ANALIZA SYSTEMOWA I ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
50-lecia pracy naukowej

ROMANA KULIKOWSKIEGO

ISBN 83-85847-34-0

Druk: "ARGRAF" Agencja Poligraficzno-Wydawnicza, Warszawa
Skład: Barbara Kotuszewska

STEROWANIE OPTYMALNE PROCESAMI WIELOETAPOWYMI

Jakub Gutenbaum

Instytut Badań Systemowych PAN

In the paper some problems of optimal control of multistage processes (multiprocesses) are considered. A multiprocess represents a collection of dynamic control systems described by different mathematical models and/or different objective functionals and coupled trough constraints on the boundary points of the state trajectories.

It is shown, that in the case of an additive objective functional the problem can be solved by the Lagrangian multipliers method. In the case when the control systems are also coupled through the cost of the end point of the state trajectory (The Bolza problem) - the dynamic optimization procedure is used to solve the problem. To illustrate the use of this procedure a problem in investment planning is considered.

Key words: multistage process, multiprocess, Lagrangian multipliers, dynamic optimization, investment planning

1. Wprowadzenie

Proces wieloetapowy jest to dynamiczny proces sterowania, który może być podzielony na etapy. Każdy z nich opisany jest innym modelem matematycznym, obejmującym różnorodne ograniczenia, w tym równania stanu, oraz funkcjonał jakości. Obowiązują warunki ciągłości trajektorii stanu w punktach brzegowych między kolejnymi etapami. Praktyka daje wiele przykładów tego typu procesów w technologii, robotyce, ekonomii, ekologii, Clark (1989).

Można rozróżnić dwie zasadniczo różne klasy procesów wieloetapowych, a mianowicie procesy wieloetapowe *deterministyczne i stochastyczne.*

W *przypadku deterministycznym* a priori wiadomo jaki model odpowiada każdemu etapowi. Przykładem może tu być proces produkcji stali w piecu łukowym. Proces technologiczny można podzielić na dwa etapy, Gutenbaum (1977): etap topienia i etap formowania produktu. Na pierwszym etapie należy osiągnąć stan ciekły wsadu w możliwie krótkim czasie. Na etapie drugim określone warunki temperaturowe powinny być utrzymane przy minimalnym koszcie zużywanej energii. Przykłady z dziedziny ekonomii przedstawione są w Rossana (1985), Tomiyama (1989).

Przypadek stochastyczny dotyczy procesów, dla których przypadkowe zmiany otoczenia powodują konieczność zmiany modelu. Taki przypadek może być zilustrowany przykładem systemu wodnego, dla którego zmiana sytuacji typu susza, powódź - z których każda wymaga innego opisu matematycznego - jest związana z natężeniem opadów, lub innymi czynnikami atmosferycznymi, o charakterze przypadkowym, Gutenbaum (1983).

Clark i Winter opracowali jednolitą teorię formułowania warunków koniecznych optymalności, uwzględniającą przypadek procesów wieloetapowych, Clark (1989). Jej podstawą jest teoria gradientów uogólnionych oraz zasada maksimum. Warunki transwersalności na granicy między etapami rozpatrują Tomiyama (1985) oraz Jezierski (1987). W pracy Łodziński (1984) przedstawione jest zastosowanie zasady maksimum w wieloetapowym zadaniu liniowo-kwadratowym. W pracy Babad (1995) rozpatrywany jest przypadek, w którym ostatni etap ma nieskończony horyzont optymalizacji.

W tej pracy przedstawiono kilka szczególnych przypadków wyznaczania sterowania optymalnego procesami wieloetapowymi, w oparciu o metodę współczynników Lagrange'a, programowanie dynamiczne oraz klasyczne ujęcie zasady maksimum.

2. Procesy wieloetapowe

Rozpatrujemy procesy sterowania, które można podzielić na N etapów, $N > 1$, przy czym etap i-ty , $i \in \{1,..., N\}$, opisany jest następującym równaniem stanu:

$$dx(t)/dt = \boldsymbol{F}_i [x(t) \,;\, \boldsymbol{u}_i(t) \,;\, t] \,;\, t \in (T_{i-1}, T_i] \qquad (1)$$

przy warunkach początkowych:

$$\boldsymbol{x}_{0,i} = \boldsymbol{x}(T_{i-1})$$

gdzie:

$x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ - wektor stanu , $\boldsymbol{F}_i : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^1 \Rightarrow \boldsymbol{R}^n$ jest funkcją wektorową, spełniającą warunki Lipschitza, która przy danych warunkach początkowych i przy danym $\boldsymbol{u}_i$ zapewnia istnienie jednoznacznego rozwiązania równania różniczkowego (1), $\boldsymbol{u}_i(t)$ - wartości dopuszczalne zmiennych sterujących:

$$\boldsymbol{u}_i(t) \in \Omega_i \subset \boldsymbol{R}^m \text{ dla wszystkich } t \in (T_{i-1}, T_i] \tag{2}$$

Funkcje sterujące $\boldsymbol{u}_i(t)$ są elementami zbioru U_i odcinkami ciągłych funkcji czasu:

$$U_i = \{\boldsymbol{u}_i : (T_{i-1}, T_i] \Rightarrow \Omega_i\} \tag{3}$$

Na końcu każdego i - tego etapu ($t = T_i$) uogólniona trajektoria stanu (stan; czas) $\boldsymbol{s}(t)$ powinna osiągnąć punkt $\boldsymbol{s}_i$ należący do zadanego zbioru celów etapowych $\boldsymbol{S}_i$:

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}(T_i) = [\boldsymbol{x}(T_i); T_i] \in \boldsymbol{S}_i \subseteq \boldsymbol{R}^{n+1} \tag{4}$$

Zakłada się, że zbiory $\boldsymbol{S}_i$ są niepuste, zwarte i domknięte.

Ciągłość trajektorii stanu na granicy między etapami zapewnia spełnienie warunków ciągłości procesu wieloetapowego o postaci:

$$s_{0,i+1} = \boldsymbol{s}_i;\ i \in \{1,\dots, N-1\} \tag{5}$$

Rozpatrujemy problem wyznaczania sterowań $\boldsymbol{u}_i$ oraz punktów brzegowych $\boldsymbol{s}_i$, $i = 1,\dots,N$, które spełniają warunki optymalności przy zadanych funkcjonałach jakości i przy uwzględnieniu ograniczeń (1) - (5).

3. Problem optymalizacyjny Lagrange'a

Rozpatrujemy problem wyznaczania warunków optymalności przy minimalizacji funkcjonału jakości o postaci:

$$q(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{s}_1, \dots, s_N) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(\boldsymbol{u}_i; s_{0,i}; \boldsymbol{s}_i) \tag{6}$$

gdzie:

$$q: \boldsymbol{U}_1 \times \boldsymbol{U}_2 \times \dots \times \boldsymbol{U}_N \times \underbrace{\boldsymbol{R}^{n+1} \times \dots\dots \times \boldsymbol{R}^{n+1}}_{N\ razy} \Rightarrow \boldsymbol{R}^1$$

$$Q_i : \boldsymbol{U}_i \times \boldsymbol{R}^{n+1} \times \boldsymbol{R}^{n+1} \Rightarrow \boldsymbol{R}^1$$

$$Q_i(\upsilon_i; \sigma_{0,i}; \sigma_i) = \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i[\xi(t), \upsilon_i(t), t]\,dt \tag{7}$$

$$f_i : \mathrm{P}^{\nu} \times \mathrm{P}^{\mu} \times \mathrm{P}^1 \Rightarrow \mathrm{P}^1$$

Algorytm minimalizacji funkcjonału (6) przy warunkach (1)-(5) może być częściowo zdekomponowany: zadanie minimalizacji dynamicznej względem klasy sterowań dopuszczalnych $\boldsymbol{u}_i \in \boldsymbol{U}_i$, z uwzględnieniem równań stanu (1), jest całkowicie dekomponowalne. Zadanie minimalizacji statycznej względem punktów granicznych s_i nie jest dekomponowalne ze względu na warunki ciągłości (5). Dlatego też pełne zadanie minimalizacji można przedstawić w formie:

$$q^* = \min \{q(u_1,...,u_N; s_1,...,s_N) \text{ przy (1)-(5)} \} =$$

$$= \min \{ \sum_{i=1}^{N} [\min Q_i(u_i; s_{0,i}) \text{ przy (1), (3)] przy (4), (5)} \} \tag{8}$$

Zgodnie z (8), na każdym i-tym etapie należy rozwiązać następujący problem optymalizacji dynamicznej: należy wyznaczyć sterowanie optymalne u_i^* $(s_{O,i}; s_i)$:

$$u_i^* (s_{O,i}; s_i) = \arg\min \{Q_i (u_i; s_{O,i}; s_i) \text{ przy (1),(4)} \}; \; i \in \{1,...,N\} \tag{9}$$

przy zadanym $s_{O,1}$ oraz :

$$s_{O,i} \in S_{i-1}; \; s_i \in S_i; \; i \in \{2,...,N\} \tag{10}$$

Zakłada się istnienie rozwiązania określonego przez (9), (10) przynajmniej dla jednej pary $(s_{O,i}; s_i)$, spełniającej (10).

Podstawienie (9) do (7) określa wartości minimalne i-tego funkcjonału celu w funkcji punktów granicznych uogólnionej trajektorii stanu:

$$q_i^* (s_{O,i}; s_i) = Q_i (u_i^*; s_{O,i}; s_i) \tag{11}$$

gdzie : $\quad q_i^* : R^{n+1} \times R^{n+1} \Rightarrow R^1$

Należy zauważyć że sterowania optymalne (11) są wyrażone w postaci parametrycznej, jako funkcje punktów granicznych $(s_{O,i}; s_i)$.

Zadanie optymalizacji statycznej, które należy rozwiązać uzyskujemy przez podstawienie (11) do (8). Ma ono postać:

$$(s_1^*,..., s_N^*) = \arg\min \{ \sum_{i=1}^{N} q_i^*(s_{O,i}; s_i) \text{ ; przy (4), (5)} \} \tag{12}$$

Aby zdekomponować warunki (4), (5) można zastosować metodę współczynników Lagrange'a (por. Cesari 1983). W tym celu konstruujemy funkcję Lagrange'a L:

$$L = \sum_{i=1}^{N} q_i^* (s_{O,i}; s_i) + \sum_{i=1}^{N-1} (m_i)^T (s_i - s_{O,i+1}) \tag{13}$$

gdzie: $m_i = [\, m_{i,1}, m_{i,2}, ..., m_{i,n}, 0 \,]^T$ są wektorami współczynników Lagrange'a, odpowiadającymi ograniczeniom równościowym (5).

W (13) zmienne s_i oraz $s_{O,i+1}$ mogą być traktowane niezależnie, toteż (13) jest funkcją następujących argumentów:

- N wektorów sterowań : $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$,

- 2N - 1 wektorów punktów granicznych uogólnionej trajektorii stanu: $s_1, \ldots, s_N$; $s_{0,2}, \ldots, s_{0,N}$,

- N-1 wektorów współczynników Lagrange'a : $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_{N-1}$.

Funkcja Lagrange'a (13) może być przedstawiona w postaci:

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i \tag{14}$$

gdzie:

$$L_1 = q_1^* \; s_{O,1} ; s_1) + (\boldsymbol{m}_1)^T s_1$$

$$L_i = q_i^* \; (s_{O,i} ; s_i) + (\boldsymbol{m}_i)^T s_i - (\boldsymbol{m}_{i-1})^T s_{O,i} ; \; i = 2,\ldots,N\text{-}1$$

$$L_N = q_N^* \; (s_{O,N}; s_N) - (\boldsymbol{m}_{N-1})^T s_{O,N} \tag{15}$$

Funkcja Lagrange'a (14) jest dekomponowalna ze względu na pary wektorów ($s_{O,i}$, s_i), ale nie jest dekomponowalna względem współczynników Lagrange'a $\boldsymbol{m}_i$: L_i , dla danego i, zależy zarówno od $\boldsymbol{m}_i$, jak i od $\boldsymbol{m}_{i-1}$.

Zakładając, że funkcje q_i^* ($s_{O,i}$; s_i) są co najmniej raz różniczkowalne względem swoich argumentów, rozwiązanie optymalne określone przez (12), powinno spełniać warunki punktu siodłowego (warunki konieczne optymalności) funkcji Lagrange'a. Co więcej, jeśli wszystkie funkcje $q_i^*(s_{O,i} ; s_i)$ są ściśle wypukłe, rozwiązanie optymalne ($s_1^*, \ldots, s_N^*$) istnieje, jest jednoznaczne i odpowiada punktowi siodłowemu funkcji Lagrange'a:

$$(s_1^*, \ldots, s_N^*) = \arg\max_{\boldsymbol{m}_1,\ldots,\boldsymbol{m}_{N-1}} \{ \sum_{i=1}^{N} \; \min \{ L_i ; \text{przy } (9) \} \} \tag{16}$$

W rezultacie, dzięki wprowadzeniu mnożników Lagrange'a, zadanie (12) minimalizacji funkcji N zmiennych z ograniczeniami (4), (5) zostało sprowadzone do zadania dwupoziomowego: optymalizacji globalnej i optymalizacji lokalnych. Zadania lokalne polegają na N-krotnej minimalizacji względem jednego (dla i=1) , lub dwóch (dla i=2,...,N) zmiennych wektorowych ($s_{O,i}$; s_i) z ograniczeniami . Natomiast na poziomie globalnym dokonywana jest optymalizacja bez ograniczeń, względem N-1 wektorów współczynników Lagrange'a : $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_{N-1}$.

4. Problem optymalizacyjny Bolzy

Rozpatrujemy zadanie optymalizacji sterowania w przypadku procesu wieloetapowego i funkcjonału celu zależnego od punktu końcowego trajektorii stanu $\boldsymbol{x}(T_N)$ jak również od sumy funkcjonałów lokalnych:

$$q\,[\boldsymbol{x}(T_N)\,;\,\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N] = -\,G[\boldsymbol{x}(T_N)\,] + \sum_{i=1}^{N} Q_i\,[\boldsymbol{x}\,(T_{i-1});\,\boldsymbol{u}_i] \tag{17}$$

gdzie:

$$G : \boldsymbol{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{R}^1;\ \boldsymbol{u}_i \in U_i \tag{18}$$

$$Q_i\,[\boldsymbol{x}\,(T_{i-1})\,;\,\boldsymbol{u}_i] = \int_{T_{i-1}}^{T_i} f_i\,[\boldsymbol{x}(t),\,\boldsymbol{u}_i(t),\,t]\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

$$f_i : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^1 \Rightarrow \boldsymbol{R}^1$$

Obowiązują również równania stanu (1) oraz warunki ciągłości: trajektorii stanu :

$$\boldsymbol{x}_{o,i} = \boldsymbol{x}\,(T_{i-1})\,;\ i \in \{1,\ldots, N\} \tag{20}$$

Do rozwiązania tego problemu można zastosować metodę **programowania dynamicznego.**

Zakładamy, że znane jest rozwiązanie równania stanu (1) przy zadanych warunkach początkowych $\boldsymbol{x}\,(T_{i-1})$, $i \in \{1,\ldots N\}$, w postaci:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{h}_j\,[\boldsymbol{x}\,(T_{i-1});\,\boldsymbol{u}_i,\,\boldsymbol{u}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_j\,;\,t];\ t \in (T_{i-1}, T_j]\,;\ j \in \{i,\ldots, N\} \tag{21}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{h}_j : \boldsymbol{R}^n \times U_i \times U_{i+1} \times \ldots \times U_j \times \boldsymbol{R}^1 \Rightarrow \boldsymbol{R}^n$$

Dla $t = T_i$, $j = i$ otrzymujemy :

$$\boldsymbol{x}\,(T_i) = \boldsymbol{h}_i\,[\boldsymbol{x}(T_{i-1})\,;\,\boldsymbol{u}_i\,;\,T_i] \tag{22}$$

Niech $\boldsymbol{u}_i^*$ oznacza sterowanie optymalne na i-tym etapie w przedziale czasu $t \in (T_{i-1}, T_i]$. Przez q_i oznaczmy wartość funkcjonału jakości przy trajektorii stanu startującej ze stanu $\boldsymbol{x}_{o,i} = \boldsymbol{x}(T_{i-1})$, wynikającej z zastosowania sterowań:

$$\boldsymbol{u}_i,\,\boldsymbol{u}_{i+1}^*, \ldots, \boldsymbol{u}_N^*$$

Wtedy:

$$q_i [x(T_{i-1}); u_i, u_{i+1}^*, \ldots, u_N^*] =$$

$$= -G[x_i(T_N)] + Q_i [x(T_{i-1}); u_i] + \sum_{j=i+1}^{N} Q_j [x(T_{j-1}); u_j^*] \tag{23}$$

gdzie:

$$x_i(T_N) = h_N [x(T_{i-1}); u_i; u_{i+1}^*, \ldots, u_N^*; T_N] \tag{24}$$

Aby wyznaczyć sterowanie optymalne u_i^* na i-tym etapie należy dokonać minimalizacji funkcjonału jakości (23), z uwzględnieniem ograniczeń (18):

$$u_i^* = \arg\min \{ q_i [x(Ti\text{-}1); u_i; u_{i+1}^*, \ldots, u_N^*]; u_i \in U_i \} \tag{25}$$

Na ogół u_i^* jest funkcją warunków początkowych $x(T_{i-1})$:

$$u_i^* = w_i^*[x(T_{i-1})]; i \in \{1, \ldots, N\} \tag{26}$$

Rozpoczynając procedurę od ostatniego etapu i uwzględniając (22) oraz (26) , funkcjonał jakosci q_i może być przedstawiony w postaci zależności jedynie od warunków początkowych oraz sterowania na i-tym etapie .

Procedura rozpoczyna się więc od $i=N$; $t\in (T_{N-1}, T_N]$, przy $x(T_{N-1})$ traktowanym, jako zadane.

Zgodnie z (23) otrzymamy :

$$q_N [x(T_{N-1}); u_N] = -G[x_N(T_N)] + Q_N [x(T_{N-1}); u_N] \tag{27}$$

gdzie:

$$x_N(T_N) = h_N [x(T_{N-1}); u_N; T_N] \tag{28}$$

Sterowanie optymalne u_N^* minimalizuje funkcjonał jakości q_N:

$$u_N^* = \arg\min \{ q_N [x(T_{N-1}), u_N]; u_N \in U_N \} \tag{29}$$

Sterowanie optymalne u_N^* może być funkcją warunków początkowych $x(T_{N-1})$:

$$u_N^* = w_N^*[x(T_{N-1})] \tag{30}$$

Podobnie dla $i = N - 1$; $t \in (T_{N-2}, T_N]$ oraz $x(T_{N-2})$

traktowanych jako zadane , zgodnie z (22), (23), otrzymamy:

$$x(T_{N-1}) = h_{N-1} [x(T_{N-2}); u_{N-1}; T_{N-1}] \tag{31}$$

$$q_{N-1}\,[x(T_{N-2})\,;\,u_{N-1}\,;\,u_N^*] = -\,G[x_{N-1}\,(T_N)] +$$

$$+\,Q_{N-1}\,[x\,(T_{N-2});\,u_{N-1}] + Q_N\,[x\,(T_{N-1})\,;\,u_N^*\,] \tag{32}$$

Zgodnie z (24, (30), otrzymamy :

$$x_{N-1}\,(T_N) = h_N\,\{\,x\,(T_{N-2});\,u_{N-1};\,w_N^*\,[x\,(T_{N-1})]\,;\,T_N\,\} \tag{33}$$

$$Q_N\,[x\,(T_{N-1})\,;\,u_N^*\,] = Q_N^*\,\{x\,(T_{N-1})\,;\,w_N\,{}^*[x\,(T_{N-1}\,)\}\} \tag{34}$$

Podstawienie (31) do (33) i (34), a następnie wynik do (32), daje:

$$q_{N-1}\,[x(T_{N-2});\,u_{N-1}\,,\,u_N^*\,] =$$

$$= -G\,\{\,h_N\,\{x(T_{N-2}\,);\,u_{N-1}\,;\,w_N\,{}^*[x(T_{N-1})];T_N\,\}\,\}+$$

$$+\,Q_{N-1}\,[x\,(T_{N-2})\,;\,u_{N-1}] + Q_N\,\{\,x\,(T_{N-1})\,;\,w_N^*\,[x\,(T_{N-1})\}\} \tag{35}$$

gdzie $x\,(T_{N-1}\,)$ jest określone przez (31).

Sterowanie optymalne $u_{N-1}{}^*$ uzyskane w wyniku minimalizacji q_{N-1} ,przy ograniczeniu $u_{N-1} \in U_{N-1}$, wyraża się zależnością:

$$u_{N-1}{}^* = \arg\min\,\{\,q_{N-1}\,[x(T_{N-2}\,);\,u_{N-1}\,]\,;\,u_{N-1} \in U_{N-1}\,\} \tag{36}$$

Procedura kończy się przy $i = 1$, kiedy to wyznaczone jest $u_1{}^*$ oraz q^* - minimalna dopuszczalna wartość funkcjonału :

$$q^* = q\,[x(T_o\,);\,u_1{}^*,\,...,\,u_N{}^*] \tag{37}$$

Rozpatrzony problem optymalizacyjny Bolzy w przypadku wieloetapowym może być rozwiązany nie tylko za pomocą programowania dynamicznego, lecz także za pomocą innych metod znanych z teorii sterowania optymalnego, na przykład - zasady maksimum. Niezależnie od zastosowanej metody, należy pamiętać o specyfice dynamicznych procesów wieloetapowych, polegającej na spełnieniu odpowiednich warunków transwersalności trajektorii stanu na brzegach między etapami oraz w punkcie końcowym (por. Jezierski 1987, Wierzbicki 1984).

Niezależnie od zastosowanej metody, analityczne rozwiązanie zadania Bolzy w przypadku procesów wieloetapowych może być dokonane jedynie w ograniczonej liczbie przypadków. Wymaga bowiem analitycznego rozwiązania równania stanu, co pozwala zachować ciągłość trajektorii stanu oraz analitycznego wyznaczania sterowania optymalnego dla każdego etapu.

5. Przypadek liniowy

W celu ilustracji poprzednich rozważań rozpatrzymy N-etapowy problem minimalizacji następującego funkcjonału :

$$q = -G[\xi(T_N)] + \sum_{i=1}^{N} K_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} u_i(t)dt \tag{38}$$

przy niejednakowych wartościach K_i oraz liniowych równaniach stanu:

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}(t)/\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}_i u_i(t);\; t \in (T_{i-1}, T_i] \tag{39}$$

ograniczeniach na sterowanie:

$$u_i(t) \in [0,1]\,;\, i \in \{1,\dots,N\} \tag{40}$$

warunkach początkowych dla poszczególnych etapów, spełniających warunki ciągłości:

$$\boldsymbol{x}_{0,i} = \boldsymbol{x}(T_{i-1})\,;\, i \in \{1,\dots,N\} \tag{41}$$

gdzie:

$G : \boldsymbol{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{A}_i$ - macierze $(n \times n)$, $\boldsymbol{b}_i$ - wektory (dim $\boldsymbol{b} = n$), u_i - skalary T_{i}., K_i - zadane parametry.

Można dać następującą ekonomiczną interpretację sformułowanego zadania.

Na wykonanie określonych obiektów w czasie $t \in (0, T_N]$, które przebiega w trybie wieloetapowym, zgodnie z równaniami stanu (38), należy zaciągnąć kredyt o natężeniu $u_i(t)$. Koszt zaciągniętego kredytu zależy od etapu produkcji (różne wartości K_i oraz różne przedziały czasu $(T_{i-1}, T_i]$. Sprzedaż obiektów następuje po ich wykonaniu (w chwili T_N), a ich wartość równa jest $G[x(T_N)]$. Zadanie polega na maksymalizacji zysku, czyli minimalizacji funkcjonału q, określonego przez (38).

Szczegółowe rozwiązanie tego zadania, uzyskane przez zastosowanie zasady maksimum, przedstawione jest w pracy Gutenbaum (1996). Rozwiązaniem jest sterowanie dwustanowe: $u_i \in \{0, 1\}$. W przypadku jednowymiarowym (n=1, $\boldsymbol{A} = -a$, $a > 0$, $\boldsymbol{b} = b$, $G(x) = cx$) chwile τ_i ($\tau_i \in (T_{i-1}, T_i]$) zmiany sterowania od wartości 0 do wartości 1, lub odwrotnie, w zależności od warunku początkowego $x(0)$), są określone wzorami:

$$\tau_i = T_i - \frac{\ln \frac{bc}{K_i}}{a} \; ; \quad i \in \{1,\ldots,N\} \tag{42}$$

Oczywiście, uzyskanie analitycznego rozwiązania wieloetapowego zadania optymalizacji jest możliwe jedynie w bardzo szczególnych przypadkach.

Literatura

1. Babad H.R. (1995) An Infinite-Horizon Multistage Dynamic Optimization Problem. Journal of Optimization Theory and Applications, 86 , 529 - 552.
2. Cesari L.(1983) *Optimization - Theory and Applications*. Springer Verlag.
3. Clark F.H. and R.B Vinter (1989) *Applications of Optimal Multiprocesses*. SIAM Journal Control and Optimization, **27**, 1048 - 1071.
4. Clark F.H. and R.B Vinter (1989) *Optimal Multiprocesses*. SIAM Journal Control and Optimization, **27**, 1072 - 1091.
5. Gutenbaum J. (1977) *Polyoptimiztion of Systems with Separate Action of Performance Indices*. Systems Science, **3**, 283-293.
6. Gutenbaum J., M. Inkielman and H. Pietkiewicz -Sałdan (1983) *Multi-stage Control of a Water System with Randomly Varied Form of the Objective Function*. ZfR-Informationen ZfR 83.01, Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentrum fur Rechentechnik, Berlin-Adlershof, 79-91.
7. Gutenbaum J. (1988) *Dynamic Multistage Processes*, Systems and Control Encyclopedia, Pergamon Press,1272 - 1276.
8. Gutenbaum J. (1996) *Methods for Optimal Control of Multistage* Processes. Archives of Control Sciences, 5 (XLI), 173-183.
9. Jezierski E. (1987) *Sterowanie optymalne z kwadratowym wskaźnikiem jakości obiektem o skokowo zmiennym opisie*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 522.
10. Łodziński A. (1984) *Metoda wyznaczania sterowania optymalnego procesu wieloetapowego*. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, **24**, 125-148.
11. Tomiyama K. (1985) *Two-Stage Optimal Control Problems and Optimality Conditions* . Journal of Economic Dynamics and Control, 9, 317-337.
12. Tomiyama K., and R.J. Rossana (1989) *Two-stage Optimal Control problems with an Explicite Switch-Point Dependence: Optimality Criteria and an Example of Delivery Lags and Investment*. Journal of Economic Dynamics and Control, 13, 319-337.
13. Rossana R.A. (1985) *Delivery Lags and Buffer Stocks in the Theory of Investment by the Firms*. Journal of Economic Dynamics and Control, 9, 153-193.
14. Wierzbicki A.P. (1984) *Models and Sensitivity of Control Systems*. Elsevier-WNT.

ISBN 83-85847-34-0