POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ZARZĄDZANIA I PROCESÓW DECYZYJNYCH W GOSPODARCE

pod redakcją:
Jana Studzińskiego
Ludosława Drelichowskiego
Olgierda Hryniewicza

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ZARZĄDZANIA
I PROCESÓW DECYZYJNYCH W GOSPODARCE

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 31

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE ZARZĄDZANIA I PROCESÓW DECYZYJNYCH W GOSPODARCE

pod redakcją
Jana Studzińskiego, Ludosława Drelichowskiego
i Olgierda Hryniewicza

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju i zastosowań technologii, modeli i systemów informatycznych w gospodarce narodowej.

Recenzenci artykułów:

Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk
Dr inż. Lech Kruś
Dr inż. Edward Michalewski
Prof. dr hab. inż. Andrzej Straszak
Dr inż. Jan Studzinski
Dr inż. Sławomir Zadrożny

© Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa 2002

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6 01-447 Warszawa

Redakcja: Dział Informacji Naukowej i Wydawnictw IBS PAN
tel. 837-68-22
Barbara Kotuszewska

Druk: Zakład Poligraficzny Urzędu Statystycznego w Bydgoszczy
Nakład 200 egz. ark. wyd. 23,5 ark. druk. 20,0

ISBN 83-85847-73-1
ISSN 0208-8028

Rozdział 5

Techniki informatyczne w bankowości i finansach

KONCEPCJA OCENY RYZYKA INWESTYCYJNEGO: WARIACYJNO-KOWARIACYJNA METODA VALUE AT RISK*

Maciej Krawczak[1]
Antoni Miklewski[2]
[1]*Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademi Nauk*
Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
Newelska 6, 01-447 Warsawa
<krawczak@ibspan.waw.pl>
[2]Akademia Rolnicza w Szczecinie
Monte Cassino 16, 70-466 Szczecin
<miklewsk@erl.edu.pl>

The method Value at Risk is devoted to valuate highest expected lost within prescribed time horizon. The method is based on standard statistic techniques under the assumption that the financial market is stable, and the level of probability is prescribed. The method is used in a variety of application, e.g. the allocation of investments, financial decision support investments. In this paper the only one approach to the Value at Risk method has been reported, namely the parameterised variational-covariational method.

Key words: financial risk, risk management, value at risk.

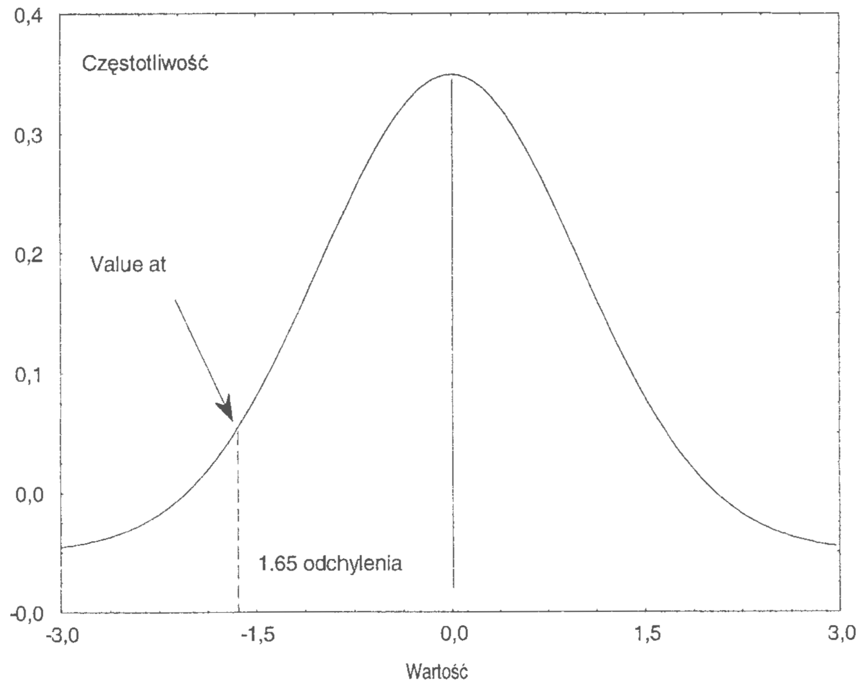
1. Wprowadzenie

Metoda Value at Risk (VaR) wykorzystuje standardowe techniki statystyczne do określenia największej oczekiwanej straty w określonym horyzoncie czasu, przy założeniu stabilnych warunków oraz przy z góry założonym poziomie prawdopodobieństwa. Metoda pomiaru VaR wykorzystywana jest w wielu sferach zarządzania ryzykiem rynkowym banku, między innymi w:

- procesie raportowania ryzyka rynkowego - stanowi podstawę oceny sytuacji oraz podejmowania działań inwestycyjnych,
- alokacji zasobów - umożliwia alokacje ograniczonych zasobów kapitałowych,
- oceny efektywności - pozwala na dokonywanie korekt efektywności o czynnik ponoszonego ryzyka.

* Praca wykonana częściowo w ramach grantu KBN 5H02D01720

Na Rysunku 1 przedstawiono graficzną interpretację miary *VaR*.



Rysunek 1: Graficzna interpretacja miary Value at Risk dla 95% poziomu prawdopodobieństwa oraz założonego normalnego rozkładu wartości

Pierwsze założenia dotyczą: horyzontu czasu oraz poziomu prawdopodobieństwa. Obydwa wymienione czynniki są ustalane arbitralnie oraz dostosowywane do potrzeb użytkownika.

W celu oszacowania konsekwencji złamania założenia o normalności rozkładu oszacujemy górną granicę dla 99% odsetka arbitralnego rozkładu F posiadającego skończoną wariancję przy zastosowaniu nierówności Czebyszewa (Smirnow, 1993):

$$P(|X-\mu|>k\sigma)\leq\frac{1}{k^2} \tag{1}$$

gdzie

μ - wartość średnia *X*, σ - odchylenie standardowe, *P*(.) - prawdopodobieństwo.

Zgodnie z (1) prawdopodobieństwo realizacji X poza przedziałem $[-\infty, \mu + k\sigma]$ wynosi co najwyżej $1/k^2$, zaś zdarzenie przeciwne, w którym X przyjmie wartość z przedziału $[-\infty, \mu + k\sigma]$ pozwala oszacować górną granicę prawdopodobieństwa $(1 - 1/k^2)$. Zakładając, że $\mu = 0$ otrzymamy

$$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \leq k\sigma \tag{2}$$

przy czym dla $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0.99$ $k = 10$.

Wartość VaR dla arbitralnego rozkładu F jest równa

$$VaR = F^{-1}(0.99)\delta V_M \sqrt{T}, \tag{3}$$

gdzie δ - parametr wrażliwości, T jest rozpatrywanym okresem.

Uwzględniając (2) dla $F^{-1}(0.99)$ otrzymujemy oszacowanie górnej granicy dla wskaźnika

$$\frac{VaR_F}{VaR_\Theta} = \frac{F^{-1}(0.99)}{\sigma_\Theta^{-1}(0.99)} \leq \frac{10\sigma}{2.33\sigma} = 4.29 \tag{4}$$

Dla dowolnego rodzaju rozkładu F posiadającego skończoną wariancję czynnik skalujący jest równy 4.29. Wartość 4.29 jest górną granicą dla 1% poziomu ufności, natomiast dla poziomu 5% wartość tego czynnika wynosi 2.72. Jako okres do pomiaru ryzyka przyjmuje się najdłuższy okres potrzebny do likwidacji pozycji generującej ryzyko.

Należy zwrócić uwagę na ważność wyboru poziomu prawdopodobieństwa, np. dla 95% poziomu istotności zakłada się, że oczekiwana strata większa od *VaR* może wystąpić raz na 20 miesięcy; podczas gdy dla 99% poziomu istotności – raz na 100 miesięcy.

Najczęściej stosowane są trzy różne podejścia do wyznaczania wartości VaR (Dowd, 1998): metoda wariacyjno-kowariacyjna, metoda historycznej symulacji i metoda Monte Carlo; w pracy ograniczymy się jedynie do rozważań dotyczących metody wariacyjno-kowariacyjnej.

2. Metoda wariacyjno-kowariacyjna

Wartość instrumentu finansowego na końcu rozpatrywanego założonego okresu jest równa

$$W = W_0(1+R) \tag{5}$$

gdzie W_0 oznacza wartość początkową, zaś R stopę zwrotu.

Dla najniższej możliwej wartości instrumentu finansowego przy założonym poziomie istotności wartość *VaR* wyznaczamy jako stratę wyrażoną w jednostkach pieniężnych w relacji do średniej wartości instrumentu:

$$VaR = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu), \tag{6}$$

gdzie μ oznacza oczekiwaną stopę zwrotu, R^* - odpowiednia stopa zwrotu.

Wartość *VaR* może być wyznaczana również w stosunku do zera

$$VaR = W_0 - W^* = -W_0 R^* \tag{7}$$

i sprowadza się do identyfikacji najmniejszej wartości W^* lub R^*.

W najbardziej ogólnej formie wartość *VaR* można wyznaczyć z funkcji rozkładu prawdopodobieństwa przyszłych wartości instrumentu finansowego $f(w)$. Przy założonym poziomie istotności c, pragniemy wyznaczyć najgorszą realizację W^*, tak aby prawdopodobieństwo przekroczenia tej wartości wynosiło c

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw \tag{8}$$

lub żeby prawdopodobieństwo osiągnięcia wartości mniejszej od W^*, $p = P(w \le W^*)$, równe było $1-c$

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \le W^*) = p. \tag{9}$$

Dla normalnego rozkładu przyszłych wartości W, wartość *VaR* można wyznaczyć bezpośrednio z oszacowanej wariancji zwrotów z instrumentu finansowego po uwzględnieniu czynnika wynikającego z przyjętego poziomu prawdopodobieństwa. Podejście takie określa się jako parametryczną metodę *VaR* – ze względu na estymację parametru σ.

Po przekształceniu funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $f(w)$ na standardową funkcję rozkładu normalnego $\Phi(\varepsilon)$ o nadziei matematycznej równej zero oraz wariancji równej 1, wartość W^* jest skorelowana z wartością R^* w następujący sposób:

$$W^* = W_0\left(1 + R^*\right) \tag{10}$$

Standaryzując R^* na rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ otrzymujemy

$$-\alpha = \frac{-\left|R^*\right| - \mu}{\sigma} \tag{11}$$

Podstawmy (11) do (9) otrzymując równanie (12)

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-\left|R^*\right|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \Phi(\varepsilon)d\varepsilon \tag{12}$$

z którego wynika, że w celu wyznaczenia wartości *VaR* wystarczy znaleźć wartość α. Przy założonym poziomie istotności c wystarczy odczytać z tablic rozkładu normalnego wartość α, a następnie z (11) wyznaczyć R^*

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu \tag{13}$$

Dla parametrów μ i σ wyrażonych w horyzoncie rocznym i okresie pomiaru *VaR* oznaczonym przez Δt lat otrzymujemy

$$VaR = -W_0\left(R^* - \mu\right) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{14}$$

lub

$$VaR = -W_0 R^* = W_0\left(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t\right) \tag{15}$$

Parametryczna metoda wyznaczania *VaR* jest możliwa do zastosowania dla innych niż normalny rozkładów, w których całkowite ryzyko może zostać wyrażone w postaci parametru σ.

Sposób wyznaczania wartości *VaR* dla pojedynczego instrumentu finansowego metodą wariacyjno-kowariacyjną prześledzimy na następujących przykładach.

3. Wartość *VaR* dla kontraktu terminowego na kurs walutowy

W celu wyznaczenia wartości *VaR* dla kontraktu terminowego musimy najpierw zapisać funkcję określającą wartość kontraktu w czasie t:

$$f_t = S_t e^{-y\tau} - K e^{-r\tau} \tag{16}$$

gdzie

f_t – bieżąca wartość kontraktu terminowego,
S_t – kurs walutowy w transakcji natychmiastowej,
K – kurs terminowy zawarty w kontrakcie,
r – wolna od ryzyka stopa zwrotu,
y – stopa zwrotu na aktywie,
τ – czas do wygaśnięcia kontraktu.

Ryzyko otwartej pozycji w kontrakcie *forward* może zostać oszacowane poprzez zróżniczkowanie równania (16) w stosunku do zawartych w równaniu źródeł ryzyka, tj. kursu natychmiastowego, stopy procentowej oraz stopy zwrotu z aktywów:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial y}dy = e^{-y\tau}dS + Ke^{-r\tau}\tau dr - Se^{-y\tau}\tau dy \qquad (17)$$

Równanie (17) przedstawia dekompozycje instrumentu finansowego na elementy składowe. Proces ten jest pierwszym krokiem pozwalającym na oszacowanie wartości *VaR*. Następnie należy założyć najistotniejszy czynnikiem generującym ryzyko, np. zmienność kursu natychmiastowego S, wówczas równanie (17) przyjmuje postać

$$df = \Delta dS \qquad (18)$$

gdzie $\Delta = e^{-r\tau}$.

Wartość *VaR* kontraktu terminowego jest liniowo zależna od wartości *VaR* kursu walutowego będącego podstawą kontraktu terminowego w następujący sposób

$$VaR(dS) = \alpha\sigma(dS) \qquad (19)$$

$$VaR(df) = |\Delta| VaR(dS) \qquad (20)$$

gdzie α jest funkcją wybranego poziomu istotności.

Uogólniając, można stwierdzić, iż kontrakt terminowy może być traktowany jako "portfel" czynników ryzyka, a jego wartość *VaR* zależy bezpośrednio od parametrów rozkładu elementów składowych "portfela" oraz występujących korelacji pomiędzy nimi.

4. Wyznaczenie wartości VaR dla kontraktu opcyjnego

Przykładem instrumentu finansowego charakteryzującego się nieliniowymi relacjami pomiędzy wartością *VaR* a czynnikami generującymi ryzyko jest kontrakt opcyjny. Podobnie jak w poprzedniej sekcji opisującej przypadek kontraktu terminowego rozważania dotyczące pomiaru ryzyka rozpoczniemy od zapisania funkcji ceny europejskiej opcji kupna i sprzedaży.

Korzystając z modyfikacji modelu wyceny opcji Blacka – Scholesa z 1973 r. dokonanej przez Mertona (1973) wartość europejskiego kontraktu kupna opisuje następująca zależność

$$c = Se^{-y\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{21}$$

gdzie N(d) jest dystrybuantą rozkładu normalnego dla wartości d_1 i d_2 opisanych jak następuje

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{Se^{-y\tau}}{Ke^{-r\tau}}\right)}{\sigma\sqrt{\sigma}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\,.$$

Wychodząc z teorii *parytetu opcyjnego* wartość europejskiego kontraktu sprzedaży można zapisać

$$p = Se^{-y\tau}[N(d_1) - 1] - Ke^{-r\tau}[N(d_2) - 1] \tag{22}$$

Model wyceny opcji Blacka – Scholesa uzależnia wartość kontraktu opcyjnego od kilku czynników ryzyka $c = f(S, \sigma, r, y)$. Zmiany wartości kontraktu opcyjnego można zapisać równaniem

$$dc = \frac{\partial f}{\partial S}dS + 0.5\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma}d\sigma + \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{23}$$

Pochodna cząstkowa opcji kupna ze względu na cenę natychmiastową *S* może być przedstawiona w następujący sposób (przy założeniu, że głównym czynnikiem determinującym wartość ponoszonego ryzyka jest zmienność ceny natychmiastowej aktywa będącego podstawą kontraktu opcyjnego)

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-y\tau} N(d_1) \tag{24}$$

Dla europejskiej opcji sprzedaży otrzymujemy

$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = e^{-y\tau} [N(d_1) - 1] \tag{25}$$

Dla całego portfela opcyjnego równania (24) lub (25) przyjmują postać

$$\Delta \hat{p} = \sum_{i=1}^{N} x_i \Delta_i \tag{26}$$

gdzie x_i oznacza liczbę kontraktów opcyjnych i-tego typu w portfelu.

Funkcję zmiany wartości kontraktu opcyjnego można przybliżyć rozwijając (23) w szereg Taylora

$$dc = \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 + \ldots \tag{27}$$

Dla europejskiej opcji kupna lub sprzedaży, wartość *gamma* może zostać wyznaczona analitycznie jak następuje

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{e^{-y\tau} \Phi(d_1)}{S \sigma \sqrt{\tau}} \tag{28}$$

Podejście *delta-gamma* pozwala na znacznie lepsze przybliżenie rzeczywistych zmian wartości kontraktu opcyjnego. Czynnik gamma jest równoważny mierze wypukłości (*convexity*) stosowanej w aproksymacji zmian cen instrumentów dłużnych. Generalizując można stwierdzić, iż kupno kontraktu opcyjnego prowadzi do otrzymania dodatniej wartości gamma natomiast sprzedaż kontraktu opcyjnego daje rezultat w postaci negatywnej wartości gamma. Dotychczasowe rozważania wskazują, iż pomiar ryzyka kontraktów opcyjnych charakteryzujących się dużymi wartościami gamma nie może zostać dokonany z wykorzystaniem liniowych przybliżeń *VaR*, tj. tylko na podstawie ich wartości delta.

Wykorzystując przeprowadzone powyżej rozważania dotyczące ryzyka kontraktu opcyjnego przedstawimy metodę aproksymacji wartości *VaR* z wykorzystaniem podejścia delta-gamma.

Biorąc wariancję równania (27) otrzymujemy

$$V(dc) = \Delta^2 V(dS) + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 V(dS^2) + 2\left(\Delta \frac{1}{2}\Gamma\right) Cov(dS, dS^2) \tag{29}$$

Przyjmując założenie o normalności rozkładu zmiennej dS równanie (29) można zapisać w formie uproszczonej

$$V(dc) = \Delta^2 V(dS) + \frac{1}{2}[\Gamma V(dS)]^2 \tag{30}$$

Oznaczając przez σ odchylenie standardowe zmian cen, $\sigma(dS/S)$ otrzymujemy parametryczną miarę *VaR* dla kontraktu opcyjnego

$$VaR(dc) = \alpha\sqrt{\Delta^2 S^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}\left[\Gamma S^2 \sigma^2\right]^2} \tag{31}$$

5. Wnioski

Metoda wariacyjno-kowariacyjna jest najprostszą z opracowanych metod wyznaczania wartości *VaR*. Ceną tej prostoty jest szereg następujących wad tej metody, a w szczególności:

- metoda ta nie pozwala uchwycić ryzyka związanego z nietypowymi zdarzeniami (Danielsson, de Vries, 1997),
- metoda bazuje na rozkładach prawdopodobieństwa, których parametry szacowane są na podstawie danych historycznych,
- metoda bazuje na założeniu normalności rozkładów,
- metoda pozwala na dokładny pomiar ryzyka instrumentów finansowych charakteryzujących się liniowymi zależnościami pomiędzy wartością a czynnikami ryzyka, natomiast dla nieliniowych instrumentów zastosowanie rozwinięcia szeregu Taylora pozwala na przybliżoną ocenę ryzyka.

Pomimo swych ograniczeń metoda ta oferuje stosunkowo dużą dokładność wyników uzyskiwaną stosunkowo niewielkim nakładem obliczeniowym.

Literatura

Danielsson J, de Vries C. (1997) *Extreme Returns, Tail Estimation, and Value-at-Risk*, Working Papers, London School of Economics and Institute of Economic Studies at Univercity of Iceland.

Dowd K. (1998) *Beyond value at risk. The new science of risk management.* John Wiley & Sons, Chichester.

Jorion P. (1997) *Value at Risk. The new benchmark for controlling market risk.* University of California, Irvine.

Krawczak, M., Miklewski, A., Jakubowski, A., Konieczny, P. (2000). *Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym*. Polish Academy of Sciences, Systems Research 25.

Kupiec P. (1995) *Techniques for verifying the accuracy of risk measurment models*, Journal of Derivatives 2

Matten C. (1996) *Managing Bank Capital. Capital Allocation and performance measurement.*, John Wilcy&Sons, Chichester.

Merton R. (1973) *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4.

Smirnow N. W., Dunin-Barkowski I. W. (1993) *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych.*, PWN, Warszawa.

Tarczyński W. (1996) *Analiza portfelowa na giełdzie papierów wartościowych*, PTE, Szczecin.

ISSN 0208-8028
ISBN 83-85847-73-1

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN

ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl