

Polskie Towarzystwo Badań
Operacyjnych i Systemowych
Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk
Wojskowa Akademia Techniczna

Redaktorzy:
Zbigniew Nahorski
Marian Chudy
Andrzej Straszak



Warszawa 1991

POLSKIE TOWARZYSTWO
BADAŃ OPERACYJNYCH I SYSTEMOWYCH
INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

O P T Y M A L I Z A C J A

ZADANIA, METODY, ALGORYTMY

Redaktorzy

Zbigniew Nahorski, Marian Chudy, Andrzej Straszak

WARSZAWA 1991

OPTIMALIZACJA HIERARCHICZNEJ STRUKTURY SIECI KOMPUTEROWEJ

Ryszard Mizera
Wojskowa Akademia Techniczna. Warszawa

Streszczenie: Przedstawiono model matematyczny wraz ze sformułowaniem problemu optymalnego wyznaczania hierarchicznej sieci komputerowej. Jako funkcję kryterium przyjęto koszt budowy struktury oraz koszt eksploatacji koncentratorów. Sformułowane zadanie optymalizacyjne jest zadaniem programowania nieliniowego.

1. Wstęp.

W opracowaniu będziemy rozpatrywać hierarchiczną sieć komputerową, która będzie zbudowana z trzech stopni: abonentów, węzłów komutacyjnych, centrum obliczeniowego. Abonenci stanowią najniższy poziom tej struktury. Rolę węzłów komutacyjnych, (które tworzą kolejne poziomy struktury) spełniają koncentratory. Najwyższy poziom w sieci stanowi centrum obliczeniowe. Centrum obliczeniowe oparte na systemie komputerowym posiada moc obliczeniową umożliwiającą realizację wszystkich zadań abonentów sieci. Funkcjonowanie sieci polega na przesyłaniu danych oraz programów od abonentów do centrum obliczeniowego, przez hierarchicznie powiązane koncentratory, na wykonaniu w tym centrum przetwarzania zgodnie ze zgłoszonymi potrzebami oraz na przesyłaniu danych, wyników do odpowiednich abonentów.

2. Charakterystyki systemu.

W dalszej części rozważań przyjmujemy, że:

- każdy abonent może być połączony tylko z jednym koncentrატorem,

Optymalizacja struktury sieci komputerów

- w danej sieci może być kilka poziomów koncentratorów,
- do koncentratora muszą być podłączeni co najmniej dwaj abonenci lub dwa koncentratory z poziomu niższego.

Oznaczmy przez $M = \{1, 2, \dots, m, \dots, M\}$ zbiór numerów wszystkich miejscowości na danym obszarze, w których można umieścić koncentratory, w których znajdują się abonenci oraz centra obliczeniowe.

Możemy zatem napisać, że w skład zbioru M wchodzi trzy podzbiory, a mianowicie:

$M_1 = \{m_1, m_2, \dots, m_a, \dots, m_A\}$ - zbiór numerów miejscowości, w których są umieszczeni abonenci

przy czym

m_a - oznacza numer miejscowości, w której znajduje się abonent o numerze $a \in A$

$M_2 = \{m_c\}$ - zbiór jednoelementowy, którego elementem jest numer miejscowości, w której znajduje się centrum obliczeniowe.

Trzeci podzbiór, to zbiór numerów pozostałych miejscowości, w których można zbudować koncentratory; oznaczymy go przez M_3 .

Możemy zatem napisać, że

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

Jeżeli $P = \{0, 1, \dots, p, \dots, P\}$ będziemy oznaczać zbiór poziomów w hierarchicznej strukturze komputerowej oraz przez M^p zbiór numerów miejscowości, które znajdują się na p -tym poziomie to oczywistym jest, że zbiór abonentów tworzy zerowy poziom struktury, czyli $M^0 = M_1$.

Wprowadzamy zmienną z_{uw} , która ma postać

$$z_{uw} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli w strukturze sieci komputerowej istnieją} \\ & \text{połączenia między miejscowościami } u \text{ oraz } w \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Wówczas muszą zachodzić warunki

$$(1) \quad \begin{aligned} z_{uw} &= 0 && \text{dla } u, w \in \mathbb{N}^0 \\ \sum_{w \in \mathbb{N}_2} z_{uw} &= 1 && u \in \mathbb{N}^0 \end{aligned}$$

Za pomocą koncentratorów abonent musi uzyskać połączenie z centrum obliczeniowym. W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że dysponujemy koncentratorami jednego typu.

Przyjmujemy poniższe oznaczenia

$K = \{ 1, \dots, k, \dots, K \}$ - zbiór numerów koncentratorów

$g_k = g$ - maksymalna ilość wejść koncentratora ($g_k \in \mathbb{N}^+$)

K^p - zbiór koncentratorów na p -tym poziomie.

Dla rozpatrywanej struktury hierarchicznej musi zachodzić

$$(2) \quad \bigcup_{p=1}^{P-1} K^p = K \wedge (K^p \cap K^{p'} = \emptyset); \quad p \neq p'; \quad p=1, \dots, P-1$$

Wprowadzamy zmienną y_w^p , która ma postać

$$y_w^p = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli koncentrator zbudowano w miejscowości} \\ & w \in \mathbb{N}^p \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Możemy zatem napisać

$$(3) \quad |\mathbb{N}^p| = |K^p| \wedge \sum_{w \in \mathbb{N}^p} y_w^p = 1; \quad p=1, \dots, P-1$$

Co oznacza, że w danej miejscowości "w" można zainstalować tylko jeden koncentrator.

Ponadto uwzględniając charakterystyki struktury hierarchicznej możemy napisać że:

a) między miejscowościami, które są na tym samym poziomie nie może istnieć połączenie

$$(4) \quad z_{uw} = 0 \quad \text{dla } p = 1, \dots, P-1; \quad u, w \in \mathbb{N}^p$$

Optymalizacja struktury sieci komputerów

- b) miejscowość należąca do poziomu p może mieć połączenie tylko z jedną miejscowością należąca do poziomu wyższego $p+1$

$$(5) \quad \sum_{w \in N^{p+1}} z_{uw} = 1 \quad u \in N^p; p=1,2,\dots,P-2$$

- c) do koncentratora poziomu p nie może być połączonych więcej niż g i nie mniej niż dwóch abonentów (koncentratorów) poziomu niższego $p-1$.

$$(6) \quad 2 \leq \sum_{w \in N^{p+1}} z_{uw} \leq g \quad w \in N^p; p=1,\dots,P-1$$

Połączenia między elementami struktury sieci komputerowej są realizowane przy pomocy tzw. kanałów.

Każdy kanał typu $e \in E$ można scharakteryzować parametrami.

h_e - przepustowość kanału typu e

ξ_e - koszt instalowania jednostki długości kanału typu e

Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjmujemy, że kanały są dwukierunkowe.

Oznaczmy przez z_{uw}^e zmienną, która ma postać

$$z_{uw}^e = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli kanał typu } e \text{ łączy miejscowości } u \text{ oraz } w \\ & (z_{uw}^e = 1) \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Niech ponadto

λ_{w_a} - oznacza intensywność przesyłania informacji od abonenta o numerze "a" do centrum obliczeniowego.

Kanał typu "e" łączący abonenta z koncentratorem musi spełniać warunek.

$$\lambda_{w_a} \leq h_e z_{w_a}^e$$

Natomiast kanał wychodzący z koncentratora umiejscowionego w "u" a łączącego koncentrator w miejscowości "w" musi

posiadać przepustowość nie mniejszą niż sumaryczna intensywność informacji wpływającej do tego koncentratora. Oczywiście tego typu zależności muszą być spełnione dla dowolnego poziomu struktury. Zatem ogólnie dla $p=1,2,\dots,P-1$ możemy napisać

$$\lambda_u^p \leq \sum_{e=1}^E h_e z_{uw}^e \quad \text{dla } w \in N^{p+1}$$

(8)

$$\lambda_u^p = \sum_{e=1}^E \sum_{w \in N^{p-1}} z_{uw}^e \lambda_w^{p-1} y_u^p$$

Ponadto dla poziomu o numerze P musi zachodzić

$$\lambda_w^{P-1} \leq \sum_{e=1}^E z_{w,w}^e h_e \quad \begin{matrix} w \in N^{P-1} \\ w \in N_2 = N^P \end{matrix}$$

Na zakończenie omawiania kaniów należy zaznaczyć, że dwa elementy sieci mogą być połączone za pomocą tylko jednego typu kanału.

czyli

$$\sum_{w \in N^p} \sum_{e \in E} z_{uw}^e \cdot y_w^p = 1 \quad \begin{matrix} u \in N^{p-1} \\ p = 1, 2, \dots, P \end{matrix}$$

Do tej pory zostały przedstawione warunki na fizyczną realizowalność hierarchicznej sieci komputerowej.

Z tych warunków wynika, że rozpatrywaną sieć w sposób jednoznaczny możemy scharakteryzować za pomocą wielkości

$$P, \{ y_w^p \}, \{ z_{uw}^e \}$$

3. Sformułowanie zadania optymalizacji

Jako kryterium oceny jakości skonstruowanej sieci komputerowej przyjmujemy koszt jej budowy. Na ten koszt składać się będzie:

Optymalizacja struktury sieci komputerów

koszt budowy połączeń F_1 oraz koszt budowy i eksploatacji koncentratorów F_2 .

Pierwsza składowa przyjmie postać

$$F_1 = \sum_{p \in P} \sum_{w \in N^p} \sum_{u \in N^{p-1}} \sum_{e \in E} y_w^p y_w^{p-1} z_{uw}^e d_{uw} z_e$$

Natomiast F_2 określimy jako sumę kosztów budowy koncentratorów F_2' oraz kosztów eksploatacji F_2''

Przy czym

$$F_2' = \sum_{p \in P} \sum_{w \in N^p} c_1 y_w^p \left[\sum_{u \in N^{p-1}} \sum_{e \in E} y_w^{p-1} y_w^p z_{uw}^e \right]$$

$$F_2'' = \sum_{p \in P} \sum_{w \in N^p} c_2 y_w^p (h_w^p - \lambda_w^p)$$

gdzie

c_1 - oznacza koszt jednostkowy budowy koncentratorów

c_2 - oznacza jednostkowy koszt eksploatacji

d_{uw} - odległość między miejscowościami u oraz w .

Zadanie optymalizacyjne można przedstawić w poniższy sposób.

Dla zadanych

$$N, N_1, N_2, N_3, A, D = [d_{uw}], \{\lambda_w^p\}, c_1, c_2, \theta, E, \{h_w^p\}, \{z_e\}$$

Wyznaczyć takie

$$P = (1, 2, \dots, p, \dots, P); y = \{y_w^p\}; z = \{z_{uw}^e\}$$

aby funkcja kryterium F osiągała minimum

$$F(P, y, z) \rightarrow \text{minimum}$$

Przy ograniczeniach $1, 2, \dots, 10$

4. Analiza rozwiązania zadania optymalizacyjnego

Przedstawione sformułowanie problemu optymalizacyjnego jest zagadnieniem programowania nieliniowego całkowito-liczbowego.

Przyjmujemy dwa etapy rozwiązania sformułowanego zadania: w pierwszym etapie będziemy wyznaczać minimalną ilość koncentratorów oraz sposoby ich powiązań, zakładając, że pozostałe koszty są nieistotne. W drugim etapie będziemy wyznaczać określone przepustowości łączy między elementami struktury.

Elementy struktury będziemy wyznaczać poczynając od najniższego poziomu (zerowego) czyli od zbioru abonentów $M^0 = A$

Innymi słowy poczynając od M^0 (czyli $p=0$) wyznaczamy minimalną ilość koncentratorów oraz rozmieszczenie wraz z połączeniami z elementami ze zbioru M^0 .

Następnie przechodzimy do poziomu pierwszego ($p=1$), wyznaczamy minimalną ilość ze zbioru M^1 . W ten sposób będziemy postępować tak długo aż na jakimś etapie p będzie spełniony warunek

$$|M^p| \leq q$$

co oznacza, że wyznaczyliśmy taki poziom koncentratorów, które będą już połączone z centrum.

W ten sposób zostaną wyznaczone wszystkie elementy struktury hierarchicznej sieci komputerowej.

Do wyznaczenia ilości koncentratorów (czyli zbioru M^{p+1}) będziemy korzystali z metody przydziału o minimalnym koszcie, w naszym przypadku tym kosztem będzie odległość między miejscowościami.

Drugim etapem rozwiązywania sformułowanego problemu dotyczy wyznaczania optymalnych przepustowości kanałów.

Innymi słowy, w tej fazie algorytmu będziemy wyznaczać zmienną z_{uv}^* , która mówi nam za pomocą jakiego typu kanałów będą połączone węzły struktury sieci komputerowej. W funkcji kryterium widać, że na koszt eksploatacji koncentratorów składa się koszt dopasowania kanału

Optymalizacja struktury sieci komputerów

wyjściowego w stosunku do intensywności napływających do koncentratora.

Przedstawiony powyżej schemat postępowania daje rozwiązanie suboptymalne.

Literatura

- [1] Abramson Franklin : Sieci telekomunikacyjne komputerów MNT, 1978r.
- [2] Янбых Г.ф., Эттингер Б.Я : Проектирование структуры отраслевой сети вычислительных центров. Энергия 1974г.
- [3] Янбых Г.ф., Эттингер Б.Я : Методы анализа и синтеза сетей Э В М Энергия 1980.
- [4] Korzan B : Elementy teorii grafów i sieci. Metody i zastosowania MNT, 1978r.
- [5] Seidler J : Analiza i synteza sieci łączności dla systemów informatycznych. PWN, 1979r.

ISBN 83-900412-1-9.