



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

# AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa  
z okazji  
70-lecia urodzin

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

pod redakcją  
Jakuba Gutenbauma



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

# **AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE**

**Książka jubileuszowa  
z okazji  
70-lecia urodzin**

**PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA**

**pod redakcją  
Jakuba Gutenbauma**

Warszawa 2002

Książka jubileuszowa z okazji  
70-lecia urodzin  
Profesora Kazimierza MAŃCZAKA

Redaktor  
prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

**Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN**

**Warszawa 2002**

**ISBN 83-85847-78-2**

**Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN**  
**ul. Newelska 6 01-447 Warszawa**  
**<http://www.ibspan.waw.pl>**

Opracowanie składopisu: Anna Gostyńska, Jadwiga Hartman

Druk: KOMO-GRAF, Warszawa  
nakład 200 egz., 34 ark. wyd., 31 ark. druk.

# MODELE MATEMATYCZNE DO WSPOMAGANEGO KOMPUTEROWO STEROWANIA SYSTEMAMI PRODUKCYJNYMI

*Franciszek Milkiewicz*

*Katedra Automatyki, Wydział Elektrotechniki i Automatyki  
Politechniki Gdańskiej*

*Abstract: A unified approach to mathematical modeling of controlled production systems is presented. The considered set of decisions includes not only the production process but also: the supply of raw materials, the acquisition of final products, the repairs and maintenance of technological units, etc. Models of the production system include variables, which represent the technological media and the technical states of production equipment. The proposed methods are characterized by the consideration of time limits of the validity of decision and the time of their introduction.*

*Keywords: control of systems, mathematical models of production systems, supply processes, acquisition processes, repair processes.*

## 1. Wprowadzenie

Systemem produkcyjnym (w skrócie SP) nazywany jest dalej złożony obiekt sterowania, którego celem jest przetwarzanie określonych surowców w określone produkty i dla którego obiektywną miarą realizacji celu jest zysk. Sterowanie SP polega na sterowaniu wszystkimi rodzajami działalności występującymi w SP. Są to: a). działalność podstawowa, którą jest produkcja, czyli przetwarzanie surowców w produkty, b). działalności stowarzyszone (z produkcją): zaopatrzenie w surowce, zbycie produktów, renowacja urządzeń w których przebiegają procesy produkcyjne, procesy zaopatrzenia i procesy zbytu, działalność inwestycyjna i modernizacyjna, c). działalności pomocnicze: księgowość, kadry, działalność socjalna i inne. W pracach Milkiewicza i in. (1995, 1999a) pokazano, iż problem sterowania SP można zdekomponować na rozwiązywane szeregowo problemy: problem A sterowania działalnością podstawową (produkcją) z równoczesnym wyznaczaniem zadań dla problemów sterowania działalnościami

stowarzyszonymi, problemy B sterowania działalnościami stowarzyszonymi w oparciu o zadania wyznaczone dla nich w problemie A, problemy C sterowania działalnościami pomocniczymi realizującymi zadania wynikające z obsługi problemów A, B. Przedmiotem dalszych rozważań jest problem A, nazywany dalej wprost problemem sterowania SP, a w szczególności model matematyczny służący do jego rozwiązywania.

Ze względu na złożoność problemu i niemożliwość ujęcia w jego modelu wszystkich czynników, w tym niemożliwość uzyskania dokładnej informacji o zakłóceniach, które będą działały na SP w przedziale czasowym objętym sterowaniem, powszechnie stosowanym sposobem jego rozwiązywania jest sterowanie w którym człowiek podejmuje decyzje sterownicze korzystając ze wspomaganie komputerowego. Sterowanie to, ze względu na konieczność zwiększenia jego efektywności przy obecności zakłóceń, powinno być sterowaniem krocącym, w którym w każdym kroku, przed podjęciem decyzji sterowniczych określa się aktualny stan SP oraz aktualne prognozy zakłóceń. Dla takiego sterowania przedstawiony jest w niniejszej pracy model matematyczny problemu. Model ten został zbudowany dla systemów w których przebiegają ciągłe procesy produkcyjne (do systemów takich należy większość zakładów przemysłu chemicznego i petrochemicznego, hutniczego, celulozowo papierniczego i innych), w oparciu o przytoczone niżej sformułowanie matematyczne problemu sterowania SP. Uwzględnia on także stosowaną powszechnie strukturę organizacyjną SP, która jest strukturą wielopoziomową z wyodrębnionymi pionami działalności produkcyjnej i działalności stowarzyszonych, w której występują także poziome powiązania informacyjno decyzyjne między poszczególnymi pionami. Uwzględnia również specyfikę specjalnego rodzaju sterowania, jakim jest zarządzanie. Rozpatrywany problem łączy bowiem w sobie problematykę sterowania ze sfery działalności specjalisty automatyka z problematyką sterowania ze sfery zarządzania. W dotychczasowej literaturze problematyki te były z reguły rozpatrywane oddzielnie.

## **2. Określenia stosowane w pracy**

- 1) System produkcyjny SP, jest to zbiór powiązanych między sobą zespołów produkcyjnych ZP, zespołów zaopatrzeniowych ZZ, zespołów ekspedycyjnych ZE, którego celem jest przetwarzanie określonych surowców w określone produkty w taki sposób, by w okresie pracy systemu uzyskiwał on maksymalny zysk.

- 2) Zespół produkcyjny ZP, jest to proces produkcyjny i zbiór stanowisk w których ten proces się odbywa. Zespół ekspedycyjny ZE, jest to proces ekspedycji produktów do odbiorców i zbiór stanowisk w których ten proces się odbywa. Zespół zaopatrzeniowy ZZ, jest to proces zaopatrywania SP w surowce i zbiór stanowisk w których ten proces się odbywa.
- 3) Proces produkcyjny, jest to proces technologiczny lub zbiór powiązanych ze sobą procesów technologicznych, w rezultacie których surowiec lub półprodukt przetwarzany jest na produkt, lub na inny półprodukt.
- 4) Proces technologiczny, jest to proces w którym określone medium fizyczne zmienia swój stan fizyczny. Proces technologiczny przebiega w stanowisku technologicznym.
- 5) Produkt, jest to określone medium fizyczne (materia lub energia), które posiada rynkowe właściwości użytkowe określane przy pomocy zdefiniowanych wskaźników jakości.
- 6) Półprodukt, jest to medium fizyczne, które powstaje w określonym procesie produkcyjnym i które posiada właściwości wymagane przez kolejny proces produkcyjny, w którym podlega ono dalszemu przetwarzaniu.
- 7) Proces ekspedycyjny, jest to proces w którym produkty wytwarzane przez SP są załadowywane na środki transportu i wysyłane do odbiorców.
- 8) Proces zaopatrzeniowy, jest to proces w którym surowce zasilające SP są odbierane i kierowane do odpowiednich magazynów, bądź do odpowiednich ZP.
- 9) Media podstawowe, są to surowce, półprodukty i produkty.
- 10) Media pomocnicze, są to media fizyczne nie wchodzące w skład mediów podstawowych, które są jednak niezbędne do prowadzenia procesów technologicznych.
- 11) Media uboczne, są to media fizyczne powstające w czasie trwania procesu produkcyjnego z wykorzystanych w nim mediów pomocniczych i wydalone do otoczenia SP w postaci spalin, wód wylotowych z urządzeń chłodzących, ścieków itp.

### 3. Podstawowe założenia

- 1) W zespołach przebiegają ciągłe, lub ciągłe przełączalne procesy technologiczne.
- 2) Każde medium podstawowe, pomocnicze i uboczne opisywane jest wektorem wskaźników jakości identyfikującym medium (mogą nimi być np. procentowe udziały poszczególnych pierwiastków chemicznych, gęstość itp.)
- 3) Aktualny stan fizyczny medium określa jego wektor stanu fizycznego, którego składowymi są takie wielkości fizyczne, jak na przykład temperatura, ciśnienie.
- 4) Niektóre zespoły mogą pracować w więcej niż w jednym reżimie. Reżim pracy ZP charakteryzowany jest rodzajami równocześnie wytwarzanych w ZP produktów i półproduktów, bądź rodzajami równocześnie zużywanych surowców lub półproduktów. Reżim pracy ZZ charakteryzowany jest rodzajem sprowadzanego surowca, zaś ZE rodzajem ekspediowanego produktu.
- 5) Zespół może pracować równocześnie tylko w jednym reżimie. Przy pracy zespołu w przedziale czasowym objętym sterowaniem w więcej niż w jednym reżimie, konieczne jest więc ich przełączanie.
- 6) Stan techniczny stanowisk w zespołach charakteryzuje wektor stanu technicznego zespołu, w którego skład wchodzi wektor stopni zużycia i wektor stopni dezaktywacji stanowisk technologicznych występujących w zespole.
- 7) Zespoły są wyposażone w układy regulacji stałowartościowej zapewniające stabilizację wszystkich podstawowych współrzędnych stanu tych procesów, wskutek czego znajdują się one w stanie ustalonym i można je opisywać statycznymi modelami matematycznymi, w których wielkościami sterującymi są wartości zadane wielkości regulowanych.
- 8) W SP nie występują procesy inwestycyjne.

### 4. Sformułowanie problemu sterowania systemem produkcyjnym

Problem sterowania SP definiowany jest dla przedziału czasowego  $[t_\mu, t_\mu + T]$ ,  $\mu = 0, 1, 2, \dots$  w następujący sposób: dla kolejnych następujących po sobie momentów czasowych  $t_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, \dots$  należy każdorazowo wybierać i wdrażać takie składowe wektora decyzyjnego  $\mathbf{D}$ , by mimo

działania zakłóceń zapewnić wykonanie przez SP aktualnych w chwili  $t_\mu$  i możliwych do realizacji zadań chwilowych, bądź zadań definiowanych dla określonych podprzedziałów czasowych  $[t_\nu, t_{\nu+1}) \in [t_\mu, t_\mu + T]$ ,  $\nu \in \overline{0, N-1}$  przy jednoczesnym osiągnięciu przez SP w przedziale czasowym  $[t_\mu, t_\mu + T]$  maksymalnej wartości zysku  $Q(t_\mu, t_\mu + T)$ , który jest miarą jakości realizacji zadań przez SP, oraz przy zachowaniu ograniczeń zarówno wewnętrznych jak i zewnętrznych SP, w tym także przy zachowaniu warunków bezpieczeństwa człowieka i środowiska. Sformułowanie to można zapisać w postaci:

$$\max_{D(t)_\mu \in \Delta_\mu} Q(t_\mu, t_\mu + T) \quad t \in [t_\mu, t_\mu + T] \quad (1)$$

gdzie  $Q(t_\mu, t_\mu + T)$  jest zyskiem osiąganym przez SP w przedziale czasowym  $[t_\mu, t_\mu + T]$ ,  $t_\mu$  jest chwilą początkową, zaś  $t_\mu + T$  jest chwilą końcową przedziału czasowego objętego sterowaniem,  $T$  jest horyzontem czasowym sterowania,  $D(t)_\mu$  jest wektorem decyzyjnym w chwili  $t$  wyznaczonym w chwili  $t_\mu$ ,  $\Delta_\mu$  jest zbiorem dopuszczalnych decyzji w SP określonym w chwili  $t_\mu$  – zbiór ten wyznaczają ograniczenia wynikające z zadań stawianych SP, ograniczenia wynikające z charakterystyk SP w tym ograniczenia techniczne, technologiczne, finansowe a także ograniczenia wynikające z wymogów bezpieczeństwa człowieka i środowiska.

Wielkości decyzyjne wchodzące w skład wektora  $D$  wybierane są spośród nastawialnych wielkości kształtujących poszczególne rodzaje działalności w SP. Powinny nimi być te wielkości nastawialne, które posiadają istotny wpływ na realizację zadań, na zysk oraz na kontrolowane ograniczenia jakie powinny być spełnione przez poszczególne rodzaje działalności w SP. Wyróżnia się następujące rodzaje wielkości decyzyjnych wchodzących w skład wektora  $D$ : wybór i rozlokowanie w czasie i na obiekty mocy remontowych, wybór harmonogramów remontów zespołów, zamówienia surowców, akceptacja zamówień na dostawę produktów, zamówienia środków transportowych potrzebnych do dostarczania produktów odbiorcom, zlecenia wysyłki (ekspedycji) produktów, wyznaczanie chwil czasowych przełączeń reżimów pracy zespołów, przyporządkowanie poszczególnych magazynów poszczególnym surowcom, półproduktom i produktom, zadania dobowe dla zespołów, nastawy wartości zadanych dla układów regulacji w ZP, ZE i ZZ. Każda wymieniona wyżej wielkość decyzyjna charakteryzowana jest przez przedział czasowy  $[t_d, t_d']$



o długości  $\Delta t_d$  (np. akceptacja zamówienia określonej ilości określonego produktu zapewnia dostawę tego produktu zamawiającemu w ciągu np. najbliższej dekady – w tym przypadku  $\Delta t_d = 10$  dni) nazywany dalej przedziałem czasowym ważności decyzji. Ponadto, decyzje powinny być podejmowane z odpowiednim wyprzedzeniem czasowym nazywanym dalej czasem wyprzedzenia wdrożenia decyzji i oznaczanym symbolem  $\Delta t_w$ . Dla decyzji dotyczących nastaw wartości zadanych w układach regulacji  $t_d \equiv t_d'$  oraz  $\Delta t_d \equiv 0$ .

Na SP działają zakłócenia, z których najbardziej istotnymi są następujące: zakłócenia harmonogramów realizacji remontów zespołów, zmiany kosztów realizacji remontów, możliwości i warunki zbytu produktów, zakłócenia w odbiorze produktów, możliwości zaopatrzenia w surowce i zakłócenia ich dostawy, ceny surowców, ceny produktów, wskaźniki jakości surowców, zakłócenia w dostawie mediów pomocniczych i ich wskaźniki jakości, warunki atmosferyczne, awarie urządzeń.

Długość horyzontu czasowego sterowania  $T$ , a tym samym długość przedziału czasowego dla którego formułowany jest problem sterowania SP określa właściciel lub użytkownik SP. Powinna ona być możliwie duża – teoretycznie powinna być równa okresowi życia SP – nie powinna być jednak większa od długości przy której uchyby prognozowania przyszłych warunków pracy SP (przyszłych zakłóceń) są tak duże, iż niemożliwa jest racjonalna ocena skutków podjętych w SP w chwili  $t_\mu$  decyzji. Innymi słowy, nie powinna ona być większa od tej, przy której obszar zmian wartości przyjętej miary  $Q$  jakości realizacji zadań przez SP zawiera się w obszarze błędów jej obliczania spowodowanych głównie błędami prognozowania warunków pracy SP. Z drugiej strony, długość  $T$  przedziału czasowego objętego sterowaniem nie może być krótsza od długości minimalnej  $T_{\min}$  wynikającej z wymogu możliwości oszacowania skutków, a więc i jakości sterowania poszczególnymi rodzajami działalności SP. Wartość  $T_{\min}$  zależy od wartości stałych czasowych sterowanych procesów występujących w poszczególnych rodzajach działalności. Powinna ona być przy tym znacząco większa od największej stałej czasowej tych procesów. Przy pominięciu działalności inwestycyjnej, będzie ona oczywiście największa dla działalności remontowej, dla której wynosi zależnie od rodzaju zespołów w SP od jednego roku do kilku lat. Należy brać także pod uwagę powszechnie obowiązującą zasadę rozliczania SP w cyklach rocznych. W związku z tym,  $T_{\min}$  powinno mieć przeważnie wartość nie mniejszą niż 1 rok.

Rozwiązanie sformułowanego wyżej problemu sterowania SP możliwe jest jedynie przy dysponowaniu jego modelem matematycznym. Wynika to z faktu konieczności prognozowania zakłóceń mających decydujący wpływ na zachowanie się SP.

## 5. Zasady budowy modelu matematycznego SP

Zbudowanie modelu matematycznego problemu sterowania SP, w którym zmiennymi niezależnymi byłyby składowe wektora decyzyjnego  $D$  charakteryzującego się czasem wyprzedzenia podjęcia decyzji i przedziałem czasowym ważności decyzji napotykałoby na formalne trudności. Aby ich uniknąć buduje się model matematyczny problemu zastępczego (2), w którym wektor zmiennych niezależnych jest definiowany w sposób tradycyjny, bez wprowadzania dla niego dodatkowych charakterystyk.

$$\max_{\mathbf{u}(t)_\mu \in A_\mu} Q(t_\mu, t_\mu + T) \quad (2)$$

gdzie  $A_\mu$  jest zbiorem wartości dopuszczalnych wektora sterującego  $\mathbf{u}(t)_\mu$ , określonym w chwili  $t_\mu$  przez relacje ograniczające problemu sterowania SP.

W skład wektora sterującego, oznaczanego dalej symbolem  $\mathbf{u}$ , wchodzi wybrane nastawialne wielkości fizyczne będące zadaniami dla układów regulacji stałowartościowej (wartości zadane wielkości regulowanych), chwile czasowe wyłączeń i załączeń reżimów pracy zespołów, chwile czasowe przełączeń powiązań zespołów z magazynami oraz chwile czasowe rozpoczynania postojów renowacyjnych zespołów. Z rozwiązania tak sformułowanego problemu zastępczego wylicza się przebiegi czasowe  $\mathbf{u}(t)_\mu$ , a z nich, posługując się przedziałami czasowymi ważności decyzji  $[t_d, t_d']$  określa się składowe wektora  $D$ .

Rozróżnić należy pojęcie opisu matematycznego i pojęcie modelu matematycznego obiektu sterowanego. Pod pojęciem opisu matematycznego obiektu rozumie się zbiór wszystkich relacji matematycznych wiernie opisujących zjawiska zachodzące w sterowanym obiekcie. Natomiast model matematyczny obiektu sterowanego jest tylko mniej lub bardziej wiernym przybliżeniem opisu matematycznego modelowanego obiektu. Dla tego samego obiektu można budować modele matematyczne o różnych stopniach ich zgodności z opisem matematycznym obiektu. Im model matematyczny posiada większy stopień zgodności z opisem matematycznym obiektu, tym

trudniej go zbudować i tym kosztowniejsza jest jego budowa. Stopień zgodności modelu matematycznego z opisem matematycznym obiektu mierzony jest zwykle błędami modelu w stosunku do opisu i podlega wyborowi. Można go kształtować przez odpowiedni dobór wielkości wejściowych i wielkości wyjściowych modelu oraz przez odpowiedni wybór struktury i stopnia szczegółowości relacji występujących w modelu. Strukturę relacji modelu wybiera się albo taką jak struktura relacji opisu matematycznego obiektu, jeśli jest ona znana, albo taką jaka jest wygodna ze względu na wybrane metody i algorytmy sterowania SP. Czynniki wpływającymi na wybór stopnia zgodności modelu z opisem, poza kosztami jego budowy, są także charakterystyki zakłóceń losowych oddziałujących na SP i metody ich prognozowania oraz rodzaje metod i algorytmów stosowanych do sterowania SP. W rezultacie, wyboru tego należy dokonywać równocześnie z wyborem metod i algorytmów prognozowania zakłóceń oraz metod i algorytmów sterowania SP. Kryterium wyboru powinno być zgodne z kryterium według którego ocenia się działanie SP, czyli zgodnie ze sformułowaniem problemu sterowania SP, powinien nim być zysk  $Q$ .

W skład modelu matematycznego SP wchodzi: model matematyczny miary jakości realizacji zadań (funkcjonał celu) przez SP, model matematyczny zadań stawianych SP, modele matematyczne ZP, ZE, ZZ, model matematyczny powiązań ZP, ZE, ZZ między sobą i z otoczeniem zewnętrznym. W modelu SP powinna być odzwierciedlona decydowalna struktura tych powiązań, a tym samym decydowalna struktura SP. Strukturę tą kształtują decyzje o przekazywaniu zespołów do remontów bądź do ruchu (po remontach) – kształtują one tak zwaną strukturę dyspozycyjną SP, oraz decyzje dotyczące przełączeń reżimów pracy zespołów, decyzje dotyczące które kształtują tak zwaną strukturę roboczą SP. Niżej przedstawia się te modele dla przypadku zdeterminowanych prognoz zakłóceń działających na SP. Ograniczenie się do przypadku zdeterminowanego jest podyktowane z jednej strony brakiem skutecznych narzędzi do rozwiązywania problemów niezdeterminowanych jakimi są problemy sterowania SP i trudnościami lub wręcz niemożliwością określenia rozkładów gęstości prawdopodobieństw istotnych zakłóceń, z drugiej zaś strony wystarczającą na razie dla praktyki dokładnością proponowanego sterowania kroczącego z aktualizacją w każdym kroku stanu SP i prognoz zakłóceń.

## 6. Miara jakości realizacji zadań SP

Zadania stawiane SP powinny być tak realizowane, by SP osiągał maksymalny zysk w przedziale czasowym objętym sterowaniem. Zysk ten jest więc miarą jakości realizacji zadań przez SP. Wyraża się on formułą:

$$Q(t_\mu, t_\mu + T) = W(t_\mu, t_\mu + T) - K(t_\mu, t_\mu + T) \quad (3)$$

gdzie  $W(t_\mu, t_\mu + T)$  jest wartością zdyskontowaną wpływów finansowych, zaś  $K(t_\mu, t_\mu + T)$  jest wartością zdyskontowaną kosztów w przedziale czasowym  $[t_\mu, t_\mu + T]$ , przy czym

$$W(t_\mu, t_\mu + T) = \sum_{\lambda=1}^L \delta_\lambda \int_{\tau_{\lambda-1}}^{\tau_\lambda} \sum_{j=1}^{m_\lambda} c_j(t) \cdot F_j(t) \cdot dt \quad (4)$$

$$K(t_\mu, t_\mu + T) = \sum_{\lambda=1}^L \delta_\lambda \cdot K_\lambda \quad (5)$$

gdzie  $\tau_\lambda$  jest chwilą końcową  $\lambda$ -tego roku wchodzącego w skład przedziału czasowego  $[t_\mu, t_\mu + T]$ , przy czym dla  $\lambda=1$  mamy  $\tau_{\lambda-1} = \tau_0 = t_\mu$ ,  $F_j(t)$ ,  $c_j(t)$  są odpowiednio natężeniem przepływu i ceną jednostkową  $j$ -tego produktu wytwarzanego w SP w chwili  $t$ ,  $\delta_\lambda$  jest współczynnikiem dyskonta dla  $\lambda$ -tego roku,  $K_\lambda$  jest kosztem poniesionym w SP w  $\lambda$ -tym roku,  $m_\lambda$  jest liczbą produktów wytwarzanych przez SP w  $\lambda$ -tym roku.

Współczynnik dyskonta dla  $\lambda$ -tego roku, w przypadku gdy wartość zysku sprowadza się do roku bieżącego dla którego  $\lambda=1$ , wyraża się wzorem:

$$\delta_\lambda = \frac{1}{(1+p)^{\lambda-1}} \quad (6)$$

w którym  $p$  oznacza tak zwaną stopę dyskonta.

Koszty poniesione przez SP w  $\lambda$ -tym roku można wyrazić wzorem:

$$K_\lambda = \int_{\tau_{\lambda-1}}^{\tau_\lambda} \left[ \sum_{i=1}^{n_\lambda} c_{0i}(t) \cdot F_{0i}(t) + \sum_{k=1}^{M_\lambda} \sum_{r=1}^{M_\lambda^{(k)}} K^{(k,r)}(t) \right] \cdot dt +$$

$$+ \sum [K_{P,\lambda}^{(k)} + K_{R,\lambda}^{(k)}] + K_{C,\lambda} \quad (7)$$

gdzie  $c_{0i}(t)$ ,  $F_{0i}(t)$  – cena jednostkowa, natężenie dopływu  $i$ -tego surowca do SP w chwili  $t$ ,  $K^{(k,r)}(t)$  – natężenie strumienia kosztów ruchomych  $k$ -tego zespołu w  $r$ -tym reżimie pracy w chwili  $t$ ,  $K_{P,\lambda}^{(k)}$ ,  $K_{R,\lambda}^{(k)}$ ,  $K_{C,\lambda}$  – koszty przełączeń reżimów pracy i koszty renowacji  $k$ -tego zespołu oraz koszty stałe (niezależne od decyzji sterujących) w  $\lambda$ -tym roku,  $n_\lambda$ ,  $m_\lambda$ ,  $M_\lambda$ ,  $M_\lambda^{(k)}$  – liczby identyfikujące w  $\lambda$ -tym roku:  $n_\lambda$  – ty surowiec,  $m_\lambda$  – ty produkt,  $M_\lambda$  – ty zespół,  $M_\lambda^{(k)}$  – ty reżim pracy  $k$ -tego zespołu.

Funkcjonał celu (3) posiada charakter losowy. Przyczyną tego są zakłócenia losowe wpływające na wartości parametrów relacji (3).

## 7. Zadania dla SP

Zadania dla SP formułuje się dla przedziału czasowego  $[t_\mu, t_\mu + T]$  objętego sterowaniem. Są nimi:

- a) Zadania zbytu produktów ilościowe dla SP posiadających możliwości magazynowania produktów i zaopatrujących odbiorców posiadających także takie możliwości:

$$\Phi_{j,\min}(t_\nu, t_{\nu+1}) \leq \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} F_j(t) \cdot dt \leq \Phi_{j,\max}(t_\nu, t_{\nu+1}) \quad (8)$$

gdzie  $\Phi_{j,\min}(t_\nu, t_{\nu+1})$  i  $\Phi_{j,\max}(t_\nu, t_{\nu+1})$  są odpowiednio ilością  $j$ -tego produktu w przedziale czasowym  $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ , którą zgodnie z zawartymi umowami SP powinien dostarczyć odbiorcom, i ilością którą SP może sprzedać (określoną na podstawie badań rynku),  $[t_\nu, t_{\nu+1}] \in [t_\mu, t_\mu + T]$ ,  $\nu \in \overline{0, N-1}$ ,  $t_N = t_\mu + T$ ,  $j \in \overline{1, m}$ . Ten rodzaj zadań występuje w większości SP.

- b) Zadania zbytu produktów ilościowe dla SP nie posiadających możliwości magazynowania produktów i zaopatrujące odbiorców także nie posiadających takich możliwości mają postać:

$$F_j(t) = F_j^0(t) \quad (9)$$

gdzie  $F_j^0(t)$  jest chwilowym zapotrzebowaniem odbiorców na  $j$ -ty produkt, które SP jest zobowiązany pokryć. Ten typ zadań występuje głównie w systemach produkcyjno dystrybucyjnych, takich jak systemy elektroenergetyczne, systemy ciepłownicze, systemy zaopatrywania miast w wodę.

- c) Zadania zbytu produktów jakościowe. Określają je wymagania na jakość produktów definiowane przy pomocy ograniczeń na wektor wskaźników jakości  $\mathbf{J}_j$ :

$$\mathbf{J}_j(t) \in \mathfrak{S}_j \quad j \in \overline{1, m} \quad (10)$$

gdzie  $\mathfrak{S}_j$  jest zbiorem wartości dopuszczalnych dla składowych wektora  $\mathbf{J}_j$ . W niektórych SP jakość produktów określa się wektorem ich stanu fizycznego. Ma to miejsce między innymi w systemie ciepłowniczym, w którym jakość produktu którym jest gorąca woda określa się jej temperaturą i ciśnieniem.

- d) Zadania zaopatrzenia w surowce posiadają postać:

$$\Phi_{0i, \min}(t_v, t_{v+1}) \leq \int F_{0i}(t) \cdot dt \leq \Phi_{0i, \max}(t_v, t_{v+1}) \quad (11)$$

gdzie  $\Phi_{0i, \min}(t_v, t_{v+1})$ ,  $\Phi_{0i, \max}(t_v, t_{v+1})$  są odpowiednio ilościami  $i$ -tego surowca w  $[t_v, t_{v+1}]$ , które SP powinien zgodnie z umowami z dostawcami przyjąć, które SP może zakupić.

- e) Zadania renowacyjne (obejmują wyłącznie zadania dla procesów remontowych) można przedstawić w postaci ograniczeń na wektory stopni zużycia  $\mathbf{S}^{(k)}(t)$  stanowisk technologicznych

$$\mathbf{S}^{(k)}(t) \leq \mathbf{S}_{\max}^{(k)} \quad (12)$$

gdzie składowymi wektora stopni zużycia mogą być przykładowo stopnie zużycia stanowisk wskutek zmniejszenia wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych, stopnie zużycia stanowisk mierzone głębokością wżerów korozyjnych itp. Ze względu na trudności pomiaru składowych wektora stopni zużycia, w praktyce zamiast niego przeważnie stosuje się czas  $t_S^{(k)}(t)$  pracy zespołu jaki upłynął w chwili  $t$

od ostatniego jego remontu. Wtedy, zamiast ograniczenia (12) stosuje się ograniczenie (13):

$$t_S^{(k)}(t) \leq t_{S,dop}^{(k)} \quad (13)$$

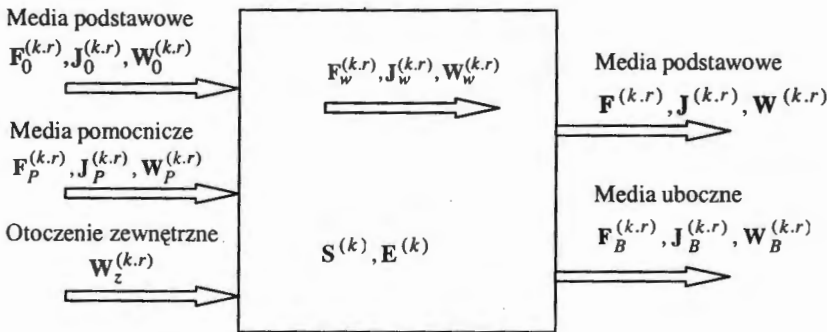
- f) Zadania związane z ochroną środowiska i zdrowia ludzkiego przedstawiane w postaci ograniczeń na odpowiednio zdefiniowane składowe wektora zagrożeń  $\mathbf{J}_{SR}$ :

$$\mathbf{J}_{SR} \in \mathfrak{S}_{SR} \quad (14)$$

gdzie składowymi wektora zagrożeń mogą być: zawartość dwutlenku siarki w powietrzu, zawartość węglowodorów w powietrzu, zawartości szkodliwych związków chemicznych w ściekach itp.

## 8. Zasady budowy modeli matematycznych zespołów

Modelem matematycznym zespołu (może nim być ZP lub ZE lub ZZ) nazywa się zbiór relacji wejściowo wyjściowych opisujących procesy przebiegające w zespole (procesy produkcyjne w ZP, procesy ekspedycyjne w ZE, procesy zaopatrzeniowe w ZZ) oraz zbiór relacji ograniczających przebieg tych procesów. Rozróżnia się przy tym modele matematyczne technologiczne i modele matematyczne cybernetyczne zespołów. Te ostatnie modele budowane są w oparciu o model matematyczny technologiczny. Podstawą do budowy modeli technologicznych jest schemat technologiczny zespołu. Na rys.1 przedstawiono strumienie materiałowo energetyczne występujące w  $k$ -tym zespole w jego  $r$ -tym reżimie pracy oraz identyfikujące je strumienie informacji. Na wejściu zespołu są to: media podstawowe (surowce lub półprodukty) wejściowe, media pomocnicze oraz otoczenie zewnętrzne (atmosfera otaczająca zespół). Na wyjściu zespołu są to: media podstawowe wyjściowe (produkty lub półprodukty) i media uboczne. Wewnątrz zespołu zaznaczono wyłącznie strumienie mediów podstawowych, gdyż jedynie ich przemiany dokonujące się w trakcie procesów technologicznych są istotne z punktu widzenia budowy modelu matematycznego zespołu. Strumienie materiałowe i energetyczne identyfikowane są wektorem natężeń przepływu  $\mathbf{F}$ , wektorem wskaźników jakości  $\mathbf{J}$  oraz wektorem stanu fizycznego  $\mathbf{W}$ . Na procesy technologiczne w zespole wpływa stan



Rys.1. Strumienie materiałowo energetyczne w  $k$ -tym zespole i w  $r$ -tym jego režimie.

fizyczny otoczenia zewnętrznego oznaczony wektorem  $W$  z indeksem  $z$ . Stan techniczny stanowisk technologicznych (urządzeń) zespołu charakteryzuje wektor  $S$  stopni ich zużycia i wektor  $E$  stopni ich dezaktywacji.

Budowę technologicznego modelu matematycznego każdego zespołu należy rozpoczynać od zdefiniowania wielkości wejściowych i wielkości wyjściowych zespołu, które będą także wielkościami wejściowymi i wyjściowymi modelu. Dopiero po rozwiązaniu tego problemu można przystąpić do określenia struktury i parametrów modelu. Definiowanie tych wielkości należy rozpoczynać od określenia wielkości wyjściowych zespołu. Możliwe to jest wtedy, gdy są znane wymagania stawiane produktom i półproduktom opuszczającym zespół. Wymagania te są znane dla zespołów końcowych w ciągach zespołów na drogach od surowców do produktów. Są nimi z reguły zespoły ekspedycji produktów ZE. Wielkościami wyjściowymi w tych zespołach są wielkości określone przez zadania zbytu produktów (8) do (10), zadania renowacyjne (12) lub (13), zadania (14) ochrony środowiska i zdrowia ludzkiego, odpowiednie składniki kosztów występujące we wzorze (7) oraz podlegające ograniczeniom wielkości charakteryzujące przebieg procesów technologicznych w zespole. Mając wielkości wyjściowe, przystępuje się do analizy procesów technologicznych przebiegających w tych zespołach. Na jej podstawie określa się technologiczny model matematyczny dla tych procesów, a z kolei na podstawie otrzymanego modelu określa się wielkości wejściowe zespołu. Następnie przystępuje się do określania wielkości wyjściowych i wielkości wejściowych oraz technologicznych modeli matematycznych dla zespołów zasilających zespoły końcowe. Realizuje się to w analogiczny sposób jak dla zespołów końcowych, przyjmując iż wielkościami wyjściowymi określonego zespołu znajdującego się tuż przed określonym zespołem



końcowym są wielkości wejściowe tego zespołu końcowego. Podobnie postępuje się przy określaniu wejść, wyjść i technologicznych modeli matematycznych pozostałych zespołów, zawsze wychodząc od już wcześniej zdefiniowanych wielkości wejściowych zespołów znajdujących się na wyjściu zespołu dla którego model matematyczny jest wyznaczany.

Model matematyczny cybernetyczny zespołu służy do celów sterowania procesami przebiegającymi w zespole. Jest on budowany na podstawie modelu matematycznego technologicznego zespołu. W modelu cybernetycznym zespołu wyróżnia się wektor wielkości wyjściowych  $y$ , wektory wielkości wejściowych: sterujących  $u$  i zakłócających  $z$ , oraz wektory stanu technicznego  $S$  i  $E$  zespołu. Składowe wektora sterującego  $u$  są wybierane spośród składowych wektorów natężeń przepływu  $F_0, F, F_w$ , wektorów wskaźników jakości  $J_0, J, J_w$  i wektorów stanu fizycznego  $W_0, W, W_w$  mediów podstawowych wejściowych, mediów podstawowych wyjściowych oraz mediów podstawowych wewnętrznych zespołu (mediów znajdujących się wewnątrz zespołu), a właściwie spośród wartości zadanych w układach regulacji stałowartościowej tych wielkości. W skład wektora zakłóceń  $z$  wchodzi składowe wektorów  $W_z, J_p, W_p, W_0$  oraz istotne dla konkretnego ZP składowe wektora  $J_0$ . W skład wektora wielkości wyjściowych  $y$  wchodzi wektory  $F_p$  oraz te składowe wektorów  $F, J, W, F_B, J_B, W_B, F_w, J_w, W_w$  które nie są wielkościami sterującymi. W dalszej części pracy będą omawiane tylko modele matematyczne technologiczne zespołów, gdyż przejście z nich do modeli cybernetycznych nie stanowi problemu. Dla uproszczenia zapisów przyjmuje się także iż horyzont czasowy  $T$  jest nie dłuższy niż 1 rok.

## 9. Modele matematyczne zespołów produkcyjnych

Model matematyczny technologiczny ZP buduje się w oparciu o prawa fizyko chemiczne, którym podlegają procesy technologiczne przebiegające w ZP i to zarówno procesy technologiczne ze sfery działalności produkcyjnej, jak i ze sfery działalności renowacyjnej. Spośród tych ostatnich brane są do modelu wyłącznie te, które mają istotny bezpośredni wpływ na przebieg procesów produkcyjnych w zespole. Dla  $k$ -tego ZP pracującego w  $r$ -tym reżimie, gdzie  $k \in \overline{1, M_p}$ ,  $r \in \overline{1, M_p^{(k)}}$ , model ten składa się z niżej wymienionych rodzajów relacji.

- a) Relacje między natężeniami przepływu, wskaźnikami jakości oraz stanem fizycznym mediów wyjściowych i natężeniami przepływu, wskaźnikami jakości oraz stanem fizycznym mediów wejściowych:

$$d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{L}^{(k,r)}[\mathbf{F}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{J}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_z^{(k,r)}(t), \mathbf{S}^{(k)}(t), \mathbf{E}^{(k)}(t)] = \mathbf{0} \quad (15)$$

gdzie:  $\mathbf{F}_{ZP}^{(k,r)}, \mathbf{J}_{ZP}^{(k,r)}, \mathbf{W}_{ZP}^{(k,r)}$  są wektorami, których składowymi są odpowiednio wektory  $\mathbf{F}_0^{(k,r)}, \mathbf{F}_w^{(k,r)}, \mathbf{F}^{(k,r)}, \mathbf{F}_P^{(k,r)}, \mathbf{F}_B^{(k,r)}$ , wektory  $\mathbf{J}_0^{(k,r)}, \mathbf{J}_w^{(k,r)}, \mathbf{J}^{(k,r)}, \mathbf{J}_P^{(k,r)}, \mathbf{J}_B^{(k,r)}$  oraz wektory  $\mathbf{W}_0^{(k,r)}, \mathbf{W}_w^{(k,r)}, \mathbf{W}^{(k,r)}, \mathbf{W}_P^{(k,r)}, \mathbf{W}_B^{(k,r)}$ , zaś  $d^{(k,r)}(t)$  jest zmienną binarną posiadającą dla  $r \in \overline{1, M_p^{(k)}}$  wartość 1, gdy  $k$ -ty ZP pracuje w  $r$ -tym reżimie i wartość 0, gdy  $k$ -ty ZP nie pracuje w  $r$ -tym reżimie oraz dla  $r = 0$  wartość  $d^{(k,0)} = 1$  odpowiadającą postojowi (remontowemu lub regeneracyjnemu)  $k$ -tego ZP i  $d^{(k,0)} = 0$  odpowiadającą gotowości  $k$ -tego ZP do pracy.

- b) Relacje ograniczeń:

$$d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{B}^{(k,r)}[\mathbf{F}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{J}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_z^{(k,r)}(t), \mathbf{S}^{(k)}(t), \mathbf{E}^{(k)}(t)] \leq \mathbf{0} \quad (16)$$

- c) Równania stanu technicznego:

$$d^{(k,r)}(t) \cdot \frac{d\mathbf{S}^{(k)}(t)}{dt} = d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{s}^{(k)}[\mathbf{F}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{J}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_z^{(k,r)}(t), \mathbf{S}^{(k)}(t), \mathbf{E}^{(k)}(t)] \quad (17)$$

$$\mathbf{S}^{(k)}(t_\mu) = \mathbf{S}_\mu^{(k)} \quad (18)$$

$$d^{(k,r)}(t) \cdot \frac{d\mathbf{E}^{(k)}(t)}{dt} = d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{e}^{(k)}[\mathbf{F}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{J}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_{ZP}^{(k,r)}(t), \mathbf{W}_z^{(k,r)}(t), \mathbf{S}^{(k)}(t), \mathbf{E}^{(k)}(t)] \quad (19)$$

$$\mathbf{E}^{(k)}(t_\mu) = \mathbf{E}_\mu^{(k)} \quad (20)$$

W tym samym zespole może występować kilka rodzajów procesów zużycia i procesów dezaktywacji o różnych parametrach dynamiki tych procesów. Każdemu rodzajowi dynamiki będą mogły być przyporządkowane odpowiednie rodzaje remontów (bieżące, kapitalne) oraz odpowiednie rodzaje regeneracji. Dla uproszczenia rozważań przyjmuje się, iż w każdym ZP występuje tylko jeden rodzaj remontów i tylko jeden rodzaj regeneracji stanowisk.

Przeważnie zależności prawostronne relacji (17) i (19) nie są znane. Zastępuje się wtedy wektory  $\mathbf{S}^{(k)}(t)$  i  $\mathbf{E}^{(k)}(t)$  odpowiednio czasami  $t_S^{(k)}(t)$  i  $t_E^{(k)}(t)$  jakie upłynęły w chwili  $t$ , odpowiednio od ostatniego remontu, od ostatniej regeneracji stanowisk zespołu.

- d) Warunek nie pozwalający na równoczesną pracę  $k$ -tego ZP w chwili  $t$  w więcej niż w jednym reżimie:

$$\sum_{r=0}^{M^{(k)}} d^{(k,r)}(t) \leq 1 \quad (21)$$

- e) Ograniczenia na następstwo reżimów pracy  $k$ -tego ZP, które wykluczają możliwość przełączenia ZP z reżimu  $r_x$  na reżim  $r_y$ :

$$d^{(k,r_x)}(t) \cdot d^{(k,r_y)}(t) = 0 \quad (22)$$

$$\text{gdzie: } r_x \in \mathfrak{R}_x^{(k)} \subset 1, M^{(k)} \quad r_y \in \mathfrak{R}_y^{(k)} \subset 1, M^{(k)} \quad r_x \neq r_y \quad (23)$$

- f) Ograniczenia na czas pracy  $k$ -tego ZP w  $r$ -tym reżimie mierzony między chwilą załączenia reżimu i chwilą jego wyłączenia:

$$\Delta t^{(k,r)} \geq T_{\min}^{(k,r)} \quad (24)$$

- g) Natężenie strumienia kosztów ruchowych:

Koszty ruchowe ZP, ZE, ZZ składają się wyłącznie z kosztów mediów pomocniczych. Do mediów pomocniczych zalicza się między innymi: energię elektryczną, energię cieplną, paliwa, gazy techniczne, chemikalia – jeśli tylko nie są one produktami rozważanego SP.

Natężenie strumienia kosztów ruchowych  $k$ -tego zespołu w  $r$ -tym reżimie wyraża wzór:

$$K^{(k,r)}(t) = d^{(k,r)}(t) \cdot \sum_f c_{P,f} \cdot F_{P,f}^{(k,r)}(t) \quad (25)$$

gdzie:  $c_{P,f}$ ,  $F_{P,f}^{(k,r)}(t)$  – cena jednostkowa i natężenia przepływu  $f$ -tego medium pomocniczego zużywanego w  $r$ -tym reżimie pracy  $k$ -tego zespołu w chwili  $t$ .

h) Koszty przełączeń  $k$ -tego ZP z  $r_x$ -tego na  $r_y$ -ty reżim pracy:

$$K_P^{(k)}(t_\mu, t_\mu + T) = \sum_{r_x} \sum_{r_y} R^{(k,r_x/r_y)} \cdot K_P^{(k,r_x/r_y)} \quad r_x \neq r_y \quad (26)$$

gdzie:  $R^{(k,r_x/r_y)}$  jest liczbą przełączeń reżimów pracy  $k$ -tego ZP w  $[t_\mu, t_\mu + T]$ , zaś  $K_P^{(k,r_x/r_y)}$  jest oszacowaniem kosztów pojedynczego przełączenia reżimów pracy  $k$ -tego ZP. Koszt ten może być różny, zależnie od tego z jakiego i na jaki reżim zespół jest przełączany.

i) Koszty renowacji  $k$ -tego ZP w  $[t_\mu, t_\mu + T]$ :

$$K_R^{(k)}(t_\mu, t_\mu + T) = R_S^{(k)} \cdot K_S^{(k)}(\mathbf{S}^{(k)}) + R_E^{(k)} \cdot K_E^{(k)}(\mathbf{E}^{(k)}) \quad (27)$$

gdzie:  $R_S^{(k)}$  i  $R_E^{(k)}$  są odpowiednio liczbami remontów i liczbami regeneracji  $k$ -tego zespołu w  $[t_\mu, t_\mu + T]$ , zaś  $K_S^{(k)}(\mathbf{S}^{(k)})$  i  $K_E^{(k)}(\mathbf{E}^{(k)})$  są oszacowaniami kosztów odpowiednio pojedynczego remontu i pojedynczej regeneracji  $k$ -tego ZP.

j) Zgodnie z wymaganie m (12)  $k$ -ty ZP powinien być przekazany do remontu najpóźniej w chwili  $t_S^{(k)} \leq t_S^{(k)'}$ , gdzie  $t_S^{(k)'}$  jest chwilą czasową, w której jest spełniony warunek

$$\mathbf{S}^{(k)}(t_S^{(k)'}) = \mathbf{S}_{\max}^{(k)} \quad \text{lub} \quad t_S^{(k)} \leq t_{S,\max}^{(k)} \quad (28)$$

gdzie:  $\mathbf{S}_{\max}^{(k)}$  i  $t_{S,\max}^{(k)}$  są odpowiednio wektorem dopuszczalnych wartości składowych wektora stopni zużycia stanowisk  $k$ -tego ZP i maksymalnym dopuszczalnym czasem pracy  $k$ -tego ZP między kolejnymi remontami. W chwili przekazania  $k$ -tego ZP do remontu lub regeneracji zmienna binarna  $d^{(k,0)}$  przyjmuje wartość 1 i utrzymuje ją aż do chwili zakończenia remontu lub do chwili zakończenia regeneracji.

k) Czas trwania remontu  $k$ -tego ZP można wyrazić przy pomocy wzoru:

$$T_S^{(k)} = T_S^{(k)}(\mathbf{S}^{(k)}(t_S^{(k)}), \mathbf{B}^{(k)}) \quad (29)$$

gdzie:  $\mathbf{B}^{(k)}$  jest wektorem natężeń strumieni środków niezbędnych do remontu  $k$ -tego ZP. Czas trwania procesu regeneracji  $k$ -tego ZP można przyjmować jako stały.

Powyższy model nazywany jest dalej wewnętrznym technologicznym modelem matematycznym ZP. Nazwę tą usprawiedliwia fakt występowania w nim także relacji wiążących wielkości charakteryzujące przebieg procesów technologicznych wewnątrz zespołu. Jest on wykorzystywany przy sterowaniu procesami technologicznymi w ZP przy najkrótszym horyzoncie czasowym sterowania, które ma miejsce na najniższym poziomie wielopoziomowego sterowania SP. Zewnętrznym technologicznym modelem matematycznym zespołu nazywany jest dalej technologiczny model matematyczny zespołu, który się składa wyłącznie z relacji w których występują wyłącznie wielkości opisujące media wejściowe i media wyjściowe zespołu. Model ten może mieć różny stopień szczegółowości, zależnie od długości przedziałów czasowych, których dotyczy. Jest on zwykle stosowany na poziomach koordynujących pracę zespołów przy sterowaniu wielopoziomowym SP.

Relacje zewnętrznego technologicznego modelu matematycznego  $k$ -tego ZP w  $r$ -tym reżimie pracy:

a) Relacje wyjściowo wejściowe:

$$\mathbf{F}^{(k,r)}(t) = d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{a}^{(k,r)}[\mathbf{J}_0^{(k,r)}(t), \mathbf{J}^{(k,r)'}(t), \mathbf{E}^{(k)}(t)] \cdot \sum_i F_{0i}^{(k,r)}(t) \quad (30)$$

$$\mathbf{J}^{(k,r)''}(t) = d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{J}^{(k,r)''}[\mathbf{F}_0^{(k,r)}(t), \mathbf{J}_0^{(k,r)}(t), \mathbf{J}^{(k,r)'}(t), \mathbf{E}^{(k)}(t)] \quad (31)$$

gdzie:  $\mathbf{a}^{(k,r)}$  wektor współczynników uzysku półproduktów względnie produktów,  $\mathbf{J}^{(k,r)}$ ,  $\mathbf{J}^{(k,r)'} -$  wektory nienastawialnych i nastawialnych składowych wektora wskaźników jakości półproduktów lub produktów wytwarzanych w  $r$ -tym reżymie  $k$ -tego ZP.

b) Relacje ograniczeń mocy produkcyjnej:

$$d^{(k,r)}(t) \cdot F_{0,\min}^{(k,r)} \leq \sum F_{0i}^{(k,r)}(t) \leq d^{(k,r)}(t) \cdot F_{0,\max}^{(k,r)} \quad (32)$$

c) Relacje (16) do (29) w których nie występują wektory wewnętrzne  $\mathbf{F}_w^{(k,r)}$ ,  $\mathbf{J}_w^{(k,r)}$ ,  $\mathbf{W}_w^{(k,r)}$ .

## 10. Modele matematyczne zespołów ekspedycyjnych i zespołów zaopatrzeniowych

Zespoły ekspedycyjne jak i zespoły zaopatrzeniowe można przyporządkować przynajmniej jednej z dwu grup rodzajowych: (a). ZE i ZZ z gromadzeniem produktów w procesie ekspediowania lub z gromadzeniem surowców w procesie zaopatrywania, oraz z magazynowaniem środków transportowych koniecznych do ekspedycji produktów lub dostarczenia surowców (np. przy transporcie kolejowym), (b). ZE i ZZ bez gromadzenia mediów podstawowych i bez magazynowania środków transportowych. Niżej rozpatruje się tylko ZE i ZZ należące do grupy (a). Przypadek ZE i ZZ należących do grupy (b) jest omawiany w pracy Milkiewicza i in. (1995). Procesy technologiczne realizowane w ZE i w ZZ należą do działalności stowarzyszonych. W związku z tym ich modele matematyczne wykorzystywane w problemie sterowania SP mają umożliwiać tylko uwzględnianie wzajemnych interakcji między procesami produkcyjnymi a procesami ekspedycji produktów i procesami zaopatrzenia w surowce w SP. Stąd modele matematyczne ZE i ZZ nie muszą być modelami wewnętrznymi tych zespołów, mogą to być mniej dokładne modele zewnętrzne.

Zewnętrzne modele matematyczne technologiczne ZE grupy (a) zawierają następujące relacje:

a) Relacje wejściowo wyjściowe:

$$\mathbf{F}^{(k,r)}(t) = d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{F}_0^{(k,r)}(t) \quad (33)$$

$$\mathbf{J}^{(k,r)}(t) = d^{(k,r)}(t) \cdot \mathbf{J}_0^{(k,r)}(t) \quad (34)$$

b) Relacje ograniczeń:

$$F_{\min}^{(k,r)} \leq F^{(k,r)}(t) \leq F_{\max}^{(k,r)} \quad (35)$$

c) Relacje (16) do (29), w których nie występują wielkości charakteryzujące przebiegi procesów technologicznych wewnątrz zespołu.

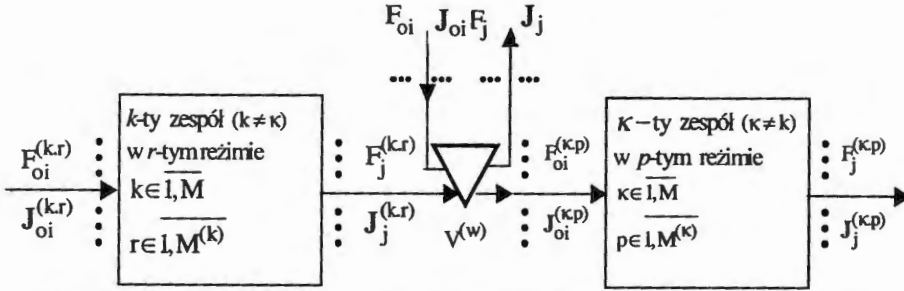
## 11. Model matematyczny powiązań ZP, ZE, ZZ

ZP, ZE i ZZ są powiązane wzajemnie i z otoczeniem zewnętrznym strumieniami surowców, półproduktów i produktów. W niektórych węzłach schematu powiązań przedstawionego na rys.2 istnieje możliwość gromadzenia mediów podstawowych spływających do nich. Niżej przedstawia się model matematyczny powiązań ZP, ZE, ZZ dla przypadku, gdy do konkretnego węzła dopływają media o takich samych wskaźnikach jakości.

a) Objętość  $V^{(w)}$  medium zgromadzonego w  $w$ -tym węźle w chwili  $t \in [t_\mu, t_\mu + T]$ :

$$\begin{aligned} V^{(w)}(t) = & V^{(w)}(t_\mu) + \int_{t_\mu}^T \left[ \sum_k \sum_r \sum_j \frac{F_j^{(k,r)}(\tau)}{\gamma_j^{(k,r)}(\tau)} \cdot h_w^{(k,r,j)}(\tau) \cdot d^{(k,r)}(\tau) - \right. \\ & \left. - \sum_\kappa \sum_p \sum_i \frac{F_{0i}^{(\kappa,p)}(\tau)}{\gamma_{0i}^{(\kappa,p)}(\tau)} \cdot h_w^{(\kappa,p)}(\tau) \cdot d^{(\kappa,p)}(\tau) + \right. \\ & \left. + \sum_i \frac{F_{0i}(\tau)}{\gamma_{0i}(\tau)} \cdot h_w^{(0i)}(\tau) - \sum_j \frac{F_j(\tau)}{\gamma_j(\tau)} \cdot h_w^{(j)}(\tau) \right] \cdot d\tau \quad (36) \end{aligned}$$

gdzie symbole  $\gamma$ ,  $h$ , z odpowiednimi indeksami oznaczają gęstość, zmienną binarną 0, 1 przyporządkowującą odpowiednio  $i$ -te medium wejściowe lub  $j$ -te wyjściowe odpowiedniemu zespołowi  $k, \kappa \in \overline{1, M}$ ,  $k \neq \kappa$  i reżimowi jego pracy  $r \in \overline{1, M^{(k)}}$ ,  $p \in \overline{1, M^{(\kappa)}}$ , lub przyporządkowujące  $i$ -te albo  $j$ -te medium otoczeniu zewnętrznemu SP.



Rys.2. Schemat powiązań ZP, ZE i ZZ ze sobą i z otoczeniem zewnętrznym.

- b) Ograniczenia na objętość medium zgromadzonego w chwili  $t$  w  $w$  – tym węźle:

$$V_{\min}^{(w)} \leq V^{(w)}(t) \leq V_{\max}^{(w)} \quad (37)$$

- c) Wskaźniki jakości mediów na wyjściu z magazynów znajdujących się w  $w$  – tym węźle schematu produkcyjnego SP:

$$J^{(w)}(t) = \sum_k \sum_r \sum_j J_j^{(k,r)}(t) \cdot h_w^{(k,r,j)}(t) \cdot d^{(k,r)}(t) + \sum_i J_{0i}(t) \cdot h_w^{(0i)}(t) \quad (38)$$

## 12. Uwagi

Przedstawiony wyżej model matematyczny SP jest nieliniowym, niestacjonarnym modelem dynamicznym o dużym wymiarze wektora sterującego i o dużym wymiarze wektora stanu, o dużej liczbie ograniczeń zarówno na wektor sterujący, jak i na wektor stanu, ponad to jest modelem o decydowalnej strukturze, w którym występują istotne zakłócenia losowe. Stąd do rozwiązywania problemów sterowania SP wykorzystuje się metody dekompozycyjne zarówno w przestrzeni wektora sterującego – metoda wielopoziomowa opisywana w pracach Findeisena (1974, 1978), jak i na osi czasu – metoda wielohoryzontowa opisywane przez Milkiewicza (1973, 1980, 1981, 1983, 1986, 1999a, 1999b), i związane z nimi wielopoziomowe i wielohoryzontowe modele matematyczne. W celu opanowania trudności związanych z decydowalną strukturą SP stosować można dodatkowo, opisaną w pracach Milkiewicza (1980, 1981) dekompozycję problemu w przestrzeni metod rozbijając go na tzw. podproblem planowania obciążeń zespołów i na podproblem harmonogramowania przełączeń reżimów pracy zespołów. Do rozwiązywania podproblemów planowania obciążeń zespołów bardzo pomocny jest, głównie ze względu na możliwość wykorzystania algorytmów programowania liniowego, zabieg linearyzacji modeli



matematycznych ZP. W pracach Milkiewicza i in. (1995) pokazano wygodną dla praktyki metodę linearyzacji opierającą się na tzw. reżimach umyślonych ZP. Skuteczność wszystkich wymienionych wyżej zabiegów została sprawdzona na modelach matematycznych rafinerii ropy przedstawionych w pracy Milkiewicza (1995).

## Literatura

- Findeisen W. (1974) *Wielopoziomowe układy sterowania*. PWN, Warszawa.
- Fihdeisen W., Brdyś M., Malinowski K., Tatjewski P., Woźniak A. (1978) On-line hierarchical control for steady-state systems. *Trans.on Aut.Control*, Ac-23.
- Milkiewicz F. (1973) The multihorizon-multilevel control method. *Proc. of IFAC-IFORS Symp. on Systems Approaches to Developing Countries*, Algiers. 377-385.
- Milkiewicz F. (1980) Sformułowanie i koncepcja rozwiązania problemu sterowania produkcją i zbytem produktów. *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki*, XXV, 4, 453-471.
- Milkiewicz F. (1981) Harmonogramowanie produkcji w pewnej klasie zakładów przemysłowych. *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki*, XXVI, 1, 17-27.
- Milkiewicz F. (1983) Decomposition of production scheduling in production systems with switched-over continuous technological processes. *3-rd IFAC/IFORS Symp. on Large Scale Systems: Theory and Applications*, Warsaw. 338-345.
- Milkiewicz F. (1986) Operative control of production system with switched-over production processes series. *4-th IFAC/IFORS Symp. On Large Scale Systems: Theory and Applications*, Zurich.
- Milkiewicz F., Beker Z., Duzinkiewicz K., Porzeziński M., Stolc L., Tkaczyk D. (1995) *Raport pt. Algorytmy wspomagające w procesie operatywnego sterowania produkcją zakładów z ciągłymi przełączalnymi procesami produkcyjnymi na przykładzie rafinerii ropy*. Projekt bad. KBN Nr. 8 S505 027 05.
- Milkiewicz F. (1999a) Sterowanie systemami produkcyjnymi. *XIII Krajowa Konferencja Automatyki*, Opole, 2, 19-26.
- Milkiewicz F. (1999b) Operatywne sterowanie produkcją i ekspedycją produktów w systemie z ciągłymi przełączalnymi procesami technologicznymi. *XIII Krajowa Konferencja Automatyki*, Opole, 2, 127-132.

**ISBN 83-85847-78-2**