Polskie Towarzystwo Badań Operacyjnych i Systemowych
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:
Zbigniew Nahorski
Marian Chudy
Andrzej Straszak

OPTYMALIZACJA

Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

OPTYMALIZACJA

ZADANIA, METODY, ALGORYTMY

Redaktorzy

Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak

WARSZAWA 1991

OPTYMALIZACJA:
Zadania, metody, algorytmy
PTBOiS, Warszawa 1991.

METODA PROGRAMOWANIA CELOWEGO

Andrzej Najgebauer
Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa

Streszczenie:
Przedstawiono ideę metody programowania celowego jako metody rozwiązywania zadań optymalizacji wielokryterialnej. Sformułowano pierwotne zadanie optymalizacji wielokryterialnej. Rozpatrzono trzy postacie zadania, w zależności od przyjętej relacji dominowania (relacja PARETO "$\leq$ ", relacja leksykograficzna $\mathcal{L}_{\leq}$,relacja leksykograficzna grupowa $\mathcal{L}^{a}_{\leq}$). Pokazano przekształcenie zadania pierwotnego w zadanie programowania celowego. Przedstawiony został ogólny algorytm rozwiązywania zadań programowania celowego.Podano własności uzyskiwanych rozwiązań.

1. Wprowadzenie

Metoda programowania celowego[1] prezentowana była w pracach [2],[3],[4]. W celu uzupełnienia i uporządkowania zapisu i sposobu formułowania zadań zostanie przedstawiona próba sformułowania zadań programowania celowego w typowym "języku" optymalizacji wielokryterialnej. We wspomnianych pracach zakłada się, że zadanie wielokryterialne może być sprowadzone do zadania programowania celowego, gdy decydent posiada informacje dotyczące wektora $b \in \mathcal{R}^{Q}$, którego składowymi są postulowane poziomy realizacji celów. Można jednak podejść do zagadnienia inaczej. Otóż można założyć, że cele określa się arbitralnie nakładając jedynie warunek poprzedzania przez cel b tzw. punktu idealnego w zadaniu wielokryterialnym [1] w sensie przyjętej relacji dominowania.

Niech będzie określone zadanie wielokryterialne w

[1] W terminologii anglosaskiej programowanie celowe nosi nazwę goal programming.

postaci trójki :

(1) $$\langle \Omega,\ \mathbb{F},\ R \rangle$$

gdzie : Ω - zbiór rozwiązań dopuszczalnych , $\Omega \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ - przestrzeń rozwiązań; $\mathbb{F}$ - funkcja kryterium, $\mathbb{F} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{R}^{Q}$; R - relacja dominowania.

Przyjmiemy następujące warianty relacji dominowania :

Def. 1.

Relacja PARETO :

$$\text{"}\le\text{"} = \left\{ (y,w) \in \mathbb{F}(\Omega) \times \mathbb{F}(\Omega) \,\middle|\, \bigwedge_{q \in \overline{1,Q}} y_q \le w_q \right\}$$

Def. 2.

$$R_{\le} = \left\{ (y,w) \in \mathbb{F}(\Omega) \times \mathbb{F}(\Omega) \,\middle|\, \left[\bigwedge_{q \in \overline{1,Q}} y_q \le w_q \wedge \bigvee_{k \in \overline{1,Q}} y_k < w_k \right] \right\}$$

Def. 3.

Relacja leksykograficzna :

$$\mathcal{L}_{\le} = \left\{ (y,w) \in \mathbb{F}(\Omega) \times \mathbb{F}(\Omega) \,\middle|\, \left[\bigvee_{k \in \overline{1,Q}} y_k < w_k \wedge \bigwedge_{q<k} y_q = w_q \right] \vee y=w \right\}$$

Def. 4.

Relacja leksykograficzna grupowa :

$$\mathcal{L}^{Q}_{\le} = \left\{ (y,w) \in \mathbb{F}(\Omega) \times \mathbb{F}(\Omega) \,\middle|\, \left[\bigvee_{r \in \overline{1,Z}} \left[\bigwedge_{q \in Q^r} y_q \le w_q \wedge \bigvee_{k \in Q^r} y_k < w_k \right] \wedge \right.\right.$$
$$\left.\left. \wedge \sim \bigvee_{t<r} \left[\bigwedge_{q \in Q^t} w_q \le y_q \wedge \bigvee_{l \in Q^t} w_l < y_l \right] \right] \vee y=w \right\}$$

gdzie $Q^r = \{Q_{r-1}+1,\ Q_{r-1}+2, \ldots,\ Q_r\}$.

$Q = \sum_{r=1}^{Z} R_r$, r - numer grupy kryteriów, R_r - liczba kryteriów w grupie r ($r \in \overline{1,Z}$), $Q_r = Q_{r-1} + R_r$ ($Q_0 = 0$), $Q = Q_Z$.

Dążymy do wyznaczenia niepustego podzbioru rozwiązań niezdominowanych zadania (1). Od tej pory zadanie (1) będziemy nazywać zadaniem pierwotnym.

Niech $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_q, \ldots, b_Q)$ oznacza wektor postulowanych (nie zawsze osiągalnych) poziomów realizacji celów wyrażanych przez funkcję wektorową $\mathbb{F}$, $Q = \{1, \ldots, q, \ldots, Q\}$ - zbiór indeksów funkcji kryterium . W szczególnym przypadku $b_q = \min_{x \in \Omega} f_q(x)$ (x - zmienna decyzyjna, Ω - zbiór rozwiązań dopuszczalnych). Wartości b_q mogą być ustalone przez decydenta. Często zakłada się , że $b_q \le \min_{x \in \Omega} f_q(x)$

(w zadaniach z relacjami dominowania "$\leq$ " (*Def.*1), $R_{\leq}$ (*Def.*2), $\mathcal{L}_{\leq}$ (*Def.*3), $\mathcal{L}^{a}_{\leq}$ (*Def.*4)). Takie ustalenie wektora b pozwala osiągnąć rozwiązania niezdominowane w sensie wymienionych relacji dominowania.

Dana jest funkcja ograniczeń $\mathbb{G} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{R}^{L}$;

(2) $$\mathbb{G}(x) = \left[g_l(x) \right]_{l \in \overline{1,L}} ;$$

gdzie : $\mathcal{L} = \{1,\ldots,l,\ldots,L\}$ - zbiór indeksów funkcji ograniczeń. Niech $c = (c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots, c_L)$ oznacza wektor celów, odpowiadający funkcji ograniczeń (analogicznie jak w przypadku funkcji $\mathbb{F}$). Na wektor celów c składają się prawe strony ograniczeń wyznaczających zbiór rozwiązań dopuszczalnych Ω :

(3) $$\Omega = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \bigwedge_{l \in \overline{1,L}} \left[g_l(x) \leq c_l \vee g_l(x) = c_l \vee g_l(x) \geq c_l \right] \right\}$$

Wskaźnikami jakości w zadaniu programowania celowego są tzw. funkcje osiągnięć, określające odchylenie wartości funkcji kryterium zadania pierwotnego od wektora celów b oraz odchylenie wartości funkcji ograniczeń od wektora celów c.

Niech $\mathcal{Z} = \{1,\ldots,Z\}$ oznacza zbiór priorytetów oraz jednocześnie zbiór indeksów funkcji osiągnięć . Priorytet to liczba całkowita dodatnia, która określa ważność kryterium lub grupy kryteriów i ograniczeń. Im mniejsza liczba tym większy priorytet. Niech $\mathcal{A}_z$ oznacza zbiór indeksów funkcji ograniczeń $g_l (l \in \overline{1,L})$ lub funkcji kryterium f_q $(q \in Q)$ o priorytecie z $(z \in \mathcal{Z})$. Funkcje ograniczeń mają ten sam priorytet. Różne funkcje kryterium mogą mieć ten sam priorytet (ustalono ich równoważność). Przez d^-, d^+ oznaczono wektory utworzone z odchyleń :

$$d_i(x) = \begin{cases} c_i - g_i(x) , & i \in \overline{1,L} \\ b_{i-L} - f_{i-L}(x) , & i \in \overline{L+1,L+Q} \end{cases}$$

(4) $$d_i^-(x) = \begin{cases} d_i(x) , & \text{gdy } d_i(x) \geq 0 \\ 0 , & \text{gdy } d_i(x) < 0 \end{cases} \qquad i \in \overline{1,L+Q} ;$$

$$d_i^+(x) = \begin{cases} |d_i(x)| , & \text{gdy } d_i(x) < 0 \\ 0 , & \text{gdy } d_i(x) \geq 0 \end{cases} \qquad i \in \overline{1,L+Q} ; \; x \in \mathcal{X}.$$

Zbiory $\mathcal{A}_z$ $(z \in \overline{1,Z})$ dzieli się na pewne podzbiory według następującego sposobu :

(5) $$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^1 \cup \mathcal{A}_1^2 \cup \mathcal{A}_1^3;$$

gdzie :

$$\mathcal{A}_1^1 = \left\{ l \in \mathcal{L} \mid g_l(x) \le c_l \text{ , } x \in \mathcal{X} \right\};$$

$$\mathcal{A}_1^2 = \left\{ l \in \mathcal{L} \mid g_l(x) \ge c_l \text{ , } x \in \mathcal{X} \right\};$$

$$\mathcal{A}_1^3 = \left\{ l \in \mathcal{L} \mid g_l(x) = c_l \text{ , } x \in \mathcal{X} \right\};$$

oraz

(6) $$\mathcal{A}_z = \mathcal{A}_z^1 \cup \mathcal{A}_z^2 \text{ , dla } z \in \overline{2,Z};$$

gdzie : $$\mathcal{A}_z^1 = \left\{ i \in \mathcal{N} \mid i = L+q,\ q \in Q \wedge f_q(x) \xrightarrow[x \in \Omega]{} \min \right\};$$

$$\mathcal{A}_z^2 = \left\{ i \in \mathcal{N} \mid i = L+q,\ q \in Q \wedge f_q(x) \xrightarrow[x \in \Omega]{} \max \right\};$$

Funkcję osiągnięć definiuje się następująco:

Def. 5

$$\mathbf{A} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{R}^{Z};$$

$$\mathbf{A}(x) = \left(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_z(x), \ldots, a_Z(x) \right), \ x \in \mathcal{X};$$

gdzie: $$a_1(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}_1^1} d_i^+(x) + \sum_{i \in \mathcal{A}_1^2} d_i^-(x) + \sum_{i \in \mathcal{A}_1^3} (d_i^-(x) + d_i^+(x));$$

$$a_z(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}_z^1} d_i^+(x) + \sum_{i \in \mathcal{A}_z^2} d_i^-(x) \text{ , } z \in \overline{2,Z}.$$

Funkcja osiągnięć może być interpretowana, jako ocena (wektorowa) odchyleń wektorów realizacji celów g(x) i f(x) od ustalonych wektorów **c** i **b**.

2. Zadanie programowania celowego

Można sformułować zadanie polioptymalizacji :

(7) $$\langle \mathcal{X}, \mathbf{A}, \mathcal{L}_{\le} \rangle$$

gdzie : $\mathcal{X}$ - przestrzeń rozwiązań; $\mathbf{A}$ - wektorowa funkcja osiągnięć ; $\mathcal{L}_{\le}$ - relacja leksykograficznego porządku (hierarchia ścisła). Zbiór rozwiązań niezdominowanych zadania (7) nazywany jest zbiorem rozwiązań preferowanych.

Def. 6

Zbiorem rozwiązań preferowanych zadania (7) określa się zbiór $\mathcal{X}_Z$ taki, że $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ i $\mathcal{X}_z$ określony jest rekurencyjnie:

$$\mathcal{X}_z = \left\{ x^* \in \mathcal{X}_{z-1} \mid a_z(x^*) = \min_{x \in \mathcal{X}_{z-1}} a_z(x) \right\} \text{ , } z \in \overline{1,Z} \text{ .}$$

Wniosek 1.

Z definicji funkcji osiągnięć i zbioru rozwiązań preferowanych wynika, że zbiór $\mathcal{X}_1 = \left\{ x^* \in \mathcal{X}_0 \mid a_1(x^*) = 0 \right\}$ jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych Ω zadania pierwotnego.

Rozwiązanie zadania (7) polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań preferowanych w wyniku realizacji następującego algorytmu :

Dla danych wektorów b oraz c :

1° Wyznaczyć $a_1^* = \min a_1(x)$;

$$g_l(x) + d_l^- - d_l^+ = c_l, \ l \in \overline{1,L};$$
$$d^-, d^+ \geq 0, \ d_l^- d_l^+ = 0, \ l \in \overline{1,L};$$
$$x \in \mathcal{X};$$

:

z° Wyznaczyć $a_z^* = \min a_z(x)$;

$$g_l(x) + d_l^- - d_l^+ = c_l, \ l \in \overline{1,L};$$
$$a_t(x) \leq a_t^*, \ t = \overline{1,z-1};$$
$$f_{i-L}(x) + d_i^- - d_i^+ = b_{i^z_L} \quad i \in \mathcal{A}_z;$$
$$d^-, d^+ \geq 0, \ d_i^- d_i^+ = 0, \ i \in \overline{1,|\mathcal{A}_z|}$$
$$x \in \mathcal{X};$$

:

Z° Wyznaczyć zbiór takich $x^* \in \mathcal{X}_Z^* \subset \Omega \subset \mathcal{X}$, że

$$a_Z(x^*) = \min a_Z(x);$$
$$g_l(x) + d_l^- - d_l^+ = c_l, \ l \in \overline{1,L};$$
$$a_t(x) \leq a_t^*, \ t \in \overline{1,Z-1};$$
$$f_{i-L}(x)) + d_i^- - d_i^+ = b_{i^Z_L} \ i \in \mathcal{A}_Z;$$
$$d^-, d^+ \geq 0, \ d_i^- d_i^+ = 0, \ i \in \overline{1,|\mathcal{A}_Z|};$$
$$x \in \mathcal{X};$$

Do rozwiązania Z zadań jednokryterialnych można zastosować znane procedury programowania matematycznego. W pewnych przypadkach można wykorzystać procedurę INPC (Iteracyjnego Nieliniowego Programowania Celowego) [3],[5].

3. Własności rozwiązań preferowanych

Dla ilustracji własności rozwiązań preferowanych rozpatrzono trzy przypadki zadań pierwotnych .

1° Zadanie pierwotne : $\langle \Omega, \mathbb{F}, \mathcal{L}_{\leq} \rangle$, gdzie Ω, $\mathbb{F}$ jak w (1),

$\mathcal{L}_{\leq}$ – relacja leksykograficznego porządku (*Def.* 3).
Odpowiednie zadanie programowania celowego ma postać : $\langle \mathcal{X}, \mathbb{A}, \mathcal{L}_{\leq} \rangle$; gdzie elementy $\mathcal{X}, \mathbb{A}, \mathcal{L}_{\leq}$ jak w (7).
Dla tych zadań zachodzą następujące związki : $Z = Q + 1$}; $\mathcal{A}_z^1 = \{L+q\}$, $\mathcal{A}_z^2 = \emptyset$, $z \in \overline{2,Z}$, $q = z - 1$ (przy założeniu że w zadaniu pierwotnym kryteria ponumerowane są od najważniejszego do najmniej ważnego). Zakłada się , że elementy wektora celów **b** spełniają zależność :

$$\bigwedge_{q \in \overline{1,Q}} b_q \leq \min_{x \in \Omega} f_q(x); \tag{8}$$

Wyznaczenie takich celów jest często dużo łatwiejsze niż znalezienie punktu idealnego [1]. Stąd można określić funkcje osiągnięć $a_z(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}_z^1} d_i^+(x)$ przy $|\mathcal{A}_z^1| = 1$ następująco:

$$a_z(x) = |b_{z-1} - f_{z-1}(x)| = f_{z-1}(x) - b_{z-1} \text{ dla } z \in \overline{2,Z} .$$

Porównując zbiory rozwiązań obu zadań można wyciągnąć następujący wniosek [5]:

Wniosek 2.

Zbiór rozwiązań preferowanych pokrywa się ze zbiorem rozwiązań leksykograficznych zadania pierwotnego, a z tego, że ten ostatni zawiera się w zbiorze rozwiązań niezdominowanych zadania $\langle \Omega, \mathbb{F}, \leq \rangle$ wynika, że zbiór rozwiązań preferowanych również zawiera się w tym zbiorze.

2° Zadanie pierwotne : $\langle \Omega, \mathbb{F}, \leq \rangle$, gdzie Ω, $\mathbb{F}$ jak w (1) $\leq$ – relacja PARETO (*Def.* 1). Odpowiednie zadanie programowania celowego ma postać : $\langle \mathcal{X}, \mathbb{A}, \mathcal{L}_{\leq} \rangle$; gdzie elementy $\mathcal{X}$, $\mathbb{A}$, $\mathcal{L}_{\leq}$ jak w (7). Zachodzą następujące związki : wszystkie kryteria zadania pierwotnego są równoważne, stąd $Z = 2$, $\mathcal{A}_2^1 = \{L+1, L+2, ..., L+q, ..., L+Q\}$, $\mathcal{A}_2^2 = \emptyset$, ponadto na elementy wektora celów nakłada się warunek (8), funkcja osiągnięć $\mathbb{A} = (a_1, a_2)$, a_1 jak w *Def.* 5, a_2 przyjmuje postać: $a_2 = \sum_{i \in \mathcal{A}_2^1} |b_{i-L} - f_{i-L}(x)| = \sum_{i \in \mathcal{A}_2^1} (f_{i-L}(x) - b_{i-L})$.

Autor [6] sformułował następujący lemat :

Lemat 1.

Jeśli dane jest zadanie wielokryterialne $\langle \Omega, \mathbb{F}, \leq \rangle$ oraz zachodzi warunek (8), to zbiór rozwiązań postaci :

$$\Omega_p^b = \left\{ x^* \in \Omega \,|\, R_p^b(x^*) = \min_{x\in\Omega} \left(\sum_{q=1}^{Q} |b_q - f_q(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad 1 \le p < \infty ,$$

zawiera się w zbiorze rozwiązań niezdominowanych $\Omega_N^{\le}$.
Łatwo zauważyć, że dla p = 1 zbiór ten równoważny jest :

$$\mathcal{X}_z = \left\{ x^* \in \mathcal{X}_1 \,|\, a_z(x^*) = \min_{x\in\mathcal{X}_1} \sum_{i\in\mathcal{A}_z^1} (f_{i-L}(x) - b_{i-L}) \right\},$$

gdyż na podstawie wniosku 1 $\mathcal{X}_1 = \Omega$.

Wniosek 3.

Zbiór rozwiązań preferowanych zawiera się w zbiorze rozwiązań niezdominowanych zadania $\langle \Omega, \mathbb{F}, \le \rangle$.

3^0 Zadanie pierwotne : $\langle \Omega, \mathbb{F}, \mathcal{L}_{\le}^{Q} \rangle$, gdzie Ω, $\mathbb{F}$ jak w (1) $\mathcal{L}_{\le}^{Q}$ – relacja grupowej hierarchii (*Def* 4.). Odpowiednie zadanie programowania celowego ma postać : $\langle \mathcal{X}, \mathbb{A}, \mathcal{L}_{\le} \rangle$; gdzie elementy $\mathcal{X}, \mathbb{A}, \mathcal{L}_{\le}$ jak w (7). Dla tych zadań zachodzą następujące związki : jeżeli S– liczba grup kryteriów, to $Z = S+1$, R_r liczba kryteriów w grupie $r\,(r\in\overline{1,S})$ i $Q_r = Q_{r-1} + R_r$,

$$\mathcal{A}_z^1 = \left\{ L+Q_{r-1}+1, L+Q_{r-1}+2, \ldots, L+Q_r \right\}, \quad r = z-1 , \quad \mathcal{A}_z^2 = \emptyset ,$$

zachodzi warunek (8) Na każdym poziomie z wyznacza się $\mathcal{X}_z$

$$\mathcal{X}_z = \left\{ x^* \in \mathcal{X}_{z-1} \,|\, a_z(x^*) = \min_{x\in\mathcal{X}_{z-1}} \sum_{i\in\mathcal{A}_z^1} (f_{i-L}(x) - b_{i-L}) \right\},$$

a w zadaniu pierwotnym na każdym poziomie wyznacza się Ω_N^r:

$$\Omega_N^r = \left\{ x^* \in \Omega_N^{r-1} \,|\, \sim \bigvee_{\bar{x}\in\Omega_N^{r-1}} \left[\bar{x} \ne x^* \wedge \left(\bigwedge_{Q_{r-1}+1 \le q \le Q_r} f_q(\bar{x}) \le f_q(x^*) \wedge \left(\bigvee_{Q_{r-1}+1 \le k \le Q_r} f_k(\bar{x}) < f_k(x^*) \right) \right) \right] \right\}.$$

Na podstawie wniosku 1 wiadomo, że $\mathcal{X}_1 = \Omega$ oraz $\Omega_N^0 = \Omega$. Stosując analizę jak w przypadku 1^0 i 2^0 można wykazać, że przejście z poziomu o wyższym priorytecie na niższy nie pogarsza rozwiązania. Lemat 1 odnosi się do każdego z poziomów priorytetów, czyli rozwiązania uzyskiwane na każdym poziomie są niezdominowane w sensie relacji $\le$ i $R_{\le}$ i należą do zbioru Ω_N^r, w którym znajdują się rozwiązania niezdominowane w sensie relacji $R_{\le}$ na poziomie r $(r\in\overline{1,S})$.
Można więc sformułować wniosek :

Wniosek 4.

Rozwiązania preferowane są niezdominowane w sensie $\mathcal{L}_{\le}^{Q}$ przy założeniu, że zadanie pierwotne jest postaci $\langle \Omega, F, \mathcal{L}^{o}_{\leq} \rangle$.

Zaletą przedstawionej metody jest duża łatwość określenia wektora celów funkcji kryteriów oraz funkcji ograniczeń. Istnieje tu swoboda określenia hierarchii kryteriów, zależy to jedynie od decydenta lub wynika z potrzeb modelowanej sytuacji. Ma to jedynie wpływ na liczbę poziomów priorytetów.

Literatura

[1] A.Ameljańczyk : Optymalizacja wielokryterialna. Skrypt WAT, Warszawa 1986.

[2] A. Charnes, W. Cooper : Goal Programming and Multiple Objective Optimization. European Journal of Operational Research, vol.1,nr 1, 1977.

[3] C.L.Hvang, A.S.H.Masud : Multiple Objective Decision Making-Methods and Applications. Springer Verlag, Berlin 79

[4] Ignizio J.P., Goal Programming and Extensions, Lexington Books, 1976.

[5] A. Najgebauer : Komputerowe wspomaganie kierowania radioelektronicznym obezwładnianiem pokładowych urządzeń radiolokacyjnych środków napadu powietrznego. Praca doktorska, WAT Warszawa 1988.

[6]A.P. Wierzbicki : Metody optymalizacji przy wektorowych wskaźnikach jakości. Modelowanie systemowe społeczno-gospodarczego rozwoju kraju. PWN, Warszawa 1979.

ISBN 83-900412-1-9