XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFCZYK
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Druk: ARGRAF, Warszawa

METODY STOCHASTYCZNE
– PROBLEMY NIEDETERMINISTYCZNE

NIEDETERMINISTYCZNE UKŁADY RÓWNAŃ W ANALIZIE STEROWANIA SYSTEMAMI PRODUKCYJNYMI CZ. 1 – LINIOWE ZAGADNIENIA PRZEDZIAŁOWE I ROZMYTE†

Longin STOLC

Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Katedra Automatyki
ul. A. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, e-mail:lstolc@ely.pg.gda.pl

Streszczenie: W pracy rozpatruje się zagadnienia niedeterministycznych układów równań liniowych stanowiących jeden z istotnych elementów rozwiązania zagadnienia sterowania produkcją systemów przemysłowych. Problem ten występuje przy badaniu przyjmowanego do realizacji bazowego rozwiązania liniowego zagadnienia planowania obciążeń systemu. W przypadku modelu niedeterministycznego planowania, niepewność przenosi się na rozwiązanie jak również generuje niepewność w modelach ograniczeń przy malejącym horyzoncie czasowym sterowania (podejście wielohoryzontowe). Analiza rozwiązania odpowiedniego zagadnienia bazowego dostarcza informacji o krytycznych punktach systemu. W części pierwszej pracy przedstawia się zagadnienia przedziałowe oraz rozmyte.

Słowa kluczowe: Sterowanie systemami produkcyjnymi, Warunki niepewności, Niedeterministyczne układy równań.

1. WPROWADZENIE

Problem sterowania produkcją w SP polega na wyborze takich dopuszczalnych decyzji kształtujących działalność SP w przedziale czasu $[t_0, t_0+T_p]$, przy których stawiane SP zadania realizowane są w sposób możliwie najlepszy [1, 6, 7]. W pracach [5, 6, 7]] dotyczących operatywnego sterowania jak również w [1, 9] dotyczących planowania czy też sterowania produkcją, proponuje się metodę wielohoryzontową [4]. W metodzie tej rozwiązanie problemu sprowadzane jest do rozwiązania ciągu $p+1$ zagadnień optymalizacyjnych, z których każdy definiowany jest dla częściowego horyzontu czasowego sterowania T_q, $q=0,...,p$. Problem taki można zapisać:

$$\max_{\substack{\mathbf{d}_{q\mu}\in Z_q(t_\mu) \\ t_\mu\in[t_0,\, t_0+T_q]}} \left\{Q_q\left(t_0, t_0+T_q\right)\right\}, \quad \mu=\overline{0, n_q-1} \tag{1}$$

gdzie:

$\mathbf{d}_{q\mu}$ – wektor decyzyjny obliczany w chwili t_μ składający się z istotnych dla $[t_0, t_0+T_q]$ składowych wektora decyzyjnego,

n_q – liczba przedziałów dyskretyzacji

$\mathbf{Z}_q(t_\mu)$ – zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla $\mathbf{d}_{q\mu}$, określony w chwili t_μ w problemie częściowym dla T_q,

$Q_q(t_0, t_0+T_q)$ – miara jakości realizacji zadań SP.

Problemy dla częściowych horyzontów czasowych sterowania T_q powiązane są ze sobą za pomocą warunków na wektor stanu SP w chwili t_0+T_q:

$$\mathbf{x}_q\left(t_0+T_q\right)= X^*_{q+1}\left(t_0+T_q\right) \tag{2}$$

gdzie:

$\mathbf{x}_q(t_0+T_q)$ – wektor stanu SP w chwili t_0+T_q w problemie dla T_q,

$X^*_{q+1}(t_0+T_q)$ – zbiór wymagań na wektor stanu SP w chwili t_0+T_q określony na podstawie rozwiązania

Zadania produkcyjne dla całego systemu definiowane są przez podanie ilości poszczególnych produktów zagregowanych w określonych podprzedziałach przedziału czasu $[t_0, t_0+T_p]$ bez podawania warunków na ich przebieg w czasie [4, 5].

Decyzje, które należy wyznaczyć w problemie sterowania SP można podzielić na decyzje o charakterze strukturalnym (dotyczące np. przełączeń reżimów pracy) czy o charakterze wartościowym (określenie obciążeń, rozpływu materiałów itp.). Zakładając, że modele można opisać przy pomocy zależności statycznych otrzymuje się w ogólnym przypadku modele mieszanego programowania nieliniowego. Ze względu na brak efektywnych metod umożliwiających jego rozwiązanie w pracach [4, 5, 6] proponuje się sprowadzenie problemu optymalizacyjnego do szeregowego rozwiązania dwóch różnych podproblemów:

- podproblem wyznaczania wielkości o charakterze wartościowym – określenie optymalnych planów produkcji SP w podprzedziałach przedziału czasu $[t_0, t_0+T_p]$,
- podproblem wyznaczania decyzji o charakterze strukturalnym w oparciu o rozwiązanie podproblemu planowania w SP.

W pracach dotyczących ogólnie planowania produkcji czy też budowy modeli dla celów planowania [3,4] przyjmuje się liniowe modele statyczne.

W [3, 4, 5] model liniowy proponuje się dla horyzontu sterowania od jednej doby do dwóch lat.

†Praca powstała częściowo w ramach projektu 4T11A 009 25 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych

W pracach dotyczących sterowania operatywnego [1, 6, 10, 11] dla problemu planowania również przyjmuje się statyczny model liniowy. Rozwiązanie tego problemu sprowadza się do rozwiązania odpowiednich zagadnień programowania liniowego.
W pracach dotyczących sterowania systemami w warunkach niepewności [1, 10, 11, 12], niepewność wprowadzana jest do modelu (1) w podproblemie planowania w postaci niedetrministycznego zagadnienia programowania liniowego. W zależności od stopnia niepewności oraz posiadanej o zakłóceniach wiedzy buduje się modele stochastyczne, rozmyte bądź przedziałowe.
W dalszej części przedstawia się podejście do rozwiązania zagadnień niedeterministycznych układów równań liniowych stanowiących układ równań bazowych otrzymanych z rozwiązania problemu planowania dla wartości preferowanych (oczekiwanych przez decydenta) parametrów modeli niedeterministycznych. W wyniku rozwiązania niepewność danych w modelu planowania dla horyzontu T_{q+1} przenosi się na niepewność rozwiązania i w konsekwencji na:

- niepewność ograniczeń modeli dla T_q w (2) generowanych przez rozwiązanie problemu dla T_{q+1},
- niepewność składowych wektora decyzyjnego przyjmowanego do realizacji w chwili t_μ.

Znajomość niedeterministycznego rozwiązania problemu planowania pozwala na:

- badanie rozwiązań minimalizujących i maksymalizujących z obrębie dopuszczalności otrzymanego rozwiązania bazowego [9, 10],
- określenie miary dopuszczalności (realizowalności) otrzymanych rozwiązań [1, 8, 9, 10, 11, 12, 13],
- badanie wpływu poszczególnych zakłóceń na wektor decyzyjny i określanie czynników krytycznych.

Elementem podstawowym w analizie wpływu niepewności na rozwiązanie problemu sterowania w systemie produkcyjnym jest badanie rozwiązań równań bazowych zagadnienia planowania obciążeń systemu. W dalszych częściach pracy rozpatruje się układy równań nie definiując ich znaczenia fizycznego. Analiza rozwiązań dla celów sterowania stanowi odrębny problem i nie jest rozpatrywana w niniejszej pracy.

2. PRZEDZIAŁOWE I ROZMYTE UKŁADY RÓWNAŃ

Niech dany jest układ równań niedeterministycznych

$$\tilde{\mathbf{A}}\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \tag{3}$$

gdzie:

$\tilde{\mathbf{A}}$ – macierz współczynników o elementach niedeterministycznych,
$\tilde{\mathbf{b}}$ – niedeterministyczny wektor wyrazów wolnych,
$(*)$ – operator mnożenia na liczbach niedeterministycznych.

W zależności od rodzaju modelu wynikającego z wiedzy o systemie i dostępnych danych, model (3) opisany jest poprzez przedziałowe czy też rozmyte współczynniki układu równań.

Rozwiązanie, uwzględniające przenoszenie się niepewności współczynników na zmienne rozwiązania można zapisać [3, 9, 13]:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} &\rightarrow \left(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{A}}\right)(*)\,\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{b}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{*}(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}^{*}\end{aligned} \tag{4}$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ – macierz odwrotna do $\tilde{\mathbf{A}}$,
$\tilde{\mathbf{A}}^{*}$ – iloczyn macierzy $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{A}}$,
$\tilde{\mathbf{b}}^{*}$ – iloczyn $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{b}}$.

W przypadku niepewności zapisanej we współczynnikach $\tilde{\mathbf{A}}$, określenie niedeterministycznej macierzy odwrotnej $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ jest niemożliwe. Wynika to z faktu, że może zachodzić:

$$\underset{\mathbf{A}\in\tilde{\mathbf{A}}}{\exists}\ \det\mathbf{A} = 0 \tag{5}$$

czyli istnieją takie realizacje $\mathbf{A}$, że macierz odwrotna nie istnieje.
Przyjmijmy, że dla każdego zagadnienia dane są zdeterminowane wartości preferowane ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{b}}$) współczynników układów równań $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{b}}$. Dla każdego z zagadnień wartości te określane mogą być odmiennie. Ich wartości w poszczególnych przypadkach zależą od rodzaju zmiennych oraz ich znaczenia fizycznego w modelowanym procesie rzeczywistym.
Dla wartości preferowanych zachodzi:

$$\hat{\mathbf{A}} \in \left[\inf\tilde{\mathbf{A}}\ ,\ \sup\tilde{\mathbf{A}}\right] \wedge \hat{\mathbf{b}} \in \left[\inf\tilde{\mathbf{b}}\ ,\ \sup\tilde{\mathbf{b}}\right]; \tag{6}$$

gdzie: $\inf\tilde{\mathbf{A}}, \inf\tilde{\mathbf{b}}$ – kresy dolne niepewności $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{b}}$,
$\sup\tilde{\mathbf{A}}, \sup\tilde{\mathbf{b}}$ – kresy górne niepewności $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{b}}$.

Przyjmijmy dalej, że macierz wartości preferowanych $\hat{\mathbf{A}}$ nie jest macierzą osobliwą:

$$\det\hat{\mathbf{A}} \neq 0, \quad \operatorname{rank}\hat{\mathbf{A}} = m \tag{7}$$

zatem macierz $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ istnieje.
Wyznaczmy rozwiązanie (3) przyjmując do obliczeń (4) wartości preferowane:

$$\hat{\mathbf{A}}\,\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\,\hat{\mathbf{b}} \tag{8}$$

Dla wartości tych mamy:

$$\hat{\mathbf{A}}^{*} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_m\,,\quad \hat{\mathbf{b}}^{*} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\,\hat{\mathbf{b}} \tag{9}$$

gdzie: $\mathbf{1}_m$ – macierz jednostkowa $m\times m$.

Ze względu ma brak jednoznacznego istnienia macierzy odwrotnej (5) dokonajmy teraz przekształcenia (4) dla macierzy wartości preferowanych $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\begin{cases}\tilde{\mathbf{A}}\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{*}(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}^{*} \\ \tilde{\mathbf{A}}^{*} = \left(\hat{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{A}}\right) = \tilde{\mathbf{1}}_m \\ \tilde{\mathbf{b}}^{*} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{b}}\end{cases} \tag{10}$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{1}}_m$ – niedeterministyczna macierz jednostkowa $m \times m$.

Na podstawie (10) mamy rozwiązanie w niedeterministycznej postaci uwikłanej:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{1}}_m\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}^* \rightarrow \\ \rightarrow \operatorname{diag}\tilde{\mathbf{1}}_m\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}^*(-)\operatorname{offdiag}\tilde{\mathbf{1}}_m\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}}^*\end{gathered} \tag{11}$$

$$\underset{k=1,m}{\forall}\ \tilde{l}_{kk}(*)\,\tilde{x}_k = \tilde{b}_k^*(-)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\tilde{l}_{kj}(*)\,\tilde{x}_j^* \tag{12}$$

i dalej (oczywiście operator dzielenia przez $\tilde{l}_{kk}$ powinien być (/)):

$$\underset{k=1,m}{\forall}\ \tilde{x}_k = \frac{\tilde{b}_k^*(-)\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\tilde{l}_{kj}(*)\,\tilde{x}_j^*}{\tilde{l}_{kk}}, \tag{13}$$

co w przybliżeniu (elementy pozadiagonalne macierzy $\tilde{\mathbf{1}}_m$ w otoczeniu zera, diagonalne w otoczeniu 1) daje:

$$\underset{k=1,m}{\forall}\ \tilde{x}_k \approx \frac{\tilde{b}_k^*(-)\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\tilde{l}_{kj}(*)\,\tilde{b}_j^*}{\tilde{l}_{kk}}, \tag{14}$$

gdzie zgodnie z (10) w (14) jest:

$$\underset{k=1,m}{\forall}\ \tilde{b}_k^* = \sum_{j=1}^{m}\hat{a}_{kj}^{-1}(*)\,\tilde{b}_k, \tag{15}$$

$$\underset{k,j=1,m}{\forall}\ \tilde{l}_{kj}^* = \sum_{i=1}^{m}\hat{a}_{ki}^{-1}(*)\,\tilde{a}_{ij}. \tag{16}$$

Dla elementów niedeterministycznej macierzy jednostkowej $\tilde{\mathbf{1}}_m$ mamy:

$$\underset{k=1,m}{\forall}\ 1 \in \tilde{l}_{kk} \ \wedge \underset{\substack{k,j=1,m\\ k\neq j}}{\forall}\ 0 \in \tilde{l}_{kj}, \tag{17}$$

przy czym wartości $l_{kk} = 1$ oraz $l_{kj} = 0$ są wartościami uzyskanymi zgodnie z (9) dla wartości preferowanych.
Jak widać w (13) i (17), warunkiem koniecznym i dostatecznym aby układ równań posiadał rozwiązania jest:

$$\underset{k=1,m}{\forall}\ 0 \notin \tilde{l}_{kk} \Leftrightarrow \underset{k=1,m}{\forall}\ \inf \tilde{l}_{kk} > 0. \tag{18}$$

Dalej w celu określenia rozwiązania problemu (4) zgodnie z (14) w zależności od rodzaju opisu (przedziałowy bądź rozmyty) przyjmuje się odpowiednią arytmetykę [2, 8].

3. PRZEDZIAŁOWY UKŁAD RÓWNAŃ

Zagadnienie przedziałowe może być rozwiązywane w oparciu o arytmetykę wprowadzoną przez Moora przy badaniu propagacji błędów w obliczeniach numerycznych [8].
Niech będzie dany układ równań (3), dla którego współczynniki dane są w postaci przedziałowej:

$$\underset{k,j=1,m}{\forall}\ \tilde{a}_{kl} = \left[a_{kj}^l, a_{kj}^r\right] \ \wedge \underset{k=1,m}{\forall}\ \tilde{b}_k = \left[b_k^l, b_k^r\right] \tag{19}$$

oraz macierz $\hat{\mathbf{A}}$ i wektor $\hat{\mathbf{b}}$ wartości preferowanych.
Dla liczb tych zachodzi:

$$\underset{k,j=1,m}{\forall}\ \hat{a}_{kj} \in \left[a_{kj}^l, a_{kj}^r\right] \ \wedge \underset{k=1,m}{\forall}\ \hat{b}_k \in \left[b_k^l, b_k^r\right] \tag{20}$$

Jeśli brak jakichkolwiek preferencji do wyboru wartości $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{b}}$ proponuje się przyjmować wartości środkowe przedziałów:

$$\underset{k,j=1,m}{\forall}\ \hat{a}_{kj} = \frac{a_{kj}^l + a_{kj}^r}{2} \ \wedge \underset{k=1,m}{\forall}\ \hat{b}_k = \frac{b_k^l + b_k^r}{2}. \tag{21}$$

W przypadku, gdy istnieją określone (preferowane) wartości $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}})$ oraz dane są odchyłki lewo $(\Delta\mathbf{A}^-, \Delta\mathbf{b}^-)$ i prawostronne $(\Delta\mathbf{A}^+, \Delta\mathbf{b}^+)$ wówczas definiowane są przedziały (19):

$$\underset{k,j=1,m}{\forall}\ a_{kj}^l = \hat{a}_{kj} - \Delta a_{kj}^- \ \wedge \underset{k=1,m}{\forall}\ b_k^l = \hat{b}_k - \Delta b_k^-, \tag{22}$$

$$\underset{k,j=1,m}{\forall}\ a_{kj}^r = \hat{a}_{kj} + \Delta a_{kj}^+ \ \wedge \underset{k=1,m}{\forall}\ b_k^r = \hat{b}_k + \Delta b_k^+. \tag{23}$$

Podane przykłady wyboru wartości preferowanych (21) czy definiowania przedziałów (22) i (23) nie wyczerpują wszystkich możliwości.
Niech dla $\hat{\mathbf{A}}$ będzie dana macierz odwrotna $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$. Wyznaczmy przedziały odpowiednio dla $\tilde{\mathbf{1}}_m$ oraz $\tilde{\mathbf{b}}^*$.
Zgodnie z (10) mamy:
- dla $\tilde{\mathbf{1}}_m$ jest:

$$\begin{gathered}\underset{k,j=1,m}{\forall}\ \tilde{l}_{kj} = \left[\tilde{l}_{kj}^l, \tilde{l}_{kj}^r\right] = \sum_{i=1}^{m}\left[\hat{a}_{ki}^{-1}, \hat{a}_{ki}^{-1}\right](*)\left[\tilde{a}_{ij}^l, \tilde{a}_{ij}^r\right] = \\ \left[\sum_{i=1}^{m}\min\left(\hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{a}_{ij}^l, \hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{a}_{ij}^r\right), \sum_{i=1}^{m}\max\left(\hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{a}_{ij}^l, \hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{a}_{ij}^r\right)\right],\end{gathered} \tag{24}$$

- oraz dla $\tilde{\mathbf{b}}^*$:

$$\begin{gathered}\underset{k=1,m}{\forall}\ \tilde{b}_k^* = \left[\tilde{b}_k^l, \tilde{b}_k^r\right] = \sum_{i=1}^{m}\left[\hat{a}_{ki}^{-1}, \hat{a}_{ki}^{-1}\right](*)\left[\tilde{b}_i^l, \tilde{b}_i^r\right] = \\ \left[\sum_{i=1}^{m}\min\left(\hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{b}_i^l, \hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{b}_i^r\right), \sum_{i=1}^{m}\max\left(\hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{b}_i^l, \hat{a}_{ki}^{-1}\tilde{b}_i^r\right)\right].\end{gathered} \tag{25}$$

Przedziały niepewności dla rozwiązania $\tilde{\mathbf{x}}$ zgodnie z (13) wyznaczamy:

$$\underset{k=1,m}{\forall} \tilde{x}_k = \left[\tilde{x}_k^l, \tilde{x}_k^r\right] = \left(\tilde{b}_k^*(-)\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\tilde{l}_{kj}(*)\tilde{b}_j^*\right) \bigg/ \tilde{l}_{kk} =$$
$$\left(\left[\tilde{b}_k^{*l}, \tilde{b}_k^{*r}\right](-)\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\left[\tilde{l}_{kj}^l, \tilde{l}_{kj}^r\right](*)\left[\tilde{b}_j^{*l}, \tilde{b}_j^{*r}\right]\right) \bigg/ \left[\tilde{l}_{kk}^l, \tilde{l}_{kk}^r\right] \tag{26}$$

Dalej kresy przedziałów dla $\tilde{x}_k$ wynoszą odpowiednio:

$$\underset{k=1,m}{\forall} \tilde{x}_k^l = \min_{\tilde{l}_{kk}^* = \tilde{l}_{kk}^l \vee \tilde{l}_{kk}^* = \tilde{l}_{kk}^r} \left(\frac{\tilde{b}_k^{*l} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\max\left(\tilde{l}_{kj}^l\tilde{b}_j^{*l}, \tilde{l}_{kj}^l\tilde{b}_j^{*r}, \tilde{l}_{kj}^r\tilde{b}_j^{*l}, \tilde{l}_{kj}^r\tilde{b}_j^{*r}\right)}{\tilde{l}_{kk}^*}\right), \tag{27}$$

oraz

$$\underset{k=1,m}{\forall} \tilde{x}_k^r = \max_{\tilde{l}_{kk}^* = \tilde{l}_{kk}^l \vee \tilde{l}_{kk}^* = \tilde{l}_{kk}^r} \left(\frac{\tilde{b}_k^{*r} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\min\left(\tilde{l}_{kj}^l\tilde{b}_j^{*l}, \tilde{l}_{kj}^l\tilde{b}_j^{*r}, \tilde{l}_{kj}^r\tilde{b}_j^{*l}, \tilde{l}_{kj}^r\tilde{b}_j^{*r}\right)}{\tilde{l}_{kk}^*}\right) \tag{28}$$

Oszacowania kresów przedziałów zgodnie z (27) i (28) jest wystarczające, jeśli macierz $\tilde{\mathbf{l}}_m$ jest silnie diagonalnie dominująca dla wszystkich możliwych realizacji macierzy $\mathbf{A}$. Uwzględniając, że dla wartości preferowanych $\hat{\mathbf{A}}$ mamy zdeterminowaną macierz jednostkową, oraz że niepewność współczynników macierzy równań w zagadnieniu planowania obciążeń systemu wynika głównie ze zmian wskaźników jakości surowców oraz zmian wskaźników uzysku poszczególnych instalacji technologicznych, zakres przedziałów niepewności w stosunku do wartości preferowanych jest mały. Można przyjąć, że przybliżenie (27) i (28) jest w praktyce wystarczające.

4. ROZMYTY UKŁAD RÓWNAŃ

Rozpatrywany jest przypadek, kiedy posiadane informacje o uwarunkowaniach pracy systemu pozwalają na większą dokładność niż tylko podanie przedziałów zmienności współczynników, ale jednocześnie nie może być precyzyjnie określony charakter tych zmian. W przypadku tym proponuje się przyjąć (3) jako układ równań liniowych o rozmytych współczynnikach, gdzie elementy $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{b}}$ dane są jako liczby rozmyte ze zdeterminowanymi funkcjami przynależności $\mu(\bullet)$.
W zagadnieniu przedziałowym rozwiązanie określane jest podobnie jak dane wejściowe w postaci przedziałowej. W przypadku zagadnienia rozmytego niepewność danych podana w postaci rozmytej przenosi się na rozmyte rozwiązanie. Jeśli w przypadku przedziałowym, określenie postaci przynależności wartości współczynnika do określonego przedziału jest jednoznaczne, to w przypadku rozmytym powstaje problem określenia postaci funkcji przynależności jak również stosowania odpowiedniej arytmetyki liczb rozmytych. Stosując zasadę rozszerzania Zadecha można dostać dokładne wyniki operacji, jednak jest to podejście bardzo pracochłonne. Z tego też względu w zastosowaniach praktycznych stosowane są formy uproszczone operacji arytmetycznych oparte na reprezentacji liczb rozmytych typu ***L-R***.
W zastosowaniu do rozpatrywanego w pracy zagadnienia przyjęto formy uproszczone definiowane dla wartości charakterystycznych liczb rozmytych [2].
Niech będzie dany układ równań (3), którego współczynniki dane są w postaci przedziałów rozmytych „flat L-R":

$$\underset{k,j=1,m}{\forall} \tilde{a}_{kl} = \left(l_{a_{kj}}, m_{a_{kj}}^l, m_{a_{kj}}^r, r_{a_{kj}}\right)_{LR}$$
$$\wedge \underset{k=1,m}{\forall} \tilde{b}_k = \left(l_{b_k}, m_{b_k}^l, m_{b_k}^r, r_{b_k}\right)_{LR}, \tag{29}$$

oraz macierz $\hat{\mathbf{A}}$ i wektor $\hat{\mathbf{b}}$ wartości preferowanych. Dla wartości tych jest:

$$\underset{k,j=1,m}{\forall} \hat{a}_{kj} \in \left[l_{a_{kj}}, r_{a_{kj}}\right] \wedge \underset{k=1,m}{\forall} \hat{b}_k \in \left[l_{b_k}, r_{b_k}\right] \tag{30}$$

Dla zagadnień rozmytych proponuje się [1, 3, 13] przyjmować jako wartości preferowane wartości modalne reprezentacji parametrycznej. W przypadku trójkątnych liczb rozmytych mamy:

$$\underset{k,j=1,m}{\forall} \tilde{a}_{kj} = \left(m_{a_{kj}}, \alpha_{a_{kj}}, \beta_{a_{kj}}\right)_{LR} \rightarrow \hat{a}_{kj} = m_{a_{kj}}$$
$$\underset{k,j=1,m}{\forall} \tilde{b}_k = \left(m_{b_k}, \alpha_{b_k}, \beta_{b_k}\right)_{LR} \rightarrow \underset{k=1,m}{\forall} \hat{b}_k = m_{b_k}. \tag{31}$$

oraz dla postaci trapezowej liczb rozmytych (29) jest:

$$\underset{k,j=1,m}{\forall} \tilde{a}_{kj} = \left(l_{a_{kj}}, m_{a_{kj}}^l, m_{a_{kj}}^r, r_{a_{kj}}\right)_{LR} \rightarrow$$
$$\rightarrow \hat{a}_{kj} = \frac{m_{a_{kj}}^l + m_{a_{kj}}^r}{2}$$
$$\underset{k,j=1,m}{\forall} \tilde{b}_k = \left(l_{b_{kj}}, m_{b_{kj}}^l, m_{b_{kj}}^r, r_{b_{kj}}\right)_{LR} \rightarrow$$
$$\rightarrow \hat{b}_k = \frac{m_{b_k}^l + m_{b_k}^r}{2}. \tag{32}$$

Niech dla $\hat{\mathbf{A}}$ określonego zgodnie z (32) stosownie do reprezentacji (29) będzie dana macierz odwrotna $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$. Przyjmując definicje uproszczonych operacji arytmetycznych [2] ograniczonych do operacji na wartościach parametrów charakterystycznych liczb rozmytych, oraz zapisu wartości preferowanych (32) można w prosty sposób wyprowadzić zależności na wartości (10) – (16) parametrów rozwiązania.
W efekcie otrzymamy postać rozmytą macierzy jednostkowej:

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{A}}_{LR} = \tilde{\mathbf{1}}_{LR} \rightarrow \qquad \underset{k,j=\overline{1,m}}{\forall} \tilde{1}_{kj} = \left(l_{1_{kj}}, m^{l}_{1_{kj}}, m^{r}_{1_{kj}}, r_{1_{kj}}\right)_{LR} \tag{33}$$

przekształconego wektora wyrazów wolnych:

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{b}}_{LR} = \tilde{\mathbf{b}}^{*}_{LR} \rightarrow \qquad \underset{k=\overline{1,m}}{\forall} \tilde{b}^{*}_{k} = \left(l_{b^{*}_{k}}, m^{l}_{b^{*}_{k}}, m^{r}_{b^{*}_{k}}, r_{b^{*}_{k}}\right)_{LR} \tag{34}$$

oraz rozwiązania:

$$\underset{k=\overline{1,m}}{\forall} \tilde{x}^{*}_{k} = \left(l_{x_k}, m^{l}_{x_k}, m^{r}_{x_k}, r_{x_k}\right)_{LR} \tag{35}$$

Innym podejściem prowadzącym do wyznaczenia parametrów charakterystycznych rozmytego rozwiązania w (33), (34) i ostatecznie (35) jest zastosowanie α-przekrojów.
Przyjmując określone w (31) wartości preferowane i na podstawie (29) przedziały liczbowe:

$$\begin{gathered}
\underset{k,j=\overline{1,m}}{\forall}\left[\left(l_{a_{kj}}, m^{l}_{a_{kj}}, m^{r}_{a_{kj}}, ra_{kj}\right)_{LR}\right]_{\alpha=0} \rightarrow \\
\rightarrow \left[\tilde{a}^{l}_{ij}, \tilde{a}^{r}_{ij}\right]_{\alpha=0} = \left[l_{a_{kj}}, r_{a_{kj}}\right] \\
\underset{k=\overline{1,m}}{\forall}\left[\left(l_{b_k}, m^{l}_{b_k}, m^{r}_{b_k}, r_{b_k}\right)_{LR}\right]_{\alpha=0} \rightarrow \\
\rightarrow \left[\tilde{b}^{l}_{ij}, \tilde{b}^{r}_{ij}\right]_{\alpha=0} = \left[l_{b_k}, r_{b_k}\right]
\end{gathered} \tag{36}$$

oraz

$$\begin{gathered}
\underset{k,j=\overline{1,m}}{\forall}\left[\left(l_{a_{kj}}, m^{l}_{a_{kj}}, m^{r}_{a_{kj}}, r_{a_{kj}}\right)_{LR}\right]_{\alpha=1} \rightarrow \\
\rightarrow \left[\tilde{a}^{l}_{ij}, \tilde{a}^{r}_{ij}\right]_{\alpha=1} = \left[m^{l}_{a_{kj}}, m^{r}_{a_{kj}}\right] \\
\underset{k=\overline{1,m}}{\forall}\left[\left(l_{b_k}, m^{l}_{b_k}, m^{r}_{b_k}, r_{b_k}\right)_{LR}\right]_{\alpha=1} \rightarrow \\
\rightarrow \left[\tilde{b}^{l}_{ij}, \tilde{b}^{r}_{ij}\right]_{\alpha=1} = \left[m^{l}_{b_k}, m^{r}_{b_k}\right]
\end{gathered} \tag{37}$$

Wykonując dwukrotnie (dla (36) oraz dla (37)) analizę przedziałową zgodnie z (24) – (28) otrzymujemy wartości parametrów charakterystycznych dla rozwiązania rozmytego.

5. PODSUMOWANIE

Jak wspomniano w wprowadzeniu, jednym z podstawowych elementów mającym decydujące znaczenie przy wyznaczaniu sterowań (1) w systemie jest rozwiązanie problemu określania planu obciążeń. Zagadnienie to w większości przypadków można sprowadzić do odpowiedniego (najczęściej wieloprzedziałowego) zagadnienia programowania liniowego.
Analizując otrzymane rozwiązania bazowe, stanowiące rozwiązanie określonego układu równań bazowych można otrzymać wiele istotnych dla sterowania informacji.
Każde rozwiązanie bazowe częściowego podproblemu wyznaczania obciążeń w (1) musi spełniać warunek dopuszczalności rozwiązania [3, 11], czyli:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} \geq \mathbf{O} \tag{38}$$

Na podstawie tego warunku przyjmuje się poniższe definicje wrażliwości [11, 12. 13]:
Rozwiązanie dopuszczalne $\tilde{\mathbf{x}}$ nazywamy niewrażliwym strukturalnie na dopuszczalność na poziomie β ze względu na zmiany parametrów $\left(\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{b}}\right)$, jeśli dla danego rozwiązania bazowego (nie koniecznie optymalnego) dla miar dopuszczalności [3, 13] zachodzi:

$$\alpha = \alpha(\mathbf{x} = \mathbf{x}_{dop} | \mathbf{p} \in \tilde{\mathbf{p}}) \geq \beta \tag{39}$$

czyli dla danego dopuszczalnego wektora sterującego, miara, że realizacja będzie niedopuszczalna jest co najwyżej równa 1-β.
Uwzględniając, że parametry modelu $\tilde{\mathbf{p}}$ w praktycznych zastosowaniach zawierają się w zbiorach ograniczonych, można zdefiniować niewrażliwość wektora $\tilde{\mathbf{x}}$ na zmiany parametrów $\tilde{\mathbf{p}}$.
Rozwiązanie problemu sterowania nazwiemy niewrażliwym na poziomie β, jeśli będzie ono niewrażliwe strukturalnie na poziomie β oraz:

$$\frac{\underset{\substack{\mathbf{p}\in\tilde{\mathbf{P}} \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{dop}}}{\sup}(Q) - \underset{\substack{\mathbf{p}\in\tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{dop}}}{\inf}(Q)}{\hat{Q}} \leq \varepsilon_{Q} \tag{40}$$

gdzie:

$\hat{Q}$	–	wartość funkcji celu otrzymana dla wartości preferowanych $\hat{\mathbf{p}}$,
ε_Q	–	próg wrażliwości dla wartości funkcji celu,
$\sup(Q_1), \inf(Q_1)$	–	górny i dolny kres wartości funkcji celu przy dopuszczalnych,

Odpowiednio dla zmiennych rozwiązania:

$$\forall x_i : \frac{\sup\limits_{\substack{\mathbf{p}\in\tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}_{dop}}} (\tilde{x}_i) - \inf\limits_{\substack{\mathbf{p}\in\tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{x}}_1=\mathbf{x}_{dop}}} (\tilde{x}_i)}{\hat{x}_i} \le \varepsilon_{xi} \tag{40}$$

gdzie:

$\hat{x}_i$ – wartości zmiennych rozwiązania otrzymane dla wartości preferowanych $\hat{\mathbf{p}}$,

ε_{x_i} – próg wrażliwości dla składowych wektora rozwiązania,

$\sup(x_i), \inf(x_i)$ – górny i dolny kres wartości zmiennych przy dopuszczalnych zmianach składowych $\mathbf{p}$ w zakresie dopuszczalności rozwiązania bazowego.

Dokładniej algorytmy wyznaczania (39) i (40) przedstawiono w [10].

Innymi istotnymi informacjami wynikającymi z rozwiązania (3) zgodnie z algorytmami przedstawionymi w pracy, jest możliwość określania parametrów układu równań bazowych mających zasadniczy wpływ na niepewność rozwiązania, a zatem i na dopuszczalność sterowania systemem. Analiza rozwiązania powala na określenie zakłóceń krytycznych a zatem i dostosowanie systemu i sterowania do uwarunkowań tak, aby minimalizować ryzyko występowania stanów niedopuszczalnych.

W przypadku systemów produkcyjnych propozycje takie zawarto np. w [9, 13]. Propozycje dla sterowania rozdziałem mocy czynnej w systemie energetycznym statku przedstawiono w [14].

NONDETERMINISTIC SYSTEM OF EQUATIONS IN ANALYSIS OF PRODUCTION SYSTEM CONTROL PART 1 – LINEAR INTERVAL AND FUZZY PROLEMS

Abstract: In the paper, nondeterministic linear systems of equations are considered. They are essential part of a production system control solution problem. This problem appears in investigating base solution in the linear problem of loads system planning. In the case of nondeterministic planning model, uncertainty appears in the solution and generates uncertainty in the models of constraints with diminishing time of control horizon (an approach multi-horizon). The analysis of proper base solution provides information about critical points of the system. In the first part of the paper, interval and fuzzy problems are presented.

Literatura

[1] Cipkowski W., Kwiesielewicz M., Stolc L. (1991) Multilevel-multihorizon control of production system in uncertain conditions. *Systems Science*, **17**, 2, 79-92.

[2] Kaufmann A., Gupta M.M. (1991) *Introduction to fuzzy arithmetic.* Van Nostrand Reinhold, New York.

[3] Kwiesielewicz M., Stolc L. (1989) Solving linear programming problem with non-deterministic constraints using fuzzy numbers arithmetic. *Int. Journal of Systems Science*, **20**, 587-595.

[4] Milkiewicz F. (1968) Problemy optymalizacji systemów produkcyjnych na przykładzie kombinatu rafineryjnego. *Zeszyty Naukowe Pol. Gda.* 133, *Elektryka XXII* (monografia), Gdańsk.

[5] Milkiewicz F. (1977) Planowanie produkcji w pewnej klasie zakładów przemysłowych z uwzględnieniem postojów remontowych. *Zeszyty Naukowe Pol. Gda.* 262, *Elektryka XL*, Gdańsk, 3-14.

[6] Milkiewicz F. (1980) Sformułowanie i koncepcja rozwiązania problemu sterowania produkcją i zbytem produktów. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, **XXV**, 4, 453-471.

[7] Milkiewicz F. (2004) *Sterowanie systemami produkcyjnymi*, monografia, Wyd. PG, Gdańsk.

[8] Moore R.E. (1966) *Interval analysis.* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1966.

[9] Stolc L., Kwiesielewicz M. (1990) Methods of non-deterministic linear programming in multi-horizon system production control. *Advances in Modeling and Simulation.* **20**, 3, 33-45.

[10] Stolc L. (1992) Specifing a range of changes for a solution in the non-deterministic linear programming problem. *Adv. in Modeling and Analysis*, **14**, 4, 41-53.

[11] Stolc L. (1996) Wrażliwość strukturalna w niektórych liniowych problemach decyzyjnych. *Zesz. Nauk. Wydz. Elektrotech. i Automat. Pol. Gda*, 10, 25-32.

[12] Stolc L. (2002) Sterowanie systemem produkcyjnym w warunkach niepewności z możliwością zmian strukturalnych. *Zesz. Nauk. Pol. Gda. Automatyka i Robotyka*, **II**, 590, 21-37.

[13] Stolc L. (2002) Wpływ wrażliwości strukturalnej zagadnienia programowania liniowego na dopuszczalność sterowania systemem produkcyjnym. *Materiały konferencyjne XIV KKA*, Zielona Góra, 439-444.

[14] Stolc L. (2004) Problem of optimal load distribution between generators minimizing risk of energetic ship system overload. *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2004*, 173-177.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4