XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom II

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFCZYK
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Druk: ARGRAF, Warszawa

METODY STOCHASTYCZNE
– PROBLEMY NIEDETERMINISTYCZNE

NIEDETERMINISTYCZNE UKŁADY RÓWNAŃ W ANALIZIE STEROWANIA SYSTEMAMI PRODUKCYJNYMI CZ. 2 – LINIOWE ZAGADNIENIA STOCHASTYCZNE†

Longin STOLC

Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Katedra Automatyki
ul. A. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, e-mail:lstolc@ely.pg.gda.pl

Streszczenie: W części pierwszej pracy przedstawiono zagadnienia przedziałowych i rozmytych układów równań liniowych w problemie sterowania systemem produkcyjnym. Wiele zagadnień może być sformułowanych w postaci stochastycznej. Poniżej omawia się problem opisany przez zmienne losowe z dokładnością do momentów drugiego rzędu. Opierając się na przedstawionej w części pierwszej metodzie rozwiązania niedeterministycznego układu równań liniowych omawia się oszacowania parametrów rozkładu prawdopodobieństwa rozwiązania oraz określania miar dopuszczalności dla wektora rozwiązania.

Słowa kluczowe: Sterowanie systemami produkcyjnymi, Warunki niepewności, Niedeterministyczne układy równań.

1. WPROWADZENIE

Rozpatrywane jest zagadnienie rozwiązywania układów równań liniowych o niedeterministycznych współczynnikach stanowiących układ równań bazowych problemu planowania obciążeń systemu produkcyjnego:

$$\tilde{\mathbf{A}}\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}:\ \dim\tilde{\mathbf{A}} = m\times m,\ \dim\tilde{\mathbf{x}} = \dim\tilde{\mathbf{b}} = m\ ; \quad (1)$$

gdzie:

- $\tilde{\mathbf{A}}$ – niedeterministyczna macierz współczynników,
- $\tilde{\mathbf{b}}$ – niedeterministyczny wektor wyrazów wolnych,
- $(*)$ – operator mnożenia na liczbach niezdeterminowanych.

W zależności od rodzaju niepewności współczynników w zagadnieniu (1) wynikającej z dostępności danych i informacji o obiekcie rzeczywistym, istnieje kilka możliwych sposobów tworzenia modelu [1, 4, 8, 9]:

1. Zagadnienie przedziałowe.

Jeśli występuje brak opisu charakteru zmienności współczynników przy jednoczesnej możliwości określenia przedziałów dopuszczalnych zmian, problem (1) jest układem liniowych równań przedziałowych, gdzie elementy $\tilde{\mathbf{A}}$ oraz $\tilde{\mathbf{b}}$ dane są jako liczby przedziałowe.

2. Zagadnienie rozmyte.

Posiadane informacje pozwalają na większą dokładność niż tylko podanie przedziałów zmienności współczynników, ale jednocześnie nie może być precyzyjnie określony charakter tych zmian. W przypadku tym proponuje się przyjąć (1) jako układ równań liniowych o rozmytych współczynnikach, gdzie elementy $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{b}}$ dane są jako liczby rozmyte ze zdeterminowanymi funkcjami przynależności $\mu(\bullet)$.

3. Zagadnienie stochastyczne.

Jeśli na podstawie posiadanych danych dla wcześniej określonych przedziałów zmian współczynników istnieje możliwość określenia rozkładów prawdopodobieństwa, a co najmniej momentów takich jak wartości średnie ($\overline{\mathbf{A}}$ i $\overline{\mathbf{b}}$) oraz macierze kowariancji ($\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ i $\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{b}})$), rozpatrywany problem można traktować jako stochastyczny układ równań liniowych.

Podane modele nie wyczerpują wszystkich możliwości. Zachodzić mogą przypadki mieszane przedstawionych zagadnień. Podejście do rozwiązania problemu mieszanego nie jest omawiane niniejszej pracy.

Podejście do zagadnień rozmytych i przedziałowych przedstawiono w części pierwszej. Ze względu na odmienny charakter stochastycznych układów równań jak również odmienny aparat stosowany do ich rozwiązania, zagadnienie to omówione jest osobno w części drugiej.

Dalej przyjmijmy podejście do rozwiązania analogiczne do zagadnień przedziałowych i rozmytych przedstawione w części pierwszej pracy.

Przyjmijmy, że dla każdego zagadnienia dane są zdeterminowane wartości preferowane $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{b}}$ współczynników układów równań $\tilde{\mathbf{A}}$ oraz $\tilde{\mathbf{b}}$.

Przyjmowanie wartości preferowanych zależne jest od preferencji decydenta. Wydaje się jednak, że w przypadku zagadnienia stochastycznego naturalnym jest przyjmowanie wartości średnich $\hat{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}}$. Uwzględniając zbieżność rozwiązania do rozkładu normalnego (wymiar zagadnienia planowania), prawdopodobieństwo skumulowane jest w otoczeniu wartości średnich, podobnie jak w zagadnieniu rozmytym odpowiada to wartościom modalnym rozwiązania. Jeśli poszukujemy rozwiązania problemu zgodnie z metodą przedstawioną w części pierwszej:

†Praca powstała częściowo w ramach projektu 4T11A 009 25 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^*(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}^* \\ \tilde{\mathbf{A}}^* = \left(\overline{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{A}}\right) = \tilde{\mathbf{1}}_m \\ \tilde{\mathbf{b}}^* = \overline{\mathbf{A}}^{-1}(*)\,\tilde{\mathbf{b}} \end{cases} \tag{2}$$

otrzymujemy rozwiązania dla wartości oczekiwanych, co jest odpowiednikiem stosowanych obecnie metod deterministycznych planowania produkcji [2, 3].

Przyjmijmy jako wartości preferowane $\tilde{\mathbf{A}}$ oraz $\tilde{\mathbf{b}}$ wartości średnie, oraz niech istnieje i będzie dana macierz odwrotna $\overline{\mathbf{A}}^{-1}$.

Rozwiązanie układu równań $\tilde{\mathbf{A}}\,(*)\,\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ zgodnie z (2) realizowane jest poprzez obustronne pomnożenie układu przez macierz odwrotną wartości preferowanych. Określa to w sposób jednoznaczny przekształcenie dla tych wartości:

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^*, \qquad \overline{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}^* \tag{3}$$

Ponieważ macierz $\overline{\mathbf{A}}^{-1}$ jest nieosobliwa (stanowi element rozwiązania dopuszczalnego dla wartości preferowanych zagadnienia programowania liniowego) oraz przekształcenie jest liniowe mamy:
Dla wartości średnich (preferowanych):

$$\overline{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{1}, \qquad \overline{\mathbf{b}}^* = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{b}} \tag{4}$$

Oraz dla macierzy kowariancji:

$$\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{b}}^*) = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\,\mathrm{cov}(\mathbf{b}^*)\left(\overline{\mathbf{A}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}\,\mathrm{cov}(\mathbf{b}^*)\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}^*) = \mathbf{T}\,\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{T}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

Macierz $\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ jest macierzą o wymiarze $m^2 \times m^2$. Od sposobu zapisu tej macierzy zależy postać macierzy przekształcenia $\mathbf{T}$.
W dalszej części pracy przedstawia się algorytmy wyznaczania oszacowań parametrów rozkładów prawdopodobieństwa oraz reprezentacje macierzy kowariancji współczynników układów równań.

2. POSTAĆ MACIERZY KOWARIANCJI

Macierz kowariancji macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$ w zapisie dwuwymiarowym ma postać blokową [7]:

$$\mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{11}) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{1j}) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{i1}) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{im}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{m1}) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{mj}) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{mm}) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Poszczególne bloki $\mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right)$ macierzy $\mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$ mają wymiar $m \times m$ i przyjmują postać zależną od sposobu zapisu macierzy w postaci dwuwymiarowej. W konsekwencji determinują postać macierzy $\mathbf{T}$.

Rozpatrywano przypadki:

1. Korelacja wiersz $\tilde{\mathbf{a}}_{i(*)}$ wiersz $\tilde{\mathbf{a}}_{j(*)}$

$$\underset{i,\, j \in \overline{1,m}}{\forall} \mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right) = \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{a}}_{i(*)}, \tilde{\mathbf{a}}_{j(*)}) \tag{8}$$

2. Korelacja kolumna $\tilde{\mathbf{a}}_{(*)i}$ kolumna $\tilde{\mathbf{a}}_{(*)j}$

$$\underset{i,\, j \in \overline{1,m}}{\forall} \mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right) = \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{a}}_{(*)i}, \tilde{\mathbf{a}}_{(*)j}) \tag{9}$$

3. Korelacja wiersz $\tilde{\mathbf{a}}_{i(*)}$ kolumna $\tilde{\mathbf{a}}_{(*)j}$

$$\underset{i,\, j \in \overline{1,m}}{\forall} \mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right) = \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{a}}_{i(*)}, \tilde{\mathbf{a}}_{(*)j}) \tag{10}$$

4. Korelacja kolumna $\tilde{\mathbf{a}}_{(*)i}$ wiersz $\tilde{\mathbf{a}}_{j(*)}$

$$\underset{i,\, j \in \overline{1,m}}{\forall} \mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right) = \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{a}}_{(*)i}, \tilde{\mathbf{a}}_{j(*)}) \tag{11}$$

5. Korelacja element $\tilde{a}_{ij}$ macierz $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\underset{i,\, j \in \overline{1,m}}{\forall} \mathrm{cov}\left(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}\right) = \mathrm{cov}(\tilde{a}_{ij}, \tilde{\mathbf{A}}) \tag{12}$$

Uwzględniając powiązania pomiędzy poszczególnymi zmiennymi w systemie produkcyjnym oraz charakter równań można stwierdzić, że zależność występuje głównie w obrębie poszczególnych wierszy. Wynika to z faktu, że większość równań opisuje zależności bilansowe w poszczególnych węzłach technologicznych jak i w samych procesach. Można oczekiwać, że przyjęcie właściwego zapisu ze sposobów (8) – (12) prowadzić będzie do przejrzystej postaci macierzy kowariancji współczynników $\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ oraz utworzy czytelną i prostą w konstrukcji macierz przekształcenia $\mathbf{T}$.

Z analizy struktur $\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ na uwagę zasługują dwa pierwsze przypadki, to jest zapis poprzez kowariancję wierszami lub kolumnami.
W przedstawionej w następnym punkcie metodzie szacowania parametrów rozkładu prawdopodobieństwa rozwiązania przyjęto korelację wierszami.
W przypadku tym poszczególne podmacierze $\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ij})$ w (7) mają postać:

$$\underset{i,\, j \in \overline{1,m}}{\forall} \mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma^2_{a_{i1}a_{j1}} & \cdots & \sigma^2_{a_{i1}a_{jl}} & \cdots & \sigma^2_{a_{i1}a_{jm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2_{a_{ik}a_{j1}} & \cdots & \sigma^2_{a_{ik}a_{jl}} & \cdots & \sigma^2_{a_{ik}a_{jm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2_{a_{im}a_{j1}} & \cdots & \sigma^2_{a_{im}a_{jl}} & \cdots & \sigma^2_{a_{im}a_{jm}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

gdzie:

$\sigma^2_{a_{ik}a_{jl}}$ – kowariancja pomiędzy elementami $\tilde{a}_{ik}$ i $\tilde{a}_{jl}$

W przypadku nieskorelowanych elementów $\tilde{a}_{ij}$ oraz $\tilde{a}_{ik}$ macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$ mamy:

$$\underset{i,j,k,l=\overline{1,m}}{\forall} \begin{cases} \sigma^2_{a_{ij}a_{kl}} = \sigma^2_{a_{ij}} & dla \quad (i=k)\wedge(j=l) \\ \sigma^2_{a_{ij}a_{kl}} = 0 & dla \quad (i\neq k)\vee(j\neq l) \end{cases} \tag{14}$$

co dla braku korelacji pomiędzy dwoma różnymi wierszami macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$ daje:

$$\underset{\substack{i,\,j\in\overline{1,m}\\ i\neq j}}{\forall} \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ij}) = \mathbf{0}_m \tag{15}$$

Z (14) wynika, że w przypadku braku korelacji pomiędzy wierszami macierzy współczynników układu równań, macierz korelacji $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ jest macierzą blokowo diagonalną złożoną z m bloków o wymiarze $\dim(\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ii})) = m\times m$.

$$\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{11}) & \cdots & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \cdots & \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ii}) & \cdots & \mathbf{0}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \cdots & \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{mm}) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Dalej dla nieskorelowanych elementów w wierszu $\tilde{\mathbf{a}}_{i(*)}$ mamy:

$$\underset{i\in\overline{1,m}}{\forall} \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{ii}) = \begin{bmatrix} \sigma^2_{a_{i1}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2_{a_{ik}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma^2_{a_{im}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

z czego wynika struktura diagonalna macierzy $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ w przypadku braku korelacji w macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$.

$$\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \sigma^2_{a_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2_{a_{1m}} \end{matrix} & \cdots & \mathbf{0}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \ddots & \mathbf{0}_m \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \cdots & \begin{matrix} \sigma^2_{a_{m1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma^2_{a_{mm}} \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Dla macierzy określanych zgodnie z (8) macierz przekształcenia $\mathbf{T}$ w (6) jest iloczynem tensorowym:

$$\mathbf{T} = \overline{\mathbf{A}}^{-1} \otimes \mathbf{1}_m = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11}^{(-1)}\mathbf{1}_m & \cdots & \overline{a}_{1j}^{(-1)}\mathbf{1}_m & \cdots & \overline{a}_{1m}^{(-1)}\mathbf{1}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{i1}^{(-1)}\mathbf{1}_m & \cdots & \overline{a}_{ij}^{(-1)}\mathbf{1}_m & \cdots & \overline{a}_{im}^{(-1)}\mathbf{1}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1}^{(-1)}\mathbf{1}_m & \cdots & \overline{a}_{mj}^{(-1)}\mathbf{1}_m & \cdots & \overline{a}_{mm}^{(-1)}\mathbf{1}_m \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Przy czym $\dim(\mathbf{T}) = m^2 \times m^2$.

Podsumowując można stwierdzić:

Jeśli macierz $\tilde{\mathbf{A}}$ nie jest skorelowana wierszami wówczas macierz kowariancji $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ przy zapisie korelacji wierszami (8) jest macierzą blokowo diagonalną. Natomiast macierz $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ przy zapisie korelacji kolumnami (9) jest macierzą o blokach diagonalnych.

Jeśli natomiast $\tilde{\mathbf{A}}$ nie jest skorelowana kolumnami wówczas macierz kowariancji $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ przy zapisie korelacji wierszami (8) jest macierzą o blokach diagonalnych, natomiast macierz $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})$ przy zapisie korelacji kolumnami (9) jest macierzą blokowo diagonalną.

3. OSZACOWANIE PARAMETRÓW ROZKŁADU PRAWDOPODOBIEŃSTWA ROZWIĄZANIA

W celu określenia parametrów rozkładu prawdopodobieństwa rozwiązania określonego przez (2), należy wyznaczyć parametry rozkładów (wartości średnie i macierze kowariancji) dla $\tilde{\mathbf{A}}^*$ oraz $\tilde{\mathbf{b}}^*$.

Wartości średnie określone są jednoznacznie przez (4).

$$\overline{\mathbf{A}}^* = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{1}_m, \quad \overline{\mathbf{b}}^* = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{b}}$$

Natomiast macierze kowariancji określone są przekształceniem liniowym (3) i wynoszą (5) i (6):

$$\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{b}}^*) = \overline{\mathbf{A}}^{-1}\operatorname{cov}(\mathbf{b}^*)\left(\overline{\mathbf{A}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}\operatorname{cov}(\mathbf{b}^*)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$$

$$\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}}^*) = \mathbf{T}\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$$

W przypadkach szczególnych, np. gdy macierz współczynników ograniczeń jest nieskorelowana (ma postać (18)), można uprościć obliczenia. Ponieważ macierz kowariancji w tym przypadku jest diagonalna, a macierz przekształcenia $\mathbf{T}$ $2m$-1 diagonalna, wynikowa macierz $\operatorname{cov}(\mathbf{A}^*)$ jest również $2m$-1 diagonalna. Aby nie prowadzić obliczeń na macierzach o wymiarze $m^2\times m^2$, elementy $\operatorname{cov}(\mathbf{A}^*)$ wyznacza się na podstawie własności przekształcenia (5).

Mamy zatem [s]:

$$\mathrm{var}(\tilde{a}_{ij}^*) = \sum_{l=1}^{m} d_{il}^2 \sigma_{a_{lj}}^2, \tag{20}$$

dalej:

$$\underset{\substack{i,j,k,l \\ k \neq l}}{\forall} \mathrm{cov}(\tilde{a}_{ij}^*, \tilde{a}_{kl}^*) = 0, \tag{21}$$

i dla pozostałych przypadków:

$$\underset{i,j,k}{\forall} \mathrm{cov}(\tilde{a}_{ij}^*, \tilde{a}_{kl}^*) = \sum_{l=1}^{m} d_{kl} d_{il} \sigma_{a_{lj}}^2. \tag{22}$$

Dla wektora wyrazów wolnych oczywiście jest (5). Rozwiązanie dla wartości średnich dla poszczególnych zmiennych można zapisać:

$$\underset{i \in \overline{1,m}}{\forall} \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{ij}^* x_j = \bar{b}_i^* \tag{23}$$

Zmienne rozwiązania $\tilde{x}_i$ można przedstawić:

$$\underset{j=\overline{1,m}}{\forall} \tilde{a}_{ii}^* \tilde{x}_i = \tilde{b}_i^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \tilde{a}_{ij}^* \tilde{x}_j \tag{24}$$

natomiast z (4) wynika:

$$\bar{a}_{ij}^* = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq l \end{cases} \quad \text{dla } i,j = \overline{1,m}. \tag{25}$$

Dla małych odchyleń $\tilde{a}_{ij}^*$ oraz $\tilde{b}_j^*$ od ich wartości średnich rozwiązanie w przybliżeniu wynosi:

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{\tilde{a}_{ii}^*} \left(\tilde{b}_i^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \tilde{a}_{ij}^* \tilde{b}_j^* \right) \quad \text{dla } j = \overline{1,m}. \tag{26}$$

Oznaczmy:

$$v_i = \frac{1}{\bar{a}_{ii}^*} \left(\bar{b}_i^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \bar{a}_{ij}^* \bar{b}_j^* \right) \quad \text{dla } j = \overline{1,m}. \tag{27}$$

i dokonajmy linearyzacji (25) w otoczeniu wartości średnich.
Zgodnie z [7] otrzymamy:

$$\underset{j=\overline{1,m}}{\forall} x_i = v_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial \bar{a}_{ij}^*} (\tilde{a}_{ij}^* - \bar{a}_{ij}^*) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial \bar{b}_j^*} (b_j^* - b_j^*) \tag{28}$$

i dla (25) jest:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \bar{a}_{ij}^*} = \begin{cases} -\bar{b}_j^* / \bar{a}_{ii}^* & \text{dla} \quad j \neq i \\ -(\bar{b}_i^* - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \bar{a}_{ij}^* \bar{b}_j^*) \Big/ (\bar{a}_{ii}^*)^2 & \text{dla} \quad j = i \end{cases} \tag{29}$$

oraz

$$\frac{\partial v_i}{\partial \bar{b}_i^*} = \begin{cases} -\bar{a}_{ij}^* / \bar{a}_{ii}^* & \text{dla} \quad j \neq i \\ 1 / \bar{a}_{ii}^* & \text{dla} \quad j = i \end{cases} \tag{30}$$

co w połączeniu z (25) daje:

$$\underset{j \in \overline{1,m}}{\forall} \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial \bar{a}_{ij}^*} = -\bar{b}_j^* \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial \bar{b}_j^*} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad j \neq i \\ 1 & \text{dla} \quad j = i \end{cases} \end{cases} \tag{31}$$

Wartości wyrażenia na v_i stanowią oszacowanie wartości średniej rozwiązania i wynoszą:

$$\underset{i=\overline{1,m}}{\forall} \bar{x}_i = v_i = \bar{b}_i^* \tag{32}$$

Oszacowanie kowariancji można zapisać:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{l=1}^{m} \Big(& \frac{\partial v_j}{\partial \bar{a}_{ik}^*} \frac{\partial v_i}{\partial \bar{a}_{jl}^*} \mathrm{cov}(\tilde{a}_{ik}^*, \tilde{a}_{ik}^*) \\ & + \frac{\partial v_i}{\partial \bar{b}_k^*} \frac{\partial v_j}{\partial \bar{b}_l^*} \mathrm{cov}(\tilde{b}_k^*, \tilde{b}_l^*) \\ & + \frac{\partial v_i}{\partial \bar{a}_{ik}^*} \frac{\partial v_j}{\partial \bar{b}_l^*} \mathrm{cov}(\tilde{a}_{ik}^*, \tilde{b}_l^*) \\ & + \frac{\partial v_i}{\partial \bar{b}_k^*} \frac{\partial v_j}{\partial \bar{a}_{jl}^*} \mathrm{cov}(\tilde{b}_k^*, \tilde{a}_{il}^*) \Big) \Big). \end{aligned} \tag{33}$$

Przy założeniu braku korelacji pomiędzy elementami lewych i prawych stron otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{l=1}^{m} \Big(& \frac{\partial v_j}{\partial \bar{a}_{ik}^*} \frac{\partial v_i}{\partial \bar{a}_{jl}^*} \mathrm{cov}(\tilde{a}_{ik}^*, \tilde{a}_{ik}^*) \\ & + \frac{\partial v_i}{\partial \bar{b}_k^*} \frac{\partial v_j}{\partial \bar{b}_l^*} \mathrm{cov}(\tilde{b}_k^*, \tilde{b}_l^*) \Big) \Big) \end{aligned} \tag{34}$$

co (31) daje:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \sum_{k=1}^{m} \Big(& \sum_{l=1}^{m} \tilde{b}_k^* \tilde{b}_l^* \,\mathrm{cov}(\tilde{a}_{ik}^*, \tilde{a}_{jl}^*) \Big) \\ & + \mathrm{cov}(\tilde{b}_k^*, \tilde{b}_l^*) \end{aligned} \tag{35}$$

Uwzględniając w powyższym (20) - (22) otrzymujemy dla oszacowania kowariancji:

$$\operatorname{cov}(\tilde{x}_i,\tilde{x}_j) = \sum_{k=1}^{m}(\bar{\tilde{b}}_k^*)^2 \operatorname{cov}(\tilde{a}_{ik}^*,\tilde{a}_{jk}^*) + \operatorname{cov}(\tilde{b}_i^*,\tilde{b}_j^*)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big((\bar{\tilde{b}}_k^*)^2\sum_{l=1}^{m} d_{jl}d_{il}\sigma_{a_{lk}}^2\Big) + \operatorname{cov}(\tilde{b}_i^*,\tilde{b}_j^*) \quad (36)$$

oraz dla oszacowania wariancji ($i=j$):

$$\operatorname{var}(\tilde{x}_i) = \sum_{k=1}^{m}(\bar{\tilde{b}}_k^*)^2 \operatorname{var}(\tilde{a}_{ik}^*) + \operatorname{var}(\tilde{b}_i^*)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\Big((\bar{\tilde{b}}_k^*)^2\sum_{l=1}^{m} d_{il}^2\sigma_{a_{lk}}^2\Big) + \operatorname{var}(\tilde{b}_i^*) \quad (37)$$

Przy czym kowariancje wektora $\tilde{\mathbf{b}}^*$ określa jednoznacznie (5)

4. MIARA DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA

Określone w poprzednim punkcie parametry rozkładu prawdopodobieństwa rozwiązania pozwalają na określenie miary realizowalności wyznaczonego planu obciążeń systemu.
W pracach [1, 4, 6, 8, 9] jako miarę w zagadnieniach stochastycznych przyjmuje się prawdopodobieństwo, że zmienne rozwiązania będą dodatnie, czyli badane rozwiązanie bazowe będzie dopuszczalne.
Prawdopodobieństwo spełnienia warunku dopuszczalności przedstawionego przez (5) można zapisać:

$$p(\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{O}) = \int_0^{\infty}...\int_0^{\infty} f(\tilde{\mathbf{x}})dx_1...dx_m \quad (38)$$

gdzie: $f(\tilde{\mathbf{x}})$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wektora $\tilde{\mathbf{x}}$.
Sprowadzając wektor rozwiązania do postaci:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{e}} \quad (39)$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{e}}$ - wektor zmiennych losowych o parametrach $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{O}$ oraz $\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{e}}) = \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{x}})$.
Zależność (38) przechodzi na:

$$p(\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{O}) = p(\tilde{\mathbf{e}} \geq -\bar{\mathbf{x}}) = \int_{-\bar{x}_1}^{\infty}...\int_{-\bar{x}_m}^{\infty} g(\tilde{\mathbf{e}})de_1...de_m \quad (40)$$

gdzie: $g(\tilde{\mathbf{e}})$ - funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wektora $\tilde{\mathbf{e}}$ taka sama jak dla $\tilde{\mathbf{x}}$, ale o wartościach średnich równych zero.
Wyznaczenie (40) można sprowadzić do obliczenia dystrybuanty zmiennych losowych nieskorelowanych poprzez wprowadzenie przekształcenia:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= h_{11}\tilde{v}_1 \\ \tilde{e}_2 &= h_{21}\tilde{v}_1 + h_{22}\tilde{v}_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{e}_m &= h_{m1}\tilde{v}_1 + h_{m2}\tilde{v}_2 + ... + \tilde{h}_{mm}v_m\end{aligned} \quad (41)$$

gdzie wektor $\mathbf{v}$ jest wektorem zmiennych losowych nieskorelowanych.
W przekształceniu zmiennych losowych $\mathbf{e}$ na zmienne $\mathbf{v}$ współczynniki h_{ij} dobieramy wg. zasady:
dla $i = j$ $h_{ij} = 1$,
dla pozostałych wartości h_{ij} dobieramy tak, aby macierz kowariancji $\mathbf{v}$ była diagonalna.
Zgodnie z powyższą zasadą mamy:

$$\begin{aligned}&\operatorname{var}(v_1) = \operatorname{var}(x_1) \\ &\forall_{i=1,m} \quad h_{i1} = \operatorname{cov}(\tilde{x}_i,\tilde{x}_1)/\operatorname{var}(v_1)\end{aligned} \quad (42)$$

i dla pozostałych $i = 2,...,m$:

$$\forall_{j=2,...,i-1} \quad h_{ij} = \operatorname{cov}(x_i,x_j) - \left(\sum_{l=1}^{j-1} h_{il}h_{jl}\operatorname{var}(v_l)\Big/\operatorname{var}(v_j)\right)$$

$$\operatorname{var}(\tilde{v}_i) = \operatorname{var}(\tilde{x}_i) - \sum_{l=1}^{j-1} h_{ij}^2 \operatorname{var}(\tilde{v}_i) \quad (43)$$

Warunek dopuszczalności po podstawieniu (41) przyjmuje postać [6, 7]:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &\geq -\bar{x}_1 = k_1 \\ \tilde{v}_2 &\geq -\bar{x}_2 - h_{21}k_1 = k_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{v}_m &\geq -\bar{x}_m - \sum_{j=1}^{m-1} h_{mj}k_j = k_m\end{aligned} \quad (44)$$

Rozwiązanie $\tilde{\mathbf{x}}$ (10) pozostanie dodatnie z prawdopodobieństwem:

$$p = P(\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{O}) = P(\tilde{\mathbf{v}} \geq \mathbf{k}) \quad (45)$$

czyli

$$p = \int_{k_1}^{\infty}...\int_{k_m}^{\infty} g^*(\tilde{\mathbf{v}})dv_1...dv_m \quad (46)$$

gdzie: $g^*(\tilde{\mathbf{v}})$ - gęstość zmiennej losowej o wartości średniej równej zero i wektorze wariancji określonym przez (42) - (43).
Po znormalizowaniu zmiennych:

$$\tilde{u}_i = \frac{\tilde{v}_i}{\operatorname{var}(\tilde{v}_i)} \quad (47)$$

mamy:

$$\alpha = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - G_j(\tilde{u}_j = \mathrm{k_j} / \sqrt{\mathrm{var}(\tilde{v}_j)}\right) \qquad (48)$$

gdzie $G_j(\tilde{u}_j)$ - dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej unormowanej u_j.

5. PODSUMOWANIE

Jednym z podstawowych elementów mającym decydujący wpływ na sterowanie systemem produkcyjnym jest rozwiązanie problemu określania planu obciążeń. Zagadnienie to w większości przypadków sprowadzane jest do odpowiedniego wieloprzedziałowego zagadnienia programowania liniowego.
Każde rozwiązanie bazowe problemu wyznaczania obciążeń w musi spełniać warunek dopuszczalności rozwiązania. W przypadku zagadnienia stochastycznego warunek ten wyznacza prawdopodobieństwo realizowalności planu a także warunkuje wyznaczane sterowania.
Analiza rozwiązania powala na określenie zakłóceń krytycznych a zatem i dostosowanie systemu i sterowania do uwarunkowań tak, aby minimalizować ryzyko występowania stanów niedopuszczalnych. Jako punkty krytyczne przyjmuje się składowe wektora rozwiązania o najmniejszym prawdopodobieństwie wynikającym z rozkładów brzegowych wektora rozwiązania.
W przypadku jeśli składowa dotyczy dopływów do systemu wskazuje na krytyczny zbiór dostawców. Jeśli natomiast określa stany zbiorników w węzłach technologicznych, wskazuje na konieczność przełączeń lub dołączeń zbiorników do określonych węzłów [8, 9].
W przypadku systemów produkcyjnych propozycje takie zawarto np. w [1, 4, 8, 9]. Propozycje dla sterowania rozdziałem mocy czynnej w systemie energetycznym statku (dla losowego charakteru wektora ograniczeń) przedstawiono w [10].
Analiza macierzy kowariancji rozwiązania powala także na przełączenia i zmiany w systemie uwzględniające interakcje pomiędzy poszczególnymi zmiennymi. Podejście przedziałowe i rozmyte przedstawione w części pierwszej tego nie umożliwia.

NONDETERMINISTIC SYSTEM OF EQUATIONS IN ANALYSIS OF PRODUCTION SYSTEM CONTROL PART 2 – LINEAR STOCHASTIC PROBLEMS

Abstract: In the first part of the paper, interval and fuzzy linear systems of equations were presented in production system control. Many problems can be formulated in stochastic form. Problem described by random variables with second order moments precision is discussed. Based on the method presented in the first part of non-deterministic system of equation solving evaluation of the probability decomposition parameters is shown and admissible measures for the solution vector are proposed.

Literatura

[1] Cipkowski W., Kwiesielewicz M., Stolc L. (1991) Multilevel-multihorizon control of production system in uncertain conditions. *Systems Science*, **17**, 2, 79-92.

[2] Milkiewicz F. (1968) Problemy optymalizacji systemów produkcyjnych na przykładzie kombinatu rafineryjnego, *Zeszyty Naukowe Pol. Gda. nr 133, Elektryka XXII* (monografia), Gdańsk.

[3] Milkiewicz F. (2004) *Sterowanie systemami produkcyjnymi*, monografia, Wyd. PG, Gdańsk.

[4] Stolc L., Kwiesielewicz M. (1990) Methods of non-deterministic linear programming in multihorizon system production control. *Advances in Modeling and Simulation*, **20**, 3, 33-45.

[6] Stolc L. (1996) Wrażliwość strukturalna w niektórych liniowych problemach decyzyjnych. *Zesz. Nauk. Wydz. Elektrotech. i Automat. Pol. Gda*, z.10, 25-32.

[7] Stolc L. (1997) The method of solving linear stochastic problems with random left and right hand sides of constraints. *Advances in Modeling and Analysis*, **31**, 2, 15-28.

[8] Stolc L. (2002) Sterowanie systemem produkcyjnym w warunkach niepewności z możliwością zmian strukturalnych, *Zesz. Nauk. Pol. Gda. Automatyka i Robotyka*, **II**, 590, 21-37.

[9] Stolc L. (2002) Wpływ wrażliwości strukturalnej zagadnienia programowania liniowego na dopuszczalność sterowania systemem produkcyjnym, *Materiały konferencyjne XIV KKA*, Zielona Góra, 439-444.

[10] Stolc L. (2004) Problem of optimal load distribution between generators minimizing risk of energetic ship system overload, *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR-2004*, 173-177.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4