Raport Badawczy

Research Report

RB/47/2014

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania. Część I. Wprowadzenie

J. Gadomski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:
Dr hab. inż. Lech Kruś, prof. PAN

Warszawa 2014

SPIS TREŚCI

Modele opóźnień w systemach ekonomicznych. Własności i zastosowania.

Wstęp

Z doświadczenia wiemy, że pomiędzy przekręceniem pokrętła gorącej wody a ustaleniem się temperatury wody wypływającej z prysznica mija jakiś czas; wiemy też, że czas ten w różnych prysznicach bywa różny, co może być przyczyną niepożądanych doznań. Również wtedy, gdy dowiadujemy się, że cena ropy naftowej szybko rośnie na światowych giełdach, z dużą pewnością możemy oczekiwać, że ceny paliw na krajowym rynku również odpowiednio wzrosną. W obu przypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nazywanym opóźnieniem.

Ze zjawiskiem opóźnienia mamy do czynienia, gdy reakcja obserwowanego systemu lub jego części na zmianę pewnego czynnika następuje po jakimś czasie. Opóźnienia są nieodłączne od zjawisk dynamicznych, w których przyczyna zmian poprzedza wystąpienie jej następstw. Jednak nie wszystkie zależności przyczynowo-skutkowe są związane z działaniem mechanizmu opóźnienia; często są to zjawiska złożone, w których działają inne mechanizmy, między innymi sprzężenia zwrotne, które powodują, że to samo zjawisko jest zarazem przyczyną i następstwem powiązanych zjawisk.

Modele opóźnienia stanowią ważny element konstrukcyjny modeli dynamicznych, to jest takich, które objaśniają zmiany pewnych zmiennych zależnych (objaśnianych) za pomocą zmian pewnych innych zmiennych, zwanymi niezależnymi lub objaśniającymi, które nie zależą od zmiennych zależnych. Często przyjmowane jest założenie, że zmienna zależna reprezentuje kategorię, której zmiany są następstwem zmian wartości zmiennych niezależnych reprezentujących kategorie będące przyczynami tych zmian[1].

Hendry et al. (1984), strona 1057, przyczyn zjawiska opóźnienia dopatrują się w takich kosztach dostosowania, jak: koszty transakcyjne, badawcze, optymalizacji oraz gdy podmioty powoli reagują na zmiany w otoczeniu w następstwie bezwładności, utrwalonych przyzwyczajeń, zwłoki w dostrzeganiu/rozpoznaniu zmian. Według tej opinii powolność reakcji wiąże się również z niepewnością oraz niedoskonałością rynków. Do wymienionych czynników można dodać opóźnienie informacji, na których podstawie są analizowane i podejmowane decyzje.

Modele opóźnienia są tworzone dla potrzeb różnych dziedzin nauki i różnych zastosowań. Na gruncie ekonomii zależnościami klasycznymi mającymi postać modelu opóźnienia są między innymi: wpływ nakładów inwestycyjnych na zasób kapitału, transmisja ceny, tj. opóźnienie zmiany ceny krajowej importowanego surowca względem zmiany ceny tego surowca na rynkach międzynarodowych, opóźnienie sprzedaży względem zmiany ceny - lub w skali makroekonomicznej - reakcja popytu konsumpcyjnego na zmianę dochodu dyspozycyjnego, czy wreszcie reakcja gospodarki na zmianę stopy procentowej.

---

[1] W przypadku modeli stochastycznych trudno mówić o zależnościach przyczynowo-skutkowych.

Celem modelu opóźnienia jest opisanie zależności zmiennej zależnej od zmiennych niezależnych. W wielu przypadkach celem tym jest również oszacowanie, o ile okresów zmiany zmiennej zależnej są opóźnione w stosunku do zmiany zmiennej niezależnej i w jakim stopniu zmiany te są rozłożone, bądź skupione w czasie.

W analizie opóźnień wyodrębnić można dwie podstawowe grupy zagadnień. Grupa pierwsza, to analiza mechanizmów, które decydują o właściwościach badanego opóźnienia. Grupa druga, szczególnie ważna w badaniach empirycznych, to zagadnienia związane z estymacją modeli opóźnień.

W historii badań zaangażowanie w rozwiązywanie problemów z obu tych grup było nierównomierne. W pierwszym okresie uwaga badaczy była skupiona głównie na analizie konstrukcji i własności różnych modeli opóźnienia. Były to przede wszystkim prace: Fishera (1937), Koycka (1954), Solowa (1960), Almon (1965), Griliches (1967). Równolegle prowadzone były prace poświęcone drugiej grupie zagadnień.

W drugim okresie, który - jak się wydaje - trwa nadal, dominują prace poświęcone zagadnieniom należącym do grupy drugiej. Do najwybitniejszych prac tego nurtu należy zaliczyć przede wszystkim następujące: Griliches (1967), Maddala (1977), Dhrymes (1981). Wpłynęły na to następujące czynniki: rozwiązano znaczną część podstawowych problemów grupy pierwszej oraz dostrzeżono wagę i złożoność problemów estymacji. Za cezurę można uznać pojawienie się artykułu Almon (1965) i Jorgensena (1966), w których zaproponowano odpowiednio tak zwane modele wielomianowy i ilorazowy. Modele te z jednej strony charakteryzują się dużą elastycznością w tym sensie, że nie wymagają od stosujących modele opóźnienia zaangażowania a zarazem zwalniają od problemów należących do grupy pierwszej.

Wielką syntezę osiągnięć na polu badania modeli opóźnienia stanowi książka Dhrymesa (1981). Mimo, że od jej pierwszego wydania minęło ponad trzydzieści lat, jest ona wciąż fundamentalnym źródłem wiedzy o modelach opóźnień. Stanowi zarazem wzorzec, do którego należy się odnieść decydując się na pisanie o modelach opóźnień. Autorowi tej pracy wydaje się, że ma tu coś nowego do zaproponowania.

Celem tej pracy jest zaprezentowanie analizy modeli opóźnień, której niektóre wątki stanowią nawiązanie do przedstawionego powyżej okresu pierwszego, jak również korzystającej z rozwiązań zaproponowanych w badaniach późniejszych. Są to następujące grupy problemów.

Pierwsza grupa wiąże się z doborem miernika opóźnienia. Podejmowane tu zagadnienie jest następstwem powszechnego przyjmowania w literaturze przedmiotu jako miernika opóźnienia wartości średniej rozkładu opóźnienia, co w wielu wypadkach może być powodem nieporozumień i błędów interpretacji. Ma to znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy celem analizy jest określenie opóźnienia zmiennej zależnej względem zmiennej niezależnej, a nie wyłącznie mechanizm opóźnienia.

Druga grupa zagadnień podjętych w tej pracy jest związana z analizą własności podklasy modeli opóźnienia opisujących zjawiska związane z przepływami. Do tej podklasy zaliczyć można takie modele jak: model kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji i deprecjacji kapitału, model kształtowania się stanu depozytów w systemie bankowym pod wpływem strumieni wpłat oraz wypłat, model kształtowania się poziomu zadłużenia z tytułu kredytu udzielonego przez system bankowy pod wpływem strumienia spłat wcześniej zaciągniętych kredytów oraz strumienia nowoudzielonych kredytów. Do tej podklasy można również zaliczyć model demograficzny, w którym liczba ludności jest kształtowana przez strumienie urodzeń oraz zgonów. Wspólną cechą wymienionych tu modeli jest to, że występują w nich kategorie zasobów oraz strumieni zasilających (wpływających) oraz wyczerpujących te zasoby. W zjawiskach opisywanych za pomocą tych modeli często istotnymi wielkościami są średni czas, jaki jednostki strumienia wyczerpującego zasób przebywały w zasobie oraz średni okres przebywania jednostki w tym zasobie. Wielkości te, poza wyjątkami, nie są równe.

Trzecia grupa problemów wiąże się z analizą własności modeli opóźnienia, w których mechanizm opóźnienia ulega zmianie. Problematyka ta nie jest nowa, np. Tinsley (1967), Pesando (1972), Otto (1985), Gadomski (1986), Dahl, Kulaksizoglu (2005); jej umiarkowany rozwój wynika – jak się wydaje – z dwóch przyczyn. Pierwsza, to niedostatek informacji, powodujący konieczność wyboru modeli uproszczonych, ze stałymi współczynnikami, przysparzającymi mniejsze trudności przy estymacji parametrów. Przyczyna druga, wiąże się z podejściem pragmatycznym, polegającym na daleko idącym – w stosunku do wiedzy o badanym zjawisku – upraszczaniu i w związku z tym na pominięciu analizy mechanizmów opóźnienia. Jest to również wynik osłabienia „czujności badawczej" w następstwie pojawienia się modeli wielomianowego Almon (1965) i ilorazowego Jorgensena (1966) – ich elastyczność często prowadzi do uzyskania zadowalającego wyniku: wszystko to, czego nie udaje się - z jakiegoś powodu - wtłoczyć w część deterministyczną modelu, przypisane zostaje czynnikowi losowemu.

W pracy problematyka estymacji modeli opóźnienia rozłożonego jest całkowicie pominięta, osobom zainteresowanym z czystym sumieniem można polecić prace klasyczne: Griliches (1967), Dhrymes (1981), Hendry et al. (1984). W prezentowanych dalej rozważaniach struktura opóźnienia będzie z założenia dana lub aproksymowana w zadowalający sposób.

Praca składa się z następujących części. W Części I sformułowany jest uogólniony model opóźnienia rozłożonego. Uogólnienie polega na uwzględnieniu, że na zmienną zależną mają wpływ nie tylko zmienna niezależna i zmienna losowa, ale również podlegający zmianom mechanizm opóźnienia, który jest dany przez strukturę i/lub rozkład opóźnienia i mnożnik długookresowy. Zaproponowana będzie nowa kategoria nazwana wynikowym rozkładem opóźnienia. W tej samej Części I omawiane są również podstawowe pojęcia charakteryzujące rozkład opóźnienia, (jeśli istnieje): wartość średnia, wariancja i

mediana rozkładu opóźnienia. W dalszej części wprowadzone są pojęcia funkcji tworzącej i operatora wielomianowego jako przydatnych narzędzi analizy modeli opóźnienia.

Część II zawiera omówienie podstawowych własności modeli złożonych modeli opóźnienia. Badana jest suma modeli opóźnienia rozłożonego, która jest również modelem opóźnienia rozłożonego, ze strukturą opóźnienia będącą sumą składowych struktur opóźnienia, z rozkładem opóźnienia będącym średnią ważoną składowych rozkładów opóźnienia. Współczynnikami wagowymi tej średniej są udziały mnożników długookresowych modeli składowych w wartości mnożnika długookresowego modelu-sumy. Te same współczynniki wagowe uczestniczą w wyznaczeniu wartości średniej rozkładu opóźnienia sumy modeli opóźnienia; jest ona równa średniej ważonej wartości średnich składowych rozkładów opóźnienia. Wariancja rozkładu opóźnienia modelu będącego sumą modeli opóźnienia rozłożonego jest nie mniejsza od średniej ważonej (za pomocą tych samych współczynników wagowych) wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych. W przypadku superpozycji, tj. połączenia szeregowego modeli opóźnienia rozłożonego, która zachowuje własności modelu opóźnienia rozłożonego, struktura opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia rozłożonego jest splotem struktur opóźnienia modeli składowych, mnożnik długookresowy całości jest iloczynem mnożników długookresowych modeli wchodzących w skład superpozycji, wartość średnia rozkładu superpozycji modeli jest sumą wartości średnich rozkładów opóźnienia modeli składowych oraz wariancja rozkładu opóźnienia superpozycji modeli opóźnienia jest równa sumie wariancji rozkładów opóźnienia modeli składowych.

W Części III omawiane są podstawowe, spotykane w literaturze modele opóźnienia rozłożonego ze stałym rozkładem opóźnienia, ich interpretacja oraz przykłady ich zastosowań. Modele te znajdują zastosowanie wtedy, gdy nie ma podstaw do przyjęcia założenia, że mechanizm opóźnienia ulega zmianie.

Wśród modeli ze stałym mechanizmem opóźnienia ważną rolę w modelowaniu ekonomicznym odgrywają modele oparte na hipotezach oczekiwań adaptacyjnych i dostosowania częściowego. Wśród modeli należących do tej kategorii szczególne znaczenie mają te, które opisują systemy, w których zachodzą związki pomiędzy natężeniami strumieni a wielkościami zasobów, przez które strumienie te przepływają. W modelach opóźnień opisujących przepływy wyróżnić można dwie grupy modeli. Są to modele typu: strumień - strumień oraz modele typu zasób – strumień. Typ pierwszy opisuje zależność natężenia strumienia wypływającego od natężenia strumienia wpływającego. W przypadku drugiego typu opisywany jest wpływ strumienia wpływającego na poziom zasobu. Modele przepływów znajdują wiele zastosowań, między innymi w opisie: kształtowania się kapitału pod wpływem inwestycji, depozytów i kredytów w systemie bankowym, w modelach demograficznych.

Część III jest poświęcona również analizie modeli opóźnienia, w których zmianie ulega sam mechanizm opóźnienia. Następstwem tego są pewne szczególne własności tych modeli. W rozdziale tym analizowane są modele wpływu zapasów na tempo zmian cen, transmisji cen, zmian kształtowania się poziomu depozytów i kredytów pod wpływem zmian preferencji klientów bankowych.

Ta książka jest adresowana głównie do ekonomistów, ale też do przedstawicieli innych nauk społecznych zainteresowanych modelowaniem. Modelowanie nie może obyć się bez matematyki, więc i w tej pracy jest nieunikniona. Aby nie zniechęcić czytelników, których nie interesują wywody matematyczne, dużą część dowodów i przekształceń zamieszczono w Dodatku.

W przygotowaniu tej książki nieocenioną pomoc uzyskałem od wielu pracowników Instytutu badań Systemowych PAN. Szczególną wdzięczność chciałbym wyrazić panom profesorowi Przemysławowi Grzegorzewskiemu i doktorowi Piotrowi Nowakowi; nieuniknione błędy są wyłącznie moim dziełem.

1.10 Źródła zmienności struktur opóźnienia.

Do podstawowych czynników zmienności struktur opóźnienia modeli opóźnienia rozłożonego należą:

- czynnik losowy
- sezonowość
- skokowa lub ewolucyjna jakościowa zmiana struktury opisywanego systemu.

Wpływ czynnika losowego, np. Hildreth, Houck (1968), Froelich (1973), Ullah, Raj (1980), na strukturę opóźnienia w modelu opóźnienia rozłożonego ujmuje wyżej przedstawiona zależność (1.1b):

$$y_t = \sum_{i=0}^{n} v_{ti}\, x_{t-i},$$

w której

$$v_{ti} = v_i + \vartheta_{ti}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

gdzie v_i oznacza wartość oczekiwaną i-tego współczynnika struktury opóźnienia, $v_i = E(v_{ti})$, ϑ_{ti} to składnik losowy zakłócający obserwację i-tego współczynnika opóźnienia.

Różnica między zależnościami (1.1a) i (1.1b) jest istotna, zwłaszcza w nieomawianym w tej pracy zagadnieniu estymacji współczynników modelu, ze względu na własności składnika losowego ε_t, który w wariancie (1.1b) ma złożoną strukturę:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{ti} x_{t-i}\ ,$$

ponieważ

$$y_t = \sum_{i=0}^{n} v_i\, x_{t-i} + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{ti} x_{t-i}\ .$$

Warto zauważyć, że specyfikacja Hildretha i Houcka, Hildreth, Houck (1968), dotyczy skończonych modeli opóźnienia; wynika to z konieczności zapewnienia skończonej wariancji składnika losowego przy standardowych założeniach o składnikach losowych ϑ_{ti} , $i = 1, 2, \ldots, n$; (zerowa wartość oczekiwana i skończona wariancja).

Gdy czynnikiem kształtującym wartości współczynników struktury opóźnienia jest sezonowość, wtedy współczynniki te opisują zależności:

$$v_{t,i} = v_{t+kT,i}\ ,\ i = 0, 1, 2, \ldots\ ;\ k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ ;$$

gdzie liczba naturalna T oznacza okres wahań sezonowych.

Pierwszą publikacją, w której współczynniki modelu opóźnienia podlegają wahaniom sezonowym był artykuł Pesando (1972), opisujący model kwartalny, w którym wykorzystanie kredytu zależy od numeru

kwartału, w którym został przyznany. Model ten ma następującą postać (zachowane oryginalne oznaczenia):

$$D_t = \sum_{i=0}^{n} w(i) NC_{t-i} ,$$

gdzie

$$w(i) = c_i + S_{1,i} D_{1,t-i} + S_{2,i} D_{2,t-i} + S_{3,i} D_{3,t-i} ,$$

oraz

D_t - wykorzystanie kredytu w okresie o kolejnym numerze t,

NC_t - kredyt przyznany w okresie t,

$D_{j,t-i}$ - zmienna sztuczna przyjmująca wartość 1 w j-tym kwartale, $j = 1, 2, 3$; i 0 w kwartałach pozostałych,

$S_{j,t-i}$ - wartość i-tego współczynnika w kwartale j.

Model Pesando można zaliczyć do tzw. modeli opóźnień w systemach przepływów, które są omawiane w Rozdziale III.

Sezonowość w modelach opóźnienia rozłożonego może być również ujęta w modelach, w których zmiany rozkładu zależą od wartości pewnej ustalonej zmiennej. Do takich modeli zaliczyć można omawiany poniżej model (1.54), lub model (3.22) z Rozdziału III z cyklicznie zmieniającymi się parametrami λ_t i ρ_t. Wahania sezonowe są uwzględnione w wielu ekonometrycznych modelach *ADL*.

Skokowa zmiana struktury opóźnienia modelu jest następstwem zmiany mechanizmu opóźnienia. Za przykład może tu posłużyć model opisany w pracy Dahl, Kulaksizoglu (2006), w którym struktura opóźnienia w budownictwie w USA ulega zmianie wraz ze zmianą koniunktury; w recesji wartość średnia rozkładu opóźnienia jest mniejsza od wartości średniej w ekspansji. W artykule pt. „Crude Oil and Gasoline Prices: An Asymmetric Relationship?", Balke, N.S., Brown, S.P.A. and Yücel, M.K. (1998), przedmiotem badania jest zależność cen benzyny w USA od cen ropy naftowej. Przeglądy ekonometrycznych modeli asymetrycznej transmisji cen zostały przedstawione m.in. w artykułach: Meyer Jochen, von Cramon-Taubadel Stephan (2004), oraz Manera Matteo, Frey Giliola (2005). Natomiast Kim Hyeyoung i Ronald W. Ward w artykule: Kim, Ward (2013) w analizie transmisji zmian cen w systemie dystrybucji żywności w USA zaobserwowali różne struktury opóźnienia zależne od kierunku zmian cen - inne dla wzrostów i spadków.

W modelu opisującym niesymetryczne dostosowanie cen na rynku paliw, K. Leszkiewicz-Kedzior i A. Welfe, Leszkiewicz-Kedzior K., Welfe A. (2014), zastosowali model korekty błędem (*Error Correction Model*), w którym występują dwie struktury opóźnienia; jedna dla odchylenia od trendu długookresowego

mniejszego od wartości progowej, druga dla odchylenia od trendu długookresowego większego od wartości progowej.

W opracowanym w IBS PAN modelu gospodarki polskiej, Gutenbaum et al. (1998), wpływ czynników kształtujących produkcję w wyróżnionych sektorach ma inną strukturę opóźnienia przy wzrostach i spadkach produkcji.

Przyczynami są, między innymi, zmiany struktury modelu (złożone struktury są omawiane a Części II) spowodowane przez zmiany jakościowe opisywanego systemu, jego struktury wewnętrznej, czy preferencji.

Inną przyczyną zmiany struktury opóźnienia jest zmiana czynników egzogenicznych wpływających na mechanizm opóźnienia[16].

Zmienność mechanizmu opóźnienia zostanie omówiona na przykładzie przedstawionego wyżej modelu dostosowania cząstkowego, mającego pierwotnie stały współczynnik dostosowania λ:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda \cdot (x_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t .$$

Szczególne znaczenie tego modelu wynika z licznych zastosowań (wspomniane wyżej dostosowanie cząstkowe, oczekiwania adaptacyjne). Jego dynamizacja wiąże się z dopuszczeniem zmienności współczynnika λ, gdy zmienność ta jest znacząca i związana z dającą się zidentyfikować przyczyną.

Uchylając założenie o stałości λ i przyjmując $0 \le \lambda_t \le 1$, powyższą zależność można zapisać w następującej postaci:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda_t \cdot (x_t - y_{t-1}) + \varepsilon_t . \tag{1.71}$$

Zmienność współczynnika λ_t można przypisać dowolnej z wymienionych wyżej przyczyn.

Stosując kolejne podstawianie zmiennych $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots;$ uzyskujemy następujące rozwiązanie równania różnicowego (1.71):

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} v_{t,i} x_{t-i} + e_t ;, \; i=0, 1, 2, \ldots ;$$

w którym:

$$v_{t,i} = \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) , \tag{1.72}$$

oraz:

$$e_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1} (1-\lambda_{t-j}) . \tag{1.73}$$

[16] Przykład ilustrujący ten przypadek jest omówiony w Części III.

Z powyższych wzorów wynika, że zależność (1.71) jest modelem opóźnienia rozłożonego ze zmiennymi w czasie współczynnikami struktury opóźnienia opisanymi wzorem (1.72) oraz składnikiem losowym w postaci przedstawionej we wzorze (1.73). Wzór (1.72) pokazuje, że wartość i-tego współczynnika struktury opóźnienia w okresie t zależy od wartości współczynników dostosowania $\lambda_t, \lambda_{t-1}, \ldots, \lambda_{t-i+1}, \lambda_{t-i}$.

Model opóźnienia rozłożonego, będący rozwiązaniem zależności (1.71) ma szereg szczególnych własności. Na podstawie definicji mnożnika długookresowego a_t oraz wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ wielkości te dla omawianego modelu przyjmują odpowiednio następujące postaci:

$$a_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) = \lambda_t + \lambda_{t-1}(1-\lambda_t) + \lambda_{t-2}(1-\lambda_t)(1-\lambda_{t-1}) + \ldots, \tag{1.74}$$

oraz:

$$M(W_t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left[i \cdot \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) \right]}{a_t}. \tag{1.75}$$

Na podstawie prostych przekształceń można uzyskać następujące zależności:

$$a_t = \lambda_t + (1-\lambda_t) a_{t-1}, \tag{1.76}$$

oraz

$$M(W_t) = (1-\lambda_t) \frac{a_{t-1}}{\lambda_t + (1-\lambda_t) a_{t-1}} \left[M(W_{t-1}) + 1 \right]. \tag{1.77}$$

Wyprowadzenie zależności (1.77) zamieszczono w Dodatku.

Zauważmy, że jeśli $\lambda_t = 1$, to $v_{t0} = 1, v_{t1} = 0, v_{t2} = 0, v_{t3} = 0, \ldots$; wtedy również $a_t = 1$, bez względu na wcześniejsze wartości, a wartość średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t) = 0$. Jeśli $\lambda_t = 0$, wtedy mnożnik długookresowy a_t przyjmuje wartość z poprzedniego okresu $a_t = a_{t-1}$, a wartość średnia rozkładu opóźnienia $M(W_t) = M(W_{t-1}) + 1$ (dlatego, że w przypadku tego modelu przy $v_{t0} = 0$, rozkład opóźnienia W_t powstaje przez przesunięcie rozkładu W_{t-1} w prawo o jedną pozycję).

Jakie wartości przyjmuje mnożnik długookresowy? Na podstawie powyższego wywodu wiemy, że mnożnik długookresowy a_t przyjmuje wartość 1, gdy $\lambda_t = 1$, a również wtedy, gdy współczynnik dostosowania jest stały $\lambda_t = \lambda^* = const.$, a jego wartość mieści się w granicach: $\lambda^* \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\lambda_{min}, \lambda_{max} \in (0,1]$, $\lambda_{min} < \lambda_{max}$, (ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^*(1-\lambda^*)^i = 1$).

Załóżmy, że współczynnik dostosowania λ_t przyjmuje zmienne wartości z przedziału $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\lambda_{min}, \lambda_{max} \in (0,1]$. Korzystając ze wzoru (1.74), wartość mnożnika długookresowego można oszacować od dołu:

$$\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{min}}{1-\lambda_{max}} (1-\lambda_{max})^{i+1} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) \le a_t ,$$

i od góry

$$a_t \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{t-i}}{1-\lambda_{t-i}} \prod_{j=0}^{i} (1-\lambda_{t-j}) \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_{max}}{1-\lambda_{min}} (1-\lambda_{min})^{i+1} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} .$$

Przedstawione wyżej wartości dolnego i górnego ograniczenia są skończone, przy czym ograniczenie dolne jest mniejsze od *1*, a górne większe od *1*.

Mnożnik długookresowy a_t można przedstawić w następującej postaci:

$$a_t = 1 + c_t ,$$

gdzie c_t jest odchyleniem wartości mnożnika długookresowego od wartości *1*. Z tego, że wartości a_{t-i}, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$; są ograniczone wynika, że również wartości c_{t-i} $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$; są ograniczone. Przekształcając (1.76) uzyskujemy:

$$c_t = (1-\lambda_t) c_{t-1} ,$$

oraz w wyniku kolejnych *k-1* podstawień:

$$c_t = c_{t-k} \prod_{i=0}^{k-1} (1-\lambda_{t-i}) , \; k=1, 2, 3, \ldots .$$

Odchylenie c_t od wartości mnożnika długookresowego można, na podstawie powyższej zależności, oszacować w następujący sposób:

$$(1-\lambda_{max})^k c_{t-k} \le c_t \le c_{t-k} (1-\lambda_{min})^k .$$

Ponieważ wszystkie wartości odchylenia c_{t-k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$; są z założenia ograniczone, a ponadto prawa i lewa nierówność w powyższej relacji dążą do zera, wynika z tego, że $c_t = 0$, a zatem $a_t = 1$.

Powyższe rozważania wskazują, że jeśli współczynnik λ_t spełnia dwa warunki, mianowicie przyjmuje wartości z przedziału $(0,1]$, a ponadto jego wartości nie dążą do *0*, mnożnik długookresowy a_t przyjmuje wartość *1*. Można jednak wskazać przypadki, kiedy mnożnik ten uzyskuje wartość różną od *1*; jeśli ciąg współczynników λ_{t-i}, $i = 0, 1, 2, \ldots$; szybko dąży do *0*, jak na przykład dla $\lambda_{t-i} = \frac{1}{1+(i+1)!}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, mnożnik długookresowy a_t przyjmuje wartość $a_t = 0{,}72842$.

W przypadku spełnienia dwóch wyżej wymienionych warunków dla współczynnika λ_t, mnożnik długookresowy a_t przyjmuje wartość 1, a wzory (1.75) i (1.77) ulegają uproszczeniu:

$$M(W_t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[i \cdot \lambda_{t-i} \prod_{j=0}^{i-1}(1-\lambda_{t-j})\right], \tag{1.78}$$

oraz

$$M(W_t) = (1-\lambda_t)\left[M(W_{t-1})+1\right]. \tag{1.79}$$

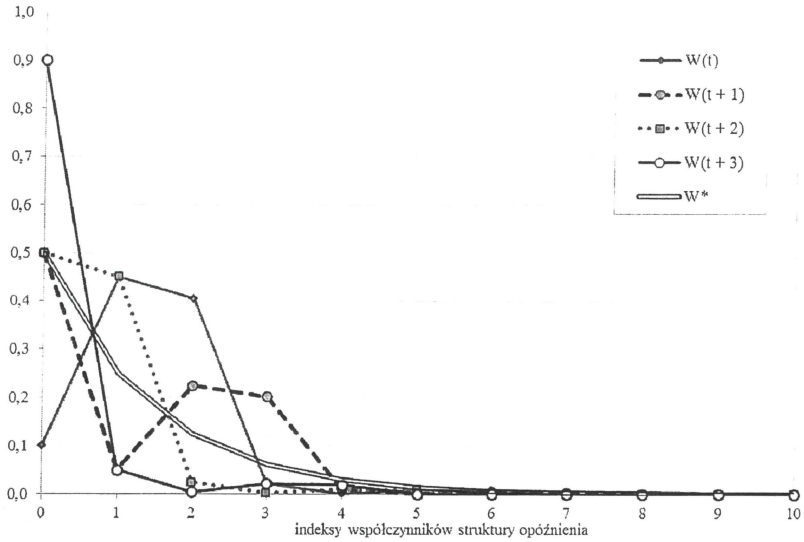
Rozważmy teraz dwa przypadki zmiennych rozkładów opóźnienia spowodowanych przez dwie różne przyczyny. W pierwszym, zmiana rozkładu opóźnienia jest spowodowana sezonową zmianą współczynnika dostosowania λ_t w modelu (1.71), w drugim przez skokową zmianę wartości współczynnika dostosowania λ_t w modelu opóźnienia (1.71).

Przykład 1.6

W tym przykładzie wartość współczynnika dostosowania λ_t oscyluje wokół wartości $\lambda = 0{,}5$ z okresem wahań równym czterem jednostkom (na przykład wahania kwartalne przy danych miesięcznych), zgodnie ze wzorem:

$$\lambda_t = 0{,}5 + 0{,}4 \sin\frac{2\pi}{4}t .$$

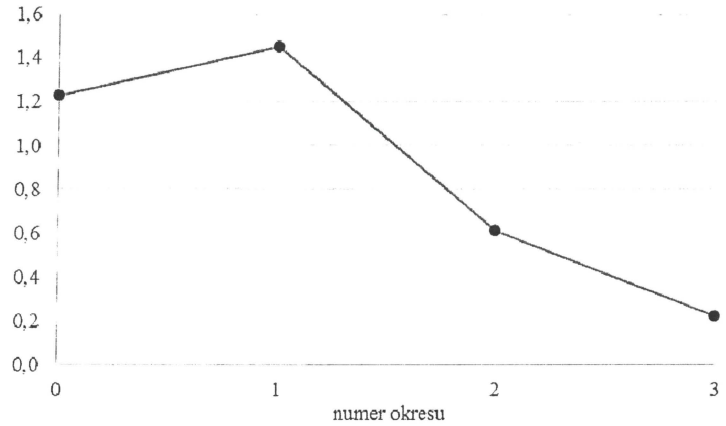
Przedstawione na rys. 1.5 wykresy przedstawiają współczynniki stałego rozkładu modelu opóźnienia dla $\lambda = 0{,}5$ oraz współczynniki rozkładów z okresów $t = 0, 1, 2, 3$.



Źródło: obliczenia własne

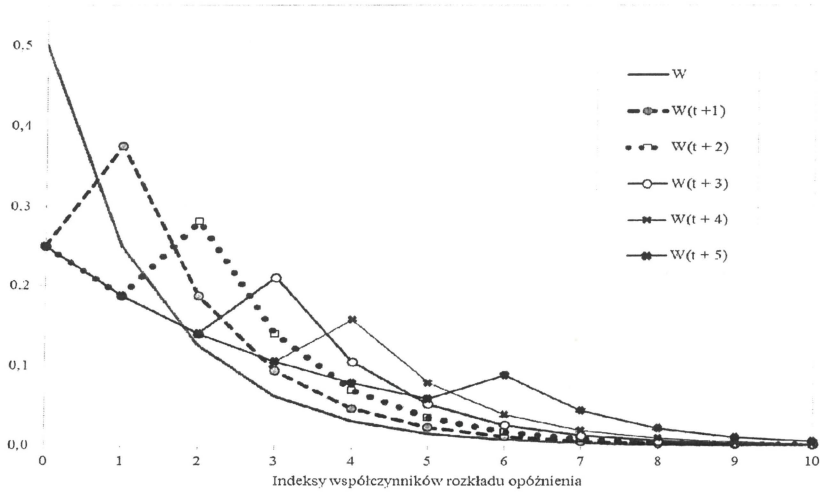
rys. 1.5. Przykład 1.6. Współczynniki rozkładów opóźnienia: stałego, linia podwójna ciągła, oraz rozkładów w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.

Towarzyszące zmianom współczynnika dostosowania λ_t zmiany wartości średniej rozkładu opóźnienia przedstawiono na rys. 1.6.



Źródło: obliczenia własne

rys. 1.6. Przykład 1.6. Wartości średnie $M(W_t)$ rozkładu opóźnienia W_t w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.



Źródło: obliczenia własne

rys. 1.7. Przykład 1.7. Wartości współczynniki rozkładów opóźnienia w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.

Zmiany wartości średnich rozkładów opóźnienia spowodowane przez skokową zmianę wartości współczynnika dostosowania zostały przedstawione na rys. 1.8.

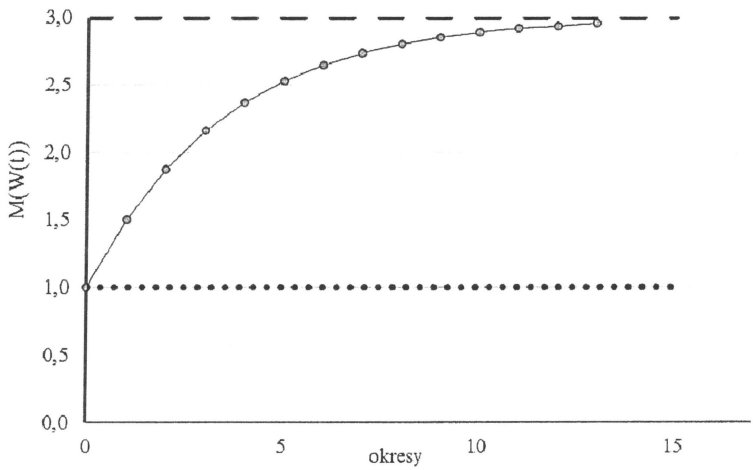
Z wykresów przedstawionych na rys. 1.5 wynika, że w pewnych przypadkach nieskomplikowany deterministyczny mechanizm opóźnienia nietrudno pomylić z losowym mechanizmem zmian rozkładu opóźnienia.

Przykład 1.7

W tym przykładzie wartość współczynnika dostosowania λ_t ulega zmianie w okresie $t=1$ i zmniejsza się od $0,5$ do $0,25$ (wydłużenie czasu reakcji), czego następstwem jest ewolucja rozkładu opóźnienia ze zmieniającą się wartością średnią rozkładu opóźnienia.

Na rys. 1.7. przedstawiono ewolucję współczynników rozkładów opóźnienia w okresach $t = 0, 1, 2, 3$.

Na rys. 1.8. przedstawiono wartości średnie rozkładów opóźnienia w okresach $t = 0, 1, \ , 15$.



Źródło: obliczenia własne

rys. 1.8. Przykład 1.7. Ewolucja wartości średniej rozkładu opóźnienia $M(W_t)$ (linia ciągła) w następstwie zmiany wartości współczynnika λ_t z $0,5$ (linia kropkowana) na $0,25$ (linia przerywana).

Omawiany przykład pokazuje, jak skokowa zmiana współczynnika dostosowania powoduje ewolucję rozkładu opóźnienia, ale również wartości średniej kolejnych rozkładów opóźnienia, rys. 1.8. Nietrudno

zauważyć, że proces dostosowania jest nieskończony, jednak już w okresie $t=14$ praktycznie pokrywa się z wartością graniczną równą *3*.

Na pytanie o czas trwania przedstawionego w tym przykładzie procesu dostosowania można odpowiedzieć podając dwie wielkości: wartość średnią trwania procesu oraz medianę. Drugą z omawianych wartości łatwo odczytać z wykresu: jest ona większa od *2* i mniejsza od *3*.

Średni czas M trwania procesu można oszacować ważąc względnymi odchyleniami od wartości granicznej czas trwania odchylenia:

$$M=\sum_{t=0}^{\infty} t \frac{M(W_{t=\infty})-M(W_t)}{\sum_{t=0}^{\infty}\left[M(W_{t=\infty})-M(W_t)\right]}=3,69.$$

Podsumowanie Części I

W Części I wprowadzone zostały podstawowe pojęcia opisujące modele opóźnienia rozłożonego: zmienne niezależna i zależna, struktura opóźnienia, składnik losowy, model skończony i nieskończony. Zdefiniowany został rozkład opóźnienia oraz określono warunki jego istnienia, a ponadto wyprowadzono pojęcia: mnożnik długookresowy i podstawowe parametry tego rozkładu opóźnienia: wartość średnią, wariancję i medianę rozkładu opóźnienia. W dalszej części zaproponowane zostało pojęcie wynikowego rozkładu opóźnienia oraz jego parametry: wartość średnia, wariancja i mediana.

Przedstawione zostały podstawowe sposoby analizy dynamiki związane ze zmianą wartości zmiennej niezależnej: impulsową, skokową, a następnie z wpływem okresowych wahań zmiennej niezależnej na zmienną zależną. Przedstawiono problemy wiążące się z niejednoznacznością pojęcia opóźnienia. Ukazana została różnica między własnościami mechanizmu opóźnienia a opóźnieniem, na które wpływ wywierają, poza samym mechanizmem opóźnienia, również wartości zmiennej niezależnej. Pojęcia te znajdują zastosowanie w ocenie opóźnienia i w wyborze odpowiedniej jego miary.

W kolejnych rozdziałach tej części przedstawiono najczęściej spotykane skończone i nieskończone modele opóźnienia rozłożonego oraz odpowiadające im rozkłady opóźnienia. Omówiono podstawowe źródła zmienności struktur opóźnienia. Rozważania te są zilustrowane przykładem modelu dostosowania częściowego ze zmiennym współczynnikiem dostosowania. Dla modelu tego zostały podane warunki, dla których mnożnik długookresowy ma wartość jeden, a ponadto wyprowadzone zostały wzory pozwalające na obliczanie w kolejnym okresie wartości mnożnika długoterminowego i wartości średniej rozkładu opóźnienia na podstawie bieżącej wartości współczynnika dostosowania oraz wartości tych wielkości z poprzedniego okresu.