INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

TECHNIKI INFORMACYJNE
TEORIA I ZASTOSOWANIA

Wybrane problemy
Tom 1(13)

poprzednio

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2011

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

TECHNIKI INFORMACYJNE TEORIA I ZASTOSOWANIA

Wybrane problemy
Tom 1(13)

poprzednio

ANALIZA SYSTEMOWA W FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Pod redakcją
Jerzego HOŁUBCA

Warszawa 2011

Wykaz opiniodawców artykułów zamieszczonych
w niniejszym tomie:

Dr hab. inż. Przemysław GRZEGORZEWSKI, prof. PAN

Prof. dr hab. inż. Jerzy HOŁUBIEC

Dr inż. Tatiana JAWORSKA

Dr hab. inż. Wiesław KRAJEWSKI, prof. PAN

Dr hab. inż. Maciej KRAWCZAK, prof. PAN

Dr hab. Michał MAJSTEREK

Dr hab. inż. Andrzej MYŚLIŃSKI, prof. PAN

Prof. dr hab. inż. Witold PEDRYCZ

Dr hab. inż. Ryszard SMARZEWSKI, prof. KUL

Prof. dr hab. inż. Andrzej STRASZAK

Dr Dominik ŚLĘZAK

Prof. dr hab. inż. Stanisław WALUKIEWICZ

Warszawa 2011

ISBN 9788389475336

NOMOGRAM JAKO GRAFICZNY KALKULATOR W PRZESTRZENI CZTEROWYMIAROWEJ

Bogumił Fiksak
Studia Doktoranckie IBS PAN

This paper describes a way of construction of nomograms in two cases. Firstly, when the analytical formula of functional relation is given, and secondly, when there is a series of vector data describing functional relation. It was shown how we can construct multidimensional functional relation on a surface. A case of four dimensional nomogram was drawn, and the role of so called reference line was described in details. In the case of a lack of analytic formula of functional relation we proposed a new neural networks architecture which is called incidencial neural networks. In order to compare the efficiency of the new neural networks as a nomogram generator an example was performed for glomerular filtration rate, GFR.

***Key words**: nomograms, nomography, multilayer neural networks, graphical representation of algebraic equations*

1. Wprowadzenie

Już w starożytności konstruowano przyrządy przyspieszające prowadzenie żmudnych rachunków i korzystano z geometrii, jako dziedziny wspomagającej obliczenia. Wprowadzenie przez Rene Descardesa w XVII wieku układu współrzędnych zapoczątkowało przedstawianie zależności funkcyjnych w sposób usystematyzowany i jednolity.

Analiza zależności na wykresach jest efektywna jedynie dla przypadku funkcji jednej zmiennej niezależnej. Atrakcyjność tradycyjnego układu współrzędnych kartezjańskich gwałtownie spada już dla dwóch zmiennych niezależnych. Poszukiwano więc innych możliwości wizualizacji funkcji.

Wprowadzenie wykresu log-log przez Leona Lalaane'a (1843), było następnym krokiem w graficznym przedstawianiu zależności funkcyjnych. Jednak przełomem okazały sie nomogramy opracowane przez Maurycego d'Ocagne (1885).

Niestety nie wszystkie funkcje przedstawione w postaci uwikłanej są nomogramowalne, ale jedynie takie, dla których można napisać wyznacznik Soreau.

Następnym krokiem było rozwiązanie 13 Problemu Hilberta (1900) przez Władimira Arnolda (1959). Twierdzenie Arnolda rozwiązało problem nomogramowalności, tzn. form reprezentacji funkcji wielowymiarowych na płaszczyźnie.

W pracy przedstawiono procedurę konstruowania nomogramów w przestrzeni czterowymiarowej z możliwością przedstawiania ich na płaszczyźnie.

2. Nomogramy

Nomogramem nazywamy wykres składający się z osi funkcyjnych, na których określonym punktom przyporządkowano wartości liczbowe. Szczegółowy opis nomogramów można znaleźć w pracy Krasnodębskiego (1960). Taki wykres umożliwia szybkie, proste i przybliżone wyznaczenie, bez obliczania, wartości dowolnej zmiennej równania:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{1}$$

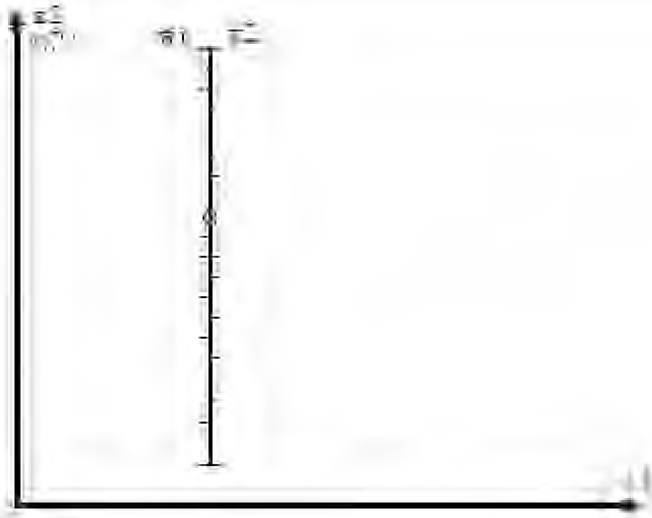
gdy znane są wartości pozostałych zmiennych.

Na nomogramie mogą znajdować się dwie, trzy lub więcej osi funkcyjnych, na których zaznaczone są wartości zwane *cechami*. Nomogramy takie zwane są *nomogramami kolineacyjnymi*.

Dla zależności funkcyjnej danej równaniem (1) można wtedy skonstruować nomogram kolineacyjny, gdy istnieje dla niej wyznacznik Soreau opisany m.in. w pracy Otto (1964).
Poniżej przedstawimy kilka rodzajów nomogramów kolineacyjnych.

Nomogram dwuwymiarowy

Najprostszy nomogram składa się z dwóch osi funkcyjnych zestawionych obok siebie. Korzystanie z takiego nomogramu jest bardzo proste ponieważ wartości cechy na pierwszej osi funkcyjnej x_1 odpowiada wartość cechy x_2 na drugiej osi funkcyjnej. Cechy na obydwu osiach funkcyjnych łączy punkt (Rysunek 1).



Rys. 1. Nomogram z dwiema osiami funkcyjnymi

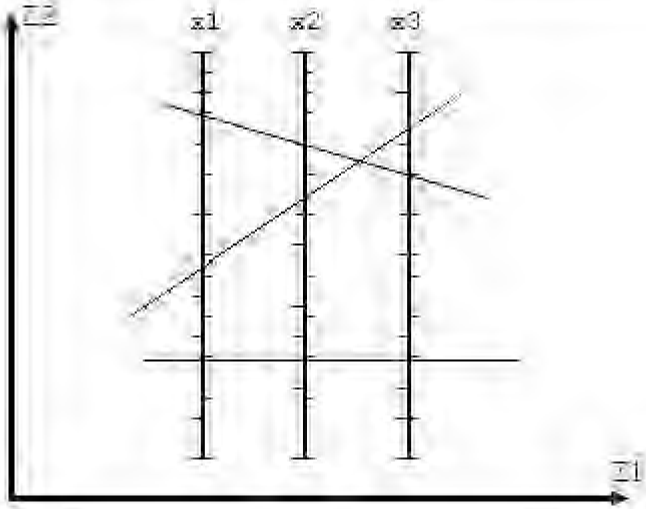
Odpowiadający powyższemu nomogramowi równanie Soreau ma postać:

$$\begin{vmatrix} z_2(x_1)' , & 1 \\ z_2(x_2) , & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Nomogramy dwuwymiarowe są często stosowane przy opisie skal pomiarowych przyrządów pomiarowych np. prędkościomierzy, zegarów itp. - wszędzie tam gdzie mamy możliwość korzystania z dwóch różnych jednostek.

Nomogram trójwymiarowy

Nomogram trzywymiarowy składa się z trzech osi funkcyjnych zestawionych obok siebie. Odczytywanie takiego nomogramu polega na przeprowadzeniu prostej łączącej wartości dwóch cech na dwóch osiach funkcyjnych np x_1 i x_2, a następnie odczytanie wartości cechy x_3 na trzeciej osi funkcyjnej. Cechy na trzech osiach funkcyjnych połączone są prostą.



Rys. 2. Nomogram z trzema osiami funkcyjnymi

Odpowiadający powyższemu nomogramowi wyznacznik Soreau ma następującą postać:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & z_{12}(x_1) & 1 \\ Z_{21} & z_{22}(x_2) & 1 \\ Z_{31} & z_{32}(x_3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

gdzie Z_{11}, Z_{21} i Z_{31} są stałymi określającymi odległości między skalami funkcyjnymi.

Nomogramy trójwymiarowe są obecnie rzadko spotykane ponieważ zostały wyparte przez kalkulatory elektroniczne i specjalistyczne programy komputerowe. Jednak tam gdzie zachodzi potrzeba prześledzenia całego zakresu ich zmienności, nomogramy trójwymiarowe są ciągle niezastąpione.

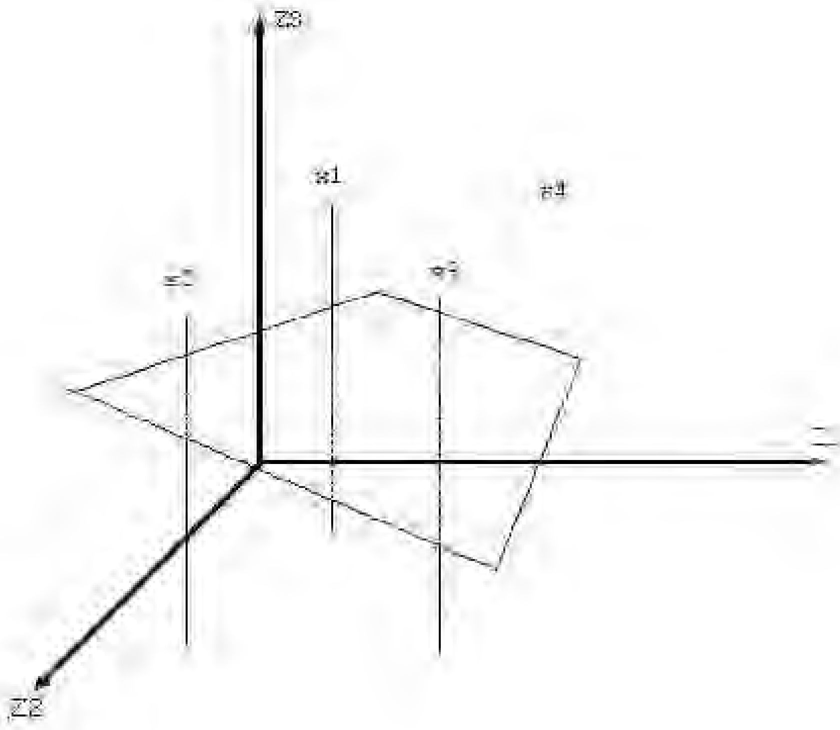
Nomogram czterowymiarowy

Nomogram czterowymiarowy składa się z czterech osi funkcyjnych oraz tzw. osi *niemej* zestawionych obok siebie na płaszczyźnie.

Odczytywanie takiego nomogramu polega na przeprowadzeniu płaszczyzny łączącej wartości trzech cech na trzech osiach funkcyjnych np. x_1, x_2 i x_3

a następnie odczytanie wartości cechy x_4 na czwartej osi funkcyjnej na przedłużeniu wspomnianej płaszczyzny.

Cechy na czterech osiach funkcyjnych łączy płaszczyzna.

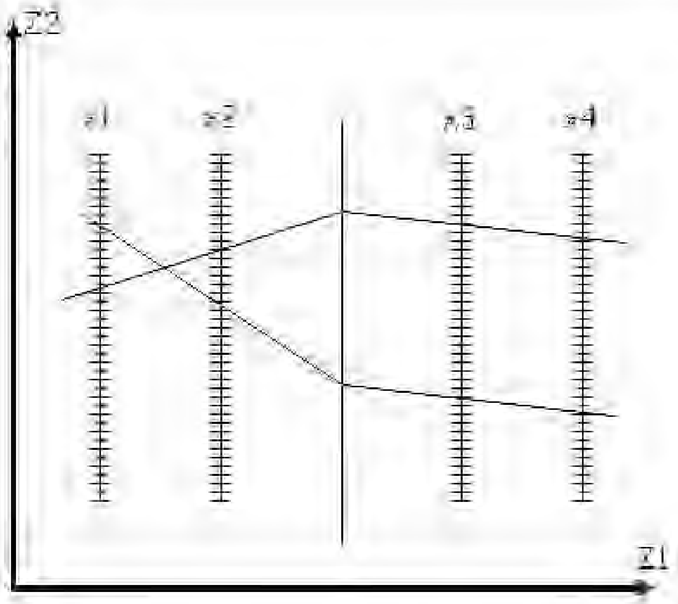


Rys. 3. Nomogram z czterema osiami funkcyjnymi

Rzutując płaszczyznę możemy w nomografii określać ją poprzez dwie proste. Nomogram przestrzenny możemy przedstawić w postaci nomogramu określonego na płaszczyźnie.

Nomogram jest rzutem nomogramu przestrzennego na płaszczyznę. Składa sie on z czterech osi funkcyjnych x_1, x_2, x_3 i x_4 i osi niemej wykreślonej pomiędzy osiami x_2 i x_3.

Korzystanie z takiego nomogramu polega na wykreśleniu prostej łączącej znane wartości cech np. x_1 i x_2, a następnie znalezieniu punktu wspólnego powyższej prostej z osią niemą (*reference line*).



Rys. 4. Nomogram z czterema osiami funkcyjnymi zrzutowany na płaszczyznę

Z tego wspólnego punktu kreślimy prostą przechodzącą przez znany punkt (cecha) na osi funkcyjnej x_3 i odczytujemy nieznaną wartość cechy na osi funkcyjnej x_4 na przedłużeniu drugiej prostej.

Odpowiadający powyższemu nomogramowi wyznacznik Soreau ma postać:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & z_{13}(x_1) & 1 \\ Z_{21} & Z_{22} & z_{23}(x_2) & 1 \\ Z_{31} & Z_{32} & z_{33}(x_3) & 1 \\ Z_{41} & Z_{42} & z_{43}(x_4) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

gdzie Z_{ij}, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2$, są stałymi określającymi położenie linii nomograficznych.

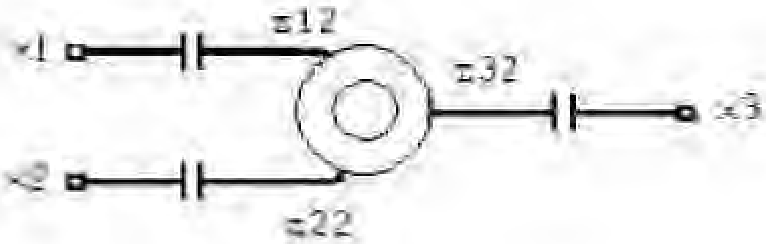
3. Incydencyjne sieci neuronowe

W przypadku braku postaci analitycznej zależności funkcyjnej (1) można skonstruować nomogramy stosując układ sieci neuronowych o jednym wejściu i jednym wyjściu. Każda pojedyncza sieć neuronowa odpowiada za jeden wymiar nomograficzny.

Przykładowa nowa architektura zaproponowana w rozprawie, składająca się z trzech sieci elementarnych, realizująca działanie mnożenia (5)

$$f_3(x_3) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)$$

nomogram kolineacyjny prostoliniowy realizujący mnożenia, przedstawiono poniżej



Rys.5 Układ trzech sieci złączonych wyznacznikiem Soreau.

Powyższy układ sztucznych sieci neuronowych tworzących nową architekturę sieci neuronowych jest połączony więzami wynikającymi z rozwinięcia wyznacznika.

4. Przykład zastosowania nomogramu czterowymiarowego

Nomogram płaski czterowymiarowy zastosujemy do przedstawienia zależności funkcyjnej z zakresu medycyny.

Jednym z głównych wskaźników oceny stanu chorego podczas leczenia nadciśnienia jest współczynnik przesączania kłębuszkowego (GFR). Oznacza on ilość osocza przefiltrowaną przez kłębuszki nerkowe w jednostce czasu. Stanowi on podstawowe kryterium klasyfikacji stopnia wydolności nerek. Przesączanie kłębuszkowe zależy m.in. od napięcia zwieracza przedkłębuszkowego, zwieracza zakłębuszkowego, ciśnienia krwi i in. (http://pl.wikipedia.org/wiki /GFR).

Prawidłowe wartości GFR u człowieka zawierają się w granicach od 80 do 120 ml/min na 1,73 m^2.

Współczynnik GFR określany jest wg następującego wzoru:

$$C_{Cr} = \frac{(140 - wiek)\, m.c.}{72 S_{Cr}} \tag{5}$$

gdzie:

C_{Cr} – klirens kreatyniny w ml/min

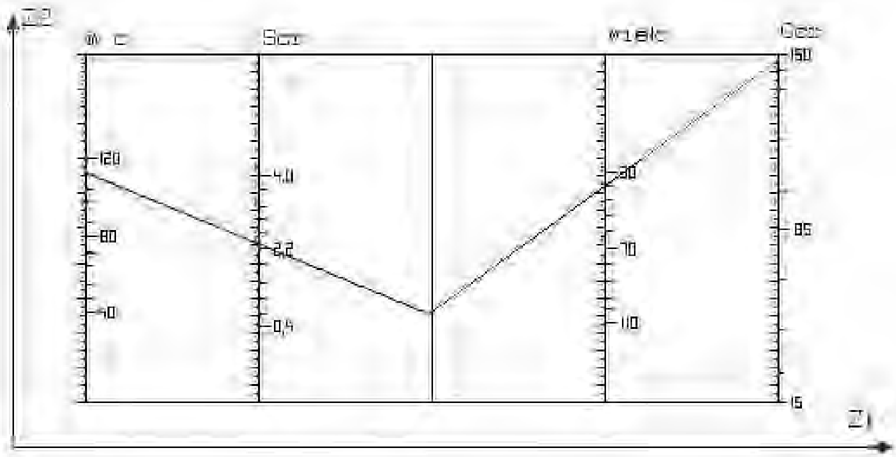
S_{Cr} – stężenie kreatyniny w mg/dl

wiek – w latach

m.c. – masa ciała w kg.

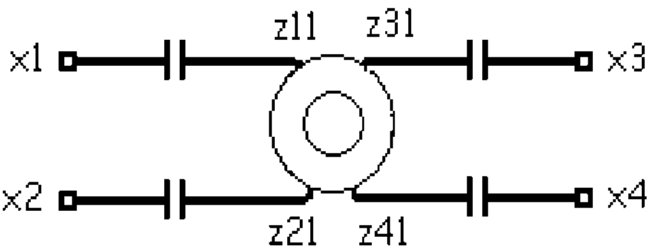
Na podstawie wzoru (5) możemy skonstruować nomogram czterowymiarowy łączący cztery zmienne przedstawione powyżej.

Sposób korzystania z przedstawionego poniżej nomogramu jest przedstawiony na Rysunku 6.



Rys 6. Nomogram współczynnika przesączania kłębuszkowego GFR

Na podstawie (5) został wygenerowany ciąg wektorów czterowymiarowych, który posłużył jako dane uczące do incydencyjnej sieci neuronowej przedstawionej na Rysunku 7. Jest układ czterech sztucznych sieci neuronowych składających się z czterech sieci elementarnych (SISO) złączonych więzami incydencji.



Rys 7. Incydencyjna sieć neuronowa realizująca nomogram przedstawiony na rys. 6

Możliwe są konstrukcje nomogramów w przestrzeniach większych niż czterowymiarowe konstruowane w analogiczny sposób jak przedstawiono poniżej. Potrzebna jest wtedy większa liczba osi niemych, liczba osi niemych jest o trzy mniejsza niż liczba współrzędnych.

5. Wnioski

Praca przybliża konstrukcję nomogramów kolineacyjnych w przestrzeni czterowymiarowej.

Nomogramy przedstawione powyżej są jedną z propozycji umożliwiających ogląd zależności funkcyjnych w przestrzeni o czterech wymiarach (trzech zmiennych niezależnych) na płaszczyźnie. Taka procedura nie ogranicza rzędu funkcyjnej zależności na płaszczyźnie.

Kreślenie nomogramów w przestrzeniach wielowymiarowych pozwala porównać intuicyjne wywody z geometryczną ścisłością

Korzystanie z przedstawionych powyżej nomogramów wielo- wymiarowych pozwala szybko nabyć intuicyjnego spojrzenia na całość zagadnienia opisywanego zależnością funkcyjną, co ma niebagatelne znaczenie w procesach dydaktycznym, projektowym i decyzyjnym.

Literatura

[1] Adams D. P. (1964), *Nomography: Theory and Application*. Hamden, CT: Archon.

[2] Arnold, V. I. (1959), Representation of continuous functions of three variables by the superposition of continuous functions of two variables. *Mat. Sb.*, 48 (90).

[3] Borsuk K. (1983), *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa.

[4] Chen C-h., Härdle W., Unwin A. (Eds.). (2008), *Handbook of Data Visualization*. Springer.

[5] Doerfler R. (2008) *The Lost Art of Nomography*, http://myreckonings.com/wordpress/wp-content/uploads/nomography.pdf, 2008.

[6] Douglass R., Douglas P. A. (1947),. *Elements of Nomography*. New York: McGraw-Hill.

[7] Epstein L. I. (1958), *Nomography*. New York: Interscience Publishers.

[8] Hewes L. I., Seward H. L. (1923), *The design of diagrams for engineering formulas and the theory of nomography*. Mc Graw-Hill Book Company, New York.

[9] Krasnodębski, R. (1960), *Proste nomogramy*. PWN, Warszawa.

[10] Lalanne, L-L. (1843), Représentation graphique des tableaux numériques. Appendice au Cours complet de météorologie de L. F. Kaemtz, trad. et annoté par Ch. Martins Paris, Paulin.

[11] d'Ocagne, M. (1885). *Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique déduits de la considération des coordonnées parallèles*. Paris, Gauthier-Villars.

[12] d'Ocagne M. (1899), *Trait´e de nomographie*. Paris: Gauthier-Villars.

[13] Otto, E. (1964), *Nomografia*. PWN, Warszawa.

[14] Sierpiński W. (1951), *Zasady algebry wyższej*, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa.

[15] Soreau, R. (1902), *Contribution à la théorie et aux applications de lanomographie*. Paris: Ch. Bèranger.

[16] http://pl.wikipedia.org/wiki/GFR.

[17] http://www.projectrho.com/nomostub.html.

[18] http://www.pynomo.org/wiki/index.php?title=Basics.

J. Hołubiec, red. – TECHNIKI INFORMACYJNE - TEORIA I ZASTOSOWANIA, tom 1 (13)

ISBN 9788389475336