POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac

Krzysztof Szkatuła

Krzysztof SZKATUŁA - ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

23

ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 23

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1999

Krzysztof SZKATUŁA

ANALIZA PRZYPADKU ŚREDNIEGO W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ

Wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Juliusz L. Kulikowski
Dr hab. Włodzimierz Ogryczak

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 1999

Instytut Badań Systemowych PAN
BIBLIOTEKA
w Warszawie

44246

ISBN 83-85847-39-1
ISSN 0208-8029

Wprowadzenie

Optymalizacja dyskretna stała się samodzielną dziedziną badawczą od połowy lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Powstała ona na styku zastosowań praktycznych w dziedzinach takich jak ekonomia, zarządzanie, technika i wiele innych oraz matematyki ze szczególnym uwzględnieniem kombinatoryki, teorii grafów i logiki matematycznej. W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że podstawowym celem optymalizacji dyskretnej jest wybór optymalnego wariantu ze skończonego lub przeliczalnego ich zbioru. Optymalność jest rozumiana jako wyznaczenie maksimum lub minimum pewnej funkcji. Uzyskanie rozwiązania zadania optymalizacji dyskretnej umożliwia podejmowanie trafnych decyzji w odniesieniu do wielu aspektów działalności ludzkiej. Przykładami kryteriów optymalizacyjnych może być maksymalizacja zysków, minimalizacja kosztów lub strat i wiele innych.

Można powiedzieć, że w zaawansowanych zastosowaniach praktycznych pojawiło się wiele ważnych, złożonych i trudnych do rozwiązania problemów o powyższym charakterze. Do ich sformalizowania w najbardziej odpowiedni sposób bardzo przydatny okazał się aparat i metodologia matematyki.

W momencie gdy zagadnienie praktyczne zostało sformalizowane jako optymalizacyjny problem matematyczny, powstaje potrzeba jego efektywnego rozwiązania. Oznacza to konieczność opracowania algorytmów i wykonania ich komputerowej implementacji. Niestety, okazało się, że w przypadku wielu zadań optymalizacji dyskretnej oraz algorytmów opracowanych do ich rozwiązywania pojawia się zasadnicza trudność. Dla nawet niezbyt dużych przykładów tych zadań obliczenia numeryczne wymagają niemożliwego do zaakceptowania nakładu obliczeń, na przykład mierzonego w stuleciach pracy obecnych superkomputerów. Co więcej, nawet drastyczne zwiększenie wydajności komputerów nie jest w stanie zasadniczo poprawić sytuacji. Dla ustalenia uwagi, 100-krotne przyśpieszenie obliczeń zmniejsza nakład obliczeń ze 100 lat do jednego roku, co wciąż jest wielkością abstrakcyjną, niemożliwą do zaakceptowania w praktyce obliczeniowej. Efektem tej sytuacji był rozwój teorii i praktycznego zastosowania algorytmów przybliżonych, których celem jest wyznaczenie przybliżonego rozwiązania zadania o akceptowalnej jakości, przy "niewielkim" nakładzie obliczeń.

Praktyczna niemożliwość uzyskania rozwiązań optymalnych dla licznych przykładów zadań optymalizacji dyskretnej spowodowała konieczność analizowania nakładu obliczeń wymaganego przez algorytmy, dla zadań o określonej wielkości.

W efekcie powstała dziedzina badawcza zwana złożonością obliczeniową. Jej podstawowym zadaniem jest analizowanie zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej z punktu widzenia oceny nakładu obliczeń niezbędnego do uzyskania rozwiązania optymalnego jako funkcji rozmiaru, wielkości zadania. Zadania optymalizacji dyskretnej zostały umownie podzielone na łatwe i trudne do rozwiązywania.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że uzyskane w ten sposób oceny noszą charakter absolutnej gwarancji, to znaczy, że są one prawdziwe dla wszystkich realizacji danych analizowanego zadania. Analiza taka nosi nazwę analizy przypadku najgorszego, gdyż oparta jest ona na najbardziej niekorzystnym zachowaniu się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej wykazała jednak szybko, że uzyskane w ten sposób oceny są bardzo często nadmiernie pesymistyczne. Oceny uzyskane w oparciu o podejście przypadku najgorszego nie charakteryzują w sposób właściwy przeciętnego, średniego zachowania się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Ta sytuacja spowodowała powstanie dziedziny nazywanej analizą przypadku średniego lub inaczej analizą probabilistyczną zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Przeprowadzenie analizy przypadku średniego wymaga zdefniowania losowego modelu rozważanego zadania. Uzyskane w efekcie przeprowadzenia analizy przypadku średniego wyniki odnoszą się tylko do rozważanego losowego modelu zadania optymalizacji dyskretnej. Natomiast ich olbrzymią zaletą jest możliwość uzyskania alternatywnych, w stosunku do złożoności obliczeniowej w przypadku najgorszym, ocen zachowania się zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

Ważną i oryginalną właściwością analizy przypadku średniego jest możliwość analizowania innych charakterystyk zadania niż złożoność obliczeniowa. Dobrym przykładem jest asymptotyczna ocena zachowania się wartości rozwiązania optymalnego jako funkcji pewnych parametrów zadania. Wyniki tego typu znacznie poszerzają wiedzę na temat zadań optymalizacji dyskretnej i w efekcie umożliwiają ich rozwiązywanie w znacznie bardziej efektywny sposób.

Zasadniczym celem tej monografii jest wykazanie, na przykładzie wybranych, ważnych zadań optymalizacji dyskretnej, że przy zastosowaniu prostego aparatu rachunku prawdopodobieństwa można uzyskać wartościowe wyniki analizy przypadku średniego.

W celu właściwego osadzenia uzyskanych wyników w teorii i praktyce optymalizacji dyskretnej pierwsze rozdziały monografii poświęcone zostały prezentacji wybranych zadań optymalizacji dyskretnej, metod ich rozwiązywania, złożoności obliczeniowej oraz analizy przypadku średniego. Należy jednak podkreślić, że zamiarem autora była poglądowa, a nie bardzo szczegółowa i wyczerpująca prezentacja tych zagadnień. Szczegółowy plan monografii jest następujący.

W rozdziale 1 zaprezentowano dziedzinę optymalizacji dyskretnej ze szczególnym uwzględnieniem programowania całkowitoliczbowego i liniowego, zadań binarnych, zadań teorii grafów oraz zadań harmonogramowania.

W rozdziale 2 zostały przedstawione znane metody rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, takie jak metoda podziału i oszacowań, programowanie dynamiczne, algorytmy zachłanne, metody lokalnej poprawy oraz algorytmy programowania linowego.

W rozdziale 3 rozważono podejście przypadku najgorszego do oceny złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej. Zdefiniowano niezbędne elementy oceny rozmiaru wielkości danych zadania i nakładu obliczeń, wprowadzono klasy złożoności obliczeniowej.

Podejście przypadku średniego zastało przedstawione w rozdziale 4. Szczególną uwagę poświęcono aparatowi probablistycznemu niezbędnemu w dalszej części monografii oraz prezentacji wybranych wyników analizy przypadku średniego znanych z literatury.

W rozdziałach 5 oraz 6 zaprezentowano wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia. Na przykładzie tych ważnych zadań optymalizacji dyskretnej dokonano dogłębnej analizy zagadnień będących przedmiotem zainteresowania niniejszej monografii, takich jak metody rozwiązywania, analiza złożoności obliczeniowej oraz analiza przypadku średniego. Przedstawione zostały oryginalne wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązań optymalnych jako funkcji parametrów zadań w przypadku średnim. Wykazano również, że proste algorytmy przybliżone mogą być asymptotycznie optymalne w sensie analizy przypadku średniego.

Zamiarem autora było używanie możliwie najprostszej notacji matematycznej dla zachowania maksymalnej przejrzystości wywodu. W monografii stosowane są powszechnie przyjęte oznaczenia matematyczne. Dla przykladu:

- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ oznacza zbiór n - elementowy.
- $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ oznacza wektor o m składowych przyjmujących wartości liczbowe.

- $\lim_{x \to a} f(x)$ lub $\lim_{n \to a} g_n$ oznacza granicę funkcji lub ciągu liczbowego, co jednoznacznie wynika z kontekstu.

- $\{X\}$ oznacza jednoznacznie zdefiniowane zdarzenie, na przykład $x < b$, gdzie x jest zmienną, b pewną stałą.

- $|a|$ oznacza wartość bezwzględną liczby a, natomiast $|A|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru A.

Kolejne oznaczenia są definiowane w tekście monografii w miarę potrzeb. W przypadku możliwości wystąpienia niejednoznaczności w trakcie przeprowadzania wywodów, odpowiednie pojęcia są przytaczane na bieżąco.

Oryginalna terminologia opisująca pojęcia i obiekty rozważane w monografii w przytłaczającej większości pochodzi z języka angielskiego. W monografii wykorzystywana jest polska terminolagia, która zdaniem autora, z jednej strony właściwie oddaje sens oryginału angielskiego, z drugiej zaś strony jest dobrze osadzona w języku polskim. Poza przypadkami oczywistymi, w momencie pierwszego zastosowania nowego, specjalistycznego pojęcia w nawiasach przytoczono jego angielski odpowiednik.

Niniejsza monografia jest efektem wieloletniego zainteresowania autora tematyką analizy przypadku średniego wybranych zadań optymalizacji dyskretnej. Pracę naukową nad tymi zagadnieniami autor prowadził w Instytucie Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk kolejno w Zakładzie Programowania Matematycznego, Pionie Metod Modelowania Matematycznego i Optymalizacji oraz w Pracowni Metod Obliczeniowych Optymalizacji.

Pragnę serdecznie podziękować wszystkim koleżankom i kolegom z IBS PAN za wieloletnią współpracę. Przez cały okres mojej pracy naukowej szczególne znaczenie miała dla mnie współpraca z doc. dr hab. Markiem Liburą, na którego pomoc i cenne rady mogłem zawsze liczyć.

Swojej rodzinie składam wyrazy wdzięczności za cierpliwość, wyrozumiałość i wsparcie podczas całego okresu mojej pracy naukowej. Szczególnie gorąco pragnę podziękować mojej Żonie i Mamie.

Rozdział 6

Zadanie szeregowania prac

6.1 Wprowadzenie

Jak już wspomniano w rozdziale 1, zadania harmonogramowania należą do szczególnie ważnych zagadnień optymalizacji dyskretnej, patrz Błażewicz i inni [13]. W tym rozdziale rozważymy *zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia* (*sequencing jobs with deadlines problem*, w skrócie SJD). Zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia polega na maksymalizacji zysku z wykonania prac w zadanym terminie. Bardziej precyzyjnie:

Definicja 27 *Mamy do wykonania n prac oraz jedną maszynę. Każda z prac i, $i = 1, \ldots, n$, musi być wykonana na tej maszynie. Dla każdej pracy i są określone: czas wykonania t_i, termin zakończenia $d_i(n)$ oraz zysk p_i z wykonania pracy w terminie. Zadanie optymalizacyjne polega na maksymalizacji ogólnego zysku z wykonania prac w terminie.*

Uwaga 3 *Należy zauważyć, że praca niezakończona w terminie nie przynosi żadnego zysku i z punktu widzenia zadania optymalizacyjnego jej wykonanie po zadanym terminie jest obojętne.*

Zgodnie z klasyfikacją deterministycznych zadań harmonogramowania, patrz Błażewicz i inni [13] oraz podrozdział 1.5, zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia należy do klasy *zadań harmonogramowania na pojedynczej maszynie* (*single machine scheduling*, w skrócie SMS). Jeszcze dokładniej zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia jest rozważane jako *zadanie harmonogramowania z kryteriami optymalizacyjnymi z terminami zakończenia* (*scheduling problems with optimisation criteria involving due dates*), sklasyfikowane jako $1 \mid\mid \Sigma w_j U_j$, patrz Błażewicz i inni [13] oraz podrozdział 1.5. Klasie zadań harmonogramowania na pojedynczej maszynie poświęcono w literaturze dużo uwagi, zarówno z powodu ich samodzielnego znaczenia badawczego jak również ze względu na fakt, że często są one rozważane jako część składowa bardziej ogólnych i złożonych problemów, patrz Błażewicz i inni [13].

Bez utraty ogólności rozważań można przyjąć założenie, że:

$$d_1(n) \leq d_2(n) \leq \cdots \leq d_n(n) \tag{6.1}$$

i wtedy zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia może zostać sformułowane jako szczególna postać zadania programowania binarnego i całkowitoliczbowego, patrz Lawler i Moore [92]:

$$\begin{aligned} z_{OPT}(n) &= \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \sum_{j=1}^{i} t_j x_j \leq d_i(n), \quad i = 1, \ldots, n \\ \text{gdzie} \quad & x_j = 0 \text{ lub } 1, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Zauważmy, że $x_i = 1$ wtedy i tylko wtedy, kiedy praca i jest wykonana przed upływem terminu $d_i(n)$, gdzie $\sum_{j=1}^{i} t_j x_j$ oznacza czas, jaki jest wymagany dla wykonania pracy i z uwzględnieniem prac wykonanych przed nią ($x_j = 1$, $1 \leq j < i$).

Zadanie rozbicia zbioru (1.13) również należy do zadań harmonogramowania. Sposób sformułowania i postać zadań (1.13) oraz (6.2) pokazują dobitnie, jak duża może być różnorodność rozważanych zadań harmogramowania i ogólniej optymalizacji dyskretnej.

Zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia jest $\mathcal{NP}$-trudnym zadaniem optymalizacji dyskretnej, ale nie jest zadaniem silnie $\mathcal{NP}$-trudnym, patrz Garey i Johnson [48].

Istnieją efektywne algorytmy przybliżone wyznaczające rozwiązania zadania szeregowania prac (6.2). Sahni w pracy [120] zaproponował pseudowielomianowy algorytm oparty na idei programowania dynamicznego. W pracach Dudziński i Szkatuła [33] oraz Szkatuła [132] zaproponowano proste i efektywne algorytmy heurystyczne, których dobre właściwości zostały potwierdzone podczas przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych.

Bez utraty ogólności rozważań można przyjąć założenie, że

$$0 < t_j \leq d_j(n) \text{ oraz } p_j > 0, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Łatwo jest zauważyć, że zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) może zostać sformułowane w postaci szczególnego przypadku wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), gdzie

$$c_j = p_j, \;\; a_{ij} = t_j, \;\; 1 \leq i \leq j, \;\; a_{ij} = 0, \;\; j < i \leq n,$$

$$b_j(n) = d_j(n), \quad j = 1, \dots, n, \; m = n.$$

Zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) może zostać wprawdzie zapisane w postaci wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), ale jest ono jego bardzo szczególnym przypadkiem. Pomiędzy powszechnie przyjętą postacią wielowymiarowego zadania załadunku (na przykład w analizie średniego lub jako zadania testowe dla algorytmów, patrz rozdział 5) a zadaniem szeregowania prac (6.2) zachodzą zasadnicze różnice, omówione poniżej:

- Dla zadania załadunku liczba ograniczeń (m) jest często znacznie mniejsza niż liczba zmiennych decyzyjnych (n), przy czym mogą to być różnice nawet o rzędy wielkości. W przypadku zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) mamy zawsze $m = n$.

- Bardzo odmienna jest również struktura lewych stron ograniczeń. Dla ogólnej postaci wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) mamy $m \cdot n$ różnych współczynników a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Natomiast w przypadku zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) mamy tylko n różnych współczynników lewych stron ograniczeń w postaci $a_{ij} = t_j$, $1 \leq i \leq j$, $a_{ij} = 0$, $j < i \leq n$, $j = 1, \dots, n$.

Z tego powodu niemożliwe jest zastosowanie dla zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) wyników analizy przypadku średniego uzyskanych dla wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) w rozdziale 5. W pracy Szkatuła [140] przeprowadzono analizę przypadku średniego dla zadania szeregowania prac z terminami zakończenia. W pozostałej części tego rozdziału zostaną zaprezentowane oszacowania rozwiązania optymalnego (podrozdział 6.2) oraz analiza średniego przypadku zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (podrozdział 6.3). W podrozdziale 6.4 omówiono zagadnienie przybliżonego rozwiązywania zadania szeregowania prac z terminami zakończenia, natomiast w podrozdziale 6.5 dokonano podsumowania rozważań dotyczących zadania szeregowania prac z terminami zakończenia.

6.2 Oszacowania rozwiązania optymalnego

Analogicznie jak w podrozdziale 5.2 rozważmy funkcję Lagrange'a dla zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2):

$$F_n(x, \Lambda) \;=\; \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left(d_i(n) - \sum\nolimits_{j=1}^{i} t_j x_j\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(n) + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left(\sum\nolimits_{j=1}^{i} t_j x_j\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(n) + \sum_{j=1}^{n} \left(p_j - \left(\sum\nolimits_{i=j}^{n} \lambda_i\right) \cdot t_j\right) \cdot x_j = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(n) + \sum_{j=1}^{n} (p_j - \Lambda_j \cdot t_j) \cdot x_j
\end{aligned}$$

gdzie $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $\Lambda = [\lambda_1, \ldots \lambda_n]$, $\Lambda_j = \sum_{i=j}^{n} \lambda_i$. Niech dla każdego wektora mnożników Lagrange'a Λ, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\Lambda) &= \max_{x \in \{0,1\}^n} F_n(x, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(n) + \sum_{j=1}^{n} (p_j - \Lambda_j \cdot t_j) \cdot x_j(\Lambda_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(n) + \sum_{j=1}^{n} (p_j(\Lambda_j) - \Lambda_j \cdot t_j(\Lambda_j)) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} p_j(\Lambda_j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left(d_i(n) - \sum\nolimits_{j=1}^{i} t_j(\Lambda_j)\right)
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
x_j(\Lambda_j) &= \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } p_j - \Lambda_j t_j > 0 \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases}, \qquad (6.3) \\
p_j(\Lambda_j) &= \begin{cases} p_j & \text{jeżeli } p_j - \Lambda_j t_j > 0 \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases}, \\
t_j(\Lambda_j) &= \begin{cases} t_j & \text{jeżeli } p_j - \Lambda_j t_j > 0 \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned}
s_i(\Lambda) &= \sum_{j=1}^{i} t_j(\Lambda_j); \quad \hat{p}(\Lambda_i) = \begin{cases} p_i(\Lambda_i) & \text{jeżeli } s_i(\Lambda) \leq d_i(n) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases}; \\
z_n(\Lambda) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(\Lambda_i); \quad \hat{z}_n(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \hat{p}(\Lambda_i); \quad D_n(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot d_i(n); \\
S_n(\Lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot s_i(\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j \cdot t_j(\Lambda_j); \quad \varphi_n(\Lambda) = z_n(\Lambda) + D_n(\Lambda) - S_n(\Lambda).
\end{aligned}$$

Zadanie dualne do zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) ma postać:

$$\Phi_n^* = \min_{\Lambda \geq 0} \varphi_n(\Lambda).$$

W dalszych rozważaniach wykorzystany będzie sposób, w jaki skonstruowane zostały $z_n(\Lambda)$, $\hat{z}_n(\Lambda)$, $S_n(\Lambda)$, $D_n(\Lambda)$, $\varphi_n(\Lambda)$ oraz $\Phi_n^*(\Lambda)$. Dla każdego $\Lambda \geq 0$ mamy:

$$z_{OPT}(n) \leq \Phi_n^* \leq \varphi_n(\Lambda) = z_n(\Lambda) + D_n(\Lambda) - S_n(\Lambda).$$

Zauważmy, że $\hat{p}(\Lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, są skonstruowane w taki sposób, że $\hat{z}_n(\Lambda')$ dla dowolnego wektora $\Lambda' \geq 0$ jest wartością rozwiązania dopuszczalnego zadania (6.2). Dla dowolnych wektorów $\Lambda, \Lambda' \geq 0$, uzyskujemy więc

$$\hat{z}_n(\Lambda') \leq z_{OPT}(n) \leq \Phi_n^* \leq \varphi_n(\Lambda) = z_n(\Lambda) + D_n(\Lambda) - S_n(\Lambda). \tag{6.4}$$

6.3 Analiza przypadku średniego

W dalszej części tego rozdziału będzie rozważany następujący model losowy zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2):

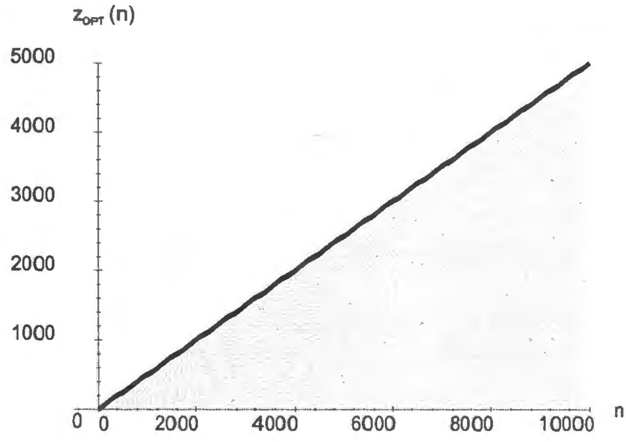
- $n \geq 1$, n jest liczbą całkowitą, $n \to \infty$.
- t_j, p_j, $j = 1, \ldots, n$, są realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0, 1]$.
- $0 \leq d_1(n) \leq d_2(n) \leq \cdots \leq d_n(n) \leq n/2$, przy czym $d_j(n)$ są deterministycznymi funkcjami n.
- Mnożniki Lagrange'a $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ są wielkościami deterministycznymi.
- Pozostałe definicje znajdują się w podrozdziale 5.4.

Zgrubne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego dla rozważanego losowego modelu (6.2) jest dane przez:

$$0 \leq z_{OPT}(n) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j \leq n, \sum_{j=1}^{n} p_j \approx \frac{n}{2}. \tag{6.5}$$

Oszacowanie to jest wzmocnione poprzez zaobserwowanie, że $\sum_{j=1}^{n} p_j \approx n/2$, co wynika z mocnego prawa wielkich liczb, patrz Feller [38], gdzie:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \approx n \cdot E(p_1), E(p_1) = \frac{1}{2}.$$



Rysunek 6.1: Zakres zmienności $z_{OPT}(n)$ dla zadania szeregowania prac

Powyższe charakterystyki zachowują się w sposób analogiczny jak w przypadku wielowymiarowego zadania załadunku, patrz podrozdział 5.5. W obszarze zaciemnionym na rysunku 6.1 przedstawiono zakres zmienności wartości rozwiązania optymalnego $z_{OPT}(n)$ jako funkcji n, gdzie $n \to \infty$.

Celem dalszych rozważań w tym rozdziale jest przeanalizowanie asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych (6.2) dla zdefiniowanej klasy losowych zadań szeregowania prac z terminami zakończenia: jako funkcji rozmiaru zadania n oraz terminów zakończenia $d_j(n)$, $j = 1, \ldots, n$ oraz (w sposób niejawny) dystrybuant zmiennych losowych t_j, p_j.

W związku z powyższym dalsze wywody będą oparte na rozważaniu $t_j(\Lambda_j)$, $p_j(\Lambda_j)$, $z_n(\Lambda)$, $s_i(\Lambda)$ jako funkcji argumentów n, m, Λ_j, w przypadku asymptotycznym. Aby móc manipulować tymi wielkościami jako realizacjami zmiennych losowych w rozważanej klasie losowych zadań szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2), należy rozpatrzyć dystrybuanty i wartości oczekiwane zmiennych losowych: $t_j(\Lambda_j)$, $p_j(\Lambda_j)$, $j = 1, \ldots, n$:

$$G_i(\Lambda_i, x) = P\{t_i(\Lambda_i) < x\} = P\{t_i < x \cup t_i \geq x \cap p_i \leq \Lambda_i \cdot t_i\} =$$

$$= \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \Lambda_i/2 + x(1 - x \cdot \Lambda_i/2) & \Lambda_i \leq 1 \\ 1 - 1/2\Lambda_i + x \cdot (1 - x \cdot \Lambda_i/2) & \Lambda_i > 1 \end{array}\right\} & 0 < x \leq \min\left\{1, \frac{1}{\Lambda_i}\right\} \\ 1 & x > \min\left\{1, \frac{1}{\Lambda_i}\right\} \\ 0 & x \leq 0 \end{cases};$$

$$H_i(\Lambda_i, x) \;=\; P\{H_i(\Lambda_i) < x\} = P\{p_i < x \cup p_i \geq x \cap p_i \leq \Lambda_i \cdot t_i\} =$$

$$= \begin{cases} 1-(1-x^2)/(2\cdot\Lambda_i) & \text{jeżeli} \quad \Lambda_i \geq 1 \\ \Lambda_i/2 + x^2/(2\cdot\Lambda_i) & \text{jeżeli} \quad x \leq \Lambda_i \leq 1 \\ x & \text{jeżeli} \quad \Lambda_i \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{jeżeli} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{jeżeli} \quad x \leq 0 \end{cases};$$

$$E(t_i(\Lambda_i)) = \int_0^1 x\cdot dG_i(\Lambda_i,x) = \int_0^{\min\{1,1/\Lambda_i\}} x\cdot(1-\Lambda_i\cdot x)dx =$$

$$= \begin{cases} 1/(6\cdot\Lambda_i^2) & \text{jeżeli} \quad \Lambda_i \geq 1 \\ 1/2-\Lambda_i/3 & \text{jeżeli} \quad 0 \leq \Lambda_i \leq 1 \end{cases};$$

$$E(p_i(\Lambda_i)) = \int_0^1 x\cdot dH_i(\Lambda_i,x) = \int_0^1 x\cdot G_i\left(\Lambda_i, x/\Lambda_i\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 1/(3\cdot\Lambda_i) & \text{jeżeli} \quad \Lambda_i \geq 1 \\ 1/2-\Lambda_i/6 & \text{jeżeli} \quad 0 \leq \Lambda_i \leq 1 \end{cases}.$$

Z definicji mamy

$$\Lambda_j = \sum\nolimits_{i=j}^n \lambda_i,\ \lambda_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n.$$

Powyższe oznacza, że

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots \geq \Lambda_n$$

oraz

$$E(t_1(\Lambda_1)) \leq E(t_2(\Lambda_2)) \leq \cdots \leq E(t_n(\Lambda_n)).$$

Zauważmy, że jeżeli zachodzi

$$E(s_i(\Lambda)) = d_i(n) \text{ oraz } d_{i+1}(n) - d_i(n) < E(t_{i+1}(\Lambda_{i+1})) \tag{6.6}$$

to wtedy

$$E(s_{i+1}(\Lambda) > d_{i+1}(n). \tag{6.7}$$

Powyższa zależność oznacza, że dla pewnych wektorów terminów zakończenia prac

$$d_1(n), d_2(n), \cdots, d_n(n)$$

jeżeli wyznaczony zostanie wektor Λ taki, że dla $i < n$ spełnione jest (6.6), to nie będzie możliwe spełnienie

$$E(s_j(\Lambda)) \leq d_j(n) \quad \text{dla wszystkich } j=1,2,\ldots,n.$$

Powyżej opisana sytuacja oznacza spełnienie (6.7), a więc niedopuszczalność $i+1$ ograniczenia, w sensie jego wartości oczekiwanej, co może wynikać z monotoniczności Λ_j oraz $E(t_j(\Lambda_j))$.

Poniżej została przedstawiona prosta procedura, która zapewnia dla wszystkich wektorów prawych stron ograniczeń (6.2) spełniających nierówności:

$$0 \leq d_1(n) \leq d_2(n) \leq \cdots \leq d_n(n) \leq \frac{n}{2}$$

wyznaczenie

$$\Lambda(n),\ \lambda_j(n) \geq 0,\ j = 1, \ldots, n,$$

takich, że

$$E(s_j(\Lambda(n))) \leq d_j(n) \quad \text{dla wszystkich } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Krok 0^0: Ustalmy wartości początkowe $l \leftarrow 0$, $d_0(n) \leftarrow 0$.
Krok 1^0: Niech

$$j^* = \max_{l<m\leq n} \left\{ m \ : \ \frac{d_m(n) - d_l(n)}{m - l} = \min_{l<j\leq n} \frac{d_j(n) - d_l(n)}{j - l} \right\}$$

oraz

$$\delta_k(n) = \min \left\{ \frac{d_{j^*}(n) - d_l(n)}{j^* - l}, \frac{1}{2} \right\}; \ \Lambda_k(n) = \arg\left\{ E(t_k(\Lambda_k)) = \delta_k(n) \right\} \quad (6.8)$$

gdzie $k = l+1, \ldots, j^*$.

Krok 2^0: Jeżeli $j^* < n$, to $l \leftarrow j^*$ i wracamy do kroku 1^0.
Krok 3^0: Jeżeli $j^* = n$, to procedura kończy pracę.

W powyższej procedurze wyznaczono w jednoznaczny sposób wektory

$$[\delta_1(n), \delta_2(n), \ldots, \delta_n(n)] \text{ oraz } [\Lambda_1(n), \Lambda_2(n), \ldots, \Lambda_n(n)].$$

Mają one następujące właściwości:

$$\delta_1(n) \leq \delta_2(n) \leq \ldots \leq \delta_n(n) \text{ oraz } \sum_{j=1}^{i} \delta_j(n) \leq d_i(n).$$

Jeżeli

$$\delta_i(n) < \delta_{i+1}(n),$$

to wtedy

$$\sum_{j=1}^{i} \delta_j(n) = d_i(n)$$

$$\Lambda_j(n) = \begin{cases} \sqrt{1/(6 \cdot \delta_j(n))} & \text{jeżeli } 0 < \delta_j(n) \leq 1/6 \\ 3/2 - 3 \cdot \delta_j(n) & \text{jeżeli } 1/6 < \delta_j(n) \leq 1/2 \end{cases}, j = 1, \ldots, n$$

$$\Lambda_1(n) \geq \Lambda_2(n) \geq \ldots \geq \Lambda_n(n) \geq 0.$$

Jeżeli dla $j = 1, 2, \ldots, n$ mamy

$$\delta_j(n) = \delta_{j+1}(n), \text{ to wtedy } \Lambda_j(n) = \Lambda_{j+1}(n)$$

co oznacza, że

$$\lambda_j(n) = 0 \quad \text{oraz} \quad E(s_j(\Lambda(n)) \leq d_j(n).$$

Jeżeli

$$\delta_j(n) < \delta_{j+1}(n), \text{ to wtedy } \Lambda_j(n) < \Lambda_{j+1}(n),$$

co oznacza, że

$$\lambda_j(n) > 0 \quad \text{oraz} \quad E(s_j(\Lambda(n))) = d_j(n).$$

Z powyższych rozważań wynika, że w przypadku $E(s_j(\Lambda(n))) < d_j(n)$ zawsze zachodzi $\lambda_j(n) = 0$, co oznacza, że

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(n) \cdot \left(\sum\nolimits_{j=1}^{i} \delta_j(n)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(n) \cdot E(s_i(\Lambda(n))) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(n) \cdot d_i(n),$$

$$E(p_j(\Lambda_j(n))) = \begin{cases} \sqrt{(2 \cdot \delta_j(n))/3} & \text{jeżeli } 0 < \delta_j(n) \leq \frac{1}{6} \\ \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{2} \cdot \delta_j(n) \cdot (1 - \delta_j(n)) & \text{jeżeli } \frac{1}{6} \leq \delta_j(n) \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Tak więc możemy zapisać:

$$\begin{aligned} E(Z_n(\Lambda(n))) &= \sum_{j=1}^{n} E(p(\Lambda_j(n))) = \qquad (6.9) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\tau_j(n) \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2} \delta_j(n)(1 - \delta_j(n)) \right) + \bar{\tau}_j(n) \sqrt{\frac{2 \cdot \delta_j(n)}{3}} \right) \end{aligned}$$

gdzie dla $j = 1, \ldots, n$

$$\tau_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } 1/6 < \delta_j(n) \leq 1/2 \\ 0 & \text{jeżeli } 0 < \delta_j(n) \leq 1/6 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \bar{\tau}_j(n) = 1 - \tau_j(n).$$

W poniższym Twierdzeniu został przedstawiony główny wynik teoretyczny tego rozdziału monografii.

Twierdzenie 6 *Niech p_j, t_j, $j = 1, \ldots, n$, będą realizacjami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0,1]$, $0 < d_1(n) \leq d_2(n) \leq \ldots \leq d_n(n) \leq n/2$, gdzie $d_j(n)$ są funkcjami deterministycznymi oraz $\delta_j(n)$ są określone przez powyższą procedurę. Jeżeli*

$$\frac{\ln(n)}{n \cdot \delta_1(n)} \approx 0,$$

to wtedy:

$$z_{OPT}(n) \approx \sum_{j=1}^{n} \left(\tau_j(n) \left(\frac{1}{8} + \frac{3 \cdot \delta_j(n)}{2}(1 - \delta_j(n)) \right) + \bar{\tau}_j(n) \sqrt{\frac{2 \cdot \delta_j(n)}{3}} \right) \tag{6.10}$$

Dowód. Niech:

$$\gamma(n) = \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^{n} 1/i}{n \cdot \delta_1(n)}}, \ \epsilon_j(n) = \gamma(n) \cdot \delta_j(n), \ \delta'_j(n) = \delta_j(n) - \epsilon_j(n),$$

gdzie $\delta_1(n), \delta_2(n), \ldots, \delta_j(n)$ oraz $\Lambda(n)$ są dane przez powyższą procedurę. Niech

$$\Lambda'_j(n) = \arg \left\{ E(t_j(\Lambda_j)) = \delta'_j(n) \right\}, \text{ gdzie } j = 1, \ldots, n.$$

Z (6.4) uzyskujemy

$$\hat{z}_n(\Lambda'(n)) \leq z_{OPT}(n) \leq \varphi_n(\Lambda(n)) = z_n(\Lambda(n)) + D_n(\Lambda(n)) - S_n(\Lambda(n)).$$

Tak więc, aby udowodnić (6.10), wystarczy wykazać, że

$$\hat{z}_n(\Lambda'(n)) \approx E(z_n(\Lambda(n))) \approx \varphi_n(\Lambda(n)) \tag{6.11}$$

oraz wykorzystać (6.9).

Jak już wspomniano, $\delta_j(n)$ są skonstruowane w taki sposób, że zawsze

$$\lambda_j(n) \cdot E(s_j(\Lambda(n))) = \lambda_j(n) \cdot d_j(n).$$

Tak więc

$$E(S_n(\Lambda(n))) = D_n(\Lambda(n)) \text{ oraz } E(z_n(\Lambda(n))) = E(\varphi_n(\Lambda(n))).$$

Dowód (6.11) zostanie przeprowadzony poprzez wykazanie, że

$$\begin{aligned} \hat{z}_n(\Lambda'(n)) &\approx E(\hat{z}_n(\Lambda'(n))), \ \varphi_n(\Lambda(n)) \approx E(\varphi_n(\Lambda(n))), \\ E(z_n(\Lambda(n))) &\approx E(\hat{z}_n(\Lambda'(n))). \end{aligned}$$

Mamy

$$s_i(\Lambda) = \sum_{j=1}^{i} t_j(\Lambda_j), \quad z_n(\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j(\Lambda_j).$$

Zgodnie z konstrukcją $t_j(\Lambda_j)$ oraz $p_j(\Lambda_j)$, gdzie, $j = 1, \ldots, n$, są ciągami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych, a więc z (4.14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(s_i(\Lambda(n))) &= \sum_{j=1}^{i} \mathrm{Var}(t_j(\Lambda_j(n))) \le \sum_{j=1}^{i} E(t_j^2(\Lambda_j(n))) \le \sum_{j=1}^{i} \delta_j(n),\\
\mathrm{Var}(z_n(\Lambda(n))) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(p_i(\Lambda_i(n))) \le E(z_n(\Lambda(n))),\ \hat{z}_n(\Lambda'(n)) \le z_n(\Lambda(n)),\\
\mathrm{Var}(\hat{z}_n(\Lambda'(n))) &\le E(z_n(\Lambda(n))),\ \mathrm{Var}(\varphi_n(\Lambda(n))) \le E(z_n(\Lambda(n))),\\
\sum_{i=1}^{n} 1/i &\approx \ln(n),\ \gamma(n) \approx 0,\ \delta'_j(n) \approx \delta_j(n),\ j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Ponieważ istnieje $n_0 \ge 1$, takie, że dla wszystkich $n \ge n_o$ zachodzi $\gamma(n) \le 1$ oraz:

$$0 \le E(p_i(\Lambda_i(n))) - E(p_i(\Lambda'_i(n))) \le \gamma(n) \cdot E(p_i(\Lambda_i(n))),$$

a więc

$$\begin{aligned}
1 - \gamma(n) &\le \frac{E(z_n(\Lambda'(n)))}{E(z_n(\Lambda(n)))} \le 1,\\
E(\hat{p}(\Lambda'_i(n))) &\ge E(p_i(\Lambda'_i(n))) \cdot P\{S_i(\Lambda'(n)) \le d_i(n)\} =\\
&= E(p_i(\Lambda'_i(n))) \cdot (1 - P\{S_i(\Lambda'(n)) > d_i(n)\}).
\end{aligned}$$

Z konstrukcji $d_i(n)$, $\delta_i(n)$, $\delta'_i(n)$ oraz $\Lambda'_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
E(p_1(\Lambda'_1(n))) &\le E(p_2(\Lambda'_2(n))) \le \cdots \le E(p_n(\Lambda'_n(n))) \text{ oraz}\\
P\{s_1(\Lambda'(n)) &\le d_1(n)\} \le P\{s_2(\Lambda'(n)) \le d_2(n)\} \le \cdots \le\\
&\le P\{s_n(\Lambda'(n)) \le d_n(n)\}.
\end{aligned}$$

Z nierówności Czebyszewa dla dodatnich ciągów monotonicznych w postaci:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i}{n},$$

patrz Bronsztejn i Siemendiajew [16], gdzie

$$a_i = p_i(\Lambda'_i(n)), \quad b_i = P\{s_i(\Lambda'(n)) \le d_i(n)\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

są dodatnimi i niemalejącymi ciągami liczbowymi, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}E(z_n(\Lambda'(n))) &\geq E(\hat{z}_n(\Lambda'(n))) \geq \sum_{i=1}^{n} E(p_i(\Lambda'_i(n))) \cdot P\{s_i(\Lambda'(n)) \leq d_i(n)\} \geq \\ &\geq \frac{E(z_n(\Lambda'(n)))}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P\{s_i(\Lambda'(n)) \leq d_i(n)\} = \\ &= E(z_n(\Lambda'(n))) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{P\{s_i(\Lambda'(n)) > d_i(n)\}}{n}\right).\end{aligned}$$

Z nierówności Czebyszewa dla zmiennych losowych, patrz Feller [38] lub Loève [96] i (4.12), oraz zauważając, że

$$\sum\nolimits_{j=1}^{i} \delta_j(n) \geq i \cdot \delta_1(n),$$

uzyskujemy

$$\begin{aligned}&P\{s_i(\Lambda'(n)) > d_i(n)\} \leq P\left\{|s_i(\Lambda'(n)) - E(s_i(\Lambda'(n)))| \geq \sum_{j=1}^{i} \epsilon_j(n)\right\} \leq \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(s_i(\Lambda'(n)))}{\left(\sum_{j=1}^{i} \epsilon_j(n)\right)^2} \leq \frac{E(s_i(\Lambda'(n)))}{\gamma^2(n) \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(n)\right)^2} \leq \frac{\sum_{j=1}^{i} \delta_j(n)}{\gamma^2(n) \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} \delta_j(n)\right)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma^2(n) \cdot \sum_{j=1}^{i} \delta_j(n)} \leq \frac{1}{\gamma^2(n) \cdot i \cdot \delta_1(n)}.\end{aligned}$$

Dlatego

$$\begin{aligned}E(z_n(\Lambda'(n))) &\geq E(\hat{z}_n(\Lambda'(n))) \geq E(z_n(\Lambda'(n))) \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} 1/i}{\gamma^2(n) \cdot \delta_1(n)}\right) = \\ &= E(z_n(\Lambda'(n))) \cdot (1 - \gamma(n))\end{aligned}$$

oraz

$$1 \geq \frac{E(\hat{z}_n(\Lambda'(n)))}{E(z_n(\Lambda(n)))} \geq (1 - \gamma(n))^2,$$

tak więc

$$E(\hat{z}_n(\Lambda'(n))) \approx E(z_n(\Lambda(n))) = E(\varphi_n(\Lambda(n))).$$

Z założenia

$$\frac{\ln(n)}{n \cdot \delta_1(n)} \approx 0$$

wynika, że

$$E(z_n(\Lambda(n))) \approx \infty.$$

Niech

$$\begin{aligned}\psi(n) &= (E(z_n(\Lambda(n))))^{\frac{2}{3}}, \ \omega(n) = \frac{\psi(n)}{E(z_n(\Lambda(n)))} = \frac{1}{\sqrt[3]{E(z_n(\Lambda(n)))}},\\ \omega'(n) &= \frac{\psi(n)}{E(\hat{z}_n(\Lambda'(n)))}.\end{aligned}$$

Mamy

$$\psi(n) \approx \infty, \ \omega(n) \approx 0, \ \omega'(n) \approx 0.$$

Aby zakończyć dowód (6.11), zastosujemy dwukrotnie nierówność Czebyszewa dla ciągów zmiennych losowych:

$$P\left\{\left|\frac{\varphi_n(\Lambda(n))}{E(z_n(\Lambda(n)))} - 1\right| \geq \omega(n)\right\} =$$

$$= P\left\{|\varphi_n(\Lambda(n)) - E(\varphi_n(\Lambda(n)))| \geq \psi(n)\right\} \leq \frac{\mathrm{Var}(\varphi_n(\Lambda(n)))}{\psi^2(n)} \leq \omega(n),$$

oraz

$$P\left\{\left|\frac{\hat{z}_n(\Lambda'(n))}{E(\hat{z}_n(\Lambda'(n)))} - 1\right| \geq \omega'(n)\right\} =$$

$$= P\left\{|\hat{z}_n(\Lambda'(n)) - E(\hat{z}_n(\Lambda'(n)))| \geq \psi(n)\right\} \leq \frac{\mathrm{Var}(\hat{z}_n(\Lambda'(n)))}{\psi^2 n)} \leq \omega(n),$$

co kończy dowód Twierdzenia 6. ■

Warunek $\ln(n)/(n \cdot \delta_1(n)) \approx 0$ oznacza, że istnieje funkcja $\gamma(n)$ taka, że

$$\delta_1(n) = \gamma(n) \cdot \frac{\ln(n)}{n}, \text{ gdzie } \gamma(n) \approx \infty.$$

Należy zauważyć, że funkcja $\gamma(n)$ może dążyć do nieskończoności dowolnie wolno, na przykład $\gamma(n) = \Theta(\log(\log(n)))$. Z właściwości

$$\delta_1(n) \leq \delta_2(n) \leq \ldots \leq \delta_n(n)$$

wynika, że

$$\gamma(n) \cdot \frac{\ln(n)}{n} \leq \delta_i(n) \leq \frac{1}{2}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Rozważając dwa zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2), gdzie

$$\delta_i'(n) = \gamma(n) \cdot \frac{\ln(n)}{n} \text{ oraz } \delta_i''(n) = \frac{1}{2}, \ i = 1, \ldots, n,$$

mamy

$$z'_{OPT}(n) \leq z_{OPT}(n) \leq z''_{OPT}(n).$$

Stosując dla obu wspomagających zadań Twierdzenie 6 możemy sformułować poniższy Wniosek do Twierdzenia 6.

Wniosek 6 *Dla rozważanego modelu losowego zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) prawdziwa jest następująca ocena wartości rozwiązania optymalnego*

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \gamma(n) \cdot n \cdot \ln(n)}{3}} \preceq z_{OPT} \preceq \frac{n}{2}.$$

Powyższa ocena stanowi odpowiednik Wniosków 2 oraz 4 dla zadań załadunku.

Jak już zauważono, podstawowym wyróżnikiem zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) spośród innych przypadków wielowymiarowego zadania załadunku (5.1) jest jego struktura ograniczeń. Jeśli spojrzymy na każde z ograniczeń (6.2), to z łatwością zauważymy, że z lewej strony i-tego ograniczenia mamy czas niezbędny dla wykonania i-tej pracy i prac ją poprzedzających, natomiast prawą stroną ograniczenia jest nieprzekraczalny termin *zakończenia* pracy $d_i(n)$.

Tym, co w zasadniczy sposób odróżnia uzyskane w podrozdziale 6.3 wyniki analizy przypadku średniego od wyników podrozdziału 5.5 dla ogólnej postaci wielowymiarowego zadania załadunku, jest zależność wartości rozwiązania optymalnego nie wprost od wartości prawych stron ograniczeń $d_i(n)$ - terminów zakończenia prac, ale od wielkości *"przyrostów"* $d_i(n)$:

$$d_1(n), d_2(n) - d_1(n), \ldots, d_n(n) - d_{n-1}(n).$$

Zjawisko to można poglądowo uzasadnić w następujący sposób. Współzależność wartości $d_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$, może być taka, że pochopne podjęcie decyzji o wykonaniu w termine jednej z *"wcześniejszych"* prac k^*, $1 \leq k^* \leq n$, może uniemożliwić wykonanie w terminie bardzo wielu *"późniejszych"* prac j, $k^* < j \leq n$, i w konsekwencji możemy otrzymać bardzo niekorzystną wartość rozwiązania.

Zaproponowana procedura globalnego wyznaczania wartości *"akceptowalnych"* przyrostów $\delta_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$, patrz (6.8), po pierwsze eliminuje wspomnianą możliwość, po drugie zapewnia dopuszczalność uzyskiwanych rozwiązań, w sensie ich wartości oczekiwnej.

W zależności od wartości mnożników Lagrange'a $\lambda_1(n)$, $\lambda_2(n)$,...,$\lambda_n(n)$, $\lambda_j(n) = \Lambda_j(n) - \Lambda_{j+1}(n)$, $j = 1, \ldots, n-1$, $\lambda_n(n) = \Lambda_n(n)$, możemy mówić o ograniczeniach j, $j = 1, \ldots, n$, które są "aktywne":

$$\text{jeżeli } \lambda_j(n) > 0,$$

lub "nieaktywne" (redundantne):

$$\text{jeżeli } \lambda_j(n) = 0.$$

Rozważmy dwa szczególne, "graniczne" przypadki.

Jeżeli wszystkie ograniczenia są aktywne, wtedy zachodzi:

$$\delta_1(n) = d_1(n), \quad \delta_2(n) = d_2(n) - d_1(n), \ldots, \delta_n(n) = d_n(n) - d_{n-1}(n)$$

Jeżeli tylko jedno, ostatnie ograniczenie jest aktywne, wtedy mamy:

$$\delta_j(n) = \frac{d_n(n)}{n}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Istnienie nieaktywnego ograniczenia k^* oznacza taką współzależność pomiędzy wartościami $d_i(n)$, $i = 1, \ldots, n$ - prawych stron ograniczeń (terminów wykonania prac), że fakt wykonania w terminie lub niewykonania pracy k^*, $1 \leq k^* \leq n$, może zostać zdeterminowany poprzez pozostałe prawe strony ograniczeń $d_1(n)$, $d_2(n)$, $d_{k^*-1}(n)$, $d_{k^*+1}(n)$,...,$d_n(n)$, bez naruszenia dopuszczalności ograniczenia k^*.

Przykład 5 *Rozważmy trzy przypadki wektorów $d_1(n)$, $d_2(n)$, ...,$d_n(n)$*

$$d_k(n) = \frac{k^2}{2n}, \; \textit{wtedy } \delta_k(n) = \frac{2k-1}{2n}, \; k = 1, \ldots, n \tag{6.12}$$

$$d_k(n) = \frac{k}{2}, \; \textit{wtedy } \delta_k(n) = \frac{1}{2}, \; k = 1, \ldots, n \tag{6.13}$$

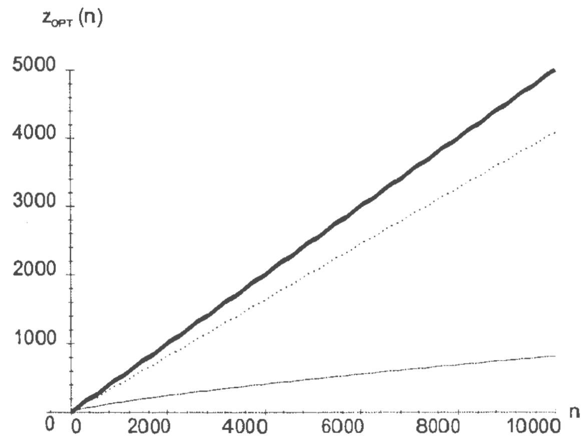
oraz

$$d_k(n) = \frac{k}{\sqrt{n}}, \; \textit{wtedy } \delta_k(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \; k = 1, \ldots, n. \tag{6.14}$$

Zauważmy, że w przypadkach (6.12) oraz (6.13) mamy $d_n(n) = n/2$, natomiast w przypadku (6.14) mamy $d_n(n) = \sqrt{n}$. W przypadkach (6.13) oraz (6.14) wszystkie, poza ostatnim, ograniczenia są nieaktywne, natomiast w przypadku (6.12) wszystkie ogranicznenia są aktywne. Należy też zauważyć, że w przypadku (6.13) $z_{OPT}(n) = n/2$ osiąga wartość maksymalną w rozważanym losowym modelu zadania, patrz (6.5).

Na rysunku 6.2 zaprezentowano wykres wartości $z_{OPT}(n)$ dla powyżej wprowadzonych schematów wartości $d_k(n)$. Linią wytłuszczoną ciągłą zaznaczono przypadek (6.13), linią wykropkowaną przypadek (6.12), natomiast linią ciągłą niewytłuszczoną przypadek (6.14).

Na rysunku 6.2 widać, jaki wpływ na wzrost wartości rozwiązania optymalnego $z_{OPT}(n)$ mają wartości $d_k(n)$ oraz ich przyrosty.



Rysunek 6.2: Wykres wartości $z_{OPT}(n)$ dla trzech różnych postaci $d_k(n)$

Analogicznie jak w przypadku wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), dla rozważanych klas losowych zadań wartość rozwiązania optymalnego dąży do swojej wartości oczekiwanej, będącej funkcją deterministyczną: prawych stron ograniczeń $d_1(n), d_2(n), \cdots, d_n(n)$, terminów wykonania prac, rozmiaru zadania n oraz ewentualnie innych jego parametrów. Oznacza to, że następuje swoiste "uśrednienie" wartości rozwiązania optymalnego dla całej rozważanej klasy zadań.

Próba rozważania zadania "uśrednionego", patrz Steele [128] oraz podrozdział 5.5, gdzie p_j, t_j zostały zastąpione w sformułowaniu zadania poprzez wartości oczekiwane opisujących je zmiennych losowych, prowadzi natomiast do następującej postaci zadania szeregowania prac z (6.2):

$$\begin{aligned} \bar{z}_{OPT}(n) &= \max \sum_{j=1}^{n} x_j/2 \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \sum_{j=1}^{i} x_j \leq 2 \cdot d_i(n), \quad i = 1, \ldots, n, \\ \text{gdzie} \quad & x_j = 0 \text{ lub } 1, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Przy wykorzystaniu powyższej postaci zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) istnieje tylko możliwość uzyskania trywialnego oszacowania wartości rozwiązania optymalnego:

$$\lfloor d_1(n) \rfloor \leq \bar{z}_{OPT}(n) \leq \lfloor d_n(n) \rfloor ,$$

które nie wnosi żadnych wartości poznawczych do analizy zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2).

Algorytmy przybliżone wyznaczające rozwiązywania zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) są bardzo często testowane na zadaniach generowanych losowo, praktycznie identycznych z rozważaną klasą losowych zadań szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2). Uzyskane w Twierdzeniu 6 oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) może być wykorzystane przy konstruowaniu i testowaniu algorytmów przybliżonych, szczególnie heurystycznych, dla rozwiązywania zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2).

6.4 Algorytm przybliżony

Jak już wspomniano powyżej, pseudowielomianowy algorytm oparty na idei programowania dynamicznego, patrz Sahni [120], może być stosowany do rozwiązywania z dowolną dokładnością zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2).

Algorytmy przybliżone wyznaczające rozwiązania dla tej klasy zadań zaproponowano również w pracach Potts i Van Wassenhove [114], Stern i Avivi [129], Dudziński i Szkatuła [33] oraz Szkatuła [132].

W pracach Dudziński i Szkatuła [33] oraz Szkatuła [132] zaproponowano algorytm progowy dla przybliżonego rozwiązywania zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2). Algorytm ten można przedstawić w następującej postaci:

Algorytm progowy

Krok 0: Ustalamy wartości początkowe $i \leftarrow 0$, $z_{THR}(n) \leftarrow 0$, $s_{THR}(n) \leftarrow 0$ oraz wartość progu λ, $\lambda \geq 0$.
Krok 1: $i \leftarrow i+1$; Jeżeli $p_i/t_i \geq \lambda$ oraz $s_{THR}(n) + t_i \leqslant d_i(n)$, to wtedy:

$$x_i(n) \leftarrow 1; \;\; z_{THR}(n) \leftarrow z_{THR}(n) + p_i; \;\; s_{THR}(n) \leftarrow s_{THR}(n) + t_i$$

w przeciwnym przypadku $\qquad x_i(n) \leftarrow 0.$
Krok 2: Jeżeli $i < n$, to wracamy do **kroku 1**.
Krok 3: Jeżeli $i = n$, to algorytm kończy pracę.

$z_{THR}(n)$ jest wartością uzykanego przez algorytm progowy rozwiązania przybliżonego, przy czym uzyskane rozwiązanie przybliżone jest dopuszczalne, co oznacza, że żaden z terminów $d_i(n)$ nie został przekroczony.

W pracy Dudziński i Szkatuła [33] zostały przedstawione wyniki eksperymentu obliczeniowego porównującego trzy algorytmy przybliżone do rozwiązywania zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2), wśród nich algorytm progowy.

Algorytm progowy ma bardzo niską złożoność obliczenową $O(n)$. Zasada jego działania jest intuicyjna i niezmiernie prosta. Dla zadań o niewielkich rozmiarach niezbędne obliczenia można wykonać ręcznie. O jakości uzyskiwanych przez algorytm progowy rozwiązań decyduje wybór wartości progu. Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, że najlepsza jest jedna z następujących jego wartości:

$$\lambda = \min_{\tau \in \left\{\frac{p_1}{t_1}, \ldots, \frac{p_n}{t_n}\right\}} \left\{ \tau \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \hat{t}_j(\tau) \leq d_n(n) \right\}$$

lub

$$\lambda = \max_{\tau \in \left\{\frac{p_1}{t_1}, \ldots, \frac{p_n}{t_n}\right\}} \left\{ \tau \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \hat{t}_j(\tau) \geq d_n(n) \right\}$$

gdzie

$$\hat{t}_j(\tau) = \begin{cases} t_j & \text{jeżeli } p_j/t_j \geq \tau \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} .$$

Rozważmy, jako zadanie pomocnicze, jednowymiarowe zadanie załadunku (5.47) powstałe z odrzucenia wszystkich, poza ostatnim, ograniczeń w zadaniu szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2), gdzie

$$c_i = p_i, \; a_i = t_i, \; i = 1, \ldots, n, \; b(n) = d_n(n).$$

Zauważmy, że powyżej opisane procedury wyboru wartości progu λ są praktycznie tożsame z wyborem wartości progu dla jednowymiarowego zadania załadunku w rozważanej w podrozdziale 5.6 klasie losowych jednowymiarowych zadań załadunku, patrz Twierdzenie 5 oraz wzór (5.49).

Struktura ograniczeń zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) pozwala w łatwy i jednoznaczny sposób uzyskać rozwiązanie dopuszczalne dla dowolnej wartości progu λ.

Przeprowadzony w pracy Dudziński i Szkatuła [33] eksperyment obliczeniowy wykazał, że pomimo swojej bardzo prostej postaci algorytm progowy uzyskuje rozwiązania przybliżone o bardzo dobrej jakości dla zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2). Średni względny błąd procentowy uzyskanych rozwiązań wynosił około kilkunastu procent dla zadań o rozmiarach $n \leq 10$ (n - liczba prac do wykonania), kilka procent dla zadań o kilkudziesięciu pracach, w granicach procenta dla zadań o kilkuset pracach, ułamki procenta dla zadań o tysiącu lub więcej pracach.

Dla zadań generowanych losowo, gdzie $\delta_j(n)$ oraz $\Lambda_j(n)$, są wyznaczane przez procedurę opisaną na stronie 166, $x_j(\Lambda_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, wyznaczone przez wzór (6.3) dają rozwiązania przybliżone zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) o bardzo wysokiej jakości, patrz Twierdzenie 6. Trudno jest oczywiście mówić o efektywnej, algorytmicznej implementacji tego podejścia w ogólnym przypadku zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2). W przypadku algorytmu progowego mamy jedną wartość progu - λ. Natomiast w (6.3) mamy indywidualną wartość progu $\Lambda_j(n)$ dla każdej pracy do wykonania - ograniczenia j, $1 \leq j \leq n$, w zadaniu (6.2).

6.5 Podsumowanie

Zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) należy do klasycznych zadań harmonogramowania. Może być ono też rozważane jako szczególny przypadek wielowymiarowego zadania załadunku (5.1), a więc również jako zadanie programowania binarnego oraz całkowitoliczbowego. Przeprowadzona w podrozdziale 6.3 analiza przypadku średniego wzbogaca więc zarówno teorię programowania całkowitoliczbowego, teorię zadań harmonogramownia jak też optymalizację dyskretną.

W celu dokonania analizy przypadku średniego w tym rozdziale monografii wybrano następujący schemat postępowania:

- Zaprezentowano zadanie szeregowania prac z terminami zakończenia jako zadanie teorii harmonogramowania oraz przedstawiono je jako szczególną postać wielowymiarowego zadania załadunku.

- Dla tak sformułowanego zadania szeregowania prac, w oparciu o funkcję Lagrange'a oraz zadania dualne uzyskano oszacowania wartości rozwiązań optymalnych i innych parametrów zadania.

- Zdefiniowano losowy model zadania szeregowania prac z terminami zakończenia przyjmując założenia o tym, że paramtery zadania, takie jak współczynniki funkcji celu i lewych stron ograniczeń, są realizacjami zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym na $(0, 1]$.

- Przeprowadzono analizę przypadku średniego wartości rozwiązania optymalnego i przybliżonego uzyskując ich asymptotyczną postać jako deterministycznej funkcji parametrów zadania.

- Omówiono możliwości efektywnego w praktyce obliczeniowej rozwiązywania zadania szeregowania prac z terminami zakończenia.

Należy podkreślić, że przy zastosowaniu analizy przypadku średniego można uzyskać dla zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) wartościowe i nietrywialne wyniki opisujące asymptotyczne zachowanie się rozwiązań optymalnych tego zadania.

Co więcej, uzyskane wyniki analizy asymptotycznego wzrostu wartości rozwiązań optymalnych zadania szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) w średnim przypadku dotyczą pełnego modelu losowego zadania i praktycznie wszystkich możliwych wartości prawych stron ograniczeń:

$$0 < d_1(n) \leq d_2(n) \leq \cdots \leq d_n(n) \leq n/2.$$

Warunek $\ln(n)/(n \cdot \delta_1(n)) \approx 0$ w założeniach Twierdzenia 6 w niewielkim tylko stopniu ogranicza ogólność rozważanego modelu losowego zadania (6.2).

Dla całej rozważanej klasy zadań losowych został też zdefiniowany sposób wyznaczania mnożników Lagrange'a oraz wartości progu. Mogą one mieć istotne znaczenie dla rozwiązywania zadań szeregowania prac z terminami zakończenia (6.2) w praktyce obliczeniowej. Uzyskane wyniki wykazują, że rozwiązania przybliżone uzyskane z pomocą wyznaczonych mnożników Lagrange'a są asymptotycznie suboptymalne w średnim przypadku.

Czynnikiem ograniczającym bardziej ogólny wymiar uzyskanych w tym rozdziale monografii wyników jest fakt, że są one prawdziwe tylko dla rozważanej klasy losowych zadań szeregowania prac z terminami zakończenia.

Uwagi końcowe

W monografii rozważono podejście przypadku średniego do analizy zadań oraz algorytmów optymalizacji dyskretnej. Celem monografii było wykazanie, na przykładzie binarnego wielowymiarowego zadania załadunku, zadania szeregowania prac z terminami zakończenia oraz wyników znanych z literatury, że podejście przypadku średniego jest bardzo użytecznym narzędziem analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej.

W monografii dokonano przeglądu dziedziny optymalizacji dyskretnej z zaprezentowaniem najbardziej charakterystycznych zadań, takich jak: programowanie całkowitoliczbwe i liniowe, programowanie binarne, zadania pokrycia, pakowania i rozbicia zbiorów, wybrane zadania teorii grafów oraz zadania harmonogramowania.

Następnie zaprezentowano popularne i powszechnie stosowane techniki rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej, takie jak: metoda pełnego przeglądu, metoda podziału i oszacowań, programowanie dynamiczne, algorytmy zachlanne, metody programowania liniowego i inne.

Zdefinowane zostały sposoby oceny dokładności pracy algorytmów optymalizacji dyskretnej. Do oceny złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej wprowadzono metodologię przypadku najgorszego. Dokonano podziału zadań optymalizacji na umowne kategorie zadań łatwych (należących do klasy $\mathcal{P}$), trudnych (należących do klasy zadań $\mathcal{NP}$-trudnych) oraz szczególnie trudnych (zadań silnie $\mathcal{NP}$-trudnych). Z pewnym uproszczeniem można powiedzieć, że o łatwości rozwiązywania wybranych zadań optymalizacji dyskretnej decyduje istnienie dla nich algorytmów dokładnych o wielomianowej złożoności obliczeniowej.

Jako dopełnienie oraz poszerzenie możliwości poznawczych podejścia przypadku najgorszego zaprezentowano podejście przypadku średniego. Zdefiniowano niezbędne podstawy teoretyczne analizy przypadku średniego oraz dokonano prezentacji wybranych wyników znanych z literatury.

Ogólne rozważania dotyczące zadań optymalizacji dyskretnej, metod ich rozwiązywania, podejścia analizy przypadku najgorszego i średniego do oceny zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej szczegółowo omówiono na przykładzie wielowymiarowego binarnego zadania załadunku, z odrębnym rozpatrzeniem przypadku jednowymiarowego oraz zadania szeregowania prac z terminami zakończenia.

Dla rozważanych modeli losowych zadań, które uzyskano przyjmując założenie, że współczynniki funkcji celu i lewych stron ograniczeń są realizacjami zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0, 1]$, uzyskano szereg ciekawych wyników analizy przypadku średniego. Najważniejszym z nich było wykazanie, że wartości rozwiązań optymalnych dla całych losowych klas zadań dążą do swoich wartości oczekiwanych - deterministycznych funkcji: rozmiaru zadania n (liczby zmiennych decyzyjnych), liczby ograniczeń m (w przypadku binarnego wielowymiarowego zadania załadunku), oraz wartości prawych stron ograniczeń. Z przeprowadzonych rozważań wynika istotny wpływ wartości i wzajemnych uwarunkowań wektorów prawych stron ograniczeń na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych jako funkcji rozmiaru zadania n.

W przypadku binarnego wielowymiarowego zadania załadunku można zauważyć, że liczba ograniczeń m ma bardzo duży wpływ na asymptotyczny wzrost wartości rozwiązań optymalnych jako funkcji rozmiaru zadania n, szczególnie w przypadku funkcyjnej zależności wartości prawych stron ograniczeń od m oraz małych wartości prawych stron ograniczeń $b_j(n)$, $j = 1, \ldots, m$. Dla dużych wartości $b_j(n)$, $j = 1, \ldots, m$, zależność od m ulega znacznemu osłabieniu, a przy $b_j(n) \approx n/2$ praktycznie zanika.

Powszechnie stosowaną w praktyce obliczeniowej metodą służącą do oceny algorytmów przybliżonych jest testowanie ich na zadaniach generowanych losowo. Uzyskane wyniki są następnie poddawane analizie statystycznej. Łatwo jest zauważyć, że powszechnie stosowane generatory zadań losowych są praktycznie tożsame z rozważanymi w monografii losowymi modelami zadań. Wyniki analizy przypadku średniego są więc w wielu przypadkach potwierdzeniem i teoretycznym uzasadnieniem wyników eksperymentalnych.

Co więcej, w uzasadnionych przypadkach wyniki analizy przypadku średniego mogą wyeliminować konieczność przeprowadzania eksperymentu obliczeniowego testującego algorytmy dla zadań optymalizacji dyskretnej. W takim przypadku w oczywisty sposób jest oszczędzany czas badaczy oraz zmniejszane wykorzystanie zasobów komputerowych.

W monografii wykazano, że bardzo proste algorytmy heurystyczne, o liniowej złożoności obliczeniowej, nie mające nawet gwarancji uzyskania rozwiązań dopuszczalnych zadań, są asymptotycznie optymalne w średnim przypadku. Wyniki tego typu są w oczywisty sposób odmienne od wyników analizy przypadku najgorszego i dlatego stanowią ich wartościowe uzupełnienie.

Pogląd, że analiza przypadku średniego może zastąpić analizę przypadku najgorszego jest w odczuciu autora błędny. Zarówno analiza przypadku najgorszego, jak również analiza przypadku średniego mają swoją specyfikę oraz uzyskują wartościowe wyniki i oceny. Dopiero zapoznanie się z wynikami analiz różnego rodzaju pozwala wyrobić sobie możliwie najbardziej obiektywny pogląd na różne aspekty analizowanego zadania lub algorytmu optymalizacji dyskretnej.

Należy również podkreślić, że wyniki analizy przypadku średniego są prawdziwe tylko dla rozważanych losowych klas zadań. Należy więc zachować szczególną ostrożność przy próbach uogólniania uzyskanych wyników na inne klasy zadań, gdyż może to prowadzić do fałszywych i nieuzasadnionych wniosków.

Istotnym wyzwaniem badawczym pozostaje nadal przeprowadzenie analizy przypadku średniego dla szczególnie trudnych zadań optymalizacji dyskretnej. Dobrym przykładem jest zadanie programowania całkowitoliczbowego, patrz podrozdział 1.2 oraz wzór (1.2). W przypadku zadania programowania całkowitoliczbowego postać funkcji Lagrange'a oraz zadania dualnego nie sprzyja zastosowaniu technik i oszacowań wykorzystanych w podrozdziałach 5.2 oraz 6.2.

Innym ważnym celem przyszłych prac badawczych wydaje się rozważenie bardziej realistycznych modeli zadań, co w szczególności może wymagać zastosowania złożonych rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych opisujących charakterystyki analizowanych zadań. Również w tym przypadku oczekiwane jest uzyskanie analitycznych wyników o podobnym charakterze jak wyniki zawarte w podrozdziałach 5.5 oraz 6.3 niniejszej monografii.

Literatura

[1] R. Aboudi, K. Jörnsten. Tabu search for general zero-one integer programs using the pivot and complement heuristic. *ORSA Journal on Computing*, 6:82–93, 1994.

[2] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[3] G. d' Atri. Probabilistic analysis of the knapsack problem. Working Paper 7, Groupe de Récherche 22, Centre National de la Récherche Scientifique, Paris, 1978.

[4] G. Ausiello, A. Marchetti-Spaccamela, M. Protasi. Probabilistic analysis of the solution of the knapsack problem. W: *Proceedings of the Tenth IFIP Conference*, ss. 557–565, New York, 1982. Springer.

[5] I. Averbakh. Probabilistic properties of the dual structure of the multidimensional knapsack problem and fast statistically effcient algorithms. *Mathematical Programming*, 65:311–330, 1994.

[6] E. Balas. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*, 13:517–546, 1965.

[7] E. Balas, C.H. Martin. Pivot and complement - a heuristic for 0-1 programming. *Management Science*, 26:86–96, 1980.

[8] E. Balas, E. Zemel. An algorithm for large zero-one knapsack problems. *Operations Research*, 28:1130–1154, 1980.

[9] R. Battiti, G. Tecchiolli. Local search with memory: benchmarking RTS. *OR Spektrum*, 17:67–86, 1995.

[10] J. Beardwood, J. Halton, J.M. Hammersley. The shortest path through many points. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 55:299–327, 1959.

[11] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.

[12] M. Bertocchi, L. Słomiński, J. Sobczyńska. Probabilistic and deterministic local search for solving the binary multiknapsack problem. *Optimization*, 33:155–166, 1995.

[13] J. Błażewicz, K.H. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt, J. Węglarz. *Scheduling Computer and Manufacturing Processes*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[14] J. Błażewicz, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity. *Discrete Applied Mathematics*, 5:11–24, 1983.

[15] K.H. Borgwardt. The average number of steps required by simplex-method is polynomial. *Zeitschrift für Operations Research*, 26:157–177, 1982.

[16] I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew. *Matematyka, poradnik encyklopedyczny*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1973.

[17] A.V. Cabot. An enumeration algorithm for knapsack problems. *Operations Research*, 18:306–311, 1970.

[18] P.M. Camerini, F. Maffioli, C. Vercellis. Multi-constrained matroidal knapsack problems. *Mathematical Programming*, 45:211–231, 1989.

[19] V. Cerny. A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. Preprint, Institute of Physics and Biophysics, Comenius University, Bratislava, 1982.

[20] L.G. Chaczian. Wielomiananowy algorytm programowania liniowego. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nova Seria*, 244(5):1093–1096, 1979. (w języku rosyjskim).

[21] I. Charon, O. Hudry. The noising method: a new method for combinatorial optimization. *Operations Research Letters*, 14:133–137, 1993.

[22] P.C. Chu, J.E. Beasley. A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. *Journal of Heuristics*, 4(1):63–86, 1998.

[23] E.G. Coffman Jr, M.R. Garey, D.S. Johnson. Approximation algorithm for bin-packing - an updated survey. W: G. Ausiello, M. Lucertini, P. Serafini, editors, *Algorithm Design for Computer System Design*, ss. 49–106, New York, 1984. Springer.

[24] E.G. Coffman Jr, G.S. Lueker. *Probabilistic Analysis of Packing and Partitioning Algorithms.* Wiley-Interscience, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1991.

[25] E.G. Coffman Jr, G.S. Lueker, A.H.G. Rinnooy Kan. Asymptotic methods in the probablistic analysis of sequencing and packing heuristics. *Management Science*, 34:266–290, 1988.

[26] S.A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. W: *Proc. 3rd Annu. ACM Symp. On Theory of Computing*, ss. 151–158, New York, 1971. ACM Press.

[27] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest. *Wprowadzenie do algorytmów.* Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1997.

[28] Y. Crama, J.B. Mazzola. On the strength of relaxations of multidimensional knapsack problems. *INFOR*, 32:219–225, 1994.

[29] F. Dammeyer, S. Voss. Dynamic tabu list management using reverse elimination method. *Annals of Operations Research*, 41:31–46, 1993.

[30] G.B. Dantzig. Discrete variable problems. *Operations Research*, 5:266–277, 1957.

[31] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[32] A. Drexl. A simulated annealing approach to the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Computing*, 40:1–8, 1988.

[33] K. Dudziński, K. Szkatuła. A note on sequencing jobs with deadlines problem. *European Journal of Operational Research*, 59:333–336, 1992.

[34] G. Dueck. New optimization heuristics. *Journal of Computational Physics*, 104:86–92, 1993.

[35] G. Dueck, T. Schuer. Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, 90:161–175, 1990.

[36] A.E. Eiben, E.H.L. Aarts, K.H. Van Hee. Global convergence of genetic algorithms: A markov chain analysis. *Lecture Notes in Computer Science*, 496:4–9, 1991.

[37] H. Everett. Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11:399–417, 1963.

[38] W. Feller. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom II.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981.

[39] J.F. Fontanari. A statistical analysis of the knapsack problem. *Journal of Physics A - Mathematical and General*, 28:4751–4759, 1995.

[40] G.E. Fox, G.D. Scudder. A heuristic with tie breaking for certain 0-1 integer programming models. *Naval Research Logistics Quarterly*, 32:613–623, 1985.

[41] A. Freville, G. Plateau. Heuristics and reduction methods for multiple constraints 0-1 linear programming problems. *European Journal of Operational Research*, 24:206–215, 1986.

[42] A. Freville, G. Plateau. Hard 0-1 multiknapsack test problems for size reduction methods. *Investigacion Operativa*, 1:251–270, 1990.

[43] A. Freville, G. Plateau. An efficient preprocessing procedure for the multidimensional 0-1 knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 49:189–212, 1994.

[44] A. Freville, G. Plateau. The 0-1 bidimensional knapsack problem: toward an efficient high-level primitive tool. *Journal of Heuristics*, 2:147–167, 1997.

[45] A.M. Frieze, M.R.B Clarke. Approximation algorithms for the m-dimensional 0-1 knapsack problem: Worst case and probabilistic analysis. *European Journal of Operational Research*, 15:100–109, 1984.

[46] M.R. Garey, R.L. Graham, D.S. Johnson, A. Yao. Resource constrained scheduling as generalized bin packing. *J. Combin. Theory A*, (21):257–298, 1976.

[47] M.R. Garey, D.S. Johnson. Strong NP-completeness results: motivation, examples and implications. *Journal of the Association of Computer Machinery*, 25:499–508, 1978.

[48] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, San Francisco, 1979.

[49] R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser. *Programowanie całkowitoliczbowe.* Państwowe Wydwnictwo Naukowe, Warszawa, 1978.

[50] S.L. Gass. *Programowanie liniowe.* PWN, Warszawa, 1976.

[51] B. Gavish, H. Pirkul. *Allocation of Databases and Processors in a Distributed Computing System.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

[52] B. Gavish, H. Pirkul. Efficient algorithms for solving multiconstraint zero-one knapsack problems to optimality. *Mathematical Programming*, 31:78–105, 1985.

[53] S. Van de Geer, L. Stougie. On rates of convergence and asymptotic normality in the multiknapsack problem. *Mathematical Programming*, 51:349–358, 1991.

[54] P.C. Gilmore, R.E. Gomory. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14:1045–1075, 1966.

[55] F. Glover. Heuristic for integer programming using surrogate constraints. *Decision Sciences*, 8:156–160, 1977.

[56] F. Glover. Tabu search: a tutorial. *Interfaces*, 20(4):74–94, 1991.

[57] F. Glover. Optimization by ghost image processes in neural networks. *Computers and Operations Research*, 21:801–822, 1994.

[58] F. Glover, G.A. Kochenberger. Critical event tabu search for multidimensional knapsack problems. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, ss. 407–427. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[59] F. Glover, M. Laguna. *Tabu Search.* Kluwer, Boston, 1997.

[60] A.V. Goldberg, A. Marchetti-Spaccamela. On finding the exact solutions of a 0-1 knapsack problem. W: *Proceedings of the 16th ACM Symposium on Theory of Computing*, ss. 359–368, New York, 1984. Association for Computing Machinery.

[61] M.R. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling theory: a survey. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:287–326, 1979.

[62] M. Grötschel, L. Lovász. Combinatorial optimization. W: R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, editors, *Handbook of Combinatorics*, ss. 1541–1597. Elsevier Science B.V., 1995.

[63] S. Hanafi, A. Freville. An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, to appear.

[64] S. Hanafi, A. Freville, A.El. Abedellaoui. Comparison of heuristics for the 0-1 multidimensional knapsack problem. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics: Theory and Applications*, ss. 449–465. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[65] D. Hausman, R. Kannan, B. Korte. Exponential lover bounds on a class of knapsack algorithms. *Mathematics of Operations Research*, 6:225–232, 1981.

[66] F.S. Hiller. Efficient heuristic procedures for integer linear programming with an interior. *Operations Research*, 17:600–637, 1969.

[67] D.S. Hochbaum. A nonlinear knapsack problem. *Operations Research Letters*, 17:103–110, 1995.

[68] A. Hoff, A. Løkketagen, I. Mittet. Genetic algorithms for 0/1 multidimensional knapsack problems. Working paper, Molde College, Britvein 2, Molde, Norway, 1996.

[69] J.H. Holland. Adaptation in natural and artificial systems. Technical report, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[70] D.S. Johnson. *Near-optimal allocation algorithms.* PhD thesis, MIT, Cambridge, MA, 1973.

[71] D.S. Johnson. The NP completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 5:284–299, 1984.

[72] D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 9:426–444, 1988.

[73] D.S. Johnson. Local optimization and the travelling salesman problem. W: *Proc. 17th Coll. On Automata, Languages and Programming*, ss. 446–461, Heidelberg, 1990. Springer.

[74] D.S. Johnson. The NP-completeness column: an ongoing guide. *J. Algorithms*, 13:502–524, 1992.

[75] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part I, graph partitioning. *Operational Research*, 37:865–892, 1989.

[76] D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing; an experimental evaluation, part II, graph coloring and number partitioning. *Operations Research*, 39:378–406, 1991.

[77] R. Kannan, B. Korte. Approximative combinatorial algorithms. W: *Mathematical Programming*, ss. 195–248, Amsterdam, New York, 1984. North Holland.

[78] N. Karmarkar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:375–395, 1984.

[79] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. W: R.E. Miller and J.W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, ss. 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[80] R.M. Karp. The probablilistic analysis of some combinatorial search algorithms. W: J.F. Traub, editor, *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results*, ss. 1–19. Academic Press, 1976.

[81] R.M. Karp. Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the travelling salesman problem in the plane. *Mathematics of Operations Research*, 2:209–224, 1977.

[82] R.M. Karp. A patching algorithms for the nonsymmetric travelling salesman problem. *SIAM Journal on Computing*, 8:561–573, 1979.

[83] R.M. Karp, J.K. Lenstra, C.J.H. McDiarmid, A.H.G. Rinnooy Kan. Probablistic analysis of combinatorial algorithms. W: M. OhEigeartaigh, J.K. Lenstra, A.G.H. Rinnooy Kan, editors, *Combinatorial Optimization: Annotated Bibliographies*, ss. 52–88. Wiley-Interscience, New York, Chichester, 1985.

[84] S. Khuri, T. Bäck, J. Heitkötter. The zero/one multiple knapsack problem and genetic algorithms. W: *Proceedings of the 1994 ACM Symposium on Applied Computing (SAC'94)*, ss. 188–193. ACM Press, 1994.

[85] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M. Vecchi. Optimization by simmulated annealing. *Science*, 220:621–680, 1983.

[86] V. Klee, G.J. Minty. How good is the simplex algorithm. W: O. Shisba, editor, *Inequalities III*, ss. 159–175. Academic Press, 1972.

[87] G.A. Kochenberger, B.A. McCarl, F.P. Wyman. A heuristic for general integer programming. *Decision Sciences*, 5:36–44, 1974.

[88] B. Korte, D. Hausmann. An analysis for the greedy algorithm for independence systems. *Ann. Discrete Math.*, 2:65–74, 1978.

[89] B. Korte, L. Lovász, R. Schrader. *Greedoids.* Springer, Heidelberg, 1991.

[90] J.B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:48–50, 1956.

[91] J.L. Kulikowski. *Zarys Teorii Grafów.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.

[92] E.L. Lawler, J.M. Moore. A functional equation and its application to resource alocation and sequencing problems. *Management Science*, 16:77–84, 1969.

[93] J.S. Lee, M. Guignard. An approximate algorithm for multidimensional zero-one knapsack problems - a parametric approach. *Management Science*, 34:402–410, 1988.

[94] T.-E. Lee, G.-T. Oh. The asymptotic value-to-capacity ratio for the multi-class stochastic knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 103:584–594, 1997.

[95] L.A. Levin. Average case complete problems. *SIAM J. Comput.*, 15:285–286, 1986.

[96] M. Loève. *Probability Theory I.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

[97] A. Løkketagen, K. Jörnsten, S. Storøy. Tabu search within a pivot and complement framework. *International Transactions of Operations Research*, 1:305–316, 1994.

[98] A. Løkketangen, F. Glover. Probabilistic move selection in tabu search for zero-one mixed integer programming problems. W: I.H. Osman and J.P. Kelly, editors, *Meta-Heuristics*, ss. 467–487. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[99] A. Løkketangen, F. Glover. Solving zero-one mixed integer programming problems using tabu search. *European Journal of Operational Research*, to appear.

[100] G.S. Lorie, L. Savage. Three problems in capital rationing. *Journal of Business*, 28:229–239, 1955.

[101] R. Loulou, E. Michaelides. New greedy-like heuristics for the multidimensional 0-1 knapsack problem. *Operations Research*, 27:1101–1114, 1979.

[102] G.S. Lueker. On the average difference between the solution to linear and integer knapsack problems. W: *Applied Probability-Computer Science, the Interface, Vol 1*, ss. 489–504. Birkhauser, Basel, 1982.

[103] M.J. Magazine, O. Oguz. A heuristic algorithm for the multidimensional zero-one knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 16:319–326, 1984.

[104] J.W. Mamer, K.E. Schilling. On the growth of random knapsacks. *Discrete Applied Mathematics*, 28:223–230, 1990.

[105] S. Martello, P. Toth. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations.* Wiley & Sons, 1990.

[106] M. May, K. Szkatuła. On the bipartite crossing number. *Control and Cybernetics*, 17:85–98, 1988.

[107] M. Meanti, A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie, C. Vercellis. A probabilistic analysis of the multiknapsack value function. *Mathematical Programming*, 46:237–247, 1990.

[108] M. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.

[109] G.L. Nemhauser, Z. Ullmann. Discrete dynamic programming and capital allocation. *Management Science*, 15:494–505, 1969.

[110] G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.

[111] C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.

[112] R.G. Parker, R.L. Rardin. *Discrete Optimization.* Academic Press, Boston, 1988.

[113] H. Pirkul. A heuristic solution procedure for the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Naval Research Logistics*, 34:161–172, 1987.

[114] C.N. Potts, L.N. Van Wassenhove. Algorithms for scheduling a single machine to minimize the weighted number of late jobs. *Management Science*, 34:843–858, 1988.

[115] A.H.G. Rinnooy Kan. Probabilistic analysis of algorithms. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:365–384, 1987.

[116] A.H.G. Rinnooy Kan, L. Stougie. Probabilistic analysis of algorithms. W: J.K. Lenstra, H. Tijms, T. Volgenant, editors, *Twenty Five Years of Operations Research in the Netherlands*, ss. 104–121. Math. Centrum Wish. Inform, Amsterdam, 1989.

[117] A.H.G. Rinnoy Kan, L. Stougie, C. Vercellis. A class of generalized greedy algorithms for the multi-knapsack problem. *Discrete Applied Mathematics*, 42:279–290, 1993.

[118] G. Rudolph, J. Sprave. A cellular genetic algorithm with self-adjusting acceptance threshold. W: *Proceedings of the First IEE/IEEE Internatinal Confernce on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications*, ss. 365–372, London, 1995. IEE.

[119] G. Rudolph, J. Sprave. Significance of locality and selection pressure in the grand deluge evolutionary algorithm. W: H.M. Voigt, W. Ebeling, I. Rechenberg, H.P. Schwefel, editors, *Parallel Problem Solving from Nature IV. Proceedings of the International Conference on Evolutionary Computation*, ss. 686–694. Springer, Lecture Notes in Computer Science, 1996.

[120] S.K. Sahni. Algorithms for scheduling independent jobs. *Journal of ACM*, 23:116–127, 1976.

[121] K.E. Schilling. The growth of m-constraint random knapsacks. *European Journal of Operational Research*, 46:109–112, 1990.

[122] K.E. Schilling. Random knapsacks with many constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 48:163–174, 1994.

[123] S. Senju, Y. Toyoda. An approach to linear programming with 0-1 variables. *Management Science*, 15:196–207, 1968.

[124] W. Shih. A branch and bound method for the multiconstraint zero-one knapsack problem. *Journal of the Operational Research Society*, 30:369–378, 1979.

[125] S. Smale. On the average number of steps of the simplex method of lineaar programming. *Mathematical Programming*, 27:241–262, 1983.

[126] A.L. Soyster, B. Lev, W. Slivka. Zero-one programming with many variables and few constraints. *European Journal of Operational Research*, 2:195–201, 1978.

[127] J.M. Steele. Probabilistic and worst case analyses of classical problems of combinatorial optimization in Euclidean space. *Marhematics of Operations Research*, 15(4):749–770, 1990.

[128] J.M. Steele. *Probability Theory and Combinatorial Optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadephia, 1996.

[129] H.I. Stern, Z. Avivi. The selection and scheduling of textile orders with due dates. *European Journal of Operational Research*, 44:11–16, 1990.

[130] A. Straszak, M. Libura, J. Sikorski, D. Wagner. Computer-assisted constrained approval voting. *Group Decision and Negotiation*, 2:375–385, 1993.

[131] M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik. *Discrete Optimization Algorithms.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1983.

[132] K. Szkatuła. Probabilistic analysis of the sequencing jobs with deadlines problem and the threshold algorithm. W: G.Menga and V.Kempe, editors, *Proceedings of the Workshop on Informatics in Industrial Automation*, ss. 113–124, Berlin, 1989.

[133] K. Szkatuła. Analiza probabilistyczna wielowymiarowych, ograniczonych całkowitoliczbowych zadań załadunku. *Techniczeskaja Kibernetika*, 4:236–241, 1994. (w języku rosyjskim).

[134] K. Szkatuła. On the asymptotical growth of multi-constraint entirely random knapsacks. W: *Systems Analysis and Decision Support in Economics and Technology*, ss. 299–304, Warszawa, 1994.

[135] K. Szkatuła. On the growth of entirely random multi-constraint 0-1 knapsacks. W: *BOS 93, Trzecia Konferencja Badań Operacyjnych I Systemowych*, ss. 205–304, Warszawa, 1994.

[136] K. Szkatuła. On the growth of multi-constraint random knapsacks with various right-hand sides of the constraints. *European Journal of Operational Reserch*, 73:199–204, 1994.

[137] K. Szkatuła. Analiza średniego przypadku m-wymiarowych zadań załadunku. W: *Wspomaganie Decyzji, Systemy Eksperckie*, ss. 195–200, Warszawa, 1995.

[138] K. Szkatuła. The growth of multi-constraint random knapsacks with large right-hand sides of the constraints. *Operations Research Letters*, 21:25–30, 1997.

[139] K. Szkatuła. The growth of multi-constraint random knapsacks with mixed right-hand-sides of the constraints. Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa, 1997.

[140] K. Szkatuła. Random sequencing jobs with deadlines problem: growth of the optimal solutions values. *European Journal of Operational Research*, 109:160–169, 1998.

[141] K. Szkatuła, M. Libura. Probabilistic analysis of simple algorithms for binary knapsack problem. *Control and Cybernetics*, 12:147–157, 1983.

[142] K. Szkatuła, M. Libura. On probabilistic properties of greedy like algorithms for the binary knapsack problem. W: *Stochastics in Combinatorial Optimization*, Singapore, 1987. World Scientific Publishing.

[143] J. Thiel, S. Voss. Some experiences on solving multiconstraint zero-one knapsack problems with genetic algorithms. *INFOR*, 32:226–242, 1994.

[144] Y. Toyoda. A simplified algorithm for obtaining approximate solutions to zero-one programming problems. *Management Science*, 21:1417–1427, 1975.

[145] A. Volgenant, J.A. Zoon. An improved heuristic for multidimensional 0-1 knapsack problems. *Journal of the Operational Research Society*, 41:963–970, 1990.

[146] S. Walukiewicz. *Programowanie dyskretne*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.

[147] B. Weide. *Statistical methods in algorithm design and analysis*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsbutgh, PA, 1978. CMU-CS 78-142.

[148] H.M. Weingartner. *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*. Markham Publishing, Chicago, 1967.

[149] H.M. Weingartner, D.N. Ness. Methods for the solution of the multidimensional 0/1 knapsack problem. *Operations Research*, 15:83–103, 1967.

[150] S.H. Zanakis. Heuristic 0-1 linear programming: an experimental comparison of three methods. *Management Science*, 24:91–104, 1977.

[151] K. Zorychta, W. Ogryczak. *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe: metoda podziału i ograniczeń.* Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 1981.

IBS Serie
44246
Bibl. podręczna

Analiza przypadku średniego w optymalizacji dyskretnej

Wielowymiarowe zadanie załadunku oraz zadanie szeregowania prac

Krzysztof Szkatuła

W monografii omawiane są wybrane zadania optymalizacji dyskretnej i metody ich rozwiązywania oraz problematyka analizy złożoności obliczeniowej zadań i algorytmów.

Głównym celem książki jest wykazanie, na przykładzie wielowymiarowego zadania załadunku i zadania szeregowania prac, że przy zastosowaniu niezbyt zaawansowanego aparatu rachunku prawdopodobieństwa można uzyskać wartościowe wyniki analizy przypadku średniego w optymalizacji dyskretnej.

Wyniki zaprezentowane w monografii potwierdzają, że analiza przypadku średniego jest bardzo efektywnym narzędziem wspomagającym i uzupełniającym powszechnie stosowane do analizy zadań i algorytmów optymalizacji dyskretnej podejście przypadku najgorszego.

ISBN 83-85847-39-1
ISSN 0208-8029

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl**