XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Druk: ARGRAF, Warszawa

STEROWANIE
KOMPLEKSAMI OPERACJI

XV Krajowa Konferencja Automatyki, Warszawa 27-30 czerwca 2005

ODPORNE ALGORYTMY PODEJMOWANIA DECYZJI DLA WYBRANYCH PRZYPADKÓW ALOKACJI I SZEREGOWANIA ZADAŃ W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI[†]

Jerzy JÓZEFCZYK

Politechnika Wrocławska, Instytut Informatyki Technicznej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: Jerzy.Jozefczyk@pwr.wroc.pl

Streszczenie: Praca dotyczy niepewnych problemów podejmowania decyzji, w których występują nieznane parametry, scharakteryzowane jedynie danymi zbiorami swoich wartości. Przedstawiono przegląd sposobów formułowania problemów podejmowania decyzji oraz skoncentrowano się na omówieniu metod podejmowania decyzji odpornych. Zaprezentowano algorytm wyznaczania optymalnych decyzji odpornych dla określonej klasy funkcji oceniających oraz podano przykłady jego zastosowania w problemie alokacji zadań w kompleksie operacji niezależnych oraz w dwóch prostych problemach szeregowania zadań na ruchomych realizatorach.

Słowa kluczowe: Podejmowanie decyzji, systemy niepewne, decyzje odporne, alokacja zadań, szeregowanie zadań.

1. WSTĘP

Problematyka podejmowania decyzji w warunkach niepewności jest rozwijana od szeregu lat i doczekała się wielu podejść oraz metod i szczegółowych algorytmów rozwiązania. W pracy rozpatrywana jest wybrana klasa problemów podejmowania decyzji, w których występują niepewne parametry, przy czym niepewność jest scharakteryzowana wyłącznie poprzez podanie zbioru możliwych wartości tych parametrów. Dla określonych funkcji oceniających podejmowanie decyzji, które – ogólnie – mogą mieć interpretację kosztu albo zysku wprowadzono szczegółowe kryteria podejmowania decyzji. Najczęściej stosowane z nich zostały podane w rozdziale 2., w którym ponadto szczegółowo omówiono kwestię podejmowania decyzji odpornych, tzn. takich, które uwzględniają najgorsze możliwe wartości nieznanych parametrów, np. [12,10,2,9]. Dla funkcji typu „maksimum" oceniającej podejmowanie decyzji, przedstawiono optymalny algorytm rozwiązania, który jest prostym uogólnieniem rezultatu przedstawionego w [1]. W następnych rozdziałach omówiono zastosowanie tego algorytmu do wyznaczania optymalnych odpornych decyzji w problemie rozdziału zadań w kompleksie operacji równoległych oraz w dwóch zagadnieniach szeregowania zadań na ruchomych realizatorach [4].

2. FORMUŁOWANIE PROBLEMÓW PODEJMOWANIA DECYZJI W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

2.1. Wprowadzenie

Rozważmy klasę niepewnych problemów podejmowania decyzji, w których wynik decyzji x należącej do zbioru decyzji dopuszczalnych X zależy od nieznanego parametru b przyjmującego wartości ze zbioru B. Zakładamy, że w zbiorze B nie jest określona żadna miara, w szczególności nie jest znany i nie jest możliwy do wyznaczenia rozkład prawdopodobieństwa i w konsekwencji do opisu problemu decyzyjnego i do jego rozwiązania nie można stosować podejścia stochastycznego. Niepewność problemu decyzyjnego spowodowana nieznajomością, nieprecyzyjnością lub błędną wartością parametru b jest scharakteryzowana jedynie zbiorem W możliwych realizacji parametru b. Konkretna realizacja $w \in W$ (ang. *scenario*) wskazuje na wartość (instancję) b_w parametru b należącą do zbioru B, tzn. $b_w \in B$. Ponadto niech X_w będzie zbiorem decyzji dopuszczalnych dla realizacji w oraz niech jakość podjętej decyzji x będzie oceniana za pomocą funkcji oceniającej $F(b_w, x)$, mającej interpretację kosztu podejmowania decyzji. Wówczas dla ustalonego b_w optymalna decyzja x^* jest rozwiązaniem deterministycznego problemu optymalizacyjnego $\mathbf{P}(b_w)$, polegającego na minimalizacji $F(b_w, x)$ względem $x \in X_w$, tzn.

$$F(b_w, x^*) \triangleq F^*(b_w) = \min_{x \in X_w} F(b_w, x). \qquad (1)$$

Analogiczny problem decyzyjny można sformułować dla przypadku, gdy funkcja oceniająca ma interpretację zysku, co prowadzi do odpowiedniej maksymalizacji.

[†]Praca została sfinansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005-2007 w ramach projektu badawczego nr 3 T11A 031 28.

2.2. Kryteria jakości podejmowania decyzji

Nieznajomość dokładnej wartości parametru b_w sprawia, że nie można bezpośrednio wykorzystać funkcji $F(b_w,x)$ do oceny decyzji x. W pracach poświęconych podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności (np. [10,2,12]) są proponowane różne kryteria mające na celu umożliwienie podejmowania decyzji. Ich wybór jest całkowicie subiektywny i zależy od projektanta odpowiedniego systemu podejmowania decyzji. Podstawowa różnica między kryteriami jest związana z odmiennie wyrażaną ostrożnością podmiotu podejmującego decyzję odnośnie występowania niepewności. Kryteria mogą preferować decyzje bardziej zachowawcze, czyli takie, w których decydent ma pesymistyczne oczekiwania odnośnie wartości parametru b, mogą odzwierciedlać „optymizm" podmiotu podejmującego decyzję, dotyczący tego parametru albo mogą wyrażać sytuacje pośrednie. Można wskazać na następujące najczęściej stosowane kryteria. Są one podane dla przypadku, gdy zbiór W możliwych realizacji parametru b jest mocy continuum. W przypadku skończonej liczby realizacji, często występującej w praktycznych sytuacjach podejmowania decyzji, kryteria mają postać analogiczną. Kryteria dla ustalonej decyzji x w różny sposób dokonują agregacji (determinizacji) ze względu na $b_w \in B$ funkcji oceniających $F(b_w,x)$. Agregacja jest dokonywana wprost na wartościach $F(b_w,x)$ lub na obliczanych na ich podstawie wyrażeniach – z wykorzystaniem typowych operatorów takich jak „minimum", „maksimum" lub „wartość średnia". W pierwszym przypadku agregacja jest wyznaczana osobno dla rożnych potencjalnych decyzji i może być wyrażona w postaci następujących kryteriów

$$\max_{w\in W} F(b_w,x)\,, \tag{2}$$

$$\min_{w\in W} F(b_w,x)\,, \tag{3}$$

$$\beta \max_{w\in W} F(b_w,x) + (1-\beta)\min_{w\in W} F(b_w,x)\,, \tag{4}$$

gdzie współczynnik $\beta \in [0,1]$ wyraża preferencje podmiotu podejmującego decyzje,

$$\int_W F(b_w,x)dw\,. \tag{5}$$

Zastosowanie operatora maksimum w (2) odzwierciedlającego skrajny pesymizm decydenta, bo dla każdej decyzji x jest uwzględniana największa ze względu na b_w wartość funkcji oceniającej $F(b_w,x)$ – prowadzi do problemu minimaksowego, ponieważ najpierw należy maksymalizować $F(b_w,x)$ ze względu na w, a następnie wyznaczyć minimum ze względu na x. Zupełnie odmienna preferencja podmiotu podejmującego decyzję jest wyrażona w kryterium (3), gdzie jest brana pod uwagę najkorzystniejsza ze względu na w wartość funkcji oceniającej. Z kolei kryterium (4), nazywane kryterium Hurwicza [3], umożliwia wybór decyzji będącej realizacją strategii pośredniej. Kryterium (5) jest różnie nazwane, np. kryterium normatywne, kryterium LaPlace, (ang. *equal likelihood criterion*). Nawiązuje ono również do kryteriów dla podejścia stochastycznego w sytuacji, gdy wszystkie realizacje są jednakowo prawdopodobne. W tym przypadku przyjmuje się założenie o jednakowej możliwości wystąpienia różnych b_w.

W [14] podano właściwości kryteriów opartych na agregacji wyłącznie wartości funkcji oceniających $F(b_w,x)$, z których warto wymienić monotoniczność ze względu na b_w, ograniczoność oraz niezależność od innych decyzji (ang. *context independence*), [15].

Jak już wspomniano, agregacja może dotyczyć wyrażeń wyznaczonych w oparciu o funkcje oceniające $F(b_w,x)$. Wówczas jej wynik dla danej decyzji zależy od innych decyzji. Najbardziej znane takie wyrażenie, wprowadzone przez Savage'a [13], to tzw. żal (ang. *regret* lub *opportunity loss*). Ogólnie, jest to różnica między wyznaczonym kosztem podjęcia decyzji, a osztem, który byłby poniesiony, gdyby w momencie podejmowania decyzji była znana realizacja b_w niepewnego parametru b, która faktycznie wystapiła. W rozważanym problemie optymalizacyjnym dla każdej realizacji b_w jest to różnica między kosztem podjęcia określonej decyzji a kosztem optymalnym, czyli

$$F(b_w,x) - F^*(b_w),\ b_w \in B\,, \tag{6}$$

gdzie wartość $F^*(b_w)$ jest dana w (1). Wyrażeniem podobnym do (6) jest tzw. względny żal (ang. *relative regret*), tzn.

$$\frac{F(b_w,x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)},\ b_w \in B\,, \tag{7}$$

który umożliwia obliczenie procentowego odchylenia od decyzji optymalnej. W obu przypadkach przyjmowane jest założenie o możliwości obliczenia wartości (1) *ex post*. Łącząc wprowadzone już operatory agregacji oraz wyrażenia (6) i (7) otrzymujemy następujące nowe kryteria jakości

$$\max_{w\in W}\,[F(b_w,x) - F^*(b_w)], \tag{8}$$

$$\min_{w\in W}\,[F(b_w,x) - F^*(b_w)], \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\beta \max_{w\in W}\,[F(b_w,x) - F^*(b_w)] + \\ &(1-\beta)\min_{w\in W}\,[F(b_w,x) - F^*(b_w)],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\int_{w\in W}[F(b_w,x) - F^*(b_w)]\,dw, \tag{11}$$

$$\max_{w\in W} \frac{F(b_w,x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)}, \tag{12}$$

$$\min_{w \in W} \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)}, \tag{13}$$

$$\beta \max_{w \in W} \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)} + (1-\beta) \min_{w \in W} \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)}, \tag{14}$$

$$\int_W \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)} dw. \tag{15}$$

W [14] podano interesujące uogólnienie wymienionych wyrażeń w postaci tzw. operatorów OWA.

2.3. Problemy podejmowania decyzji dla kryteriów minimaksowych

Minimaksowe kryteria agregacji (2), (8) i (12) umożliwiają wyznaczenie tzw. decyzji odpornych (ang. *robust decisions*). Celem podejścia odpornego (ang. *robustness approach*) do wyznaczania decyzji w warunkach niepewności jest uzyskanie decyzji charakteryzujących się rozsądnymi wartościami funkcji oceniającej $F(b_w, x)$ dla dowolnego możliwego zestawu parametrów w określonym horyzoncie podejmowania decyzji. Omawiane kryteria minimaksowe są wyrazem zasady, że decyzja odporna to taka, że największy koszt ze względu na wszystkie realizacje niepewnego parametru jest możliwie najmniejszy. Stosowanie kryteriów minimaksowych (odpornych) skutkuje podejmowaniem decyzji zachowawczych, opartych na przewidywaniu, że najgorsze może się zdarzyć. Inne koncepcje decyzji odpornych są przedstawione w pracy [11]. Kryterium bezwzględnie odporne (2) (ang. *absolute robust criterion*) prowadzi do wyznaczenia decyzji bezwzględnie odpornej (ang. *robust absolute decision*) i jest również stosowane w teorii gier, gdzie niepewność dotycząca procesu decyzyjnego jest spowodowana aktywną obecnością inteligentnego przeciwnika. Odporne kryteria bezwzględnego żalu (ang. *worst-case absolute regret criterion*) (8) oraz względnego żalu (ang. *worst-case relative regret criterion*) (12) umożliwiają wyznaczenie decyzji, które na potrzeby niniejszej pracy będziemy określać jako optymalne decyzje odporne, a których angielskie nazwy są następujące: *robust deviation decision* lub *worst-case absolute regret decision* dla (8) oraz *relative robust decision* lub *worst-case relative regret decision* dla (12).

Problemy z parametrami przedziałowymi

W dalszym ciągu rozważania zostaną ograniczone do kryterium (12). Okazuje się, że dla specjalnych postaci funkcji $F(b_w, x)$ można wyznaczyć optymalne decyzje odporne w sposób analityczny. Rozważania ograniczymy do przypadku, gdy parametr b_w oraz zmienna x są macierzami o rozmiarze $n \times m$, których elementy przyjmują wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, tzn.

$$b_w = [b_{w,1}^{\mathrm{T}}, b_{w,2}^{\mathrm{T}}, ..., b_{w,m}^{\mathrm{T}}], \; x = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, ..., x_m^{\mathrm{T}}]$$

oraz $b_{w,i} = [b_{w,i,1}, b_{w,i,2}, ..., b_{w,i,n}]$ i $x_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,n}]$, a funkcja oceniająca jest postaci

$$F(b_w, x) = \max_{i=1,2,...,m} b_{w,i} x_i^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

Ponadto zakładamy, że zbiór realizacji W ma strukturę przedziałową, tj. każdy element $b_{w,i,j}$ macierzy b_w należy do przedziału niepewności $[\underline{b}_{w,i,j}, \overline{b}_{w,i,j}]$ o danych końcach, gdzie $\overline{b}_{w,i,j} \geq \underline{b}_{w,i,j}$. Wówczas zbiór W jest iloczynem kartezjańskim przedziałów niepewności $[\underline{b}_{w,i,j}, \overline{b}_{w,i,j}]$ dla $i = 1, 2, ..., m$ oraz $j = 1, 2, ..., n$, a realizacja $w \in W$ – macierzą, której każdy element należy do odpowiedniego przedziału niepewności. Dalej, o ile nie będzie to prowadziło do niejednoznaczności, indeks w będzie pomijany.

Kryterium oparte na względnej funkcji żalu

Oznaczmy kryterium (12) jako $z(x)$. Wówczas możemy sformułować niepewny problem optymalizacyjny **UP** nawiązujący do **P**, który polega na minimalizacji

$$z(x) \triangleq \max_{w \in W} \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)}, \tag{17}$$

względem $x \in X_w$. Jako wynik otrzymujemy optymalną decyzję odporną x' oraz optymalną wartość odpornego kryterium względnego żalu $z(x')$.

Niepewny problem optymalizacyjny **UP** ma następującą interpretację. Jeśli dla ustalonego b_w jest prawdziwa nierówność

$$\frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)} < \varepsilon \tag{18}$$

dla $\varepsilon > 0$, to decyzja $x \in X_w$ jest względnie ε–optymalnym rozwiązaniem problemu $\mathbf{P}(b_w)$. Ponadto,

niech $\overline{X}_\varepsilon(b_w) = \{x \in X_w : \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)} < \varepsilon\}$

będzie zbiorem wszystkich względnie ε–optymalnych rozwiązań $\mathbf{P}(b_w)$. Dla danego $\varepsilon > 0$ istotne jest wyznaczenie takich rozwiązań dla wszystkich realizacji b_w, dla których jest spełniony warunek

$$x \in \bigcap_{b_w \in W} \overline{X}_\varepsilon(b_w). \tag{19}$$

Istnienie takiego rozwiązania x zależy od wartości ε. Dla małych ε rozwiązanie może nie istnieć, ponieważ rozwiązanie dopuszczalne dla określonego b_w może być niedopuszczalne dla innej realizacji. Oznaczmy przez $z(x')$ najmniejszą wartość ε, dla której nierówność (18) jest spełniona. Jeśli nierówność (18) jest spełniona dla najgorszego przypadku, tzn. jeśli $\max\limits_{b_w \in W} \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)} < \varepsilon$, to jest ona prawdziwa dla każdego b_w. W celu umożliwienia spełnienia tej nierówności dla najmniejszego $\varepsilon > 0$, konieczna jest jej minimalizacja, tj. rozwiązanie problemu **UP**. Wówczas wartość $z(x')$ jest miarą niepewności, a problem **UP** polega na wyznaczeniu takiej decyzji $x \in X_w$, że względne odchylenie od $F^*(b_w)$, najgorsze ze względu na b_w – jest najmniejsze.

Sformułowanie niepewnego problemu decyzyjnego

Rozważmy teraz nowy problem optymalizacyjny **UP'**, który jest równoważny **UP** ze względu na funkcję celu i ograniczenia na zmienne decyzyjne. Wprowadźmy nową macierz b_w^i, której elementy są określone następująco: $b_{w,l,j}^i = \bar{b}_{w,i,j}(\underline{b}_{w,i,j},\ )$ dla $l = i\ (l \neq i)$, czyli elementy z i-tej kolumny oraz pozostałe elementy tej macierzy są równe odpowiednio największym oraz najmniejszym możliwym wartościom z przedziałów $[\underline{b}_{w,i,j}, \bar{b}_{w,i,j}]$. Wszystkie macierze b_w^i tworzą zbiór $W' = \{b_w^i, i = 1, 2, ..., m\}$. Wówczas problem **UP'** sprowadza się do minimalizacji względem $x \in X_w$ maksymalnej wartości funkcji $z_i(x)$, zdefiniowanych jako $z_i(x) = \frac{\bar{b}_{w,i} x_i^{\mathrm{T}} - F^*(b_w^i)}{F^*(b_w^i)}$, gdzie $\bar{b}_{w,i} = [\bar{b}_{w,i,1}, \bar{b}_{w,i,2}, ..., \bar{b}_{w,i,n}]$.

Optymalny odporny algorytm decyzyjny

Jest prawdziwy następujący lemat (por. [1]).

Lemat. Dla każdego $x \in X_w$ $z(x) = \max\limits_{i=1,2,...,m} z_i(x)$.

Dowód. Niech $\tilde{b}_w$ będzie taką realizacją b_w dla określonego $x \in X_w$, że jest prawdziwa nierówność

$$\frac{F(\tilde{b}_w, x) - F^*(\tilde{b}_w)}{F^*(\tilde{b}_w)} \geq \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)}, \quad b_w \in W \quad (20)$$

i niech $\tilde{x}$ będzie rozwiązaniem $\mathbf{P}(\tilde{b}_w)$. Ponadto, niech λ będzie takim indeksem, że $\tilde{b}_{w,\lambda} x_\lambda^{\mathrm{T}} \geq \tilde{b}_{w,i} x_i^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2, ..., m$. Łatwo zauważyć, że lewa strona w (20) nie może maleć, jeśli w $\tilde{b}_w$ zwiększamy $\tilde{b}_{w,\lambda}$ i zmniejszamy $\tilde{b}_{w,i}$ dla $i \neq \lambda$. Jeśli w taki sposób zmieniamy $\tilde{b}_{w,\lambda}$ oraz $\tilde{b}_{w,i}$, to doprowadzamy do równości $\tilde{b}_w = b_w^\lambda = [\underline{b}_{w,1}^{\mathrm{T}}, \underline{b}_{w,2}^{\mathrm{T}}, ..., \bar{b}_{w,\lambda}^{\mathrm{T}} ..., \underline{b}_{w,m}^{\mathrm{T}}]$. Tak więc $\tilde{b}_w$ i b_w^λ są względnie najgorszymi realizacjami dla danej decyzji $x \in X_w$. Stąd, $\tilde{x}$ jest optymalnym rozwiązaniem problemu $\mathbf{P}(\tilde{b}_w)$ oraz równoważnie problemu $\mathbf{P}(b_w^\lambda)$. W rezultacie kryterium (17) możemy zapisać w następującej postaci

$$z(x) = \max_{w \in W} \frac{F(b_w, x) - F^*(b_w)}{F^*(b_w)} = \frac{F(\tilde{b}_w, x) - F^*(\tilde{b}_w)}{F^*(\tilde{b}_w)}$$

$$= \frac{\max\limits_{i=1,2,...,m} \tilde{b}_{w,i} x_i^{\mathrm{T}} - F^*(\tilde{b}_w)}{F^*(\tilde{b}_w)} = \frac{\tilde{b}_{w,\lambda} x_\lambda^{\mathrm{T}} - F^*(\tilde{b}_w)}{F^*(\tilde{b}_w)}$$

$$= \frac{\bar{b}_{w,\lambda} x_\lambda^{\mathrm{T}} - F^*(b_w^\lambda)}{F^*(b_w^\lambda)} = z_\lambda(x).$$

Dla $i \neq \lambda$ $z(x) \geq z_i(x)$, ponieważ z (20) wynika zależność

$$z_i(x) = \frac{\bar{b}_{w,i} x_i^{\mathrm{T}} - F^*(b_w^i)}{F^*(b_w^i)} \leq \frac{\bar{b}_{w,\lambda} x_\lambda^{\mathrm{T}} - F^*(b_w^\lambda)}{F^*(b_w^\lambda)} = z(x).$$

Ostatecznie, $z(x) = \max\limits_{i=1,2,...,m} z_i(x)$. ■

W konsekwencji, dla dowolnego $x \in X_w$ istnieje macierz $\tilde{b}_w = b_w^\lambda$, dla której zachodzi (20). Dlatego zbiór W może być zastąpiony zbiorem W', tzn. wystarczy rozpatrywać tylko macierze b_w^i zamiast macierzy b_w. Faktycznie taka zamiana jest ograniczeniem zbioru W, a innymi słowy jest to częściowa determinizacja niepewnego problemu **UP**. Dlatego problem optymalizacyjny **UP**, tj. $\min\limits_{x \in X_w} z(x)$, dla $b_w \in W$ jest równoważny problemowi **UP'**, tj. $\min\limits_{x \in X_w} \max\limits_{i=1,2,...,m} z_i(x)$, dla $b_w \in W'$.

Zdefiniujmy teraz nową macierz

$$b_w'' = [b_{w,i,j}'']_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}} = \left[\frac{\bar{b}_{w,i,j}}{F^*(b_w^i)}\right]_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}}.$$

Następujące twierdzenie, będące uogólnieniem odpowiedniego rezultatu z [1], jest podstawą wyznaczenia odpornego algorytmu decyzyjnego – optymalnego w sensie kryterium (17).

Twierdzenie. Zbiory optymalnych rozwiązań problemu $\mathbf{P}(b_w'')$ oraz problemu **UP'** są takie same, dlatego aby rozwiązać **UP'**, wystarczy rozwiązać $\mathbf{P}(b_w'')$.

Dowód. Zauważmy, że

$$z_i(x) = \frac{\bar{b}_{w,i} x_i^{\mathrm{T}} - F^*(b_w^i)}{F^*(b_w^i)} = \frac{\bar{b}_{w,i} x_i^{\mathrm{T}}}{F^*(b_w^i)} - 1 = b_{w,i}'' x_i^{\mathrm{T}} - 1$$

i przekształćmy rozwiązanie problemu **UP'**

$$\min_{x \in X_w} \max_{i=1,2,\dots,m} z_i(x) = \min_{x \in X_w} \max_{i=1,2,\dots,m} (b''_{w,i} x_i^{\mathrm{T}} - 1)$$

$$= \min_{x \in X_w} \max_{i=1,2,\dots,m} (b''_{w,i} x_i^{\mathrm{T}}) - 1$$

$$= \min_{x \in X_w} F(b''_w, x) - 1 = F^*(b''_w) - 1 = z(x').$$

■

Wniosek z twierdzenia jest taki, że aby rozwiązać niepewny problem decyzyjny **UP**, wystarczy rozwiązać problem $\mathbf{P}(b''_w)$, który jest deterministyczny, ponieważ wartości elementów macierzy b''_w są ustalone. Ponadto, aby uzyskać optymalną wartość kryterium (17), należy obliczyć wartość (1) dla $b_w = b''_w$. Stąd $z(x') = F^*(b''_w) - 1$. Ostatecznie, algorytm rozwiązania problemu niepewnego **UP** składa się z dwóch kroków.

1. Rozwiąż problemy $\mathbf{P}(b^i_w)$, $i = 1,2,\dots,m$ w celu obliczenia wartości $F^*(b^i_w)$.
2. Rozwiąż problem $\mathbf{P}(b''_w)$.

W kroku pierwszym problem deterministyczny jest rozwiązywany m razy, za każdym razem z inną kolumną macierzy b_w, której elementy mają największe wartości, czyli $\bar{b}_{w,i,j}$, a pozostałe elementy równe $\underline{b}_{w,i,j}$. W kroku drugim jako elementy macierzy b_w należy przyjąć $b_{w,i,j} = \bar{b}_{w,i,j} / F^*(b^i_w)$.

3. NIEPEWNY PROBLEM ALOKACJI ZADAŃ W KOMPLEKSIE OPERACJI RÓWNOLEGŁYCH

Deterministyczny problem rozdziału zadań w kompleksie operacji równoległych polega na takim rozdziale zadań między operacje, aby minimalizować czas wykonania wszystkich operacji. Czas T_r wykonania pojedynczej operacji r, $r = 1,2,\dots,R$, gdzie r oraz R to odpowiednio indeks bieżącej operacji oraz liczba operacji, zależy od rozmiaru przydzielonych zadań. W dalszych rozważaniach przyjęto następujący model tej zależności

$$T_r = k_r v_r^{\alpha_r},\ r = 1,2,\dots,R, \tag{21}$$

gdzie $k_r > 0$, $\alpha_r > 0$ są parametrami r-tej operacji. Wszystkie zadania o globalnym rozmiarze V muszą być rozdzielone między operacje, co oznacza, że musi być spełniony warunek $\sum_{r=1}^{R} v_r = V$, który określa zbiór dopuszczalnych rozdziałów zadań $D_v = \{v \triangleq [v_1, v_2, \dots, v_R]^{\mathrm{T}} : v_r \ge 0,\ \sum_{r=1}^{R} v_r = V\}$. W celu rozwiązania problemu alokacji wystarczy minimalizować czas wykonania najdłuższej operacji przy założeniu, że wszystkie operacje rozpoczynają się w tej samej chwili. W związku z tym, kryterium jakości rozdziału zadań ma formę następującej funkcji „maksimum".

$$G(k, v) = \max_{r=1,2,\dots,R} k_r v_r^{\alpha_r}, \tag{22}$$

gdzie $k = [k_1, k_2, \dots, k_R]^{\mathrm{T}}$ jest wektorem parametrów k_r. Dla ustalonej wartości parametru wektorowego k deterministyczny problem alokacji zadań, oznaczany jako $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(k)$, polega na wyznaczeniu takiego wektora rozdziału zadań $v^* = [v_1^*, v_2^*, \dots, v_R^*]^{\mathrm{T}}$, który minimalizuje (22) ze względu na dopuszczalne v, tzn. $G(k, v^*) \triangleq G^*(k) = \min_{v \in D_v} G(k, v)$. Załóżmy teraz, że dla każdej operacji r wartość parametru k_r nie jest znana, natomiast jest dany przedział $[\underline{k}_r, \bar{k}_r]$ ze znanymi wartościami $\underline{k}_r$, $\bar{k}_r$, gdzie $\underline{k}_r < \bar{k}_r$. Wówczas stosując kryterium (12) i nawiązując do rozważań przedstawionych w rozdziale 2., można sformułować następujący niepewny problem rozdziału zadań $\mathbf{UP}_{\mathrm{A}}$

$$\min_{v \in D_v} z_{\mathrm{A}}(v) = \min_{v \in D_v} \max_{k \in K} \frac{G(k, v) - G^*(k)}{G^*(k)},$$

odpowiadający problemowi $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(k)$, gdzie $K = [\underline{k}_1, \bar{k}_1] \times [\underline{k}_2, \bar{k}_2] \times \cdots \times [\underline{k}_R, \bar{k}_R]$. Jest to szczególny przypadek problemu **UP** przedstawionego w rozdziale 2. Wystarczy przyjąć: $W = B = K$, $b_w = k$ ($m = R$, $n = 1$, a indeks w pomijamy, ponieważ wektor k jednoznacznie określa bieżącą realizację w), $x = v$, $X_w = D_v$ ($m = R$, $n = 1$), $F(\cdot) \equiv G(\cdot)$. Wtedy wprost korzystając z wyników przedstawionych w rozdziale 2., można przedstawić optymalny odporny algorytm alokacji zadań w kompleksie operacji równoległych, bazujący na względnej funkcji żalu, jako

1. Rozwiąż R problemów $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(k^r)$ dla $r = 1,2,\dots,R$ i oblicz wartości $G^*(k^r)$.
2. Rozwiąż problem $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(k'')$.

W kroku 1. jest rozwiązywanych R różnych problemów deterministycznych, za każdym razem z różnymi wektorami k zawierającymi maksymalne wartości k_r, czyli $\bar{k}_r$. W kroku 2. jest wykorzystywany wektor $k = k''$ z elementami $k_r = \bar{k}_r / G^*(k^r)$. Różne przypadki modelu (21) oraz przykłady przedstawiono w [7].

4. NIEPEWNE PROBLEMY SZEREGOWANIA ZADAŃ NA RUCHOMYCH REALIZATORACH

Przedmiotem rozważań są specyficzne problemy szeregowania, w których czasy wykonywania zadań nie są dane a priori ([4]), a wykonywanie zadań przez realizatory wiąże się z koniecznością ich ruchu (przemieszczania się) między stanowiskami, na których są umieszczone produkowane obiekty. Realizator w celu wykonania każdego zadania musi dojechać do odpowiedniego stanowiska. Tak więc każde zadanie składa się z dwóch części: z dojazdu realizatora do stanowiska i z wykonania czynności na umieszczonym tam obiekcie. Ponieważ czasy dojazdów nie mogą być z góry określone, stąd wspomniana nieznajomość czasów wykonania zadań. Dalej zakładamy, że na każdym stanowisku, a właściwie na zlokalizowanym tam obiekcie, realizator wykonuje tylko jedną czynność. Oba zbiory, tj. zadania i stanowiska, są oznaczane jako $\boldsymbol{H} = \{1, 2, ..., H\}$, gdzie H jest liczbą zadań lub stanowisk. Dodatkowo wyróżnia się stanowisko będące bazą dla realizatorów, z którego każdy realizator musi wyruszyć przed rozpoczęciem wykonywania pierwszego zadania i powrócić po wykonaniu ostatniego. Baza jest oznaczana jako $h = H+1$. Wtedy $\overline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} \cup \{H+1\}$ jest zbiorem stanowisk wraz z bazą. Podobnie $\boldsymbol{R}$ i R są odpowiednio zbiorem i liczbą realizatorów. Najważniejszą charakterystyką zadań są czasy ich wykonania przez poszczególne realizatory. Czas $\tau_{r,g,h}$ wykonania bieżącego zadania h przez bieżący realizator $r \in \boldsymbol{R}$ jest sumą czasu $\breve{\tau}_{r,g,h}$ dojazdu tego realizatora ze stanowiska g do stanowiska h oraz czasu $\hat{\tau}_{r,h}$ wykonania czynności na stanowisku h, czyli $\tau_{r,g,h} = \hat{\tau}_{r,h} + \breve{\tau}_{r,g,h}$. W dalszej części tego rozdziału rozpatrzymy dwa proste niepewne problemy szeregowania zadań niepodzielnych i niezależnych na ruchomych realizatorach dowolnych z kryterium jakości szeregowania w postaci długości uszeregowania i maksymalnego opóźnienia.

4.1. Minimalizacja długości uszeregowania

Dla każdego realizatora r czasy $\tau_{r,g,h}$ tworzą wektor wierszowy

$$\boldsymbol{\tau}_r = [\boldsymbol{\tau}_{r,1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\tau}_{r,2}^{\mathrm{T}}, ..., \boldsymbol{\tau}_{r,H+1}^{\mathrm{T}}] = [\tau_{r,1,1}, \tau_{r,1,2}, ..., \tau_{r,1,H+1}, \tau_{r,2,1}, \tau_{r,2,2}, ..., \tau_{r,2,H+1}, ..., \tau_{r,H+1,1}, \tau_{r,H+1,2}, ..., \tau_{r,H+1,H+1}].$$

Wprowadzamy zmienne decyzyjne w postaci wektorów wierszowych

$$\boldsymbol{\gamma}_r = [\boldsymbol{\gamma}_{r,1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma}_{r,2}^{\mathrm{T}}, ..., \boldsymbol{\gamma}_{r,H+1}^{\mathrm{T}}] = [\gamma_{r,1,1}, \gamma_{r,1,2}, ..., \gamma_{r,1,H+1}, \gamma_{r,2,1}, \gamma_{r,2,2}, ..., \gamma_{r,2,H+1}, ..., \gamma_{r,H+1,1}, \gamma_{r,H+1,2}, ..., \gamma_{r,H+1,H+1}],$$

gdzie $\gamma_{r,g,h} = 1(0)$, jeśli realizator r wykonuje zadanie h po dojeździe ze stanowiska g (w przeciwnym przypadku). Wektory $\boldsymbol{\tau}_r$, $\boldsymbol{\gamma}_r$ są z kolei umieszczone w macierzach rozmiaru $(H+1)^2 \times R$, odpowiednio w $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{T}}, ..., \boldsymbol{\tau}_R^{\mathrm{T}}]$, $\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}, ..., \boldsymbol{\gamma}_R^{\mathrm{T}}]$. Następujące ograniczenia narzucone na macierz decyzyjną $\boldsymbol{\gamma}$ zapewniają wyznaczenie rozwiązania dopuszczalnego

$$\gamma_{r,g,h} \in \{0,1\}, \quad r \in \boldsymbol{R}, \quad g, h \in \overline{\boldsymbol{H}}, \tag{23}$$

$$\gamma_{r,h,h} = 0, \quad r \in \boldsymbol{R}, \quad h \in \overline{\boldsymbol{H}}, \tag{24}$$

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{g=1}^{H+1} \gamma_{r,g,h} = 1, \quad h \in \boldsymbol{H}, \tag{25}$$

$$\sum_{g=1}^{H+1} \gamma_{r,g,p} = \sum_{h=1}^{H+1} \gamma_{r,p,h}, r \in \boldsymbol{R}, \ p \in \overline{\boldsymbol{H}}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{\gamma}: \sum_{g \in \overline{\boldsymbol{H}}_S} \sum_{h \in \overline{\boldsymbol{H}}_S} \gamma_{r,g,h} \le \overline{H}_S - 1, \ \overline{\boldsymbol{H}}_S - \text{dowolny niepust podzbiór } \overline{\boldsymbol{H}}, \ r \in \boldsymbol{R}\}, \tag{27}$$

$$\sum_{h=1}^{H} \gamma_{r,H+1,h} = 1, \ r \in \boldsymbol{R}. \tag{28}$$

Spełnienie ograniczeń (25) zapewnia wykonanie wszystkich zadań. Oprócz oczywistych ograniczeń (23) i (24), pozostałe zapewniają wyznaczenie tras przejazdów realizatorów w postaci cykli Hamiltona. Ograniczenia te definiują zbiór decyzji dopuszczalnych $\boldsymbol{\Gamma}$. Rozpatrywane kryterium, czyli długość uszeregowania można zapisać jako

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}) &= \max_{r=1,2,...,R} \sum_{h=1}^{H+1} \sum_{g=1}^{H+1} \gamma_{r,g,h} \tau_{r,g,h} \\ &= \max_{r=1,2,...,R} \boldsymbol{\tau}_r \boldsymbol{\gamma}_r^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{29}$$

Problem szeregowania zadań na ruchomych realizatorach jest wtedy problemem optymalizacji dyskretnej, oznaczanym jako $\mathbf{P}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{\tau})$. Polega on na minimalizacji $Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma})$ ze względu na $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}$ dla ustalonej wartości $\boldsymbol{\tau}$, tzn. $\min_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}} Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma})$. Ponadto $Q^*(\boldsymbol{\tau}) \triangleq \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}} Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma})$.

W wielu przypadkach, np. w dwupoziomowym systemie podejmowania decyzji w kompleksie operacji produkcyjnych (np. [4,6]), czasy $\tau_{r,g,h}$ nie są znane, ale można kreślić przedziały ich zmienności, tzn. można przyjąć założenie, że $\tau_{r,g,h} \in [\underline{\tau}_{r,g,h}, \overline{\tau}_{r,g,h}]$, gdzie wartości $\underline{\tau}_{r,g,h}$ i $\overline{\tau}_{r,g,h}$ są znane i dane. Macierz $\boldsymbol{\tau}$ jest wtedy elementem iloczynu kartezjańskiego wszystkich przedziałów, oznaczanego jako $\boldsymbol{T}$, a niepewny problem szeregowania zadań, oznaczany jako $\mathbf{UP}_{\mathrm{C}}$ i nawiązujący do problemu deterministycznego $\mathbf{P}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{\tau})$, sprowadza się do rozwiązania następującego zagadnienia minimalizacji

$$\min_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}} z_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{\gamma}) = \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}} \max_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{T}} \frac{Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\gamma}) - Q^*(\boldsymbol{\tau})}{Q^*(\boldsymbol{\tau})} = z_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{\gamma}').$$

Jest to także szczególny przypadek odpowiedniego niepewnego problemu decyzyjnego przedstawionego w rozdziale 2. Wystarczy zauważyć, że dane problemu **UP** są teraz zdefiniowane następująco. Realizacja $w \in \boldsymbol{W}$ parametru $\boldsymbol{b}$, tzn. $\boldsymbol{b}_w \in \boldsymbol{B}$ jest wprost macierzą

$\tau \in \boldsymbol{T}$ ($m = R$, $n = (H+1)^2$), czyli zbiór realizacji $\boldsymbol{W}$ pokrywa się tu ze zbiorem wartości parametru, a więc $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}$. Zmienna decyzyjna $x \in X_w$ jest teraz macierzą binarną $\gamma \in \Gamma$, a funkcja oceniająca (16) ma postać (29). Ponadto macierzą b_w^i jest teraz taka macierz τ, oznaczana jako τ^r, której elementy z r-tej kolumny są równe $\bar{\tau}_{r,g,h}$, a pozostałe elementy – $\underline{\tau}_{r,g,h}$. W następstwie tego faktu jako macierz $b_w^{\bullet}$ należy przyjąć macierz $\tau^{\bullet}$ z następująco określonymi kolumnami

$$\tau_r^{\bullet} = [\tau_{r,g,h}^{\bullet}]_{g,\,h=1,2,\ldots,H+1} = \left[\frac{\bar{\tau}_{r,g,h}}{Q^*(\tau^r)}\right]_{g,\,h=1,2,\ldots,H+1},$$

$$\tau_i^{\bullet} = [\tau_{i,g,h}^{\bullet}]_{g,\,h=1,2,\ldots,H+1} = \left[\frac{\underline{\tau}_{i,g,h}}{Q^*(\tau^i)}\right]_{g,\,h=1,2,\ldots,H+1},$$

dla $i \neq r$. W rezultacie dostajemy odporny algorytm szeregowania zadań, optymalny w sensie (12), [5]:

1. Rozwiąż R problemów $\mathrm{P_C}(\tau^r)$ i oblicz $Q^*(\tau^r)$.
2. Rozwiąż problem $\mathrm{P_C}(\tau^{\bullet})$.

W kroku 1. jest rozwiązywanych R problemów $\mathrm{P_C}(\tau^r)$ różniących się macierzami τ^r, a w kroku 2. używamy macierzy $\tau = \tau^{\bullet}$.

4.2. Minimalizacja maksymalnego opóźnienia

W rozważanym problemie szeregowania zadania są dodatkowo scharakteryzowane liniami krytycznymi d_h, o których zakładamy, że są posortowane, tzn. $d_g \le d_h$ dla $g, h = 1,2,..,H$, $g < h$, np. [4]. Dodatkowo zdefiniujmy przedział czasu o początku w momencie startu procedury szeregowania i końcu w momencie d_l, gdzie l, l = 1,2,...,H jest indeksem przedziału czasu l. Ponieważ w tym przypadku zjazdy realizatorów do bazy nie mają wpływu na wartość kryterium jakości, zostaną w rozważaniach pominięte. Podobnie jak w p.4.1 wprowadzamy zmienne decyzyjne, a mianowicie $\alpha_{r,g,h,l} = 1(0)$, jeśli wykonywanie zadania h przez realizator r po dojeździe ze stanowiska g rozpoczyna się przed końcem przedziału l (w przeciwnym przypadku), na które zostały nałożone ograniczenia o postaci analogicznej do (23)–(28). Zapewniają one wyznaczenie rozwiązań dopuszczalnych i definiują zbiór rozwiązań dopuszczalnych $\mathcal{A}$. Zmienne $\alpha_{r,g,h,l}$ tworzą macierz

$$\alpha = [\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \alpha_k^{\mathrm{T}}, \ldots, \alpha_{RH}^{\mathrm{T}}],$$

$$\alpha_k \triangleq \alpha_{r,l} = [1, \alpha_{k,1,1}, \alpha_{k,1,2}, \ldots, \alpha_{k,1,H}, \alpha_{k,2,1}, \alpha_{k,2,2}, \ldots, \alpha_{k,2,H}, \ldots, \alpha_{k,H+1,1}, \alpha_{k,H+1,2}, \ldots, \alpha_{k,H+1,H}].$$

W proponowanym zapisie zmiennych decyzyjnych dokonano kompresji indeksów według zasady

$$k = l + H(r-1). \tag{30}$$

Indeks l zmienia się od 1 do H dla każdego $r = 1, 2, \ldots, R$, czyli dla ustalonego r wzrost l powoduje taki sam wzrost k. Czasy $\tau_{r,g,h}$ oraz linie krytyczne d_l tworzą macierz $\tau = [\tau_1^{\mathrm{T}}, \tau_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \tau_k^{\mathrm{T}}, \ldots, \tau_{RH}^{\mathrm{T}}]$, gdzie

$$\tau_k = [-d_l, \tau_{r,1,1}, \tau_{r,1,2}, \ldots, \tau_{r,1,H}, \tau_{r,2,1}, \tau_{r,2,2}, \ldots, \tau_{r,2,H}, \ldots, \tau_{r,H+1,1}, \tau_{r,H+1,2}, \ldots, \tau_{r,H+1,H}].$$

Rozmiary macierzy α i τ oraz wektorów α_k i τ_k wynoszą odpowiednio $H(H+1)+1 \times RH$ oraz $H(H+1)+1$. Łatwo zauważyć, że w macierzy τ występuje tylko R kolumn różnych ze względu na czasy wykonywania zadań. Odpowiadają one R podmacierzom składającym się z H takich samych kolumn, tzn. w pierwszych H kolumnach oprócz $-d_l$ czasy wykonania $\tau_{1,g,h}$ są takie same, w następnych H kolumnach oprócz $-d_l$ czasy wykonania $\tau_{2,g,h}$ są takie same, itd. Dla $R = 2$ i $H = 3$ macierz τ jest następująca

$$\tau = \begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_1 & -d_2 & -d_3 \\ \tau_{1,1,1} & \tau_{1,1,1} & \tau_{1,1,1} & \tau_{2,1,1} & \tau_{2,1,1} & \tau_{2,1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{1,4,3} & \tau_{1,4,3} & \tau_{1,4,3} & \tau_{2,4,3} & \tau_{2,4,3} & \tau_{2,4,3} \end{bmatrix}.$$

Korzystając z definicji wektorów τ_k i α_k możemy przedstawić kryterium jakości szeregowania, czyli maksymalne opóźnienie w postaci analitycznej

$$Q_{\mathrm{L}}(\tau, \alpha) = \max_{k=1,2,\ldots,RH} \tau_k \alpha_k^{\mathrm{T}}.$$

Wtedy dla ustalonego τ deterministyczna wersja rozważanego problemu szeregowania zadań $\mathrm{P_L}(\tau)$ jako zagadnienie optymalizacji dyskretnej polega na minimalizacji $Q_{\mathrm{L}}(\tau, \alpha)$ ze względu na $\alpha \in \mathcal{A}$, czyli $\min_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_{\mathrm{L}}(\tau, \alpha)$. Ponadto $Q_{\mathrm{L}}^*(\tau) \triangleq \min_{\alpha \in \mathcal{A}} Q(\tau, \alpha)$. W tym przypadku również można wykorzystać ogólny algorytm przedstawiony w rozdziale 2., ale nie tak bezpośrednio jak w dwóch poprzednich przypadkach. Należy zauważyć, że wartość $Q_{\mathrm{L}}^*(\tau)$ może być ujemna. Dlatego chcąc zachować nieujemną wartość funkcji (7), proponujemy dla rozważanego problemu szeregowania następującą jej postać

$$\left| \frac{Q_{\mathrm{L}}(\tau, \alpha) - Q_{\mathrm{L}}^*(\tau)}{Q_{\mathrm{L}}^*(\tau)} \right| = \frac{Q_{\mathrm{L}}(\tau, \alpha) - Q_{\mathrm{L}}^*(\tau)}{\left| Q_{\mathrm{L}}^*(\tau) \right|},$$

gdzie $\alpha \in \mathcal{A}$ jest nową zmienną decyzyjną $x \in X_w$, a $Q_{\mathrm{L}}(\tau, \alpha)$ – to nowa funkcja oceniająca $F(b_w, x)$. Tak jak poprzednio $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}$. Realizacji b_w parametru b odpowiada macierz τ, przy czym $m = RH$ oraz $n = H(H+1)+1$. Wtedy niepewny problem decyzyjny (problem szeregowania) $\mathrm{UP_L}$ polega na minimalizacji

$z_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{a}) = \max_{\boldsymbol{\tau}\in T}\{[Q_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{a}) - Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau})] / |Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau})|\}$ względem $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, tzn. $\min_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{\mathcal{A}}} z_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{a}) = \min_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{\mathcal{A}}} \max_{\boldsymbol{\tau}\in T} \frac{Q_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{a}) - Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau})}{|Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau})|}$.

W wyniku otrzymujemy optymalną macierz zmiennych decyzyjnych $\boldsymbol{a}'$ oraz $z_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{a}')$ .Optymalny odporny algorytm szeregowania składa się też z dwóch kroków:

1. Rozwiąż $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\tau}^{k})$, $k = 1,2, ..., RH$ i oblicz $|Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau}^{k})|$.
2. Rozwiąż deterministyczny problem podejmowania decyzji oparty na $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\tau}''')$, gdzie czasy w macierzy $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'''$ są obliczane według zależności $\tau_{r,g,h}''' = \overline{\tau}_{r,g,h} / |Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau}^{r})|$, oraz $\tau_{i,g,h}''' = \underline{\tau}_{i,g,h} / |Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau}^{i})|$ dla $i \neq r$, a linie krytyczne są obliczane jako $d_l / |Q_{\mathrm{L}}^{*}(\boldsymbol{\tau}^{k})|$, przy czym indeksy l, r, k są powiązane według (30).

Ze względu na postać macierzy $\boldsymbol{\tau}$, w kroku 1. wystarczy rozwiązać problemy $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}^{r})$ dla $r = 1, 2, ..., R$, za każym razem z inną kolumną zawierającą maksymalne wartości $\tau_{r,g,h}$, czyli $\overline{\tau}_{r,g,h}$ oraz z innymi elementami równymi $\underline{\tau}_{p,g,h}$, $p \neq r$ i niezmienionymi liniami krytycznymi. Łatwo spostrzec, że dla realizatorów identycznych w kroku 2. algorytmu należy rozwiązać rozpatrywany deterministyczny problem szeregowania zadań. Więcej szczegółów i ilustracyjny przykład obliczeniowy podano w [8].

5. UWAGI KOŃCOWE

Istota proponowanego odpornego algorytmu rozwiązania polega na możliwości zastąpienia rozwiązania niepewnego problemu decyzyjnego z niepewnymi parametrami przedziałowymi oraz z funkcją oceniającą w postaci funkcji maksimum – wielokrotnym rozwiązaniem odpowiadających problemów deterministycznych. W przypadku zagadnienia alokacji i problemu szeregowania z kryterium w postaci długości uszeregowania algorytmy rozwiązania tych problemów są znane.

Zastosowanie kryterium (12) opartego na względnej funkcji żalu do innych zagadnień z zakresu badań operacyjnych, a także wykorzystanie pozostałych kryteriów wymienionych w rozdziale 2. dla podobnych problemów decyzyjnych pozostaje sprawą otwartą.

ROBUST DECISION MAKING ALGORITHMS FOR THE UNCERTAIN TASK ALLOCATION AND TASK SCHEDULING PROBLEMS

Abstract: The paper concerns uncertain decision making problems with unknown parameters which values belong to known sets of values. The review of different approaches to decision making problem formulations is presented and the robust decision making is considered in detail. The optimal robust decision making algorithm based on the relative regret is presented for the defined class of the evaluating functions. Its applications for the task allocation problem in complex of parallel operations and for two simple task scheduling problems on moving executors are given.

Literatura

[1] Averbakh I. (2000) Minimax regret solutions for minimax optimization problems with uncertainty. *Operations Research Letters*, 27, 57–65.

[2] Daniels R.L., Kouvelis P. (1995) Robust scheduling to hedge against processing time uncertainty in single-stage production. *Manag. Sc.*, 41, 363–376.

[3] Hurwicz L. (1951) Optimality criteria for decision making under ignorance. Cowles Communication Discussion Paper, Statistics, 370.

[4] Józefczyk J. (2001) Wybrane Problemy Podejmowania Decyzji w Kompleksach Operacji. seria „Monografie Komitetu Automatyki i Robotyki PAN", tom 2., Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

[5] Józefczyk J. (2004) Robust algorithm for task scheduling on moving executors with uncertain processing times, in: *Proceedings of the 15th Mini EURO Conf. on Managing Uncertainty in Decision Support Models, Coimbra, Portugal* [cd-rom].

[6] Józefczyk J.(2005) Podejmowanie decyzji w dwupoziomowym kompleksie operacji produkcyjnych (ref. plenarny). *Materiały Konferencji Naukowo-Technicznej "Automation 2005, Automatyzacja – Nowości i Perspektywy"*, PIAP, Warszawa, 53–66.

[7] Józefczyk J. (2005) Worst-case relative regret algorithm for task allocation in complex operation system. *Systems Science* (w druku).

[8] Józefczyk J. (2005) Robust algorithm for the uncertain scheduling problem with moving executors. *Materiały 16th IFAC World Congress*, Praga (w druku).

[9] Kasperski A. (2005) Minimizing maximal regret machine sequencing problem with maximum lateness criterion. *Operations Res. Letters*, 33, 431–436.

[10] Kouvelis P., Yu G. (1997) *Robust Discrete Optimization and Its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[11] Mulvey J.M., Vanderbei R.J., Zenios S.A. (1994) Robust optimization of large scale systems. Report SOR-91-13, Statistics and Operations Research, Princeton University, Princeton, NJ.

[12] Rosenblatt M.J., Lee H.L. (1987) A robustness approach to facilities design. *Int. J. Production Res.*, 25, 479–486.

[13] Savage L.J. (1951). The theory of statistical decision. *J. of American Statist. Assoc.*, 46, 55–67.

[14] Yager R.R. (1988) On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Trans. on SMC*, 18, 183–190.

[15] Yager R.R. (2004) Decision making using minimization of regret. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36, 109–128.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4