



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE

Książka jubileuszowa
z okazji
70-lecia urodzin

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

pod redakcją
Jakuba Gutenbauma



Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

AUTOMATYKA STEROWANIE ZARZĄDZANIE

**Książka jubileuszowa
z okazji
70-lecia urodzin**

PROFESORA KAZIMIERZA MAŃCZAKA

**pod redakcją
Jakuba Gutenbauma**

Warszawa 2002

Książka jubileuszowa z okazji
70-lecia urodzin
Profesora Kazimierza MAŃCZAKA

Redaktor
prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa 2002

ISBN 83-85847-78-2

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6 01-447 Warszawa
<http://www.ibspan.waw.pl>

Opracowanie składopisu: Anna Gostyńska, Jadwiga Hartman

Druk: KOMO-GRAF, Warszawa
nakład 200 egz., 34 ark. wyd., 31 ark. druk.

MINIMALIZACJA KOSZTÓW DOSTARCZANIA ENERGII ELEKTRYCZNEJ DO OPOROWEGO URZĄDZENIA GRZEWCZEGO

Wojciech Miłkowski

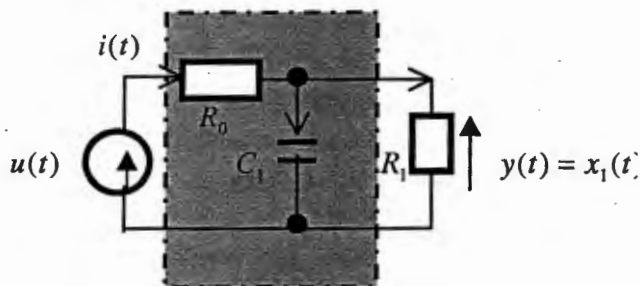
Katedra Automatyki, AGH Kraków,
al. Mickiewicza 30/B-1, 30-059 Kraków,
<e-mail: wmi@ia.agh.edu.pl>

Abstract: In this paper we consider the problem of optimal energy transfer in an RC-network. We derive an algorithm of construction of optimal control. Numerical calculations were made using the MATLAB program.

Keywords: optimal control, energy transfer, regulation system.

1. Wprowadzenie i sformułowanie zadania sterowania

W wielu procesach przemysłowych przesyłanie energii odbywa się z wykorzystaniem urządzeń elektrycznych, sterowanych napięciem $u(t)$. Prąd elektryczny przepływający poprzez opór $R_1 > 0$ odpowiedniego oporowego urządzenia grzejnego powoduje wydzielanie ilości ciepła równej energii elektrycznej dostarczonej do oporności R_1 . Schemat uproszczonego układu dostarczania energii pokazano na rysunku 1.



Rys.1. Uproszczony układ dostarczania energii.

Układ pokazany na rysunku 1 z zadanymi parametrami $R_i > 0$ i $C_1 > 0$ można opisać następującym jednowymiarowym równaniem różniczkowym:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1} x_1(t) + \frac{1}{R_0 C_1} u(t), \quad y(t) = x_1(t), \quad x_1(0) = 0 \quad (1)$$

Niech $x_1(0) = 0$ i $t \in [0, T]$. Zadanie sterowania można sformułować następująco: w układzie (1) szukamy sterowania u takiego, by w zadanym przedziale czasu $[0, T]$ dostarczyć do oporności R_1 ustaloną z góry ilość energii E przy równoczesnej minimalizacji całkowitej energii dostarczanej do układu.

Energia dostarczana do oporności R_1 jest równa

$$\frac{1}{R_1} \int_0^T y(t)^2 dt = \frac{1}{R_1} \int_0^T x_1(t)^2 dt = E \quad (2)$$

Natomiast całkowitą energię dostarczaną do układu można określić wzorem o następującej postaci (zobacz rysunek 1):

$$J(u) = \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{R_0} \int_0^T u(t) [u(t) - x_1(t)] dt \quad (3)$$

Zadanie nasze sprowadza się do poszukiwania minimum funkcjonału (3) przy ograniczeniach (1) i (2). Zadanie to zostało sformułowane w monografii Athansa i Falba (1969, s. 451-453) i analizowane przez Korytowskiego oraz Góreckiego (1993, s. 394).

Jeżeli istnieje sterowanie u , dla którego osiągana jest najmniejsza wartość funkcjonału (3) przy ograniczeniach (1) i (2), to takie sterowanie nazywamy sterowaniem optymalnym.

2. Istnienie sterowania optymalnego

Niech $L^p(0, T)$, $p \in [1, \infty)$, będzie przestrzenią funkcji mierzalnych f z normą

$$\|f(t)\|_p = \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (4)$$

Z nierówności Holdera dla całek (np. Kudrewicz 1976, s.33, Musielak 1976, s.45) mamy

$$\int_0^T u(t)x_1(t)dt \leq \|ux_1\|_1 \leq \|u\|_2 \|x_1\|_2 \quad (5)$$

a dalej mnożąc nierówności (5) przez -1 i wykorzystując równości (3) otrzymujemy

$$R_0 J(u) = \|u\|_2^2 - \int_0^T u(t)x_1(t)dt \geq \|u\|_2^2 - \|u\|_2 \|x_1\|_2 \quad (6)$$

Z warunku (2) na dostarczenie zadanej ilości energii $\|x_1\|_2^2 = R_1 E$. Zatem dla $u \in L^2(0, T)$

$$R_0 J(u) \geq \|u\|_2^2 - \|u\|_2 \sqrt{R_1 E} \geq -\frac{1}{4} R_1 E \quad (7)$$

Z ciągłości funkcjonału J oraz z oszacowania (7) wynika istnienie sterowania optymalnego.

Sterowanie optymalne istnieje, ale nie jest jednoznaczne. Zauważmy, że przy $x_1(0) = 0$ mamy (zobacz (1))

$$x_1(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau, \quad A = -\frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1}, \quad B = \frac{1}{R_0 C_1} \quad (8)$$

Funkcja wykładnicza skalarna jest funkcją dodatnią. Stąd jeżeli w równości (8) w miejsce u wstawimy sterowanie $-u$, to z równości (8) otrzymamy $-x_1(t)$. Zatem z równości (3) mamy

$$J(-u) = J(u). \quad (9)$$

3. Wyznaczenie sterowania optymalnego

Rozważmy równanie stanu (1) naszego układu rozszerzone o dodatkowe dwie zmienne

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1} x_1(t) + \frac{1}{R_0 C_1} u(t), \quad x_1(0) = 0, \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^2, & x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_3(t) &= u(t)[u(t) - x_1(t)], & x_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (10b)$$

Łatwo zauważyć, że równości (2) i (3), określające ograniczenie energetyczne oraz energetyczny wskaźnik jakości, przyjmą teraz postać

$$E = x_2(T) / R_1 \quad (11)$$

$$J(u) = x_3(T) / R_0 \quad (12)$$

Zadanie sterowania można teraz sformułować następująco: szukamy sterowania u takiego, dla którego zachodzi minimum wskaźnika jakości (12) na trajektoriach systemu (10) przy dodatkowym warunku (11).

W rozdziale 2 pokazano, że sterowanie optymalne istnieje. Do wyznaczenia sterowania optymalnego wykorzystamy zasadę maksimum (Pontriagin i in. 1983, s. 59, 79, 53, 76 oraz Górecki 1993, s. 393). W naszym przypadku hamiltonian ma następującą postać:

$$\begin{aligned} H(\psi(t), x(t), u(t)) &= \psi_1(t) \left[-\frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1} x_1(t) + \frac{1}{R_0 C_1} u(t) \right] + \\ &+ \psi_2(t) x_1(t)^2 + \psi_3(t) u(t) [u(t) - x_1(t)] \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, $\psi(t) = [\psi_1(t) \ \psi_2(t) \ \psi_3(t)]^T$, przy czym spełniony jest układ (1) oraz układ określający zmienne sprzężone w przedziale czasu $t \in [0, T]$ pokazany poniżej

$$\dot{\psi}_1(t) = \frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1} \psi_1(t) + 2x_1(t)\psi_2(t) - u(t)\psi_3(t), \quad \psi_1(T) = 0, \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = 0, \quad \psi_2(T) = -\rho, \quad \dot{\psi}_3(t) = 0, \quad \psi_3(T) = -1$$

Z równości (14) widać, że zmienne sprzężone ψ_2 i ψ_3 są funkcjami stałymi w czasie, a dokładniej $\psi_2(t) = -\rho$, $\psi_3(t) = -1$, ρ jest pewną stałą liczbą rzeczywistą. Zatem z równości (13) sterowanie ekstremalne (czyli maksymalizujące hamiltonian (13)) ma postać

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_0 C_1} \psi_1(t) + x_1(t) \right] \quad (15)$$

Sterowanie ekstremalne (15) jest zależne od parametru $\rho \in R$. Sterowanie optymalne istnieje. Zatem przy pewnym $\rho \in R$ sterowanie optymalne ma postać określoną równością (15).

Z równości (10) i (14), po podstawianiu w miejsce sterowania u wyrażenia (15), otrzymujemy układ kanoniczny

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{\psi}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \psi_1(t) \end{bmatrix}, \quad x_1(0) = 0, \quad \psi_1(T) = 0 \quad (16)$$

$$\text{gdzie } a = \frac{2R_0 + R_1}{2R_0R_1C_1} > 0, \quad b = \frac{1}{2R_0^2C_1^2} > 0, \quad c = 2\rho - \frac{1}{2} \quad (17)$$

Niech

$$Z = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & a \end{bmatrix}, \quad e^{Zt} = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) \\ \Phi_3(t) & \Phi_4(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Z równości (16) i (18) mamy

$$x_1(t) = \Phi_2(t)\psi_1(0), \quad \psi_1(t) = \Phi_4(t)\psi_1(0) \quad (19)$$

Jeżeli $E \neq 0$, to (zobacz (2)) $x_1(t) \neq 0$. Zatem z (19) mamy $\psi_1(0) \neq 0$. Ale z (14) lub (16) $\psi_1(T) = 0$, więc z drugiej równości (19) mamy

$$\Phi_4(T) = 0 \quad (20)$$

Elementy macierzy e^{Zt} określonej równością (18) można wyliczyć analitycznie. W szczególności dostajemy

$$\Phi_2(t) = \frac{b[e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}]}{2\lambda}, \quad \Phi_4(t) = \frac{(\lambda + a)e^{\lambda t} + (\lambda - a)e^{-\lambda t}}{2\lambda}, \quad (21)$$

$$\lambda = \sqrt{a^2 + bc}$$

Warunek (20) może być spełniony, co pokazał Korytowski (Górecki 1993, s. 584), wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + bc < 0$, gdzie a, b, c dane są równościami (17). Stąd dalej mamy

$$\lambda = j\omega, \quad j^2 = -1, \quad \omega = \sqrt{|a^2 + bc|} \quad (22)$$

Elementarny rachunek pokazuje, że

$$a^2 + bc < 0 \Leftrightarrow \rho < -\frac{R_0}{R_1} \left[\frac{R_0}{R_1} + 1 \right] = \rho_d \quad (23)$$

oraz (zobacz (21) i (22))

$$\Phi_2(t) = \frac{b}{\omega} \sin \omega t, \quad \Phi_4(t) = \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \quad (24)$$

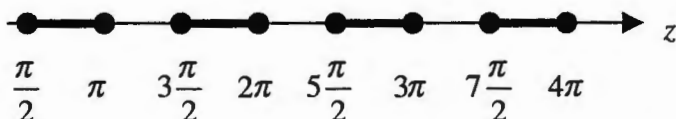
Z równości (20) i (24) otrzymujemy równanie względem zmiennej z o następującej postaci:

$$\operatorname{tg} z = -Kz, \quad K = \frac{1}{aT}, \quad z = \omega T > 0 \quad (25)$$

Równanie (25) ma rozwiązania rzeczywiste i dodatnie

$$z_i \in \left(\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi, \pi + (i-1)\pi \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (26)$$

w przedziałach pokazanych na rysunku 2.



Rys.2. Wybrane przedziały (26) dodatnich rozwiązań równania (25).

Z równości (17) i (25) można zauważyć, że dla każdego rozwiązania z_i równania (25) parametr

$$\rho_i = -\left[\frac{R_0 C_1 z_i}{T} \right]^2 + \rho_d \quad (27)$$

występujący w (14) spełnia warunek (23).

Z równości (15) i (19) mamy

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_0 C_1} \Phi_4(t) + \Phi_2(t) \right] \psi_1(0) \quad \text{oraz} \quad x_1(t) = \Phi_2(t) \psi_1(0) \quad (28)$$

gdzie $\Phi_2(t)$ i $\Phi_4(t)$ dane są równościami (24) oraz $\omega = z/T$. Zmienną sprzężoną $\psi_1(0)$ można wyznaczyć z równości (2) w następujący sposób:

$$\frac{1}{R_1} \int_0^T y(t)^2 dt = \frac{1}{R_1} \int_0^T x_1(t)^2 dt = \frac{1}{R_1} \int_0^T \Phi_2(t)^2 dt \psi_1(0)^2 = E \quad (29)$$

skąd

$$\psi_1(0) = \pm \frac{z}{bT} \sqrt{\frac{2R_1 E (1 + K^2 z^2)}{T(1 + K + K^2 z^2)}} \quad (30)$$

gdzie K i z są określone równościami (25).

Podobnie przeprowadzając elementarne rachunki można obliczyć wartość naszego wskaźnika jakości (3) na trajektoriach (28)

$$J(u) = \frac{1}{R_0} \int_0^T u(t) [u(t) - x_1(t)] dt = \frac{R_1 E}{4R_0} \left[\frac{1}{R_0^2 C_1^2} \frac{\int_0^T \Phi_4(t)^2 dt}{\int_0^T \Phi_2(t)^2 dt} - 1 \right] \quad (31)$$

Dla każdego rozwiązania z_i równania (25) otrzymujemy trajektorie ekstremalne określone równościami (28), (30). Wartość wskaźnika jakości w zależności od z_i wynosi

$$J(u) = E \left[1 + \frac{R_0}{R_1} + \frac{R_0 R_1 C_1^2}{T^2} * z_i^2 \right] \quad (32)$$

W wyniku zastosowania zasady maksimum otrzymujemy przeliczalną liczbę sterowań ekstremalnych zależnych od parametru ρ_i o postaci (15) lub (28). Parametr ρ_i jest zależny z kolei od z_i (zobacz (27)). Sterowanie optymalne istnieje, zatem musi się znajdować wśród sterowań

ekstremalnych. Zauważmy, że $J(u(\rho_1)) \leq J(u(\rho_i)), \forall i$ (zobacz (32) i (26)).
 Stąd sterowaniem optymalnym jest sterowanie $u(\rho_1)$, to znaczy
 otrzymanym przy rozwiązaniu z_1 równania (25).

Ostatecznie algorytm wyznaczania sterowania optymalnego ma
 następującą postać:

- Z równości (17) i (25) wyliczamy parametry a, b, K ,
- Rozwiązujemy równanie (25) w przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ wyznaczając
 z_1 ,
- Obliczamy częstość $\omega = z_1 / T$,
- Z równości (30) dla $z = z_1$ wyznaczamy zmienną sprzężoną
 $\psi_1(0)$,
- Sterowanie optymalne ma następującą postać:

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_0 C_1} (\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t) + \frac{b}{\omega} \sin \omega t \right] \psi_1(0).$$

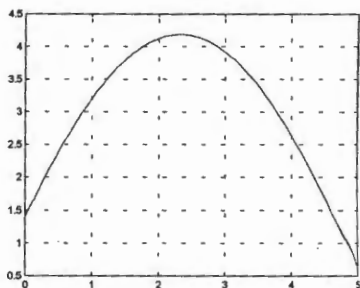
- Trajektoria optymalna ma postać

$$x_1(t) = \frac{b}{\omega} \sin \omega t \psi_1(0).$$

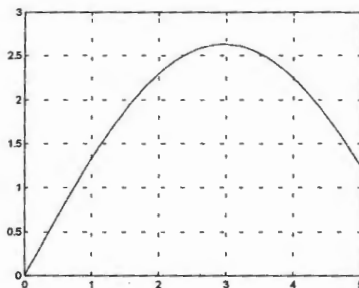
Rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Zmieniając (zobacz (30)) znak
 $\psi_1(0)$ sterowanie optymalne i trajektoria optymalna również zmieniają
 znak (zobacz (9)).

4. Obliczenia numeryczne

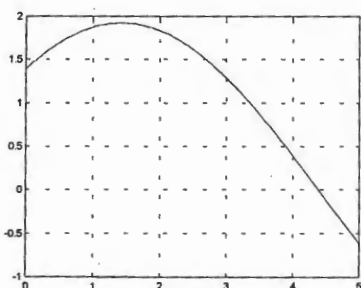
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących danych:
 $R_0 = 1, R_1 = 2, C_1 = 1, E = 10$ oraz $T = 5$. W tym przypadku z równości
 (17) i (25) mamy $a = 1, b = 0.5$ oraz $K = 0.2$. Na rysunkach 3 i 4
 pokazano sterowanie optymalne i trajektorię optymalną przy
 $\psi_1(0) = 2.7923 > 0, z_1 = 2.6537$. Natomiast na rysunku 5 pokazano prąd
 optymalny na wejściu układu pokazanego na rysunku 1 przy
 $\psi_1(0) = 2.7923 > 0$. Rysunek 6 pokazuje przebieg zmiennej sprzężonej
 $\psi_1(t)$.



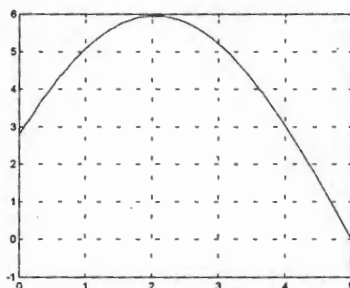
Rys.3. Sterowanie optymalne.



Rys.4. Trajektoria optymalna.



Rys.5. Prąd optymalny.

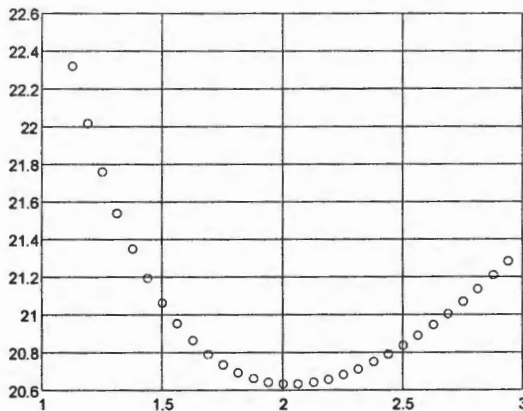


Rys.6. Zmienna sprzężona.

Dla przykładu w rozważanym przypadku otrzymano następujące wartości wskaźnika jakości dla sterowań ekstremalnych: $J(u(\rho_1)) = 20.6277$, $J(u(\rho_2)) = 38.7756$, $J(u(\rho_3)) = 71.2746$. Dla przypomnienia sterowaniem optymalnym jest $\pm u(\rho_1)$.

5. Optymalne warunki przesyłu energii

Z równości (17), (25) i (32) widać, że wartość wskaźnika jakości jest zależna od oporności grzejnika R_1 (zobacz rysunek 1) przy ustalonych innych parametrach układu (1). Jest to zależność złożona, bo rozwiązania równania (25) również są zależne od R_1 . Zadaniem naszym jest dostarczenie zadanej energii E do oporności R_1 w zadanym przedziale czasu $[0, T]$, równocześnie minimalizując całkowitą energię $J(u; R_1)$ dostarczaną do układu. Na rysunku 7 pokazano $J(u; R_1)$ w zależności od R_1 dla $R_0 = 1$, $C_1 = 1$, $E = 10$ oraz $T = 5$.



Rys.7. Wskaźnik jakości $J(u; R_1)$ od R_1 dla $T = 5$.

6. Regulacja przesyłu energii

Rozważmy układ pokazany na rysunku 1 opisany w następujący sposób:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{33}$$

$$A = -\frac{R_0 + R_1}{R_0 R_1 C_1}, \quad B = \frac{1}{R_0 C_1}, \quad x(t) = x_1(t), \quad x_1(0) = 0 \tag{34}$$

W rozdziale 3 podano rozwiązanie naszego zadania, polegającego na poszukiwaniu minimum funkcjonału (3) przy ograniczeniach (1) i (2). Rozwiązanie to przy oznaczeniach (33), (34) ma postać

$$u_o(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_0 C_1} (\cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t) + \frac{b}{\omega} \sin \omega t \right] \psi_1(0)$$

$$x_o(t) = \frac{b}{\omega} \sin \omega t \psi_1(0) \tag{35}$$

przy czym $\psi_1(0) = \pm \frac{z_1}{bT} \sqrt{\frac{2R_1 E (1 + K^2 z_1^2)}{T(1 + K + K^2 z_1^2)}}$, gdzie a , b , K są określone

w (17) i (25). Optymalny przesył energii w układzie (1) lub (33) jest określony przez parę funkcji u_o i x_o (zobacz równości (35)). Rozważmy trajektorie układu (33) zaburzone w następujący sposób:

$$u(t) = u_o(t) + \Delta u(t), \quad x(t) = x_o(t) + \Delta x(t) \quad (36)$$

Dalej rozważmy następujący wskaźnik jakości

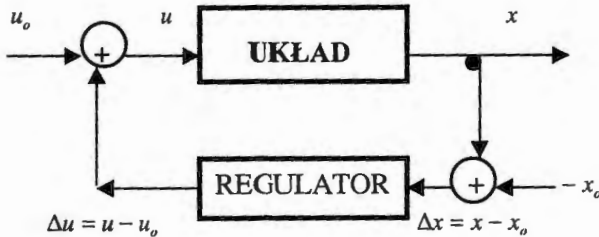
$$J_R(\Delta u) = \int_0^{T=\infty} [\Delta x(t)^T W \Delta x(t) + \Delta u(t)^T S \Delta u(t)] dt \quad (37)$$

gdzie w naszym rozważanym skalarnym przypadku $W \geq 0$ i $S > 0$ są liczbami rzeczywistymi.

Zadanie regulacji można sformułować następująco: szukamy poprawki sterowania Δu takiej, by został zminimalizowany wskaźnik jakości regulacji (37).

Istnieje dokładnie jedno sterowanie optymalne Δu (Athans i Falb 1969, s. 736, 746, 768, Górecki i in. 1983, s. 150, 160, 164, 171, 175 oraz Mitkowski 1991, s. 79) naszego problemu liniowo-kwadratowego (33), (37) i ma ono w naszym skalarnym przypadku następującą postać:

$$\Delta u(t) = -\frac{BD}{S} \Delta x(t), \quad D = \frac{AS}{B^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{B^2 W}{AS A}} \right) \quad (38)$$



Rys.8. Schemat układu regulacji.

Schemat rozważanego układu regulacji pokazano na rysunku 8. System zamknięty (33), (36) i (38) (zobacz rysunek 8) można opisać równaniem różniczkowym

$$\Delta \dot{x}(t) = -\sqrt{A^2 + B^2 \frac{W}{S}} \Delta x(t) \quad (39)$$

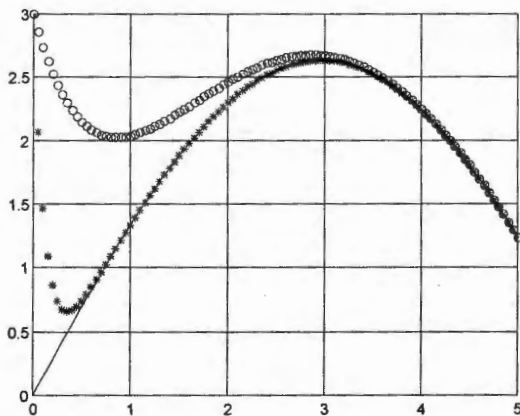
Współczynnik tłumienia układu zamkniętego

$$\alpha = -\sqrt{A^2 + B^2} \frac{W}{S} \quad (40)$$

Jeżeli chcemy uzyskać układ regulacji z zadaniem z góry współczynnikiem tłumienia α , to we wskaźniku jakości (37) należy przyjąć współczynniki wagowe spełniające następujący warunek:

$$\frac{W}{S} = \frac{\alpha^2 - A^2}{B^2} \quad (41)$$

Przyjęcie we wskaźniku jakości (37) nieskończonego czasu sterowania znacznie upraszcza wyznaczanie parametru wzmocnienia regulatora (38), które sprowadza się do wyznaczenia nieujemnego rozwiązania równania kwadratowego (ogólnie algebraicznego równania Riccatiego). Przyjęcie czasu skończonego, tak jak w naszym pierwotnym zadaniu sterowania, prowadzi do liniowego regulatora niestacjonarnego i do konieczności rozwiązywania odpowiedniego różniczkowego równania Riccatiego. Badania symulacyjne przekonują, że praktycznie starty jakości przy zastosowaniu regulatora (38) w porównaniu z regulatorem niestacjonarnym projektowanym przy skończonym czasie sterowania, są nieznaczne.



Rys.9. Nadażanie za trajektorią optymalną.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących danych z rozdziału 4. Wtedy przy naszych oznaczeniach $A = -1.5$, $B = 1$. Na rysunku 9 pokazano nadażanie za trajektorią optymalną x_0 , oznaczoną

linią ciągłą przy dość dużym zaburzeniu $\Delta x(0) = 3$. Symbolem „o” oznaczono trajektorie systemu (1) lub (33) przy sterowaniu optymalnym u_o (zobacz (35)). System (1) jest asymptotycznie stabilny, zatem trajektoria sama dąży do trajektorii optymalnej x_o . Nasz układ regulacji pokazany na rysunku 8 może polepszyć nadążanie. Dla przykładu dla $W = 100$ i $S = 1$ stosując optymalną w sensie wskaźnika (37) poprawkę sterowania (38) otrzymujemy trajektorię systemu (1) oznaczoną na rysunku 9 symbolem „*”. Bez względu na wielkość poprawki sterowania (38) możemy zmieniać poprzez zmianę wagi S we wskaźniku jakości (37). Analizując sytuację z rysunku 9 widać, że w tym przypadku przyjęcie czasu nieskończonego we wskaźniku (37) jest uzasadnione praktycznie. Dla $W = 100$ i $S = 1$ otrzymano $D = 8.6119$ i $\alpha = -10.1118$. Jeżeli chcemy uzyskać zadany z góry współczynnik tłumienia, to należy wykorzystać równość (41).

7. Zakończenie

W pracy rozważono bardzo prosty przypadek (w którym nie uwzględniono zmian oporności R_1 od temperatury) dostarczania energii elektrycznej do odpowiedniego oporowego urządzenia grzewczego. W innych urządzeniach grzewczych, np. w piecu grzewczym, do którego wprowadza się określone ilości paliwa i powietrza, najlepsze wykorzystanie paliwa (maksymalna temperatura) uzyskuje się przy odpowiednim stosunku powietrza do paliwa (Gutenbaum 1975, s. 185). W takich przypadkach właściwe jest stosowanie regulacji ekstremalnej (Mańczak 1961, 1963). W przypadkach instalacji przemysłowych, przy tworzeniu modeli matematycznych, istotną rolę odgrywają metody identyfikacji parametrów rozważanych modeli matematycznych (Mańczak 1971).

Numeryczne obliczenia wykonano wykorzystując pakiet programowy Matlab. Praca był wykonywana w ramach projektu KBN 7T08B06220.

Literatura

- Athans M., Falb P.L. (1969) *Sterowanie Optymalne*. WNT, Warszawa.
- Górecki H. (1993) *Optymalizacja Systemów Dynamicznych*. PWN, Warszawa.
- Gutenbaum J. (1975) *Problemy Teorii Regulatorów*. WNT, Warszawa.
- Kudrewicz J. (1976) *Analiza Funkcjonalna dla Automatyków i Elektroników*. PWN, Warszawa.

- Mańczak K. (1961) Problemy sterowania ekstremalnego. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, 2.
- Mańczak K. (1963) Zagadnienia regulacji ekstremalnej w literaturze światowej. *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, 2.
- Mańczak K. (1971) *Metody Identyfikacji Wielowymiarowych Obiektów Sterowania*. WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1991) *Stabilizacja Systemów Dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- Musielak J. (1976) *Wstęp do Analizy Funkcjonalnej*. PWN, Warszawa.
- Pontriagin L.S., Bołtiański W.G., Gamkrelidze R.W., Myszczenko E.F. (1983) *Matematyčeskaja Teoria Optimalnych Processow*. Izd. 4, Nauka, Moskwa.

ISBN 83-85847-78-2