POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac

Krzysztof Szkatuła

Krzysztof SZKATUŁA - ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

23

ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 23

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1999

Krzysztof SZKATUŁA

ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac

Ww

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Juliusz L. Kulikowski
Dr hab. Włodzimierz Ogryczak

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 1999

Instytut Badań Systemowych PAN BIBLIOTEKA w Warszawie

44246

ISBN 83-85847-39-1
ISSN 0208-8029

Wprowadzenie

Optymalizacja dyskretna stała się samodzielną dziedziną badawczą od połowy lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Powstała ona na styku zastosowań praktycznych w dziedzinach takich jak ekonomia, zarządzanie, technika i wiele innych oraz matematyki ze szczególnym uwzględnieniem kombinatoryki, teorii grafów i logiki matematycznej. W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że podstawowym celem optymalizacji dyskretnej jest wybór optymalnego wariantu ze skończonego lub przeliczalnego ich zbioru. Optymalność jest rozumiana jako wyznaczenie maksimum lub minimum pewnej funkcji. Uzyskanie rozwiązania zadania optymalizacji dyskretnej umożliwia podejmowanie trafnych decyzji w odniesieniu do wielu aspektów działalności ludzkiej. Przykładami kryteriów optymalizacyjnych może być maksymalizacja zysków, minimalizacja kosztów lub strat i wiele innych.

Można powiedzieć, że w zaawansowanych zastosowaniach praktycznych pojawiło się wiele ważnych, złożonych i trudnych do rozwiązania problemów o powyższym charakterze. Do ich sformalizowania w najbardziej odpowiedni sposób bardzo przydatny okazał się aparat i metodologia matematyki.

W momencie gdy zagadnienie praktyczne zostało sformalizowane jako optymalizacyjny problem matematyczny, powstaje potrzeba jego efektywnego rozwiązania. Oznacza to konieczność opracowania algorytmów i wykonania ich komputerowej implementacji. Niestety, okazało się, że w przypadku wielu zadań optymalizacji dyskretnej oraz algorytmów opracowanych do ich rozwiązywania pojawia się zasadnicza trudność. Dla nawet niezbyt dużych przykładów tych zadań obliczenia numeryczne wymagają niemożliwego do zaakceptowania nakładu obliczeń, na przykład mierzonego w stuleciach pracy obecnych superkomputerów. Co więcej, nawet drastyczne zwiększenie wydajności komputerów nie jest w stanie zasadniczo poprawić sytuacji. Dla ustalenia uwagi, 100-krotne przyśpieszenie obliczeń zmniejsza nakład obliczeń ze 100 lat do jednego roku, co wciąż jest wielkością abstrakcyjną, niemożliwą do zaakceptowania w praktyce obliczeniowej. Efektem tej sytuacji był rozwój teorii i praktycznego zastosowania algorytmów przybliżonych, których celem jest wyznaczenie przybliżonego rozwiązania zadania o akceptowalnej jakości, przy "niewielkim" nakładzie obliczeń.

Praktyczna niemożliwość uzyskania rozwiązań optymalnych dla licznych przykładów zadań optymalizacji dyskretnej spowodowała konieczność analizowania nakładu obliczeń wymaganego przez algorytmy, dla zadań o określonej wielkości.

W efekcie powstała dziedzina badawcza zwana złożonością obliczeniową. Jej podstawowym zadaniem jest analizowanie zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej z punktu widzenia oceny nakładu obliczeń niezbędnego do uzyskania rozwiązania optymalnego jako funkcji rozmiaru, wielkości zadania. Zadania optymalizacji dyskretnej zostały umownie podzielone na łatwe i trudne do rozwiązywania.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że uzyskane w ten sposób oceny noszą charakter absolutnej gwarancji, to znaczy, że są one prawdziwe dla wszystkich realizacji danych analizowanego zadania. Analiza taka nosi nazwę analizy przypadku najgorszego, gdyż oparta jest ona na najbardziej niekorzystnym zachowaniu się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej wykazała jednak szybko, że uzyskane w ten sposób oceny są bardzo często nadmiernie pesymistyczne. Oceny uzyskane w oparciu o podejście przypadku najgorszego nie charakteryzują w sposób właściwy przeciętnego, średniego zachowania się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Ta sytuacja spowodowała powstanie dziedziny nazywanej analizą przypadku średniego lub inaczej analizą probabilistyczną zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Przeprowadzenie analizy przypadku średniego wymaga zdefniowania losowego modelu rozważanego zadania. Uzyskane w efekcie przeprowadzenia analizy przypadku średniego wyniki odnoszą się tylko do rozważanego losowego modelu zadania optymalizacji dyskretnej. Natomiast ich olbrzymią zaletą jest możliwość uzyskania alternatywnych, w stosunku do złożoności obliczeniowej w przypadku najgorszym, ocen zachowania się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Ważną i oryginalną właściwością analizy przypadku średniego jest możliwość analizowania innych charakterystyk zadania niż złożoność obliczeniowa. Dobrym przykładem jest asymptotyczna ocena zachowania się wartości rozwiązania optymalnego jako funkcji pewnych parametrów zadania. Wyniki tego typu znacznie poszerzają wiedzę na temat zadań optymalizacji dyskretnej i w efekcie umożliwiają ich rozwiązywanie w znacznie bardziej efektywny sposób.

Zasadniczym celem tej monografii jest wykazanie, na przykładzie wybranych, ważnych zadań optymalizacji dyskretnej, że przy zastosowaniu prostego aparatu rachunku prawdopodobieństwa można uzyskać wartościowe wyniki analizy przypadku średniego.

W celu właściwego osadzenia uzyskanych wyników w teorii i praktyce optymalizacji dyskretnej pierwsze rozdziały monografii poświęcone zostały prezentacji wybranych zadań optymalizacji dyskretnej, metod ich rozwiązywania, złożoności obliczeniowej oraz analizy przypadku średniego. Należy jednak podkreślić, że zamiarem autora była poglądowa, a nie bardzo szczegółowa i wyczerpująca prezentacja tych zagadnień. Szczegółowy plan monografii jest następujący.

W rozdziale 1 zaprezentowano dziedzinę optymalizacji dyskretnej ze szczególnym uwzględnieniem programowania całkowitoliczbowego i liniowego, zadań binarnych, zadań teorii grafów oraz zadań harmonogramowania.

W rozdziale 2 zostały przedstawione znane metody rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, takie jak metoda podziału i oszacowań, programowanie dynamiczne, algorytmy zachłanne, metody lokalnej poprawy oraz algorytmy programowania linowego.

W rozdziale 3 rozważono podejście przypadku najgorszego do oceny złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Zdefiniowano niezbędne elementy oceny rozmiaru wielkości danych zadania i nakładu obliczeń, wprowadzono klasy złożoności obliczeniowej.

Podejście przypadku średniego zastało przedstawione w rozdziale 4. Szczególną uwagę poświęcono aparatowi probablistycznemu niezbędnemu w dalszej części monografii oraz prezentacji wybranych wyników analizy przypadku średniego znanych z literatury.

W rozdziałach 5 oraz 6 zaprezentowano wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia. Na przykładzie tych ważnych zadań optymalizacji dyskretnej dokonano dogłębnej analizy zagadnień będących przedmiotem zainteresowania niniejszej monografii, takich jak metody rozwiązywania, analiza złożoności obliczeniowej oraz analiza przypadku średniego. Przedstawione zostały oryginalne wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązań optymalnych jako funkcji parametrów zadań w przypadku średnim. Wykazano również, że proste algorytmy przybliżone mogą być asymptotycznie optymalne w sensie analizy przypadku średniego.

Zamiarem autora było używanie możliwie najprostszej notacji matematycznej dla zachowania maksymalnej przejrzystości wywodu. W monografii stosowane są powszechnie przyjęte oznaczenia matematyczne. Dla przykładu:

- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ oznacza zbiór n - elementowy.
- $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ oznacza wektor o m składowych przyjmujących wartości liczbowe.

- $\lim_{x \to a} f(x)$ lub $\lim_{n \to a} g_n$ oznacza granicę funkcji lub ciągu liczbowego, co jednoznacznie wynika z kontekstu.
- $\{X\}$ oznacza jednoznacznie zdefiniowane zdarzenie, na przykład $x < b$, gdzie x jest zmienną, b pewną stałą.
- $|a|$ oznacza wartość bezwzględną liczby a, natomiast $|A|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru A.

Kolejne oznaczenia są definiowane w tekście monografii w miarę potrzeb. W przypadku możliwości wystąpienia niejednoznaczności w trakcie przeprowadzania wywodów, odpowiednie pojęcia są przytaczane na bieżąco.

Oryginalna terminologia opisująca pojęcia i obiekty rozważane w monografii w przytłaczającej większości pochodzi z języka angielskiego. W monografii wykorzystywana jest polska terminolagia, która zdaniem autora, z jednej strony właściwie oddaje sens oryginału angielskiego, z drugiej zaś strony jest dobrze osadzona w języku polskim. Poza przypadkami oczywistymi, w momencie pierwszego zastosowania nowego, specjalistycznego pojęcia w nawiasach przytoczono jego angielski odpowiednik.

Niniejsza monografia jest efektem wieloletniego zainteresowania autora tematyką analizy przypadku średniego wybranych zadań optymalizacji dyskretnej. Pracę naukową nad tymi zagadnieniami autor prowadził w Instytucie Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk kolejno w Zakładzie Programowania Matematycznego, Pionie Metod Modelowania Matematycznego i Optymalizacji oraz w Pracowni Metod Obliczeniowych Optymalizacji.

Pragnę serdecznie podziękować wszystkim koleżankom i kolegom z IBS PAN za wieloletnią współpracę. Przez cały okres mojej pracy naukowej szczególne znaczenie miała dla mnie współpraca z doc. dr hab. Markiem Liburą, na którego pomoc i cenne rady mogłem zawsze liczyć.

Swojej rodzinie składam wyrazy wdzięczności za cierpliwość, wyrozumiałość i wsparcie podczas całego okresu mojej pracy naukowej. Szczególnie gorąco pragnę podziękować mojej Żonie i Mamie.

Rozdział 4

Analiza przypadku średniego

4.1 Wprowadzenie

Istotną wadą ocen uzyskiwanych z zastosowaniem analizy przypadku najgorszego jest fakt zdeterminowania oceny złożoności obliczeniowej zadania optymalizacji dyskretnej, dokładności działania i nakładu obliczeń charakteryzujących pracę algorytmów rozwiązujących zadania przez najmniej korzystną dla każdej z wyżej wymienionych charakterystyk realizację danych zadania. W bardzo wielu przypadkach uzyskana w ten sposób ocena jest nadmiernie pesymistyczna i znacznie odbiega od "przeciętnego" zachowania się analizowanych charakterystyk.

W odróżnieniu od analizy przypadku najgorszego podejście znane jako *analiza przypadku średniego* (*average case analysis*) ma za cel zbadanie "przeciętnego" (lub inaczej - w przypadku średnim) zachowania się rozważanych charakterystyk zadania lub algorytmu. Analiza przypadku średniego zwana jest również *analizą probabilistyczną* (*probabilistic analysis*).

Powszechnie przyjęty sposób przeprowadzania tego rodzaju analizy wymaga przyjęcia założenia, że niektóre dane zadania są realizacjami pewnych zmiennych losowych. Aby uzyskać wyniki oceniające złożoność obliczeniową algorytmów i zadań optymalizacji dyskretnej oraz inne ważne charakterystyki zadań, takie jak na przykład wzrost wartości rozwiązań optymalnych, należy rozważyć konkretne rozkłady prawdopodobieństw zmiennych losowych opisujących dane zadania. Uzyskane wyniki są znacznie bardziej realistyczne w ocenie algorytmów i zadań niż wyniki analizy przypadku najgorszego.

Niedoskonałością tego podejścia jest z kolei fakt, że uzyskane wyniki dotyczą tylko rozważanych rozkładów prawdopodobieństw. Poniżej zostanie zaprezentowany zarys metodologii i możliwości analizy przypadku średniego zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Aby zaprezentować podejście przypadku średniego do analizy złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej należy zastosować wybrane elementy teorii rachunku prawdopodobieństwa. Są one niezbędne dla zrozumienia dalszej części monografii. Dlatego autor zdecydował się na szczegółową prezentację niezbędnego aparatu probabilistycznego.

Zamiarem autora było zastosowanie możliwie najmniej skomplikowanego aparatu probabilistycznego i wykazanie, że przy jego pomocy można uzyskiwać wartościowe z punktu widzenia optymalizacji dyskretnej wyniki analizy przypadku średniego. W związku z tym, w poniższej prezentacji nie uwzględniono bardziej zaawansowanych pojęć rachunku prawdopodobieństwa, takich, jak na przykład teoria miary, martyngały i inne.

4.2 Zdarzenia losowe

Podstawowym pojęciem pomagającym zrozumieć i sformalizować otaczającą nas rzeczywistość jest *zdarzenie* - wystąpienie lub nie wystąpienie pewnego zjawiska, na przykład padanie lub nie padanie deszczu, świecenie lub nie świecenie słońca.

Abstrakcyjne pojęcie zdarzenia dotyczy tylko jego wystąpienia bądź nie i nie jest ono związane z jego naturą oraz istotą. Zdarzenia będziemy oznaczać jako $A, B, C, \cdots$ w miarę potrzeby rownież z indeksami jako, na przykład, $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Dla każdego zdarzenia A istnieje *zdarzenie przeciwne*, oznaczane $\bar{A}$; A ($\bar{A}$) zachodzi wtedy i tylko wtedy kiedy nie zachodzi $\bar{A}$ (A). $\bar{A}$ jest inaczej nazywane *negacją* zdarzenia A.

Zdarzenia mogą się wzajemnie powodować: A *powoduje* B oznacza, że jeżeli zachodzi A to zachodzi również B, zależność tę oznaczamy $A \subset B$.

Jeżeli $A \subset B$ oraz $B \subset A$ to będziemy mówili, że zdarzenia A i B są wzajmnie *ekwiwalentne*, co będziemy oznaczać $A = B$. Należy zwrócić uwagę, że ekwiwalentność zdarzeń nie oznacza ich tożsamości, przedmiotem naszej analizy jest, jak już wspomniano powyżej, tylko fakt występowania zdarzeń, nie zaś ich natura lub istota. Jeżeli z natury rozważanych zdarzeń wynika, że $A \subset B$ oraz, że zdarzenia A oraz B mogą się okazać ekwiwalentne, to znaczy $A = B$, to taką sytuację możemy zapisać jako $A \subseteq B$.

Jeśli mamy pewien zbiór zdarzeń, to na ich podstawie możemy konstruować nowe zdarzenia łącząc je ze sobą przy pomocy operacji nad zdarzeniami i wykorzystując zdarzenia krańcowe (niemożliwe i pewne). Podstawowymi operacjami na zdarzeniach, oprócz wcześniej zdefiniowanej operacji negacji zadarzenia $\bar{A}$, są:

- *iloczyn* zdarzeń, oznaczany $A \cap B$. Jest to zdarzenie, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy jednocześnie zachodzą zdarzenia A oraz B;
- *suma*, lub inaczej *alternatywa* zdarzeń, oznaczana $A \cup B$. Jest to zdarzenie, które zachodzi, jeśli zachodzi przynajmniej jedno ze zdarzeń A lub B;

oraz zdarzeniami są:

- *zdarzenie pewne*, oznaczane jako Ω. Jest to zdarzenie, które zawsze zachodzi, na przykład $A \cup \bar{A}$;
- *zdarzenie niemożliwe*, oznaczane jako $\emptyset$. Jest to zdarzenie, które nigdy nie zachodzi, na przykład $A \cap \bar{A}$
- *zdarzenia rozłączne* (lub zdarzenia wyłączające się). Jest to przypadek, kiedy zdarzenia A i B nie mogą zachodzić równocześnie, $A \cap B = \emptyset$.

Zauważmy, że dla każdego zdarzenia A mamy zawsze

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega, \tag{4.1}$$

co uzasadnia określenie zdarzeń $\emptyset$ oraz Ω jako *krańcowych*. Zdarzenie niemożliwe powoduje każde zdarzenie, dowolne zdarzenie powoduje zdarzenie pewne. W odniesieniu do ciągów zdarzeń przyjmowane są oznaczenia:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \end{aligned}$$

Pomiędzy zdarzeniami i operacjami nad nimi zachodzą poniższe relacje:

$$\text{Jeżeli } A \subset B \ (\bar{A} \subset \bar{B}), \text{ to wtedy } \bar{B} \subset \bar{A} \ (B \subset A);$$

$$A \cap B = B \cap A, \ A \cup B = B \cup A;$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C, \ A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}, \ \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, \ A \cup B = A \cup \bar{A} \cap B.$$

Zależności te mogą zostać uogólnione do poniższej postaci:

$$\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i, \ \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i.$$

Zauważmy, że powyższe relacje są tożsame z operacjami na zbiorach. W rozumieniu teorii zbiorów Ω jest przestrzenią, w której zdefiniowane są zbiory $A, B, C, \cdots$; $\emptyset$ jest zbiorem pustym; $\bar{A}$ jest dopełnieniem zbioru A; $A \cap B$ jest iloczynem zbiorów A i B, zaś $A \cup B$ ich sumą; $A \subset B$ oznacza, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B. Precedencja operacji nad zdarzeniami jest podobna jak w przypadku operacji nad zbiorami. Na przykład, iloczyn zdarzeń ma wyższy priorytet niż suma zdarzeń. Kolejność wykonywania operacji może zostać zmieniona poprzez zastosowanie nawiasów.

Wiele istotnych zdarzeń w otaczającym nas świecie ma charakter *losowy*, przypadkowy. Oznacza to, że wynik danego zjawiska nie może być z góry przewidziany, na przykład rzut kością do gry może skończyć się wynikiem od 1 do 6, wystąpienie zachmurzenia może, ale nie musi, oznaczać opady deszczu. Zdarzenia, których wynik jesteśmy w stanie przewidzieć z pewnością (nie nosi on charakteru przypadkowego) nazywamy *deterministycznymi.*

W przypadku obserwacji zjawisk losowych istotna jest *częstość* ich występowania. Załóżmy, że wykonaliśmy n prób, zdarzenie A wystąpiło n_A razy. Wtedy częstość wystapienia zdarzenia A wynosi:

$$\frac{n_A}{n}. \tag{4.2}$$

Niech każdy z numerów od 1 do 6 kości do gry występuje z jednakową częstością oraz wykonywana jest wystarczająco długa seria rzutów kością. Częstość wystąpienia konkretnego numeru, dla ustalenia uwagi 1, wynosi około $\frac{1}{6}$, natomiast częstość wystąpienia w dwóch kolejnych rzutach tej samej wartości wynosi około $\frac{1}{36}$.

Zdarzeniem losowym nazywamy wynik zjawisk losowych, przypadkowych. Wartość liczbową wyrażającą możliwość wystąpienia zdarzenia losowego A będziemy nazywać *prowdopodobieństwem* wystąpienia zdarzenia losowego A i będziemy oznaczać $P\{A\}$.

Celem rachunku prawdopodobieństwa jest między innymi:

- Przypisywanie zdarzeniom losowym prowdopodobieństw w taki sposób, aby we "właściwy" sposób oceniać szanse zajścia tych zdarzeń losowych.

- Jeśli znane jest prawdopodobieństwo zajścia pewnych zdarzeń losowych, to powinniśmy umieć obliczać prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń losowych na nich opartych.

Przyjmuje się, że zawsze spełnione są poniższe zależności:

$$P\{\emptyset\} = 0 \text{ oraz } P\{\Omega\} = 1.$$

Fakt ten oznacza, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia niemożliwego jest równe 0, natomiast prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia pewnego jest równe 1. Oznacza to, że dla dowolnego zdarzenia losowego A, spełniającego (4.1) mamy:

$$0 \leq P\{A\} \leq 1 \text{ oraz } P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}.$$

Natomiast dla dowolnych dwóch zdarzeń losowych A i B mamy:

$$A \subseteq B \text{ powoduje, że } P\{A\} \leq P\{B\}$$

oraz

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}. \tag{4.3}$$

Jeżeli zdarzenia losowe A i B są zdarzeniami rozłącznymi, $P\{A \cap B\} = 0$, to wtedy (4.3) przyjmuje postać:

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$$

Definicja 19 *Rozważmy dwa zdarzenia losowe A i B, przy czym $P\{B\} > 0$. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia losowego A, jeśli zaszło zdarzenie B, oznaczane jako $P\{A|B\}$, jest określone następującym wzorem:*

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}} \tag{4.4}$$

Definicja 20 *Zdarzenia losowe A i B nazywamy niezależnymi zdarzeniami losowymi, jeżeli prawdziwy jest poniższy wzór:*

$$P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\} \tag{4.5}$$

Powyższe definicje mają bardzo poważne konsekwencje. Mianowicie:

- Jeżeli A i B są niezależnymi zdarzeniami losowymi, to wtedy ze wzorów (4.4) oraz (4.5) otrzymujemy $P\{A|B\} = P\{A\}$. Oznacza to, że w przypadku niezależności zdarzeń losowych A i B prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A ($P\{A|B\}$) jest równe prawdopodobieństwu *bezwarunkowemu* (lub *a priori*) zajścia zdarzenia A ($P\{A\}$). W ogólnym przypadku prawdopodobieństwa te są różne.

- Definicja 20 odgrywa zasadniczą rolę w dalszej części monografii. W przypadku wystąpienia zależności pomiędzy zdarzeniami losowymi opisującymi analizowane zjawiska przeprowadzenie pewnych istotnych wywodów może się okazać praktycznie niewykonalne. W sensie formalnym zdarzenia losowe są wzajemnie niezależne wtedy i tylko wtedy, jeśli spełniony jest warunek (4.5). Należy podkreślić, że intuicyjne rozumienie "niezależności" zjawisk nie musi być tożsame z probabilistyczną niezależnością zdarzeń losowych w sensie definicji 20.

4.3 Zmienne losowe

Podczas przeprowadzania analizy przypadku średniego zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej przedmiotem rozważań są dane wejściowe zadań wyrażane w wartościach liczbowych. W przypadku zadań programowania całkowitoliczbowego lub binarnego mogą to być na przykład wartości współczynników funkcji celu oraz wartości współczynników prawych i lewych stron ograniczeń, w przypadku zadań na grafach mogą to być wagi łuków lub krawędzi. Każdy z takich parametrów, dla ustalenia uwagi oznaczony jako X, przyjmuje wartości z pewnego zbioru, na przykład:

$$X \in (-\infty, +\infty),\ X \in (0,1] \text{ lub } X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}.$$

Zbiór taki nazywany jest *przestrzenią próbek* dla X.

Efektem przeprowadzonej analizy może być uzyskanie opisu zachowania charakterystyk takich jak wartości rozwiązań optymalnych i przybliżonych, złożoność obliczeniowa algorytmów i innych, jako funkcji rozmiaru zadania.

Jeżeli przyjmujemy założenie o losowym charakterze danych zadania, to wtedy również wymienione powyżej charakterystyki, takie jak: wartości rozwiązań optymalnych i przybliżonych, funkcje aproksymujące złożoność obliczeniową algorytmów, stają się również pewnymi zjawiskami losowymi. Do matematycznego opisu zjawisk losowych wyrażanych w postaci liczbowej służy teoria zmiennych losowych.

Definicja 21 *Funkcję X określoną na przestrzeni próbek nazywamy zmienną losową, jeżeli dla dowolnych stałych $a < b$ określone jest prawdopodobieństwo, że X przyjmie wartość z przedziału $(a, b]$.*

Definicja 22 *Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jest zdefiniowany poprzez wyznaczenie wartości prawdopodobieństw wystąpienia zdarzeń losowych $\{a < X \leq b\}$ dla wszystkich możliwych wartości $-\infty \leq a, b \leq +\infty$.*

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X może być zadany poprzez funkcję niemalejącą $F(x)$ taką, że:

$$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$$

W powyższym ujęciu operujemy tylko wartościami przyrostów funkcji $F(x)$, w związku z czym można dowolnie ustalić jej postać w wybranym punkcie. Dla uproszczenia dalszych rozważań można przyjąć, że:

$$F(-\infty) = 0 \text{ oraz } F(+\infty) = 1$$

Definicja 23 *Dystrybuantą zmiennej losowej X będziemy nazywać funkcję $F(x)$ taką, że:*

$$F(x) = P\{X \leq x\} \tag{4.6}$$

Zmienne losowe dyskretne

W przypadku, kiedy zbiór możliwych wartości przyjmowanych przez zmienną losową jest skończony lub przeliczalny, będziemy mówić, że zmienna losowa X ma *rozkład dyskretny*. Innymi słowy, istnieje taki ciąg liczb $x_1, x_2, \cdots$, że zmienna losowa X przyjmuje wartości z tego ciągu. Aby zdefiniować rozkład zmiennej losowej X, wystarczy określić wszystkie prawdopodobieństwa:

$$p_i = P\{X = x_i\}, \text{ gdzie } i = 1, 2, \ldots$$

Zastosowanie rozkładów dyskretnych jest szczególnie uzasadnione na przykład wtedy, kiedy zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości całkowite.

W rozważanym już przykładzie rzutu kością do gry zbiór wartości przyjmowanych przez zmienną losową X jest ograniczony do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dla zmiennych dyskretnych możemy również podać dystrybuantę, patrz (4.6), która może być zapisana w poniższej postaci:

$$F(x) = \sum_i p_i \cdot I_{x \geq x_i}, \text{ gdzie } I_{x \geq x_i} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad x \geq x_i \\ 0 & \text{jeżeli} \quad x < x_i \end{cases}.$$

Zmienne losowe ciagłe

O zmiennej losowej X mówimy, że ma rozkład *ciągły*, jeżeli istnieje taka nieujemna funkcja $f(t)$, że dla dowlnych a i b mamy:

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(t)dt.$$

Fukcję $f(t)$ nazywamy *gęstością prawdopodobieństwa* zmiennej losowej X. Pomiędzy dystrybuantą i gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X zachodzi poniższa relacja:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

a więc dla przykładu mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Wybrane rozkłady prawdopodobieństw

- Rozkład Poissona. O zmiennej losowej dyskretnej mówimy, że ma *rozkład Poissona*, jeżeli dla pewnej wartości $\lambda > 0$ mamy:

  $$P\{X = i\} = (\lambda^i \cdot e^{-\lambda})/i!, \text{ gdzie } i = 0, 1, 2, \ldots$$

  Rozkład Poissona jest szczególnie przydatny przy badaniu łącznej liczby wystąpień pewnego rzadkiego zjawiska (to znaczy zjawiska o niskim prawdopodobieństwie) przy dużej liczbie niezależnych prób, takich na przykład jak ilość wypadków ulicznych lub pożarów w rozważanym okresie czasu.

- Rozkład geometryczny. O zmiennej losowej dyskretnej mówimy, że ma *rozkład geometryczny*, jeżeli dla pewnej wartości $0 < p < 1$ mamy:

  $$P\{X = i\} = (1 - p)^i \cdot p, \text{ gdzie } i = 0, 1, 2, \ldots$$

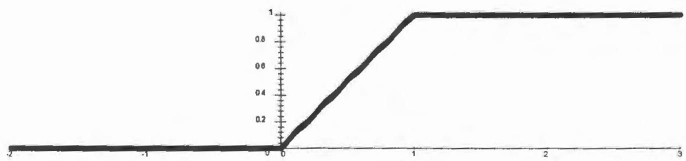
  Rozkład geometryczny dobrze opisuje sytuację, kiedy wykonujemy pewien eksperyment i interesuje nas, kiedy wystąpi pierwszy sukces, gdy prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p.

- Rozkład równomierny (jednostajny). O zmiennej losowej mówimy, że ma *rozkład równomierny* na przedziale $(a, b]$, jeżeli:

  $$P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{jeżeli } a < x \leq b \\ 1 & \text{jeżeli } x > b \end{cases}$$

  Rozkład równomierny opisuje przypadek kiedy zmienna losowa przyjmuje z jednakowym prawdopodobieństwem tylko wartości z przedziału

$(a, b]$. Opisuje on często spotykaną w praktyce sytuację. Na ogół rozważa się rozkład równomierny znormalizowany, gdzie $a = 0$ oraz $b = 1$. W tej postaci rozkład równomierny jest szczególnie często wykorzystywany w analizie przypadku średniego zadań optymalizacji dyskretnej, patrz Rinnoy Kan [115] oraz Rinnoy Kan i Stougie [116], a także rozdziały monografii 5 oraz 6. Na rysunku 4.1 przedstawiony został wykres dystrybuanty rozkładu równomiernego na przedziale $(0, 1]$.



Rysunek 4.1: Dystrybuanta znormalizowanego rozkładu równomiernego

- Rozkład normalny. O zmiennej losowej mówimy, że ma *rozkład normalny* jeżeli jej gęstość prawdopodobieństwa ma postać:

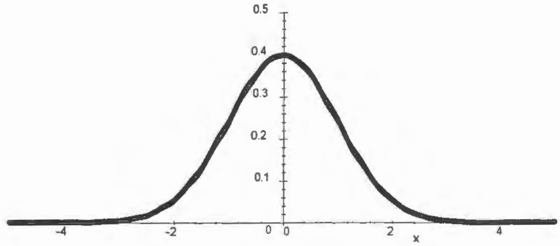
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie $\sigma > 0$ oraz m są stałymi. Rozkład normalny jest stosowany w sytuacjach, gdy na wartość zmiennej losowej X ma wpływ duża liczba niezależnie działających czynnników, każdy o niewielkim znaczeniu. Na rysunku 4.2 przedstawiono wykres gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego przy $\sigma = 1$ oraz $m = 0$.

Charakterystyki zmiennych losowych

W wielu przypadkach albo nie jesteśmy w stanie wyznaczyć rozkładu prawdopodobieństwa, albo interesują nas tylko jego sumaryczne "typowe" charakterystyki. Niewątpliwie jedną z najważniejszych spośród nich jest *wartość oczekiwana*, zwana też *wartością średnią*, zmiennej losowej.

Aby intuicyjnie przybliżyć to pojęcie, rozważmy przytaczany już uprzednio przypadek rzutu kością. Mamy sześć możliwych wartości, którymi może się zakończyć rzut kością $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Może więc zajść jedno z sześciu zdarzeń $A_i = \{X = i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Przy wykonaniu n prób (rzutów kością),



Rysunek 4.2: Wykres gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego

zgodnie z (4.2), średnia wartość wylosowanego numeru może być podana poniższym wzorem

$$\sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{n_{A_i}}{n}.$$

Natomiast przy zastąpieniu częstości prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia mamy:

$$\sum_{i=1}^{6} i \cdot P\{X = i\}$$

Definicja 24 *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X dla dyskretnych zmiennych losowych nazywamy:*

$$E(X) = \sum_{i} x_i \cdot P\{X = x_i\} \tag{4.7}$$

oraz dla zmiennych losowych ciągłych:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx. \tag{4.8}$$

W powyższych definicjach przyjęto założenie o bezwzględnej zbieżności szeregu w (4.7) lub całki w sensie Riemanna w (4.8).

Zastosowanie całki w sensie Lebesgue'a-Stieltjesa, patrz na przykład Feller [38] lub Loève [96], pozwala ugólnić powyższe wzory do postaci:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x). \tag{4.9}$$

Co więcej, zastosowanie całki Lebesgue'a-Stieltjesa umożliwia rozważanie znacznie szerszych klas rozkładów prawdopodobieństw, na przykład rozkłady będące kombinacją rozkładów ciągłego i dyskretnego (zmienna losowa przyjmująca zarówno wartości z ciągłych przedziałów jak i pojedyńcze wartości). W przypadku istnienia gęstości prawdopodobieństwa w przedziale $(a, b]$ mamy: $dF(x) = f(x)dx$, dla $x \in (a, b]$. Jeżeli w przedziale $(c, d]$ zmienna X ma rozkład dyskretny, to wtedy $\int_c^d x dF(x) = \sum_{k=1}^{l} x_{i_k} \cdot P\{X = x_{i_k}\}$, gdzie $x_{i_k} \in (c, d]$, $k = 1, \ldots l$.

Innym, bardzo ważnym zastosowaniem całki Lebesgue'a-Stieltjesa jest uogólnienie pojęcia prawdopodobieństwa jako funkcji miary zbiorów, co pozwala w znaczny sposób rozszerzyć zakres rozważań. Z uwagi na zamiar wykorzystania w dalszej części monografii możliwie najmniej skomplikowanego aparatu rachunku prawdopodobieństwa, tematyka ta pozostanie poza obszarem zainteresownia niniejszej monografii.

Poniżej zostaną przytoczone pewne ważne oszacowania zmiennych losowych, które są szczególnie przydatne w przypadku przeprowadzania asymptotycznej analizy przypadku średniego.

Stwierdzenie 1 *(**Nierówność Markowa**) Dla dowolnej zmiennej losowej Y oraz dowolnych stałych $\epsilon, r > 0$, o ile istnieje $E(|Y|^r)$, zachodzi następująca nierówność*

$$P\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|Y|^r)}{\varepsilon^r} \tag{4.10}$$

Dowód nierówności Markowa jest zawarty w Loève [96].

Definicja 25 *Jeżeli dla zmiennej losowej X istnieją $E(X)$ oraz $E(X^2)$, to wtedy wariancja X jest dana przez poniższy wzór:*

$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X) \tag{4.11}$$

Wykorzystując nierówność Markowa i pojęcie wariancji możemy wprowadzić, odgrywającą wielką rolę w rachunku prawdopodobieństwa i intensywnie wykorzystywaną w rozdziałach 5 oraz 6 niniejszej monografii, *nierówność Czebyszewa*, patrz Feller [38] lub Loève [96].

Stwierdzenie 2 *(**Nierówność Czebyszewa**) Jeżeli dla zmiennej losowej X istnieją $E(X)$ oraz $E(X^2)$, to wtedy podstawiając $Y = X - E(X)$, $r = 2$ oraz wykorzystując (4.10) i (4.11) otrzymujemy dla dowolnej stałej $\epsilon > 0$:*

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \tag{4.12}$$

Dla stałych a i b oraz zmiennych losowych X i Y prawdziwe są poniższe zależności:

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y); E(a \cdot X+b) = a \cdot E(X)+b; \mathrm{Var}(a \cdot X+b) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

Ponadto jeżeli X i Y są wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi, to wtedy:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \text{ oraz } \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \qquad (4.13)$$

Przy modelowaniu zjawisk praktycznych, takich na przykład jak zadania i algorytmy optymalizacji dyskretnej, gdzie dane zadań mogą być przedstawiane jako realizacje zmiennych losowych, często zachodzi potrzeba:

- dokonania przekształcenia danych wejściowych zadania, co w odniesieniu do zmiennych losowych oznacza potrzebę rozważania zmiennej losowej $Y = u(X)$, gdzie $u(\cdot)$ jest przekształceniem funkcyjnym, natomiast X jest zmienną losową opisującą pewną charakterystykę zadania lub algorytmu. Dla przykładu (4.9) przyjmuje wtedy postać:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot dF(x);$$

- operowania wektorami zmiennych losowych, takimi jak współczynniki funkcji celu, lewych stron ograniczeń, wagi łuków bądź krawędzi w grafie.

Wektor zmiennych losowych $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ nazywamy *n-wymiarową* zmienną losową. Dystrybuanta wektora zmiennych losowych przyjmuje postać:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\} \cap \ldots \cap \{X_n < x_n\}\}$$

Definicja 26 *Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy wzajemnie niezależnymi, jeżeli:*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i), \text{ gdzie } F_i(x_i) = P\{X_i < x_i\}$$

W przypadku $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - wektora wzajemnie niezależnych zmiennych losowych zgodnie z (4.13) mamy:

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \tag{4.14}$$

Jeżeli rozkłady zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ spełniają poniższy warunek

$$F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_n(x) \text{ dla wszystkich } x, -\infty \leq x \leq \infty,$$

to będziemy mówić, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie.

Niezależność zmiennych losowych jest ściśle związana z niezależnością zdarzeń losowych, porównaj z (4.5). W przypadku operowania skomplikowanymi przekształceniami danych zadania w procesie analizy przypadku średniego zadania lub algorytmu optymalizacji dyskretnej, dopuszczenie w założeniach modelu wystąpienia zależności pomiędzy zmiennymi losowymi opisującymi dane zadania może spowodować praktyczną niemożliwość przeprowadzenia analizy przypadku średniego. Dlatego, w większości rozważanych modeli przyjęto założenie o niezależności zmiennych losowych opisujących dane zadań, patrz na przykład Karp i inni [83], Rinnoy Kan [115], Rinnoy Kan i Stougie [116] oraz Steele [127] i [128] a także podrozdziały 5.5 oraz 6.3 niniejszej monografii.

4.4 Analiza zadań i algorytmów

W procesie praktycznego rozwiązywania realizacji danych zadania optymalizacji dyskretnej o rozmiarach n przy wykorzystaniu algorytmu A, patrz dyskusja w podrozdziałach 2.1 oraz 3.2, operujemy wielkościami takimi jak:

$$z_{OPT}(I_n^*), \quad z_A(I_n), \quad \psi(I_n), \quad \gamma(I_n) \quad \text{oraz} \quad f_A(n),$$

gdzie $z_{OPT}(I_n^*)$ jest wartością rozwiązania optymalnego, $z_A(I_n)$ wartością rozwiązania uzyskanego przez algorytm A, $\psi(I_n)$ i $\gamma(I_n)$, miarą dokładności algorytmu A oraz $f_A(n)$ miarą jego złożoności obliczeniowej.

Oceny powyższych wielkości w przypadku analizy przypadku najgorszego mają charakter ocen absolutnych, to znaczy, że są one prawdziwe dla wszystkich możliwych realizacji danych zadania. Wiele ważnych zadań optymalizacji dyskretnej należy do klasy zadań $\mathcal{NP}$-trudnych lub silnie $\mathcal{NP}$-trudnych. Wydaje się więc praktycznie niemożliwe, w świetle wyników przytoczonych w rozdziale 3, aby istniały dla nich algorytmy, dla których $f_A(n)$ jest ograniczone przez funkcję wielomianową od n oraz $\gamma(I_n) = 0$ dla wszystkich realizacji danych zadań.

Powyższe stwierdzenia pozostają w jawnej sprzeczności z dość powszechnymi odczuciami, że realne, "średnie" zachowanie się zadań i algorytmów jest w wielu przypadkach odmienne, i na ogół znacznie lepsze, niż wynika to z ocen w sensie analizy przypadku najgorszego. Dobrym przykładem jest tutaj algorytm sympleks dla zadania programowania liniowego, patrz podrozdziały 1.3 oraz 2.5. Praca algorytmu kończy się uzyskaniem rozwiązania optymalnego zadania, poza przypadkami zdegenerowanymi, a więc $\gamma(I_n) = 0$ lub $\psi(I_n) = 1$ dla wszystkich realizacji danych zadania. Złożoność obliczeniowa algorytmu jest wykładnicza, co oznacza, że nie istnieje funkcja wielomianowa od n ograniczająca $f_A(n)$ dla wszystkich realizacji danych zadania. Natomiast praktyka obliczeniowa potwierdza bardzo dobre zachowanie się tego algorytmu w sensie nakładu obliczeń dla przytłaczającej większości rozwiązywanych realizacji danych zadań.

Z drugiej strony, istnieje wiele algorytmów przybliżonych, lub wręcz heurystycznych, o niskiej złożoności obliczeniowej, których gwarantowana jakość rozwiązań, w sensie miar dokładności $\psi(I_n)$ i $\gamma(I_n)$, znacznie odbiega na niekorzyść od zaobserwowanych w praktyce obliczeniowej. W zastosowaniach praktycznych algorytm uzyskujący dobrą dokładność rozwiązań i nakład obliczeń dla większości przypadków lub nawet w sensie oceny przypadku średniego może być w zupełności wystarczający.

Jednym z możliwych sposobów wyjaśnienia tych zjawisk jest znalezienie alternatywnego sposobu oceny zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej, nie opartego na zasadzie gwarancji absolutnych. Analiza ukierunkowana na zbadanie "przeciętnego" lub inaczej "średniego" zachowania się zadań i algorytmów optymalizacj dyskretnej jest nazywana *analizą przypadku średniego* (*average case analysis*).

Rachunek prawdopodobieństwa dostarcza w naturalny sposób aparatu do tego typu analizy. Przystępując do przeprowadzenia analizy przypadku średniego należy skonstruować losowy model zadania. Typowym podejściem jest przyjęcie założenia, że wybrane parametry zadania są realizacjami zmiennych losowych o zadanych rozkładach prawdopodobieństw. Oznacza to wyodrębnienie, określonej przez przyjęte założenia, *klasy zadań losowych* spośród wszystkich realizacji danych rozważanego zadania. Szczególnie często stosowany jest rozkład równomierny. Wynika to z faktu, że parametry zadań przyjmują z jednakowym prawdopodobieństwem wartości z pewnego przedziału, dla ustalenia uwagi $(0,1]$.

Wtedy charakterystyki zadania i algorytmu takie jak $z_{OPT}(I_n^*)$, $z_A(I_n)$, $\psi(I_n)$, $\gamma(I_n)$ oraz $f_A(n)$ stają się realizacjami pewnych zmiennych losowych, których zachowanie może być badane i poddane analizie. Takie podejście może być potraktowane jako teoretyczny odpowiednik analizy *eksperymentalnej* algorytmów, gdzie algorytm jest testowany na zbiorach danych losowych oraz oceniany w sposób statystyczny.

Niestety, podejście to posiada pewne ograniczenia. Tylko wybrane rozkłady prawdopodobieństw i dość proste algorytmy mogą być przedmiotem takiej analizy. W przypadku innych modeli stopień skomplikowania, pojawienie się rozkładów warunkowych oraz zależności pomiędzy zmiennymi losowymi w praktyce uniemożliwia przeprowadzenie analizy przypadku średniego. Dla przykładu zbadanie niezbędnego w pracy wielu algorytmów warunku $X > Y$ w kolejnych iteracjach może prowadzić do konieczności rozważania zmiennych losowych o skomplikowanych rozkładach warunkowych.

Analiza przypadku średniego nosi na ogół charakter asymptotyczny. Zakładamy, że rozmiar zadania, dla ustalenia uwagi oznaczany jako n, wzrasta w sposób niegraniczony, $n \to \infty$. Analizowane jest graniczne zachowanie się ciągów zmiennych losowych opisujących takie wielkości jak na przykład $z_{OPT}(I_n^*)$, $z_A(I_n)$, $\psi(I_n)$, $\gamma(I_n)$ oraz $f_A(n)$ przy $n \to \infty$.

W odniesieniu do losowych modeli zadań optymalizacji dyskretnej o charakterze narastającym, przy $n \to \infty$, można wyróżnić dwa zasadnicze sposoby budowy modeli losowych zadań: niezależny i inkrementalny, patrz Weide [147], Meanti i inni [107] oraz Steele [128]. Niech dla $n-1$ ciąg zmiennych losowych $\{X_1, X_2, \ldots, X_{l_{n-1}}\}$ oznacza aktualnie rozważany opis parametrów zadania. Przechodząc do n mamy:

- W przypadku *modelu niezależnego* (*independent model*) dla losowych zadań optymalizacji dyskretnej mamy do czynienia z próbkowaniem serii realizacji zadania o rosnących rozmiarach. Dlatego każda kolejna realizacja zadania jest niezależna od pozostałych. $\{X_1, X_2, \ldots, X_{l_{n-1}}\}$ będzie za każdym razem zastępowane przez ciąg "świeżych" zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\{X_1', X_2', \ldots, X_{l_{n-1}}', \ldots, X_{l_n}'\}$.

- W przypadku *modelu inkrementalnego* (*incremental model*) realizacja zadania o rozmiarze n jest rozszerzeniem klasy zadań o rozmiarze $n-1$. Oznacza to uzupełnianie za każdym razem analizowanych współczynników zadania o ciąg wartości losowych będących realizacjami zmiennych losowych niezależnych wzajemnie od siebie oraz od zmiennych losowych opisujących zadania o rozmiarze $n-1$ i mniejszym. Zamiast $\{X_1, X_2, \ldots, X_{l_{n-1}}\}$ rozważany będzie ciąg zmiennych losowych uzupełniony o $\{X_{l_{n-1}+1}, \ldots, X_{l_n}\}$ a więc $\{X_1, X_2, \ldots, X_{l_n}\}$.

Weide w pracy [147] rozważył wzajemne relacje tych modeli. W szczególności wykazano, że wyniki zbieżności uzyskane dla modelu niezależnego oznaczają również zbieżność w przypadku modelu inkrementalnego, co oznacza, że model niezależny jest w tym zakresie bardziej ogólny od modelu inkrementalnego. W rozdziałach 5 oraz 6 niniejszej monografii rozważany jest model niezależny wielowymiarowego zadania załadunku oraz zadania szeregowania prac ze znanymi terminami zakończenia.

Przy przeprowadzaniu asymptotycznej analizy przypadku średniego bardzo przydatne jest pojęcie stochastycznej zbieżności ciągów zmiennych losowych. Dla ciągu zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots$ oraz stałej c znane są różne rodzaje zbieżności stochastycznej.

Zbieżność prawie na pewno (*almost sure convergence*), w skrócie (p.n.) oznacza, że

$$P\{\lim_{n\to\infty} Y_n = c\} = 1,$$

gdzie $\lim_{n\to\infty} Y_n = c$ oznacza zbieżność do c wszystkich realizacji zmiennej losowej Y_n (poza ewentualnie zbiorem miary zero, patrz Loève [96]).

Nieco słabszą formą zbieżności jest *zbieżność z prawdopodobieństwem* (*convergence in probability*), która oznacza , że dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - c| > \varepsilon\} = 0. \tag{4.15}$$

Jeżeli zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n - c| > \varepsilon\} < \infty$$

to zbieżność z prawdopodobieństwem jest tożsama ze zbieżnością prawie na pewno.

Zbieżność do wartości oczekiwanej (*convergence to expectation*) oznacza, że zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} |E(Y_n) - c| = 0$$

co jest jeszcze słabszą formą zbieżności, ale przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków dotyczących rozkładu prawdopodobieństwa ciągu $Y_1, Y_2, \ldots$, patrz Feller [38], może być tożsama ze zbieżnością z prawdopodobieństwem.

W podrozdziale 5.4 sformułowano pojęcie asymptotycznej zbieżności ciągów zmienych losowych i liczbowych w sensie ilorazowym, która jest odmiennym podejściem od zaprezentowanego powyżej, ale jest zgodna ze zbieżnością z prawdopodobieństwem.

Jednym z bardzo istotnych wyników analizy przypadku średniego było wykazanie, że istnieją realizacje algorytmu sympleks mające w średnim przypadku wielomianową złożoność obliczeniową, patrz Borgwardt [15] oraz Smale [125], co potwierdza jego wysoką przydatność praktyczną.

Poniżej zostaną przytoczone znane z literatury wyniki analizy średniego przypadku dla wybranych zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej przedstawionych w rozdziałach 1 oraz 2.

W podrozdziale 1.3 zaprezentowano zadania rozbicia zbioru oraz pakowania zasobników, patrz również Rinnoy Kan [115], Rinnoy Kan i Stougie [116] oraz Coffman i Lueker [24]. Dla zadań rozbicia zbioru w postaci (1.12) oraz (1.13) przypadek $m = 2$ jest szczególny. Postać rozwiązania optymalnego dla obu zadań jest identyczna, natomiast różne są wartości rozwiązań optymalnych. Rozważmy zadanie rozbicia zbioru w postaci (1.13), $m = 2$. Niech dalej $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą realizacjami $X_1, X_2, \dots, X_n$ - wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie ze skończoną wartością oczekiwaną. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_{OPT}(n,2)}{E(\sum_{i=1}^{n} X_i)/2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_{OPT}(n,2)}{n \cdot E(X_1)/2} \right) = 1 \qquad \text{(p.n.).} \qquad (4.16)$$

W podrozdziale 2.4 zaprezentowano algorytm zachłanny dla zadania (1.13) z wartością uzyskanego rozwiązania równą $z_{GRE}(n)$. Można wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_{GRE}(n)}{n \cdot E(X_1)/2} \right) = 1 \ \text{(p.n.)} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_{GRE}(n)}{z_{OPT}(n,2)} \right) = 1 \ \text{(p.n.).}$$

Wyniki te mają bardzo ciekawą interpretację. W tym przypadku mamy, patrz (2.1) oraz podrozdział 2.1,

$$\psi(I_n) = \frac{z_{GRE}(n)}{z_{OPT}(n,2)} \quad \text{a więc} \quad \lim_{n\to\infty} \psi(I_n) = 1 \quad \text{(p.n.).}$$

Wynik powyższy oznacza, że algorytm zachłanny zaprezentowany w podrozdziale 2.4 jest algorytmem asymptotycznie suboptymalnym dla zadania (1.13), gdzie $m = 2$, patrz (2.4). W sensie analizy przypadku najgorszego mieliśmy zupełnie inne oszacowanie, patrz (2.1), (2.3) oraz (2.12),

$$\frac{2}{3} \le \psi(I_n) \le 1.$$

Zauważmy, że (4.16) daje bardzo ciekawą możliwość oszacowania asymptotycznego wzrostu rozwiązań optymalnych zadania (1.13), gdzie $m = 2$, $z_{OPT}(n,2)$ dla znormalizowanego rozkładu równomiernego.

Przykład 1 *Jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_n$ są wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym na przedziale $(0,1]$, to wtedy $E(X_1) = \frac{1}{2}$ oraz (4.16) przyjmuje poniższą postać:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_{OPT}(n,2)}{n/4} \right) = 1 \qquad \textit{(p.n.).} \qquad (4.17)$$

Rozważmy teraz zadanie pakowania zasobników, patrz (1.14), podrozdział 1.3 oraz Coffman i Lueker [24]. Bez ograniczania ogólności rozważań możemy przyjąć, że rozmiar zasobników spełnia $c = 1$. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą realizacjami $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa z dystrybuantą $F(x)$. Dla każdej postaci dystrybuanty F możemy zdefiniować *współczynnik optymalności* (*optimum packing ratio*) opisywanego przez dystrybuantę $F(x)$ rozkładu prawdopodobieństwa w postaci

$$R_F = \lim_{n\to\infty} \frac{E(z_{OPT}(n))}{E(\sum_{i=1}^n X_i)}.$$

Będziemy mówić, że dystrybuanta F pozwala na *pakowanie doskonałe* (*perfect packing*) jeżeli

$$R_F = 1.$$

Współczynnik optymalności pakowania jest charakterystyką właściwą tylko dla analizy przypadku średniego. Zauważmy dodatkowo, że zgodnie z mocnym prawem wielkich liczb, patrz Feller [38] oraz Loève [96], mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n \cdot E(X_1)} = 1 \quad \text{(p.n.)} \qquad \text{oraz} \qquad E(\sum_{i=1}^n X_i) = n \cdot E(X_1).$$

Pakowanie doskonałe oznacza, że łączna wartość niewykorzystanego miejsca pozostawionego w pojemnikach jest w ujęciu asymptotycznym mała w stosunku do sumy rozmiarów wszystkich pakowanych obiektów $\sum_{i=1}^n X_i$.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym na przedziale $(0, b]$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gdzie b stała, $0 < b \leq 1$. Oznaczmy dystrybuantę takiego rozkładu jako $U(b)$. Dla $b = 1$, to znaczy dla rozkładu równomiernego na przedziale $(0, 1]$ mamy:

$$E(z_{OPT}(n)) - \frac{n}{2} = \Theta(\sqrt{n}). \tag{4.18}$$

Wykorzytując (4.18) oraz fakt, że w tym przypadku $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n/2$, możemy z łatwością zaobserwować, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(z_{OPT}(n))}{n/2} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad R_{U(1)} = 1. \tag{4.19}$$

Dla algorytmów zachłannych FFD oraz BFD, patrz podrozdział 2.4, dla $b = 1$ mamy

$$E(z_{FFD}(n)) - \frac{n}{2} = \Theta(\sqrt{n}) \qquad \text{oraz} \qquad E(z_{BFD}(n)) - \frac{n}{2} = \Theta(\sqrt{n}).$$

Uwzględniając (4.18) z łatwością możemy uzyskać

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(z_{OPT}(n))}{E(z_{FFD}(n))} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{E(z_{OPT}(n))}{E(z_{BFD}(n))} = 1. \tag{4.20}$$

W przypadku, $0 < b < 1$, znane są wyniki wykazujące, że

$$R_{U(b)} = 1 \text{ oraz } E\left(z_{FFD}(n) - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{jeżeli } 0 < b \le \frac{1}{2} \\ \Theta(n^{1/3}) & \text{jeżeli } \frac{1}{2} < b < 1 \end{cases}.$$

Powyżej zaprezentowane wyniki pokazują, że analiza przypadku średniego uzyskuje bardzo wartościowe i jakościowo nowe wyniki dla zadania pakowania zasobników w porównaniu z analizą przypadku najgorszego. Jako porównania możemy użyć chociażby oszacowań (2.13) oraz (4.20). Innym wkładem analizy przypadku średniego do analizy zadania pakowania zasobników jest wprowadzenie pojęć współczynnika optymalności oraz pakowania doskonałego.

Zastosowanie sortowania współczynników $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tak, aby spełniony był warunek (2.11), gwarantuje "zachłanność" rozważanych powyżej algorytmów. Na ich przykładzie widać, że algorytmy zachłanne dla zadań rozbicia zbioru (1.13), gdzie $m = 2$ oraz pakowania zasobników (1.14) są algorytmami asymptotycznie suboptymalnymi w sensie analizy przypadku średniego. Zgodnie z wynikami analizy przypadku najgorszego rozważane algorytmy zachłanne są algorytmami o gwarantowanej dokładności. Co więcej, znane są przykłady gwarantujące brak możliwości poprawienia tych ocen.

Niestety, uwzględnienie warunku (2.11) oznacza konieczność korzystania z tak zwanych *statystyk pozycyjnych*, patrz Feller [38], co w ogólnym przypadku bardzo utrudnia przeprowadzenie analizy przypadku średniego dla bardziej złożonych modeli zadań i algorytmów.

Dla danych zadań $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będących realizacjami $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym znormalizowanym, analiza przypadku średniego daje szczególnie poglądowe wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązań optymalnych w przypadku zadania rozbicia zbioru (1.13), gdzie $m = 2$, patrz (4.17), oraz zadania pakowania zasobników (1.14), patrz (4.19).

W literaturze dużą uwagę poświęcono analizie przypadku średniego zadań na płaszczyźnie. Szczególnie cenne wyniki uzyskano w odniesieniu do zadania komiwojażera, patrz Steele [127] i [128], Rinnoy Kan [115] oraz Rinnoy Kan i Stougie [116]. We wczesnej pracy, patrz Beardwood, Halton i Hammersley [10], rozważono zadanie komiwojażera w modelu losowym zgodnym z modelem rozważanym w podrozdziale 2.3. Rozważany jest nieskierowany graf ważony G, którego zbiór wierzchołków $V = \{1, \ldots, n\}$ jest zadany jako zbior

n punktów w kwadracie znajdującym się na płaszczyźnie. Bez ograniczenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że boki kwadratu są równe 1. Wtedy każdy z wierzchołków grafu $i \in V$ może zostać zdefiniowany poprzez zadanie jego współrzędnych (x_i, y_i), gdzie $0 \leq x_i, y_i \leq 1$. Dla każdej krawędzi lub łuku $e = (i, j)$ grafu G waga c_{ij} jest zdefiniowana jako najkrótsza odległość pomiędzy wierzchołkami:

$$c_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

Model losowy tak zdefiniowanego zadania można uzyskać w dość naturalny sposób przyjmując założenie, że $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są realizacjami $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ - wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0, 1]$. Wtedy wagi c_{ij} stają się realizacjami odpowiednich zmiennych losowych. Przy tych założeniach udało się uzyskać wynik opisujący zachowanie się wartości rozwiązania optymalnego zadania komiwojażera, patrz podrozdziały 1.4 oraz 2.3, dla zdefinowanego powyżej modelu losowego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{OPT}(n)}{\sqrt{n}} = \beta \qquad \text{(p.n.)}, \qquad \text{gdzie } \beta \text{ stała.}$$

Wartość stałej β została empirycznie ustalona jako $\beta = 0,765$.

W oparciu o ten pionierski rezultat uzyskano szereg dalszych wartościowych wyników. Na przykład pokazano, patrz Steele [127], że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(z_{OPT}(n))}{\sqrt{n}} = \beta \ \text{ oraz } \ \lim_{n\to\infty} \frac{|z_{OPT}(n) - E(z_{OPT}(n))|}{\sqrt{n}} = 0 \ \text{ (p.n.).}$$

W odniesieniu do algorytmu podziału Karpa, patrz [81] oraz podrozdział 2.3, uzyskującego rozwiązanie przybliżone o wartości $z_{PAR}(n)$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(z_{PAR}(n))}{\sqrt{n}} = \beta, \qquad \text{gdzie } \beta \text{ stała.}$$

Wynik ten dowodzi sub-optymalnego zachowania algorytmu podziału Karpa dla zadania komiwojażera w nieskierowanym grafie na płaszczyźnie. Jak wspomniano w podrozdziale 2.3, algorytm podziału Karpa nie ma żadnych gwarancji dokładności w sensie analizy przypadku najgorszego. Ten wynik analizy przypadku średniego jest więc również bardzo wartościowym dopełnieniem analizy przypadku najgorszego.

Pomimo faktu, że analiza średnego przypadku jest aktywną dziedziną badawczą od niezbyt długiego czasu, uzyskano bardzo dużo różnorodnych wyników w odniesieniu do zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. W pracach Coffman, Lueker i Rinnoy Kan [25], Coffman i Lueker [24], Karp [80] i [82], Karp, Lenstra, McDiarmid i Rinnoy Kan [83], Rinnoy Kan [115], Rinnoy Kan i Stougie[116], Steele [127] i [128] oraz innych przedstawiono liczne wyniki analizy przypadku średniego.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że część znanych z literatury wyników analizy przypadku średniego uzyskano przy zastosowaniu bardzo zaawansowanego aparatu rachunku prawdopodobieństwa, co czyni z nich bardziej zastosowania i osiągnięcia teorii rachunku prawdopodobieństwa niż optymalizacji dyskretnej. Stwierdzenie to jest uzasadnione zasadniczymi trudnościami, jakie mogą się pojawić przy próbie praktycznej interpretacji i zastosowania uzyskanych wyników w analizie zadań i konstrukcji algorytmów optymalizacji dyskretnej.

W rozdziałach 5 oraz 6 niniejszej monografii zastosowano podejście analizy przypadku średniego do wielowymiarowego zadania załadunku i zadania szeregowania prac ze znanymi terminami zakończenia. Wykorzystując prosty aparat rachunku prawdopodobieństwa udało się uzyskać dla tych zadań wartościowe wyniki.

Dla wielu $\mathcal{NP}$-trudnych zadań optymalizacji dyskretnej nie są znane wyniki opisujące efektywne algorytmy optymalne nawet w średnim przypadku. Powstaje pytanie, czy istnieją rozkłady prawdopodobieństw opisujących realizacje danych dla $\mathcal{NP}$-trudnych zadań optymalizacji dyskretnej, dla których zadania te są wciąż trudne do rozwiązania w średnim przypadku. Levin w pracy [95] zaproponował definicję zadań $\mathcal{NP}$ -trudnych w średnim przypadku. Ogólna idea tego podejścia polega na tym, że jeżeli chociażby jeden przykład zadania będący realizacją założonego rozkładu prawdopodobieństw danych zadania jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym w sensie analizy przypadku średniego, to wtedy cała klasa losowych zadań związanych z tymi rozkładami jest również rozwiązywalna w czasie wielomianowym w sensie analizy przypadku średniego.

Oprócz pewnych ograniczeń związanych z zastosowaniem analizy przypadku średniego ma ona również dodatkowe możliwości, właściwe tylko dla tego rodzaju analizy. Przeprowadzając analizę średniego przypadku możemy poznać nowe właściwości rozwiązania optymalnego, na przykład wykazać, że jest ono zbieżne do swojej wartości oczekiwanej, którą możemy często wyznaczyć jako deterministyczną funkcję parametrów zadania dla całej klasy rozważanych zadań losowych, patrz Steele [128] oraz podrozdziały 5 i 6.

Na pierwszy rzut oka może się też wydawać zasadnym rozważenie zamiast modelu losowego klasy zadań jednego uogólnionego zadania deterministycznego uzyskanego poprzez zastąpienie realizacji zmiennych losowych ich wartościami oczekiwanymi. Zamiast przeprowadzenia analizy średniego przypadku dla klasy zadań losowych wystarczy w tym przypadku rozważać jedno konkretne zadanie deterministyczne. Niestety podejście to, pomimo jego pozornej atrakcyjności, nie może w ogólnym przypadku zastąpić analizy przypadku średniego. Uzyskiwane w ten sposób wyniki są na ogół trywialne, patrz Steele [128] oraz podrozdziały 5.5 i 6.3.

Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale są często właściwe tylko dla analizy przypadku średniego i mają dużą wartość poznawczą i praktyczną. Analiza przypadku średniego jest nie tylko dopełnieniem analizy przypadku najgorszego, ale również może być traktowana jako oryginalna dziedzina poznawcza ze swoją własną specyfiką i oryginalnymi wynikami.

4.5 Podsumowanie

Celem tego rozdziału było przedstawienie podejścia przypadku średniego do analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Zaprezentowany został aparat probabilistyczny niezbędny do przeprowadzenia analizy przypadku średniego. Między innymi wprowadzono następujące pojęcia:

- Zdarzenia, wraz z określeniem podstawowych operacji nad nimi, zdarzeń krańcowych oraz częstości występowania zdarzeń.
- Zdarzenia losowe, pojęcie prawdopodobieństwa, zasady obliczania prawdopodobieństw kombinacji zdarzeń, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń.
- Zmienne losowe, rozkłady prawdopodobieństw zmiennych losowych, dystrybuanty zmiennych losowych, gęstości rozkładów.
- Wartość oczekiwana zmiennej losowej, wariancja, całkowanie w sensie Lebesgue'a-Stieltjesa.
- Nierówności Markowa i Czebyszewa.
- Niezależność zmiennych losowych.
- Model losowy zadań optymalizacji dyskretnej oraz jego właściwości.

W odniesieniu do stosowanych w analizie przypadku średniego metod i uzyskiwanych wyników rozważono następujące zagadnienia:

- Określono podstawowe cele analizy średniego przypadku.
- Omówiono dwa różne podejścia do tworzenia losowych modeli zadań optymalizacji dyskretnej: model niezależny oraz model inkrementalny.

- Zdefiniowano rodzaje zbieżności ciągów zmiennych losowych, wykorzystywane przy analizie zbieżności poszczególnych charakterystyk zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

- Zaprezentowano szereg wyników analizy przypadku średniego, w tym dla zadań rozbicia zbioru, pakowania zasobników oraz dla zadania komiwojażera na płaszczyźnie.

Analiza średniego przypadku okazała się bardzo efektywnym narzędziem wspomagającym analizę zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Ma ona własną specyfikę i dostarcza szereg oryginalnych i nietrywialnych wyników.

Na zakończenie tego rozdziału trzeba podkreślić, że uzyskane przy zastosowaniu analizy przypadku średniego wyniki dotyczą tylko klasy rozważanych zadań losowych. Należy zachować szczególną ostrożność przy próbach uogólniania uzyskanych wyników, szczególnie w odniesieniu do wszystkich realizacji danych zadania.

W rozdziałach 5 oraz 6 przeprowadzono analizę przypadku średniego dla zadań załadunku oraz szeregowania prac z terminami zakończenia. Uzyskane wyniki pozwoliły ocenić asymptotyczne zachowanie się wartości rozwiązań optymalnych i przybliżonych zadań oraz wykazać asymptotyczną optymalność prostych algorytmów przybliżonych dla tych zadań.

Uwagi końcowe

W monografii rozważono podejście przypadku średniego do analizy zadań oraz algorytmów optymalizacji dyskretnej. Celem monografii było wykazanie, na przykładzie binarnego wielowymiarowego zadania załadunku, zadania szeregowania prac z terminami zakończenia oraz wyników znanych z literatury, że podejście przypadku średniego jest bardzo użytecznym narzędziem analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

W monografii dokonano przeglądu dziedziny optymalizacji dyskretnej z zaprezentowaniem najbardziej charakterystycznych zadań, takich jak: programowanie całkowitoliczbwe i liniowe, programowanie binarne, zadania pokrycia, pakowania i rozbicia zbiorów, wybrane zadania teorii grafów oraz zadania harmonogramowania.

Następnie zaprezentowano popularne i powszechnie stosowane techniki rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, takie jak: metoda pełnego przeglądu, metoda podziału i oszacowań, programowanie dynamiczne, algorytmy zachlanne, metody programowania liniowego i inne.

Zdefinowane zostały sposoby oceny dokładności pracy algorytmów optymalizacji dyskretnej. Do oceny złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej wprowadzono metodologię przypadku najgorszego. Dokonano podziału zadań optymalizacji na umowne kategorie zadań łatwych (należących do klasy $\mathcal{P}$), trudnych (należących do klasy zadań $\mathcal{NP}$-trudnych) oraz szczególnie trudnych (zadań silnie $\mathcal{NP}$-trudnych). Z pewnym uproszczeniem można powiedzieć, że o łatwości rozwiązywania wybranych zadań optymalizacji dyskretnej decyduje istnienie dla nich algorytmów dokładnych o wielomianowej złożoności obliczeniowej.

Jako dopełnienie oraz poszerzenie możliwości poznawczych podejścia przypadku najgorszego zaprezentowano podejście przypadku średniego. Zdefiniowano niezbędne podstawy teoretyczne analizy przypadku średniego oraz dokonano prezentacji wybranych wyników znanych z literatury.

Ogólne rozważania dotyczące zadań optymalizacji dyskretnej, metod ich rozwiązywania, podejścia analizy przypadku najgorszego i średniego do oceny zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej szczegółowo omówiono na przykładzie wielowymiarowego binarnego zadania załadunku, z odrębnym rozpatrzeniem przypadku jednowymiarowego oraz zadania szeregowania prac z terminami zakończenia.

Dla rozważanych modeli losowych zadań, które uzyskano przyjmując założenie, że współczynniki funkcji celu i lewych stron ograniczeń są realizacjami zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0, 1]$, uzyskano szereg ciekawych wyników analizy przypadku średniego. Najważniejszym z nich było wykazanie, że wartości rozwiązań optymalnych dla całych losowych klas zadań dążą do swoich wartości oczekiwanych - deterministycznych funkcji: rozmiaru zadania n (liczby zmiennych decyzyjnych), liczby ograniczeń m (w przypadku binarnego wielowymiarowego zadania załadunku), oraz wartości prawych stron ograniczeń. Z przeprowadzonych rozważań wynika istotny wpływ wartości i wzajemnych uwarunkowań wektorów prawych stron ograniczeń na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych jako funkcji rozmiaru zadania n.

W przypadku binarnego wielowymiarowego zadania załadunku można zauważyć, że liczba ograniczeń m ma bardzo duży wpływ na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych jako funkcji rozmiaru zadania n, szczególnie w przypadku funkcyjnej zależności wartości prawych stron ograniczeń od m oraz małych wartości prawych stron ograniczeń $b_j(n)$, $j = 1, \ldots, m$. Dla dużych wartości $b_j(n)$, $j = 1, \ldots, m$, zależność od m ulega znacznemu osłabieniu, a przy $b_j(n) \approx n/2$ praktycznie zanika.

Powszechnie stosowaną w praktyce obliczeniowej metodą służącą do oceny algorytmów przybliżonych jest testowanie ich na zadaniach generowanych losowo. Uzyskane wyniki są następnie poddawane analizie statystycznej. Łatwo jest zauważyć, że powszechnie stosowane generatory zadań losowych są praktycznie tożsame z rozważanymi w monografii losowymi modelami zadań. Wyniki analizy przypadku średniego są więc w wielu przypadkach potwierdzeniem i teoretycznym uzasadnieniem wyników eksperymentalnych.

Co więcej, w uzasadnionych przypadkach wyniki analizy przypadku średniego mogą wyeliminować konieczność przeprowadzania eksperymentu obliczeniowego testującego algorytmy dla zadań optymalizacji dyskretnej. W takim przypadku w oczywisty sposób jest oszczędzany czas badaczy oraz zmniejszane wykorzystanie zasobów komputerowych.

W monografii wykazano, że bardzo proste algorytmy heurystyczne, o liniowej złożoności obliczeniowej, nie mające nawet gwarancji uzyskania rozwiązań dopuszczalnych zadań, są asymptotycznie optymalne w średnim przypadku. Wyniki tego typu są w oczywisty sposób odmienne od wyników analizy przypadku najgorszego i dlatego stanowią ich wartościowe uzupełnienie.

Pogląd, że analiza przypadku średniego może zastąpić analizę przypadku najgorszego jest w odczuciu autora błędny. Zarówno analiza przypadku najgorszego, jak również analiza przypadku średniego mają swoją specyfikę oraz uzyskują wartościowe wyniki i oceny. Dopiero zapoznanie się z wynikami analiz różnego rodzaju pozwala wyrobić sobie możliwie najbardziej obiektywny pogląd na różne aspekty analizowanego zadania lub algorytmu optymalizacji dyskretnej.

Należy również podkreślić, że wyniki analizy przypadku średniego są prawdziwe tylko dla rozważanych losowych klas zadań. Należy więc zachować szczególną ostrożność przy próbach uogólniania uzyskanych wyników na inne klasy zadań, gdyż może to prowadzić do fałszywych i nieuzasadnionych wniosków.

Istotnym wyzwaniem badawczym pozostaje nadal przeprowadzenie analizy przypadku średniego dla szczególnie trudnych zadań optymalizacji dyskretnej. Dobrym przykładem jest zadanie programowania całkowitoliczbowego, patrz podrozdział 1.2 oraz wzór (1.2). W przypadku zadania programowania całkowitoliczbowego postać funkcji Lagrange'a oraz zadania dualnego nie sprzyja zastosowaniu technik i oszacowań wykorzystanych w podrozdziałach 5.2 oraz 6.2.

Innym ważnym celem przyszłych prac badawczych wydaje się rozważenie bardziej realistycznych modeli zadań, co w szczególności może wymagać zastosowania złożonych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych opisujących charakterystyki analizowanych zadań. Również w tym przypadku oczekiwane jest uzyskanie analitycznych wyników o podobnym charakterze jak wyniki zawarte w podrozdziałach 5.5 oraz 6.3 niniejszej monografii.

Literatura

[1] R. Aboudi, K. Jörnsten. Tabu search for general zero-one integer programs using the pivot and complement heuristic. *ORSA Journal on Computing*, 6:82–93, 1994.

[2] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[3] G. d' Atri. Probabilistic analysis of the knapsack problem. Working Paper 7, Groupe de Récherche 22, Centre National de la Récherche Scientifique, Paris, 1978.

[4] G. Ausiello, A. Marchetti-Spaccamela, M. Protasi. Probabilistic analysis of the solution of the knapsack problem. W: *Proceedings of the Tenth IFIP Conference*, ss. 557–565, New York, 1982. Springer.

[5] I. Averbakh. Probabilistic properties of the dual structure of the multidimensional knapsack problem and fast statistically effcient algorithms. *Mathematical Programming*, 65:311–330, 1994.

[6] E. Balas. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*, 13:517–546, 1965.

[7] E. Balas, C.H. Martin. Pivot and complement - a heuristic for 0-1 programming. *Management Science*, 26:86–96, 1980.

[8] E. Balas, E. Zemel. An algorithm for large zero-one knapsack problems. *Operations Research*, 28:1130–1154, 1980.

[9] R. Battiti, G. Tecchiolli. Local search with memory: benchmarking RTS. *OR Spektrum*, 17:67–86, 1995.

[10] J. Beardwood, J. Halton, J.M. Hammersley. The shortest path through many points. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 55:299–327, 1959.

[11] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

[12] M. Bertocchi, L. Słomiński, J. Sobczyńska. Probabilistic and deterministic local search for solving the binary multiknapsack problem. *Optimization*, 33:155–166, 1995.

[13] J. Błażewicz, K.H. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt, J. Węglarz. *Scheduling Computer and Manufacturing Processes*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[14] J. Błażewicz, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity. *Discrete Applied Mathematics*, 5:11–24, 1983.

[15] K.H. Borgwardt. The average number of steps required by simplex-method is polynomial. *Zeitschrift für Operations Research*, 26:157–177, 1982.

[16] I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew. *Matematyka, poradnik encyklopedyczny*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1973.

[17] A.V. Cabot. An enumeration algorithm for knapsack problems. *Operations Research*, 18:306–311, 1970.

[18] P.M. Camerini, F. Maffioli, C. Vercellis. Multi-constrained matroidal knapsack problems. *Mathematical Programming*, 45:211–231, 1989.

[19] V. Cerny. A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. Preprint, Institute of Physics and Biophysics, Comenius University, Bratislava, 1982.

[20] L.G. Chaczian. Wielomiananowy algorytm programowania liniowego. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nova Seria*, 244(5):1093–1096, 1979. (w języku rosyjskim).

[21] I. Charon, O. Hudry. The noising method: a new method for combinatorial optimization. *Operations Research Letters*, 14:133–137, 1993.

[22] P.C. Chu, J.E. Beasley. A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. *Journal of Heuristics*, 4(1):63–86, 1998.

[23] E.G. Coffman Jr, M.R. Garey, D.S. Johnson. Approximation algorithm for bin-packing - an updated survey. W: G. Ausiello, M. Lucertini, P. Serafini, editors, *Algorithm Design for Computer System Design*, ss. 49–106, New York, 1984. Springer.

[24] E.G. Coffman Jr, G.S. Lueker. *Probabilistic Analysis of Packing and Partitioning Algorithms.* Wiley-Interscience, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1991.

[25] E.G. Coffman Jr, G.S. Lueker, A.H.G. Rinnooy Kan. Asymptotic methods in the probablistic analysis of sequencing and packing heuristics. *Management Science*, 34:266–290, 1988.

[26] S.A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. W: *Proc. 3rd Annu. ACM Symp. On Theory of Computing*, ss. 151–158, New York, 1971. ACM Press.

[27] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest. *Wprowadzenie do algorytmów.* Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1997.

[28] Y. Crama, J.B. Mazzola. On the strength of relaxations of multidimensional knapsack problems. *INFOR*, 32:219–225, 1994.

[29] F. Dammeyer, S. Voss. Dynamic tabu list management using reverse elimination method. *Annals of Operations Research*, 41:31–46, 1993.

[30] G.B. Dantzig. Discrete variable problems. *Operations Research*, 5:266–277, 1957.

[31] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[32] A. Drexl. A simulated annealing approach to the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Computing*, 40:1–8, 1988.

[33] K. Dudziński, K. Szkatuła. A note on sequencing jobs with deadlines problem. *European Journal of Operational Research*, 59:333–336, 1992.

[34] G. Dueck. New optimization heuristics. *Journal of Computational Physics*, 104:86–92, 1993.

[35] G. Dueck, T. Schuer. Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, 90:161–175, 1990.

[36] A.E. Eiben, E.H.L. Aarts, K.H. Van Hee. Global convergence of genetic algorithms: A markov chain analysis. *Lecture Notes in Computer Science*, 496:4–9, 1991.

[37] H. Everett. Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11:399–417, 1963.

[38] W. Feller. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom II.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981.

[39] J.F. Fontanari. A statistical analysis of the knapsack problem. *Journal of Physics A - Mathematical and General*, 28:4751–4759, 1995.

[40] G.E. Fox, G.D. Scudder. A heuristic with tie breaking for certain 0-1 integer programming models. *Naval Research Logistics Quarterly*, 32:613–623, 1985.

[41] A. Freville, G. Plateau. Heuristics and reduction methods for multiple constraints 0-1 linear programming problems. *European Journal of Operational Research*, 24:206–215, 1986.

[42] A. Freville, G. Plateau. Hard 0-1 multiknapsack test problems for size reduction methods. *Investigacion Operativa*, 1:251–270, 1990.

[43] A. Freville, G. Plateau. An efficient preprocessing procedure for the multidimensional 0-1 knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 49:189–212, 1994.

[44] A. Freville, G. Plateau. The 0-1 bidimensional knapsack problem: toward an efficient high-level primitive tool. *Journal of Heuristics*, 2:147–167, 1997.

[45] A.M. Frieze, M.R.B Clarke. Approximation algorithms for the m-dimensional 0-1 knapsack problem: Worst case and probabilistic analysis. *European Journal of Operational Research*, 15:100–109, 1984.

[46] M.R. Garey, R.L. Graham, D.S. Johnson, A. Yao. Resource constrained scheduling as generalized bin packing. *J. Combin. Theory A*, (21):257–298, 1976.

[47] M.R. Garey, D.S. Johnson. Strong NP-completeness results: motivation, examples and implications. *Journal of the Association of Computer Machinery*, 25:499–508, 1978.

[48] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, San Francisco, 1979.

[49] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser. *Programowanie całkowitoliczbowe.* Państwowe Wydwnictwo Naukowe, Warszawa, 1978.

[50] S.L. Gass. *Programowanie liniowe.* PWN, Warszawa, 1976.

[51] B. Gavish, H. Pirkul. *Allocation of Databases and Processors in a Distributed Computing System.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

[52] B. Gavish, H. Pirkul. Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. *Mathematical Programming*, 31:78–105, 1985.

[53] S. Van de Geer, L. Stougie. On rates of convergence and asymptotic normality in the multiknapsack problem. *Mathematical Programming*, 51:349–358, 1991.

[54] P.C. Gilmore, R.E. Gomory. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14:1045–1075, 1966.

[55] F. Glover. Heuristic for integer programming using surrogate constraints. *Decision Sciences*, 8:156–160, 1977.

[56] F. Glover. Tabu search: a tutorial. *Interfaces*, 20(4):74–94, 1991.

[57] F. Glover. Optimization by ghost image processes in neural networks. *Computers and Operations Research*, 21:801–822, 1994.

[58] F. Glover, G.A. Kochenberger. Critical event tabu search for multidimensional knapsack problems. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, ss. 407–427. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[59] F. Glover, M. Laguna. *Tabu Search.* Kluwer, Boston, 1997.

[60] A.V. Goldberg, A. Marchetti-Spaccamela. On finding the exact solutions of a 0-1 knapsack problem. W: *Proceedings of the 16th ACM Symposium on Theory of Computing*, ss. 359–368, New York, 1984. Association for Computing Machinery.

[61] M.R. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling theory: a survey. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:287–326, 1979.

[62] M. Grötschel, L. Lovász. Combinatorial optimization. W: R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, editors, *Handbook of Combinatorics*, ss. 1541–1597. Elsevier Science B.V., 1995.

[63] S. Hanafi, A. Freville. An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, to appear.

[64] S. Hanafi, A. Freville, A.El. Abedellaoui. Comparison of heuristics for the 0-1 multidimensional knapsack problem. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, ss. 449–465. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[65] D. Hausman, R. Kannan, B. Korte. Exponential lover bounds on a class of knapsack algorithms. *Mathematics of Operations Research*, 6:225–232, 1981.

[66] F.S. Hiller. Efficient heuristic procedures for integer linear programming with an interior. *Operations Research*, 17:600–637, 1969.

[67] D.S. Hochbaum. A nonlinear knapsack problem. *Operations Research Letters*, 17:103–110, 1995.

[68] A. Hoff, A. Løkketagen, I. Mittet. Genetic algorithms for 0/1 multidimensional knapsack problems. Working paper, Molde College, Britvein 2, Molde, Norway, 1996.

[69] J.H. Holland. Adaptation in natural and artificial systems. Technical report, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[70] D.S. Johnson. *Near-optimal allocation algorithms*. PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1973.

[71] D.S. Johnson. The NP completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 5:284–299, 1984.

[72] D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 9:426–444, 1988.

[73] D.S. Johnson. Local optimization and the travelling salesman problem. W: *Proc. 17th Coll. On Automata, Languages and Programming*, ss. 446–461, Heidelberg, 1990. Springer.

[74] D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 13:502–524, 1992.

[75] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part I, graph partitioning. *Operational Research*, 37:865–892, 1989.

[76] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing; an experimental evaluation, part II, graph coloring and number partitioning. *Operations Research*, 39:378–406, 1991.

[77] R. Kannan, B. Korte. Approximative combinatorial algorithms. W: *Mathematical Programming*, ss. 195–248, Amsterdam, New York, 1984. North Holland.

[78] N. Karmarkar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:375–395, 1984.

[79] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. W: R.E. Miller and J.W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, ss. 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[80] R.M. Karp. The probablilistic analysis of some combinatorial search algorithms. W: J.F. Traub, editor, *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results*, ss. 1–19. Academic Press, 1976.

[81] R.M. Karp. Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the travelling salesman problem in the plane. *Mathematics of Operations Research*, 2:209–224, 1977.

[82] R.M. Karp. A patching algorithms for the nonsymmetric travelling salesman problem. *SIAM Journal on Computing*, 8:561–573, 1979.

[83] R.M. Karp, J.K. Lenstra, C.J.H. McDiarmid, A.H.G. Rinnooy Kan. Probablistic analysis of combinatorial algorithms. W: M. OhEigeartaigh, J.K. Lenstra, A.G.H. Rinnooy Kan, editors, *Combinatorial Optimization: Annotated Bibliographies*, ss. 52–88. Wiley-Interscience, New York, Chichester, 1985.

[84] S. Khuri, T. Bäck, J. Heitkötter. The zero/one multiple knapsack problem and genetic algorithms. W: *Proceedings of the 1994 ACM Symposium on Applied Computing (SAC'94)*, ss. 188–193. ACM Press, 1994.

[85] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M. Vecchi. Optimization by simmulated annealing. *Science*, 220:621–680, 1983.

[86] V. Klee, G.J. Minty. How good is the simplex algorithm. W: O. Shisba, editor, *Inequalities III*, ss. 159–175. Academic Press, 1972.

[87] G.A. Kochenberger, B.A. McCarl, F.P. Wyman. A heuristic for general integer programming. *Decision Sciences*, 5:36–44, 1974.

[88] B. Korte, D. Hausmann. An analysis for the greedy algorithm for independence systems. *Ann. Discrete Math.*, 2:65–74, 1978.

[89] B. Korte, L. Lovász, R. Schrader. *Greedoids.* Springer, Heidelberg, 1991.

[90] J.B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:48–50, 1956.

[91] J.L. Kulikowski. *Zarys Teorii Grafów.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.

[92] E.L. Lawler, J.M. Moore. A functional equation and its application to resource alocation and sequencing problems. *Management Science*, 16:77–84, 1969.

[93] J.S. Lee, M. Guignard. An approximate algorithm for multidimensional zero-one knapsack problems - a parametric approach. *Management Science*, 34:402–410, 1988.

[94] T.-E. Lee, G.-T. Oh. The asymptotic value-to-capacity ratio for the multi-class stochastic knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 103:584–594, 1997.

[95] L.A. Levin. Average case complete problems. *SIAM J. Comput.*, 15:285–286, 1986.

[96] M. Loève. *Probability Theory I.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

[97] A. Løkketagen, K. Jörnsten, S. Storøy. Tabu search within a pivot and complement framework. *International Transactions of Operations Research*, 1:305–316, 1994.

[98] A. Løkketangen, F. Glover. Probabilistic move selection in tabu search for zero-one mixed integer programming problems. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics*, ss. 467–487. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[99] A. Løkketangen, F. Glover. Solving zero-one mixed integer programming problems using tabu search. *European Journal of Operational Research*, to appear.

[100] G.S. Lorie, L. Savage. Three problems in capital rationing. *Journal of Business*, 28:229–239, 1955.

[101] R. Loulou, E. Michaelides. New greedy-like heuristics for the multidimensional 0-1 knapsack problem. *Operations Research*, 27:1101–1114, 1979.

[102] G.S. Lueker. On the average difference between the solution to linear and integer knapsack problems. W: *Applied Probability-Computer Science, the Interface, Vol 1*, ss. 489–504. Birkhauser, Basel, 1982.

[103] M.J. Magazine, O. Oguz. A heuristic algorithm for the multidimensional zero-one knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 16:319–326, 1984.

[104] J.W. Mamer, K.E. Schilling. On the growth of random knapsacks. *Discrete Applied Mathematics*, 28:223–230, 1990.

[105] S. Martello, P. Toth. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations.* Wiley & Sons, 1990.

[106] M. May, K. Szkatuła. On the bipartite crossing number. *Control and Cybernetics*, 17:85–98, 1988.

[107] M. Meanti, A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie, C. Vercellis. A probabilistic analysis of the multiknapsack value function. *Mathematical Programming*, 46:237–247, 1990.

[108] M. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.

[109] G.L. Nemhauser, Z. Ullmann. Discrete dynamic programming and capital allocation. *Management Science*, 15:494–505, 1969.

[110] G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.

[111] C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.

[112] R.G. Parker, R.L. Rardin. *Discrete Optimization.* Academic Press, Boston, 1988.

[113] H. Pirkul. A heuristic solution procedure for the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Naval Research Logistics*, 34:161–172, 1987.

[114] C.N. Potts, L.N. Van Wassenhove. Algorithms for scheduling a single machine to minimize the weighted number of late jobs. *Management Science*, 34:843–858, 1988.

[115] A.H.G. Rinnooy Kan. Probabilistic analysis of algorithms. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:365–384, 1987.

[116] A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie. Probabilistic analysis of algorithms. W: J.K. Lenstra, H. Tijms, T. Volgenant, editors, *Twenty Five Years of Operations Research in the Netherlands*, ss. 104–121. Math. Centrum Wish. Inform, Amsterdam, 1989.

[117] A.H.G. Rinnoy Kan, L. Stougie, C. Vercellis. A class of generalized greedy algorithms for the multi-knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 42:279–290, 1993.

[118] G. Rudolph, J. Sprave. A cellular genetic algorithm with self-adjusting acceptance threshold. W: *Proceedings of the First IEE/IEEE International Confernce on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications*, ss. 365–372, London, 1995. IEE.

[119] G. Rudolph, J. Sprave. Significance of locality and selection pressure in the grand deluge evolutionary algorithm. W: H.M. Voigt, W. Ebeling, I. Rechenberg, H.P. Schwefel, editors, *Parallel Problem Solving from Nature IV. Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation*, ss. 686–694. Springer, Lecture Notes in Computer Science, 1996.

[120] S.K. Sahni. Algorithms for scheduling independent jobs. *Journal of ACM*, 23:116–127, 1976.

[121] K.E. Schilling. The growth of m-constraint random knapsacks. *European Journal of Operational Research*, 46:109–112, 1990.

[122] K.E. Schilling. Random knapsacks with many constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 48:163–174, 1994.

[123] S. Senju, Y. Toyoda. An approach to linear programming with 0-1 variables. *Management Science*, 15:196–207, 1968.

[124] W. Shih. A branch and bound method for the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Journal of the Operational Research Society*, 30:369–378, 1979.

[125] S. Smale. On the average number of steps of the simplex method of lineaar programming. *Mathematical Programming*, 27:241–262, 1983.

[126] A.L. Soyster, B. Lev, W. Slivka. Zero-one programming with many variables and few constraints. *European Journal of Operational Research*, 2:195–201, 1978.

[127] J.M. Steele. Probabilistic and worst case analyses of classical problems of combinatorial optimization in Euclidean space. *Marhematics of Operations Research*, 15(4):749–770, 1990.

[128] J.M. Steele. *Probability Theory and Combinatorial Optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadephia, 1996.

[129] H.I. Stern, Z. Avivi. The selection and scheduling of textile orders with due dates. *European Journal of Operational Research*, 44:11–16, 1990.

[130] A. Straszak, M. Libura, J. Sikorski, D. Wagner. Computer-assisted constrained approval voting. *Group Decision and Negotiation*, 2:375–385, 1993.

[131] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik. *Discrete Optimization Algorithms.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1983.

[132] K. Szkatuła. Probabilistic analysis of the sequencing jobs with deadlines problem and the threshold algorithm. W: G.Menga and V.Kempe, editors, *Proceedings of the Workshop on Informatics in Industrial Automation*, ss. 113–124, Berlin, 1989.

[133] K. Szkatuła. Analiza probabilistyczna wielowymiarowych, ograniczonych całkowitoliczbowych zadań załadunku. *Techniczeskaja Kibernetika*, 4:236–241, 1994. (w języku rosyjskim).

[134] K. Szkatuła. On the asymptotical growth of multi-constraint entirely random knapsacks. W: *Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology*, ss. 299–304, Warszawa, 1994.

[135] K. Szkatuła. On the growth of entirely random multi-constraint 0-1 knapsacks. W: *BOS 93, Trzecia Konferencja Badań Operacyjnych I Systemowych*, ss. 205–304, Warszawa, 1994.

[136] K. Szkatuła. On the growth of multi-constraint random knapsacks with various right-hand sides of the constraints. *European Journal of Operational Reserch*, 73:199–204, 1994.

[137] K. Szkatuła. Analiza średniego przypadku m-wymiarowych zadań załadunku. W: *Wspomaganie Decyzji, Systemy Eksperckie*, ss. 195–200, Warszawa, 1995.

[138] K. Szkatuła. The growth of multi-constraint random knapsacks with large right-hand sides of the constraints. *Operations Research Letters*, 21:25–30, 1997.

[139] K. Szkatuła. The growth of multi-constraint random knapsacks with mixed right-hand-sides of the constraints. Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa, 1997.

[140] K. Szkatuła. Random sequencing jobs with deadlines problem: growth of the optimal solutions values. *European Journal of Operational Research*, 109:160–169, 1998.

[141] K. Szkatuła, M. Libura. Probabilistic analysis of simple algorithms for binary knapsack problem. *Control and Cybernetics*, 12:147–157, 1983.

[142] K. Szkatuła, M. Libura. On probabilistic properties of greedy like algorithms for the binary knapsack problem. W: *Stochastics in Combinatorial Optimization*, Singapore, 1987. World Scientific Publishing.

[143] J. Thiel, S. Voss. Some experiences on solving multiconstraint zero-one knapsack problems with genetic algorithms. *INFOR*, 32:226–242, 1994.

[144] Y. Toyoda. A simplified algorithm for obtaining approximate solutions to zero-one programming problems. *Management Science*, 21:1417–1427, 1975.

[145] A. Volgenant, J.A. Zoon. An improved heuristic for multidimensional 0-1 knapsack problems. *Journal of the Operational Research Society*, 41:963–970, 1990.

[146] S. Walukiewicz. *Programowanie dyskretne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.

[147] B. Weide. *Statistical methods in algorithm design and analysis*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsbutgh, PA, 1978. CMU-CS 78-142.

[148] H.M. Weingartner. *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*. Markham Publishing, Chicago, 1967.

[149] H.M. Weingartner, D.N. Ness. Methods for the solution of the multidimensional 0/1 knapsack problem. *Operations Research*, 15:83–103, 1967.

[150] S.H. Zanakis. Heuristic 0-1 linear programming: an experimental comparison of three methods. *Management Science*, 24:91–104, 1977.

[151] K. Zorychta, W. Ogryczak. *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe: metoda podziału i ograniczeń.* Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1981.

IBS Serie
44246
Bibl. podręczna

Analiza przypadku średniego w optymalizacji dyskretnej

Wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac

Krzysztof Szkatuła

W monografii omawiane są wybrane zadania optymalizacji dyskretnej i metody ich rozwiązywania oraz problematyka analizy złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów.

Głównym celem książki jest wykazanie, na przykładzie wielowymiarowego zadania załadunku i zadania szeregowania prac, że przy zastosowaniu niezbyt zaawansowanego aparatu rachunku prawdopodobieństwa można uzyskać wartościowe wyniki analizy przypadku średniego w optymalizacji dyskretnej.

Wyniki zaprezentowane w monografii potwierdzają, że analiza przypadku średniego jest bardzo efektywnym narzędziem wspomagającym i uzupełniającym powszechnie stosowane do analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej podejście przypadku najgorszego.

ISBN 83-85847-39-1
ISSN 0208-8029

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl