają tę samą funkcję niezawodności

$$R_{ij}(t,u) = R(t,u) = 1 - F(t,u),\ u = 1,2,...,z,\ t \in (-\infty,\infty),$$
$$i = 1,2,...,k_n, j = 1,2,...,l_i.$$

Definicja 4.14
Wielostanowy system równoległo-szeregowy nazywamy regularnym, jeśli

$$l_1 = l_2 = \dots = l_{k_n} = l_n,\ l_n \in N.$$

Funkcja niezawodności jednorodnego regularnego systemu równoległo-szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1,\ \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,1),...,\ \overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,z)\ ], \tag{4.26}$$

oraz

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t,u) = [1 - [F(t,u)]^{l_n}]^{k_n},\ t \in (-\infty,\infty),\ u = 1,2,...,z, \tag{4.27}$$

gdzie k_n jest liczbą podsystemów równoległych systemu połączonych szeregowo, natomiast l_n jest liczbą elementów w podsystemach równoległych.

Definicja 4.15
Wielostanowy system szeregowy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z elementów a typów, $1 \le a \le n$, oraz frakcja elementów i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto

$$R^{(i)}(t,u) = 1 - F^{(i)}(t,u),\ i = 1,2,...,a,\ u = 1,2,...,z, \tag{4.28}$$

jest funkcją niezawodności elementu i-tego typu.

Można uzasadnić, że funkcja niezawodności wielostanowego niejednorodnego systemu szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{R}'_n(t,\cdot) = [1, \overline{R}'_n(t,1),..., \overline{R}'_n(t,z)], \tag{4.29}$$

gdzie

$$\overline{R}'_n(t,u) = \prod_{i=1}^{a}(R^{(i)}(t,u))^{q_i n}, \; t \in (-\infty,\infty), \; u = 1,2,...,z. \tag{4.30}$$

Definicja 4.16
Wielostanowy system równoległy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z a typów elementów, $1 \le a \le n$, oraz frakcja elementów i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto

$$R^{(i)}(t,u) = 1 - F^{(i)}(t,u), \; i = 1,2,...,a, \; u = 1,2,...,z, \tag{4.31}$$

jest funkcją niezawodności elementu i-tego typu.

Można uzasadnić, że funkcja niezawodności wielostanowego niejednorodnego systemu równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}'_n(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}'_n(t,1),..., \boldsymbol{R}'_n(t,z)], \tag{4.32}$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}'_n(t,u) = 1 - \prod_{i=1}^{a}(F^{(i)}(t,u))^{q_i n}, \; t \in (-\infty,\infty), \; u = 1,2,...,z. \tag{4.33}$$

Definicja 4.17
Wielostanowy regularny system szeregowo-równoległy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z podsystemów szeregowych a typów, $1 \le a \le k_n$, $k_n \in N$, oraz frakcja podsystemów szeregowych i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto podsystem szeregowy i-tego typu składa się z elementów e_i typów, $1 \le e_i \le l_n$, $l_n \in N$, o funkcjach niezawodności

$$R^{(i,j)}(t,u) = 1 - F^{(i,j)}(t,u), \; j = 1,2,...,e_i, \; u = 1,2,...,z,$$

oraz frakcja elementów j-tego typu w tym podsystemie jest równa p_{ij}, gdzie $p_{ij} > 0$ oraz $\sum_{j=1}^{e_i} p_{ij} = 1$.

Funkcja niezawodności wielostanowego niejednorodnego regularnego systemu szeregowo-równoległego określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,1), \ldots, \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,z)], \tag{4.34}$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t,u) = 1 - \prod_{i=1}^{a} [1-(R^{(i)}(t,u))^{l_n}]^{q_i k_n}, \; t \in (-\infty,\infty), \; u = 1,2,\ldots,z, \tag{4.35}$$

oraz

$$R^{(i)}(t,u) = \prod_{j=1}^{e_i} (R^{(i,j)}(t,u))^{p_{ij}}, \; i = 1,2,\ldots,a. \tag{4.36}$$

Definicja 4.18

Wielostanowy regularny system równoległo-szeregowy nazywamy niejednorodnym, jeśli składa się z podsystemów równoległych a typów, $1 \le a \le k_n$, $k_n \in N$, oraz frakcja podsystemów równoległych i-tego typu w systemie jest równa q_i, gdzie $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{a} q_i = 1$. Ponadto podsystem równoległy i-tego typu składa się z elementów e_i typów, $1 \le e_i \le l_n$, $l_n \in N$, o funkcjach niezawodności

$$R^{(i,j)}(t,u) = 1 - F^{(i,j)}(t,u), \; j = 1,2,\ldots,e_i, \; u = 1,2,\ldots,z,$$

oraz frakcja elementów j-tego typu w tym podsystemie jest równa p_{ij}, gdzie $p_{ij} > 0$ oraz $\sum_{j=1}^{e_i} p_{ij} = 1$.

Funkcja niezawodności wielostanowego regularnego niejednorodnego systemu równoległo-szeregowego określona jest wzorem

$$\overline{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,\cdot) = [1, \overline{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,1), \ldots, \overline{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t,z)], \tag{4.37}$$

gdzie

$$\bar{R}'_{k_n,l_n}(t,u) = \prod_{i=1}^{a}[1-(F^{(i)}(t,u))^{l_n}]^{q_i k_n}, \ t \in (-\infty,\infty), \ u = 1,2,...,z,$$

(4.38)

oraz

$$F^{(i)}(t,u) = \prod_{j=1}^{e_i}(F^{(i,j)}(t,u))^{p_{ij}}, \ i = 1,2,...,a. \tag{4.39}$$

W podejściu asymptotycznym do oceny niezawodności systemów wielostanowych interesują nas graniczne rozkłady standaryzowanej zmiennej losowej

$$(T(u) - b_n(u))/a_n(u), \ u = 1,2,...,z,$$

gdzie $T(u)$ jest czasem przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u,u+1,...,z\}$ oraz

$$a_n(u) > 0, \ b_n(u) \in (-\infty, \infty), \ u = 1,2,...,z,$$

są odpowiednio dobranymi liczbami.
Ponieważ

$$P((T(u) - b_n(u))/a_n(u) > t) = P(T(u) > a_n(u)t + b_n(u))$$

$$= \boldsymbol{R}_n(a_n(u)t + b_n(u),u), \ u = 1,2,...,z,$$

gdzie

$$\boldsymbol{R}_n(t,\cdot) = [1,\boldsymbol{R}_n(t,1),...,\boldsymbol{R}_n(t,z)], \ t \in (-\infty,\infty),$$

jest wielostanową funkcją niezawodności systemu, więc przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 4.19
Wektor

$$\mathfrak{R}(t,\cdot) = [1,\mathfrak{R}(t,1),...,\mathfrak{R}(t,z)], \ t \in (-\infty,\infty),$$

nazywamy graniczną wielostanową funkcją niezawodności systemu, jeśli istnieją stałe normujące $a_n(u) > 0$, $b_n(u) \in (-\infty,\infty)$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} R_n(a_n(u)t + b_n(u),u) = \mathfrak{R}(t,u) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}(u)},\ u = 1,2,\ldots,z,$$

gdzie $C_{\mathfrak{R}(u)}$ jest zbiorem punktów ciągłości funkcji niezawodności $\mathfrak{R}(t,u)$.

Przy tej definicji, dla dostatecznie dużych n, otrzymujemy następujący wzór przybliżony

$$R_n(t,\cdot) \cong \mathfrak{R}\left(\frac{t-b_n(u)}{a_n(u)};\cdot\right),$$

tzn.

$$[1, R_n(t,1),\ldots,R_n(t,z)]$$

$$\cong [1, \mathfrak{R}\left(\frac{t-b_n(1)}{a_n(1)},1\right),\ldots,\mathfrak{R}\left(\frac{t-b_n(z)}{a_n(z)},z\right)],\ t \in (-\infty,\infty). \qquad (4.40)$$

Krzysztof Kołowrocki

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Książka zawiera opis metod oraz wyniki badań niezawodności dużych systemów.

Rozważane są nieodnawialne systemy dwustanowe oraz systemy wielostanowe ze starzejącymi się elementami uszkadzającymi się niezależnie.

Ustalone zostały klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności dla dwu i wielostanowych jednorodnych i niejednorodnych systemów szeregowych, równoległych, szeregowo-równoległych i równoległo-szeregowych. Problem wyznaczania granicznych funkcji niezawodności dla tych systemów został rozwiązany całościowo przy dowolnych funkcjach niezawodności ich elementów.

Przytoczone zostały przykłady zastosowań wyników do oceny niezawodności modelowych dużych systemów dwustanowych. Wyniki dotyczące systemów wielostanowych zastosowane zostały do oszacowania charakterystyk niezawodnościowych dużych systemów transportu portowego i stoczniowego.

Sformułowane zostały problemy otwarte oraz wytyczona została perspektywa dalszych badań nad metodami oceny i optymalizacji niezawodności dużych systemów.

Monografia przeznaczona jest dla czytelników zainteresowanych badaniami niezawodności oraz bezpieczeństwa eksploatacji dużych systemów technicznych na etapach ich projektowania i eksploatacji.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-58-8

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl