KIWIEL

POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją
Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

WSPOMAGANIE DECYZJI

SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją

Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

Wydano z wykorzystaniem dotacji
KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Materiały konferencji: "Analiza Decyzyjna, Systemy Eksperckie, Zastosowania Systemów Komputerowych", Warszawa, 25-27 maja 1994r.

Komitet Programowy Konferencji:

Andrzej Ameljańczyk, Zdzisław Bubnicki, Wiesław Grudzewski, Olgierd Hryniewicz, Janusz Kacprzyk, Lech Kruś, Roman Kulikowski (przewodniczący), Kazimierz Mańczak, Ireneusz Nykowski, Zdzisław Pawlak, Roman Słowiński, Andrzej Straszak, Andrzej Weryński, Andrzej Wierzbicki.

Wykonano z oryginałów tekstowych dostarczonych przez autorów

ISBN 83-85847-85-5

PARADOKSY TZW. "DIVIDED GOVERNMENT"

Jacek W. Mercik
Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska

Problem tzw. "divided government" (chyba najwłaściwszy polski termin to podzielone decydowanie) to problem występujący wtedy, kiedy decyzje podejmowane są na różnych szczeblach (także równoległych) w sposób grupowy lub indywidualny a same ogniwa decyzyjne nie są ze sobą zgodne.

Typowym przykładem podzielonego decydowania jest system najwyższych władz, tj. trójka decyzyjna: prezydent, Sejm, Senat, w której poszczególne składowe można przypisać różnym decydentom zbiorowym. Przyjmijmy na przykład, że prezydent jest z partii X, Sejm zdominowany jest przez partię Y, a Senat przez partię X - odpowiadająca tej sytuacji trójka decyzyjna to: XYX. W systemach dwupartyjnych takich trójek decyzyjnych może być $2^3=8$; ogólnie ilość k-tek decyzyjnych wynosi n^k, gdzie n ($n \geq 2$) to ilość pojedynczych składowych (np. partii) podejmujących w sposób zbiorowy decyzję na swoim szczeblu, a k ($k \geq 2$) opisuje ilość ogniw decyzyjnych. Oczywiście, mogą też wystąpić systemy mieszane, w których na każdym szczeblu decyzyjnym występować będą różne ilości składowych decyzyjnych i w których ilość możliwych k-tek wyraża się bardziej skomplikowanym wzorem.

Prześledźmy problem 3-etapowych decyzji podejmowanych przez ciała decyzyjne zdominowane przez jedną z dwóch (X lub Y) stron każde. Możliwe trójki to:

XXX, XXY, XYX, YXX, XYY, YXY, YYX, YYY.

Załóżmy dalej, że o tym, która z dwóch stron (X lub Y) decydować będzie na danym szczeblu decyzyjnym rozstrzygać będzie wynik wyboru dokonanego przez elektorat. Każdy wyborca może ze sobie jedynie znanych powodów decydować, że na poszczególnych szczeblach woli on reprezentantów tej lub drugiej strony (partii). Przykładowo, pewien wynik głosowania (przedstawiony przez S. Bramsa i in., 1993) 13 głosujących wygląda następująco:

XXX:3, XXY:1, XYX:1, YXX:0, XYY:1, YXY:3, YYX:3, YYY:1

Jeżeli potraktować wybór jednej z trójek jako rezultat głosowania przez głosujących na poszczególne trójki to brak jest tutaj zwycięzcy, gdyż aż trzy z nich uzyskały maksymalną ilość głosów: XXX, YXY, YYX.

Jeżeli natomiast dokonamy sumowania poszczególnych głosów oddanych na każdy ze szczebli oddzielnie znajdziemy, że YXX wygrywa stosunkiem głosów 7:6 w każdym z tych głosowań: $Y_{(1)}>X_{(1)}$, $X_{(2)}>Y_{(2)}$, $X_{(3)}>Y_{(3)}$.

Sytuację przedstawioną w powyższym przykładzie przyjęto nazywać paradoksem podzielonego decydowania (divided government) ponieważ, jak łatwo zauważyć, trójka YXX nie uzyskała bezpośredniego poparcia głosujących (YXX:0).

Dla warunków amerykańskich (system dwupartyjny i trzy-szczeblowy) Brams, Kilgour i Zwicker znaleźli warunek dostateczny i wystarczający na to, aby np. XXX było trójką wygrywającą:

$$Q(XXX)> 2n_0 + 2[\max (n_1, n_2, n_3)],$$

gdzie:

$Q(XXX)$ - miara poparcia kombinacji XXX, $Q(XXX) = 3n_0+n_1+n_2+n_3$,

$n_0 = n(XXX) - n(YYY)$,

$n_1 = n(XXY) - n(YYX)$,

$n_2 = n(XYX) - n(YXY)$,

$n_3 = n(YXX) - n(XYY)$.

$n(XXX)$ oznacza ilość głosów oddanych na kombinację XXX.

W dalszych rozważaniach terminu "divided government" używamy w takim znaczeniu jak to zostało przedstawione powyżej w ślad za artykułem Bramsa, Kilgoura i Zwickera (1993) i odnosić będziemy do sytuacji występującej w USA i odnoszącej się do Izby Reprezentantów, Senatu i prezydenta obsadzanych przez Demokratów (D) lub Republikanów (R).

Paradoks podzielonego rządzenia pojawia się wtedy, kiedy agregacja głosów robiona według urzędów (tzn. poszczególnych szczebli) wyłania zwycięzców obsadzających dany urząd, którzy jednak traktowani jako kombinacja republikanów i demokratów uzyskują w tym głosowaniu najmniejszą (lub słabiej: jedną z najmniejszych) liczbę głosów (nazywamy to agregacją "po kombinacjach").

W cytowanycm powyżej warunku wystarczającym i koniecznym dla pojawienia się paradoksu w agregacji głosów istotnym czynnikiem jest występowanie "wewnętrznej jedności" (poglądów) tych, którzy podtrzymują kombinację zwycięską. Rozważmy oszacowanie szans występowania paradoksu "divided government".

Podstawowym założeniem analizy jest stwierdzenie, że występowanie lub brak paradoksu związany jest z wewnętrznym "rozdarciem" głosującego i w konsekwencji niekoherentnością elektoratu jako całości.

Ponieważ wyboru należy dokonać pomiędzy dwiema partiami (R lub D) można zauważyć, że dowolne p_i, $0\leq p_i\leq 1$ opisuje prawdopodobieństwo wyboru jednej z nich (np. D) na dany urząd przez i-tego głosującego. Interpretujemy to w sposób następujący: jeżeli p_i równa się 1 lub 0 to dany głosujący jest całkowicie zdeterminowany i głosuje na D lub R odpowiednio. Jeżeli wszyscy głosujący są w powyższym sensie zdeterminowani to paradoks "divided government" nie powinien się pojawić. W każdej innej sytuacji ($0<p_i<1$) paradoks może się pojawić.

Jeżeli rozpatrujemy w podobny sposób elektorat jako całość podobny indeks *p* może być wprowadzony jako miara niezdecydowania (lub inaczej niekoherentności) elektoratu. W pewnym sensie, rozkład *p* wzdłuż wymiaru ideologicznego D-R (wymiar ten dla wygody rozważań normalizujemy do odcinka [0,1]) może być rozpatrywany jako funkcja gęstości rozkładu elektoratu wzdłuż tego samego wymiaru. Każdy zdeterminowany głosujący tworzy nie-paradoksalne rezultaty - oddaje on swoje głosy na kandydatów tylko z jednej partii i nigdy nie głosuje przy wyborach na dany urząd na kandydatów z konkurencyjnej partii.

Paradoksy tworzą jedynie kandydaci niezdeterminowani - ich pozycja wzdłuż wymiaru R-D jest gdzieś "wewnątrz" przedziału [0,1].

Niech $(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{im})$ opisuje rezultat głosowania przez i-tego głosującego na *m* urzędów (i=1, 2, ... , n), gdzie $X_{ik}=1$ lub 0 (głos na D lub R odpowiednio), k=1, 2, ..., m.

Załóżmy, że dla dowolnego i=1, 2, ..., n $(X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{im})$ jest układem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie tj. X_{ik} ma rozkład dwupunktowy:

$$P(X_{ik} = 1) = p_i \quad i \quad P(X_{ik} = 0) = 1-p_i \quad dla \ k=1, 2, ..., m.$$

Niech $X_i = \sum_{k=1}^{m} X_{ik}$. Zmienna losowa X_i zlicza jak wiele urzędów jest wskazanych dla D przez i-tego głosującego. Zmienna losowa X_i ma zatem rozkład Bernoulliego z $E(X_i) = mp_i$ and $D^2(X_i) = mp_i(1-p_i)$.

Niech $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zmienna losowa Y zlicza jak wiele głosów jest oddanych na D (bez względu na jaki urząd). Y jest zmienną losową z $E(Y) = m\sum_{i=1}^{n} p_i$, $D^2(Y) = m\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$.

Znajdźmy rozkład zmiennej losowej X_i (i = 1, 2, ... , n) jeżeli p_i ma rozkład równomierny, tj..

$$f(p_i) = 1 \text{ for } p_i \in [0,1]$$
$$f(p_i) = 0 \text{ for } p_i \notin [0,1]$$

$$P(X_i = k) = \int_0^1 \binom{m}{k} p_i^k (1-p_i^k)^{m-k} f(p_i)dp_i = \binom{m}{k} \int_0^1 p_i^k (1-p_i^k)^{m-k} dp_i$$
$$= \binom{m}{k} B(k+1, m-k+1),$$

gdzie $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ to tzw. beta-funkcja.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej X_i wynoszą odpowiednio

$$E(Xi)=\frac{m}{2}, \qquad D^2(X_i)=\frac{m(m+2)}{12}.$$

Stąd, jeżeli $\{X_i\}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi (co oznacza, że głosujący głosują niezależnie) wartość oczekiwana i wariancja Y wynoszą odpowiednio

$$E(Y)=\frac{nm}{2}, \qquad D^2(Y)=\frac{nm(m+2)}{12}.$$

Niech $Y^* = \frac{1}{m}Y$. Zmienna losowa Y* daje średnią liczbę głosów oddanych na D na dany urząd. Z centralnego twierdzenia granicznego można znaleźć, że Y* ma rozkład asymptotycznie normalny $N(\frac{n}{2}, \sqrt{\frac{n(m+2)}{12m}})$.

Uwzględniając powyższe założenia pytanie o szanse D na osiągnięcie większości głosów na danym urzędzie można sformułować (i wyliczyć przy powyższych założeniach) jak następuje:

$$P(Y^* > \frac{n}{2}) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

gdzie $\Phi(.)$ jest dytrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Jak już powiedzieliśmy, zakładamy, że paradoks pojawi się wtedy, kiedy głosujący oczekują zwycięzcy z danej partii, np. D, ale ponieważ nie są wewnętrznie jednolici w swych opiniach (i tym samym w głosowaniu) zwycięzca (drogą agregacji po urzędach) jest z innej parii. Tak więc, prawdopodobieństwo wystąpienia paradoksu "divided government" może być przybliżone jak poniżej:

$$1 - P(Y^* > \frac{n}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Powyższy wynik otrzymany został przy bardzo specyficznym założeniu dotyczącym równomierności rozkładu indeksu zdeterminowania. Załóżmy teraz, że elektorat ma tendencję (skłonność) do wybierania demokratów. Wtedy, indywidualny głosujący może mieć, na przykład, następujący rozkład prawdopodobieństwa "czynnika determinacji"

(*) $$f(p_i) = 2p_i \text{ dla } p_i \in [0, 1], \qquad f(p_i) = 0 \text{ dla } p_i \notin [0, 1].$$

Stąd,

$$P(X_i = k) = \int_0^1 \binom{m}{k} p_i^k (1 - p_i^k)^{m-k} f(p_i)dp_i = 2\binom{m}{k}B(k+2, m-k+1),$$

i

$$E(X_i) = \frac{2m}{3}, \quad D^2(X_i) = \frac{m(m^2+5m+6)}{18(m+2)}.$$

I dalej, zmienna losowa Y* ma asymptotycznie normalny rozkład $N(\frac{2n}{3}, \sqrt{\frac{n(m^2+5m+6)}{18m(m+2)}})$.

Szanse D na to, aby otrzymać większość przy wyborach na dany urząd wynoszą przy tych założeniach

$$P(Y^* > \frac{n}{2}) = \Phi(\sqrt{\frac{nm(m+2)}{2(m^2+5m+6)}}) > \frac{1}{2},$$

i prawdopodobieństwo pojawienia się paradoksu wynosi $1 - P(Y^* > \frac{n}{2}) < \frac{1}{2}$.

W podobny symetryczny sposób otrzymamy wyniki dla "tendencji" elektoratu w kierunku republikanów.

Lemat.

Zakładając powyższą (*) tendencję electoratu można znaleźć, że prawdopodobieństwo pojawienia się paradoksu podzielonego rządzenia zmierza do zera wraz ze wzrostem liczby głosujących, tj.

$$\lim_{n\to\infty} P(Y^* > \frac{n}{2}) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(Y^* > \frac{n}{2})) = 0 .$$

W praktyce, ponieważ $\Phi(u) \equiv 1$ dla $u \geq 5$, co oznacza, że na przykład dla m = 3 prawdopodobieństwo, że paradoks wystąpi znika dla $n \geq 100$. Dla m = 4 (urzędów) prawdopodobieństwo znika już dla $n \geq 84$ (głosujących), a więc zbieżność ta jest relatywnie (ze względu na duże ilości głosujących w wyborach powszechnych) bardzo szybka.

Powyższy lemat może być sformułowany także dla liczby urzędów, tj. prawdopodobieństwo paradoksu maleje wraz ze wzrastającą liczbą urzędów.

Ta bardzo specyficzna sytuacja (kiedy rozkład prawdopodobieństwa tendencji elektoratu do wyboru D (lub ekwiwalentnie do wyboru R) jest zadany jak powyżej - (*)) pozwala nam na sformułowanie **generalnej hipotezy** (która, jak sądzimy prawdziwa jest dla dowolnych rozkładów):

Prawdopodobieństwo pojawienia się paradoksu podzielonego rządzenia w dwupartyjnych systemach wzrasta wraz ze wzrostem równowagi rozkładu *p*, jeżeli przez rozklad najbardziej zrównoważony uważamy taki, dla którego wartość mediany wynosi 1/2.

Konsekwentnie należy przypuszczać, że prawdopodobieństwo wytąpienia paradoksu w dwupartyjnych systemach wyborczych nigdy nie przekracza 1/2.

Ponieważ w rzeczywistych sytuacjach (w których liczba głosujących jest znaczna) występowanie paradoksu podzielonego rządzania jest obserwowane relatywnie często (co w pewnym sensie przeczy naszym wnioskom) sądzimy, że rozkład przwdopodobieństwa tendencji (a więc zdeterminowania) elektoratu w kierunku jednej z dwóch partii (D lub R) jest silnie zrównoważony. Inymi słowy, społeczeństwo (co najmniej w świetle publikowanych wyników dotyczy to społeczeństwa USA) jest symetrycznie (w sensie definicji równowagi) rozłożone wzdłuż dwuwymiarowego wymiaru politycznego. Każde zachwianie tej równowagi obserwowalne będzie przez zanikanie występowania paradoksu podzielonego rządzenia.

Literatura

Brams S.J., Kilgour D.M., Zwicker W.S. *A new paradox of vote aggregation* Paper prepared for delivery at the 1993 Annual Meeting of the American Political Science Association, The Washington Hilton, September 2-5, 1993.

ISBN 83-85847-85-5

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt

z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 36-19-01 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl