KIWIEL

POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją
Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

WSPOMAGANIE DECYZJI

SYSTEMY EKSPERCKIE

pod redakcją

Romana Kulikowskiego i Lucyny Bogdan

Warszawa 1995

Wydano z wykorzystaniem dotacji
KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Materiały konferencji: "Analiza Decyzyjna, Systemy Eksperckie, Zastosowania Systemów Komputerowych", Warszawa, 25-27 maja 1994r.

Komitet Programowy Konferencji:

Andrzej Ameljańczyk, Zdzisław Bubnicki, Wiesław Grudzewski, Olgierd Hryniewicz, Janusz Kacprzyk, Lech Kruś, Roman Kulikowski (przewodniczący), Kazimierz Mańczak, Ireneusz Nykowski, Zdzisław Pawlak, Roman Słowiński, Andrzej Straszak, Andrzej Weryński, Andrzej Wierzbicki.

Wykonano z oryginałów tekstowych dostarczonych przez autorów

ISBN 83-85847-85-5

WYBRANE MODELE OPTYMALIZOWANIA DECYZJI INWESTYCYJNYCH NA RYNKU FINANSOWYM

LEON SŁOMIŃSKI
Instytut Badań Systemowych PAN,
WARSZAWA
E-mail: `slominsk@ibspan.waw.pl`

STRESZCZENIE. Przedstawiono i zilustrowano przykładami ważniejsze techniki rozszerzonego modelowania matematycznego decyzji inwestycyjnych na rynku finansowym. Rozszerzone techniki modelowania, o których mowa, polegają na wprowadzeniu dyskretnych zmiennych decyzyjnych (obejmujących zmienne całkowitoliczbowe i zmienne zero-jedynkowe). Otrzymane, w wyniku modelowania, zadania programowania matematycznego (zadania optymalizacji) są zadaniami programowania mieszanego (występują zmienne ciągłe i zmienne dyskretne). Uwagę skupiamy na zadaniach programowania liniowo - dyskretnego, w tym sieciowego. Użycie zmiennych dyskretnych istotnie rozszerza możliwości modelowania złożonych decyzji, z którymi ma do czynienia inwestor na współczesnym rynku finansowym.

1. MODELOWANIE DECYZJI FINANSOWYCH. Złożony charakter decyzji podejmowanych przez inwestorów na rynku finansowym zmusza do stosowania modelowania matematycznego i techniki komputerowej. Współczesny rynek finansowy charakteryzuje się szeroką integracją geograficzną oraz dynamicznym przyrostem podmiotów i przedmiotów uczestniczących w operacjach, co powoduje ogromny przyrost potrzeb w zakrasie objętości i tempa przetwarzanych danych w systemach decyzyjnych.

Modele optymalizacyjne są szereko stosowane w praktyce przez menedżerów funduszy inwestycyjnych, [1,3,4,6]. Zastosowania te dotyczą szczególnie dwóch obszarów: inwestycji kapitałowych z kontrolowanym ryzykiem zajmowanych pozycji, oraz t.zw. inżynierii finansowej polegającej na tworzeniu i analizie nowych instrumentów rynkowych zwiększających bezpieczeństwo i płynność obrotu. Nas będą interesowały, przede wszystkim, te decyzje które dotyczą tworzenia portfela inwestycji oraz sposobów zarządzania nim. Inwestorami, z naszego, punktu widzenia, są menedżerowie kapitałów: banków inwestycyjnych, korporacji finansowych, instytucji ubezpieczeniowych, funduszy emerytalnych, funduszy powierniczych itp. Decyzje inwestorów są skoncentrowane na tworzeniu portfeli inwestycji i takiego zarządzania nimi, aby cele i oczekiwania były spełnione dla różnych horyzontów czasowych i w różnych warunkach ryzyka rynkowego.

Modele matematyczne i ich komputerowe implementacje służą pomocą decydentowi przy wyborze właściwej strategii inwestowania. W dotychczasowej praktyce stosowane są, przede wszystkim, liniowe i kwadratowe modele programowania matematycznego ze zmiennymi typu rzeczywistego. Niedogodność takiego podejścia tkwi w znacznym uproszczeniu modelowanego procesu i w zawężeniu obszaru jego zastosowań.

Oto kilka przykładów powszechnie spotykanych warunków, których uwzględnienie w modelu matematycznym zmusza do użycia zmiennych o wartościach dyskretnych (w praktyce zero-jedynkowych).

- Uwzględnienie kosztów transakcji (np. prowizji maklerskich).
- Wprowadzenie minimalnego progu wielkości inwestycji.
- Dokonanie wyboru inwestycji ze zbioru złożonego z rozłącznych możliwości.
- Stosowanie w obrocie pakietów/bloków instrumentów finansowych.
- Modelowanie inwestycji w finansowe instrumenty pochodne (np.kontrakty terminowe typu forward lub futures, opcje itp.).
- Założenie malenia kosztów (wzrostu zysków) ze wzrostem wielkości inwestycji - efekt skali (ogólniej: modelowanie nieliniowości).

Zastosowanie zmiennych dyskretnych zwiększa rozmiar zadania, tak ze względu na liczbę zmiennych, jak i ze względu na liczbę ograniczeń. Trudności obliczeniowe towarzyszące nieodłącznie zadaniom programowania dyskretnego mogą być zmniejszone pzez sprowadzenie zadania, zawsze gdy tylko jest to możliwe, do dobrze znanych modeli, które pezedstawiamy niżej.

2. MODEL PROGRAMOWANIA LINIOWEGO ZE ZMIENNYMI MIESZANYMI.

Zadanie programowania matematycznego odpowiadające temu modelowi polega na znalezieniu ekstremum liniowej funkcji celu, przy liniowych nierównościach i/lub równościach oraz przy założeniu, że część zmiennych przyjmuje wartości rzeczywiste, a część - całkowitoliczbowe (ogólniej dyskretne). Zadanie to zapiszemy w następującej postaci:

$$\max(\mathbf{cx} + \mathbf{dy}) \tag{1.a}$$

przy ograniczeniach:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Dy} \leq \mathbf{b} \tag{1.b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \ \mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \ \mathbf{y} \in Z^r, \tag{1.c}$$

gdzie: **A** - macierz o wymiarach *m* na *n*, **D** - macierz o wymiarach *m* na *r*, **d** - wektor *r*-wymiarowy, **c** - wektor *n*-wymiarowy, **b** - wektor *m*-wymiarowy, Z^r jest *r*-wymiarową przestrzenią wektorów całkowitoliczbowych, **x** - *n*-wymiarowy wektor w przestrzeni liczb rzeczywistych.

Powyższe zadanie obejmuje zadanie programowania liniowego (bez zmiennych całkowitoliczbowych) i zadanie programowania dyskretnego (bez zmiennych ciągłych), co pozwala na bardzo elastyczne podejście do modelowania różnorodnych przedsięwzięć w zakresie inwestycji kapitałowych. Interpretację zmiennych decyzyjnych i współczynników zadania odłożymy do punktu poświęconego modelowi sieciowemu. Tutaj natomiast zwrócimy uwagę na przykłady modeli optymalizacji decyzji inwestycyjnych, sprowadzające się do zadania (1.a) - (1.c). W [6] przedstawiono, w tej postaci, m.in. następujące problemy optymalizacji portfela inwestycyjnego:

- Maksymalizować zysk z portfela obligacji przy ograniczeniach (równościowych) gwarantujących pożądaną trwałość (dollar duration) i zapewniających sprostanie zobowiązaniom płatniczym - t.zw. zimmunizowany model portfela obligacji.
- Maksymalizować dochód z portfela przy odstąpieniu od założenia płaskości funkcji zmiany stóp procentowych (model portfela uodpornionego na zróżnicowane formy ryzyka).
- Maksymalizować zysk z portfela uodpornionego na ryzyko przy zapewnieniu dopasowania przepływu kapitału do rzeczywistych (nie uśrednionych) zobowiązań płatniczych.

We wszystkich tych przykładach obok zmiennych ciągłych, występują zmienne zero-jedynkowe a ich pojawienie się jest spowodowane uwzględnieniem kosztów transakcji i blokowego charakteru obrotu rozważanymi instrumentami.

W [1] przedstawiono model programowania całkowitoliczbowego optymalizacji portfela akcji na rynku blokowym. Funkcja celu minimalizuje ryzyko inwestycji rozumiane jako uśredniona (w czasie) suma odchyleń, w dół zysku z każdego rodzaju akcji, od wartości przeciętnej zysku dla danego papieru . Bezpośredni zapis tej funkcji celu nadaje jej postać złożonego nieliniowego wyrażenia, nie mieszczącego się w klasie modeli programowania matematycznego. Autorzy zaproponowali linearyzację polegającą na wprowadzeniu zastępczej zmiennej rzeczywistej i dodatkowego ograniczenia, sprowadzając zadanie do zadania optymalizacji liniowej mieszanej. W punkcie 4 pokażemy inny sposób linearyzacji, który zachowuje całkowitoliczbową postać zadania.

3. MODEL SIECIOWY. Zadanie programowania sieciowego i różne jego odmiany, które będą przedstawione niżej są szczególnymi przypadkami zadania (1.a)-(1.c). W przypadku najprostszym mamy do czynienia ze szczególnym zadaniem programowania liniowego (czystego). Nas będzie interesować znacznie szersza klasa zadań optymalizacji na sieci obejmująca różne, ważne dla praktyki, uogólnienia. Wyodrębnienie zadania sieciowego i jego odmian ma istotne znaczenie dla efektywności zastosowanych metod ich rozwiązywania. Nakład obliczeń (złożoność obliczeniowa) przy zastosowaniu algorytmów dopasowanych do specyficznej struktury zadania jest znacznie niższy od nakładu obliczeń przy zastosowaniu algorytmów ogólnych programowania liniowego lub mieszanego.

Zorientowaną sieć skończoną będziemy zapisywać jako parę $S = (W, A)$, gdzie: W jest zbiorem obiektów nazywanych **węzłami**, A jest zbiorem obiektów nazywanych **łukami**. Przyjmujemy, że moc zbioru W jest równa $n < +\infty$, a moc zbioru A jest równa $m < +\infty$. Elementy zbioru W są numerowane za pomocą liczb naturalnych $i = 0,1,...,n$ zaś elementy zbioru A - liczbami całkowitymi $k = 1,2,...,m$. Łuki są to **uporządkowane** (istota orientacji sieci) pary (i, j) węzłów $i, j \in W$, przy czym węzeł i jest początkiem łuku, a węzeł j - jego końcem. Dopuszcza się występowanie łuków wielokrotnych (skończona liczba łuków łączy tę samą parę węzłów) - w tym przypadku potrzebne są dodatkowe indeksy do odróżnienia łuków, np. $(i,j)_r$, $r = 1,2,...$.

Węzłom są przypisywane liczby rzeczywiste $b(i)$, $i \in W$, przy czym: węzły dla których $b(i) > 0$ są nazywane **źródłami** (liczbę $b(i)$ nazywa się **wypływem**), węzły dla których $b(i) < 0$ są nazywane **ujściami** (liczbę $b(i)$ nazywa się **wpływem**), a węzły dla których $b(i) = 0$ są **węzłami przejściowymi**.

Każdemu łukowi $k \in A$, przypisuje się trójkę liczb rzeczywistych **stałych**: $l_k \geq 0$, (pojemność dolna łuku), $u_k \leq 0$ - (pojemność górna łuku), c_k - nazywaną umownie "kosztem" (możliwe interpretacje tego parametru będą dyskutowane dalej), i liczbę rzeczywistą: $l_k \leq x_k \leq u_k$, nazywaną **zmienną decyzyjną**, która reprezentuje wielkość przepływu między węzłami. Dla tak opisanej sieci definiuje się zadanie znalezienia przepływu o minimalnym koszcie, t.zn. należy znaleźć taki nieujemny wektor $\mathbf{x} = (x_1 ,..., x_k)$, który spełnia określone ograniczenia i minimalizuje koszt przepływu w całej sieci.

Formalnie, zadanie przepływu o minimalnym koszcie ma postać:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \tag{2.a}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{\{j:\ (i,\ j)\in A\}} x_{ij} \ - \sum_{\{j:\ (j,\ i)\in A\}} x_{ij} = b(i)$$

dla wszystkich $i \in W$, (2.b)

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \text{dla wszystkich } (i,j) \in A. \qquad (2.c)$$

Przedstawiona sieć jest siecią **deterministyczną** o przepływie jednoskładnikowym. Cecha pierwsza oznacza, że wszystkie parametry i zmienne w sieci są liczbami deterministycznymi, chociaż parametry mogą reprezentować wartości momentów (np. wartość przeciętną lub wariancję) rozkładu prawdopodobieństwa odpowiednich zmiennych losowych. Cecha druga oznacza, że wartości zmiennej decyzyjnej są sprowadzone do jednego miana, np. wyrażają wartości w złotych polskich.

Charakter naszych zastosowań sprawia, że sieć dana wzorami (2.a)-(2.c) nie jest wystarczająco ogólna. Uogólnienie, które nie zmienia klasy trudności zadania optymalizacyjnego polega na dopuszczeniu oddziaływania łuku na przyporządkowaną mu zmienną przez tłumienie lub wzmacnianie przepływu. Przyjmiemy, że przepływ wchodzący do węzła j ma wartość $g_{ij}x_{ij}$, gdzie x_{ij} jest przepływem opuszczającym węzeł i, a współczynnik g_{ij}: $0 < g_{ij} < +\infty$ jest współczynnikiem oddziaływania, nazywanym współczynnikiem **tłumienia** dla $0 < g_{ij} < 1$, i współczynnikiem **wzmocnienia** dla $1 \le g_{ij} < +\infty$.

Zadanie znalezienia przepływu o minimalnym koszcie w uogólnionej sieci $S^o = (W, A)$ może przyjąć postać:

$$\min \sum_{(i,\ j)\in A} g_{ij}x_{ij} \qquad (3.a)$$

przy ograniczeniach:

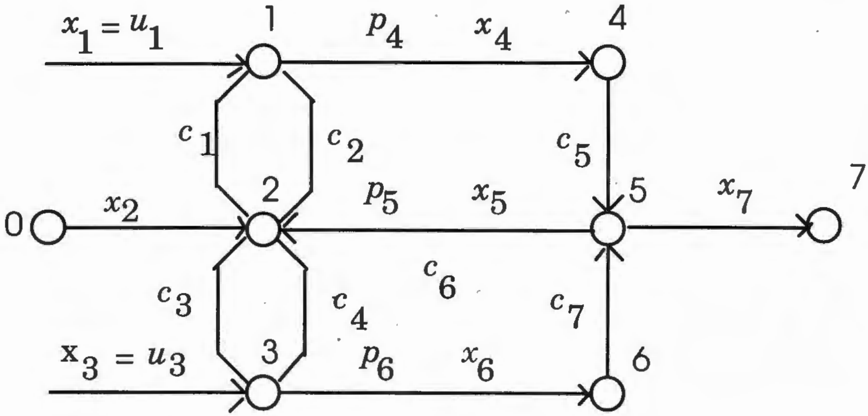
$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} g_{ij}x_{ij} = b(i)$$

dla wszystkich $i \in W$, (3.b)

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \text{dla wszystkich } (i,j) \in A. \qquad (3.c)$$

Dla sieci uogólnionej postać funkcji celu (np. maksymalizacja bieżącego zysku, maksymalizacja przyrostu kapitału, maksymalizacja przyrostu kapitału i oprocentowania itp.) ma wpływ na sposób interpretowania różnych parametrów zadania i problem ten musi być traktowany z odpowiednia uwagą, [4]. Dalszym uogólnieniem, istotniejszym z punktu widzenia trudności zadania, zajmiemy się w dalszej części pracy, natomiast teraz przedstawimy interpretacją wprowadzonych pojęć.

3.1. INTERPRETACJA SIECI. W kontekście interesujących nas zastosowań elementom i parametrom wprowadzonych sieci można nadać następujące interpretacje. Sieć modeluje przepływ kapitału w postaci gotówki, papierów wartościowych lub innych aktywów. Węzły sieci utożsamiają moment i fakt wprowadzenia kapitału (węzły - źródła), wyprowadzenia kapitału (węzły - ujścia) oraz jego alokacji (węzły - przejściowe). Łuki wychodzące z danego węzła utożsamiają możliwość alokacji kapitału w kierunku węzłów, do których prowadzą. Decyzję o alokacji i jej rozmiar prezentuje wartość zmiennej przypisanej łukowi. Węzeł początkowy łuku i jego kierunek określają typ łuku. Łuki wychodzące ze źródła noszą nazwę łuków **wejściowych**, a łuki wchodzące do ujścia- łuków **wyjściowych**. Łuki łączące inne węzły nazywa się, ogólnie, łukami **operacyjnymi**, a nazwę szczegółową przypisujemy im zależnie od spełnianej roli (patrz Rysunek 1).



Rysunek1.

Rysunek ten obrazuje prosty przykład inwestycji **jednoetapowej**, przy założeniu że: dysponujemy akcjami o wartości $x_1 = u_1$, gotówką o pewnej wartości oraz rachunkiem bankowym na sumę $x_3 = u_3$. Węzeł 0 jest źródłem, węzeł 7 - ujściem, pozostałe węzły są węzłami przejściowymi. Łukiem wejściowym jest łuk (0,2), a łukiem wyjściowym - łuk: (5,7); łuki: (1,4),(2,5) i (3,6) są to łuki **inwestycyjne**; łuk (5,2) jest łukiem **pożyczki**. Łuki wchodzące do węzłów: 1, 3, i 7 symbolizują odpowiednio: istnienie kapitału w postasci akcji i konta bankowego, oraz wyprowadzenie gotówki po zrealizowaniu inwestycji. Koszty transakcji są oznaczone współczynnikami c_j (koszt c_5 odpowiada stopie procentowej pożyczki bankowej), współczynniki p_i odpowiadają zyskom z inwestycji. Łukom są przypisane pojemności, które dla prostoty rysunku pominięto. Wartości zmiennych decyzyjnych x_1 i x_3 są ustalone na poziomie pojemności górnych odpowiednich łuków, co oznacza że w zadaniu optymalizacyjnym wystąpią one jako zadane wartości początkowe.

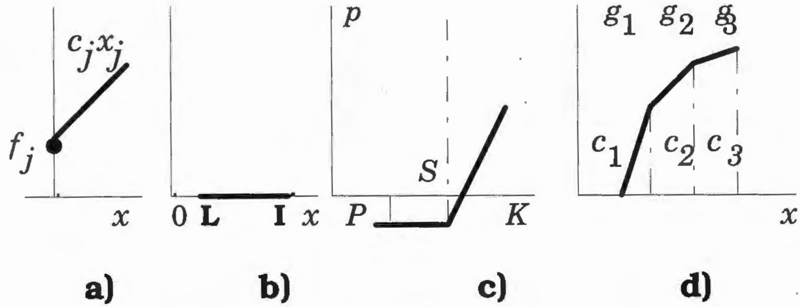
Funkcja celu zadania optymalizacyjnego (sieć prosta i zakładamy $g_j = 1$) może przyjąć postać: $\max(\sum_j p_j x_j - \sum_j c_j x_j)$, gdzie zyski i koszty są liczbami dodatnimi. Oznacza to, że maksymalizujemy zysk netto. Zakłada się, że muszą być spełnione ograniczenia (2.b) i (2.c). Gdyby istniała możliwość zamiany gotówki na akcje (i odwrotnie) przy różnych kosztach transakcji, to między węzłami 1 i 2 oraz węzłami 2 i 3 należy wprowadzić odpowiednio większą liczbę łuków (nie zmieni to sposobu przedstawienia zadania i skali jego trudności). Natomiast, modelowanie pożyczek przy różnych stopach procentowych jest bardziej złożone i wprowadzenie dodatkowych łuków zmienia zadanie liniowe na zadanie liniowo-dyskretne.

Rolę współczynników g_j zinterpretujemy na przykładzie inwestycji w obligacje. Rozważmy inwestycję **wieloletnią** w obligacje o stałym oprocentowaniu, przy założeniu, że sumę odpowiadającą procentowi od inwestycji i wartości obligacji, w końcu każdego roku, reinwestujemy na następny rok (wartość rynkowa obligacji jest zmienna). W tym przypadku wartość przepływu opuszczającego węzeł - początek łuku (poprzedni rok) i wartość przepływu wchodzącego do węzła - koniec łuku (następny rok) są różne i ich stosunek odpowiada odwrotności współczynnika g_j.

4. UŻYCIE ZMIENNYCH DYSKRETNYCH.

W punkcie 1 wymieniliśmy przykłady warunków, których wprowadzenie do modelu nie jest możliwe bez użycia zmiennych dyskretnych. Zajmiemy się dokładniej tą problematyką zaznaczając, że dalsze rozważania dotyczą tak modelu programowania liniowo-dyskretnego jak i modelu sieciowego (obojętnie - prostego czy uogólnionego). Pojawienie się zmiennych dyskretnych w modelu ma trzy ważniejsze źródła - po pierwsze: niedopuszczalność zaokrągleń, do wartości całkowitej, składowych rzeczywistych wektora optymalnego (lub dopuszczalnego) w przypadkach gdy mogło by to spowodować nieakceptowalny błąd w decyzji o inwestycji; - po drugie: konieczność modelowania warunków logicznych; - po trzecie: skokowe zmiany wartości funkcji lub skokowa zmiana kierunku wzrostu funkcji. Uwzględnienie w modelu pierwszej grupy warunków wprowadza do niego, w sposób naturalny zmienne dyskretne. Uwzględnienie warunków drugiej i trzeciej grupy staje się możliwe przez wprowadzenie nowych zmiennych dyskretnych (najczęściej zero-jedynkowych) i dodatkowych ograniczeń dla tych zmiennych. Zaznaczmy przy tym, że modelowanie z użyciem zmiennych dyskretnych nie przesądza o sposobie użycia otrzymanych wyrażeń. Mogą one być użyte w ograniczeniach lub w funkcji celu, w postaci bezpośredniej lub w postaci przetworzonej.

Rysunek 2 przedstawia typowe postaci funkcji nieliniowych, którymi się zajmiemy. Są to przypadki szczególne funkcji wypukłych/wklęsłych nazywane funkcjami odcinkowo-liniowymi. Rozpatrzymy te przypadki kolejno kierując się punktem widzenia inwestora.



Rysunek 2.

4.1. KOSZTY STAŁE. Przyjmijmy, że marża maklerska na rynku papierów wartościowych jest przedziałami stała i składa się z części niezależnej od wielkości inwestycji (w danym przedziale) oraz z części rosnącej proporcjonalnie z jej wzrostem (Rys. 2.a). Przejście do wyższego przedziału powoduje, z reguły wzrost wartości składowej stałej i zmniejszenie nachylenia składowej zmiennej. Załóżmy, że maksymalizujemy zysk z inwestycji mieszczącej się w jednym przedziale wartości dla marży (marża w funkcji celu wystąpi ze znakiem ujemnym). Niech I oznacza wartość nieprzekraczalną dla rozpatrywanej inwestycji, a δ - dowolnie małą liczbę większą od zera. Niech, dla *j*-go papiera wartościowego, marża ma postać: $f_j + c_j x_j$, gdzie f_j jest składową stałą, a c_j - współczynnikiem proporcji. Wprowadzamy zmienną z_j o wartościach 0 lub 1, modyfikujemy postać marży: $f_j z_j + c_j x_j$, i chcemy aby nowa zmienna miała wartość 0 dla $x_j = 0$ oraz wartość 1 dla $x_j > 0$. Wymaganie to spełni następujący układ nierówności:

$$x_j - \mathrm{I}\, z_j \leq 0$$

$$x_j - \delta z_j \geq 0 \;, \quad \text{dla odpowiednich indeksów } j. \qquad (4)$$

$$z_j = 0 \text{ lub } 1$$

Pokażemy, że żądane warunki są spełnione. Jeżeli $x_j = 0$ to $z_j = 0$ z uwagi na maksymilizację funkcji celu i występowaniu marży ze znakiem minus. Jeżeli $x_j > 0$ to $z_j = 1$ z uwagi na ograniczenie pierwsze. Łatwo sprawdzić, że jeżeli $z_j = 0$ to musi być $x_j = 0$ (ograniczenie pierwsze), i jeżeli $z_j = 1$ to $x_j > 0$ (ograniczenie drugie).

Identyczne postępowanie zapewnia uwzględnienie ograniczenia "albo inwestujesz przynajmniej L zł, ale nie więcej niż I zł, albo nie inwestujesz w ogóle", (Rys. 2.b), gdzie L zastąpi w (4) stałą δ. Jest to sytuacja typowa dla rynku blokowego obligacji i wielu instrumentów pochodnych (n.p. na **WGPW** trzyletnie obligacje Skarbu Państwa są sprzedawane w blokach złożonych ze 100 obligacji o warości nominalnej 1.000.000zł dla obligacji; obligacje **IRPP** - w bloku złożonym z 10 obligacji; na zachodnioeuropejskich giełdach papierów wartościowych obrót opcjami na kontrakty terminowe stóp procentowych dla Eurodolarów odbywa się w blokach o wartości naminalnej 1.000.000$ dla bloku). Zmienna binarna $z_j = 1$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $x_j \geq L$, i $z_j = 0$ w przeciwnym przypadku. Dzięki tym zabiegom zmienna x_j może występować w zadaniu jako zmienna rzeczywista $x_j \geq 0$.

4.2. WYBÓR WARIANTU. Często zachodzi potrzeba dokonania wyboru jednego wariantu inwestycji, złożonego z kilku połączonych przedsięwzięć, ze skończonego zbioru wariantów, lub wyboru - ze zbioru inwestycji rozłącznych. Przypadki te można zapisać formalnie za pomocą zmiennch dyskretnych (lub zero-jedynkowych) i ograniczeń liniowych. Niech $Q = \{q_1, \dots, q_s\}$ będzie zbiorem wariantów przedsięwzięć o wartości w_i dla i-go wariantu. Odpowiednie ograniczenia mają postać:

$$x_j = q_1 z_1 + \dots + q_S z_S;\; z_1 + \dots + z_S = 1,\; x_j \geq 0,\; z_j = 0 \text{ lub } 1.$$

Podobnie jest modelowany przypadek inwestycji rozłącznych, z tym że $q_i = 1$ dla wszystkich indeksów i. Zmienne dyskretne muszą przyjąć postać nieujemnych zmiennych całkowitoliczbowych y_j, wówczas gdy wysokość inwestycji musi być wielokrotnością wartości bloku, która też jest liczbą całkowitą.

4.3. INNE NIELINIOWOŚCI. Modelowanie dalszych przypadków pokazanych na Rys. 2, wprowadza do zadania nieliniowości typu $z_j x_j$ (iloczyn zmiennej zero-jedynkowej z_j i zmiennej rzeczywistej $x_j \geq 0$). Pokażemy jak można linearyzować tego rodzaju nieliniowości. Wprowadźmy zmienną dyskretną $y_j = z_j x_j$ i zażądajmy aby $(y_j = 0) \Leftrightarrow (x_j = 0)$ i $(y_j > 0) \Leftrightarrow (x_j > 0)$. Warunki te będą spełnione przez następujący układ nierówności:

$$\begin{aligned} & x_j + z_j - y_j \leq 1 \\ & x_j + \mathrm{I} z_j - 2y_j \geq 0 \quad \text{dla odpowiednich indeksów } j, \\ & y_j \leq x_j \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie I jest liczbą nie mniejszą niż największa możliwa wielkość inwestycji. Kiedy $z_j = 0$, wtedy (z ograniczeń pierwszego i drugiego) mamy $y_j = 0$ i $x_j = 0$. Kiedy $z_j = 1$, wtedy jednoczesne działanie trzech ograniczeń zapewnia drugą tożsamość.

Podamy przykłady decyzji inwestycyjnych, które modelujemy korzystając ze wzoru (5). Rozważmy inwestora zajmującego pozycję długą w kontrakcie opcji kupna akcji (Rys. 2.c). Opcja jest to znormalizowany (według obowiązujących reguł prawnych) standaryzowany (np. na **CBOT**, jedna opcja dla akcji obejmuje 100 papierów) warunkowy giełdowy kontrakt terminowy, który polega na nabyciu prawa (ale nie obowiązku) do zakupu (opcja zakupu) lub do sprzedaży (opcja sprzedaży) określonych instrumentów finansowych, w określonym momencie czasu (rozważamy opcję europejską) i według ceny ustalonej w chwili zawierania kontraktu. Dochód z jednej opcji wynosi: $p_j = (S_j - K_j - P_j)$, gdzie: S_j jest ceną jednej opcji j-tej akcji w momencie zamykania pozycji, K_j - ceną w momencie podpisywania kontraktu, a P_j oznacza cenę płaconą do Biura Kompensacyjnego za zakup opcji (tzw. premia). Inwestor zamyka pozycję, realizując kontrakt, gdy $(S_j - K_j) > 0$ i zamyka pozycję bez realizacji kontraktu (traci premię) w przeciwnym przypadku (sytuacja, dla której $S_j - K_j = 0$ jest obojętna z punktu widzenia sposobu zamknięcia pozycji). Dochód z nabycia x_j opcji kupna wynosi: $p_j x_j = (S_j - K_j - P_j)x_j$, i ze względu na sprzedaż blokową zmienna x_j jest zmienną całkowitoliczbową. Aby uwzględnić dwa różne sposoby zamknięcia pozycji, wprowadzimy zmienną zero-jedynkową z_j w ten sposób, że: $p_j x_j = [(S_j - K_j)z_j - P_j)]x_j$, i tak aby: $z_j = 1$ dla $(S_j - K_j) > 0$ i $z_j = 1$ w przeciwnym przypadku. Tę ostatnią dychotomię spełnia następujący układ nierówności:

$$\begin{aligned} & \mathrm{I}z_j - (S_j - K_j) \geq 0 \\ & (\mathrm{I} - \delta_j) \geq [\mathrm{I} - (S_j - K_j)]z_j \end{aligned} \quad \text{dla odpowiednich indekdów } j, \quad (6)$$

gdzie δ i I znaczą to samo co we wzorze (4). Nieliniowość typu $z_j x_j$ linearyzujemy za pomocą wzoru (5) z tym, że z uwagi na całkowitoliczbowość zmiennej x_j, zmienna y_j jest także całkowitoliczbowa.

Krótko odniesiemy się do sytuacji, w której koszty inwestycji maleją ze wzrostem jej wartości (Rys. 2.d). Na rysunku przedstawiono typowy przypadek, w którym koszty są przedziałami stałe i maleją skokowo na ich krańcach. Funkcja zależności kosztów od wysokości inwestycji jest funkcją wklęsłą co ułatwia jej linearyzację. W [4] pokazano, że w przypadku modelu sieciowego, dla którego każdemu przedziałowi kosztów odpowiada odrębny łuk uogólniony, linearyzacja jest możliwa przez wprowadzenie jednego zagregowanego łuku. Agregacja polega na powtarzalnym łączeniu par łuków w jeden łuk, przy czym każdej parze przypisuje się zmienną binarną z dodatkowymi ograniczeniami, a współczynnik zagregowany g_{za} dla łuku zastępczego przyjmuje postać: $g_{za} = g_1 + (g_2 - g_1)z_1$, (agregujemy dwa pierwsze łuki). Nieliniowość typu $z_1 x_1$ (x_1 jest przepływem opuszczającym węzeł 1) usuwamy za pomocą wzorów (5). Opisanemu przekształceniu towarzyszy stosowna modyfikacja równań na zachowanie przepływu w węzłach, [4]. Do modelu liniowego ze zmiennymi mieszanymi można zastosować odcinkowo-liniową reprezentację funkcji opisaną np. w [2] (technika ta ma zastosowanie do dowolnych funkcji wypukło-wklęsłych).

Wrócimy do linearyzacji funkcji z pracy [1], sygnalizowanej w punkcie 2. Dla naszych celów przedstawimy ją w postaci:

$$RYZYKO = \min \sum_t \left| \min\{0, \sum_j (r_{jt} - r_j^{śr}) x_j\} \right| / T,$$

gdzie: r_{jt} - jest ryzykiem dla j-tej akcji w czasie t, r_j^{sr} - jest ryzykiem uśrednionym w czasie, x_j - liczba bloków j-tej akcji (zmienna całkowitoliczbowa), T - horyzont czasowy dla inwestycji. Chcemy sprowadzić wyrażenie przedstawiające wartość bezwzględną do postaci właściwej dla zadań programowania matematycznego. W tym celu wprowadzimy zmienną dyskretną $y_t = \Sigma_j(r_{jt} - r_j^{sr})$ i zmienną binarną z_t spełniającą warunki: $(y_t \geq 0) \Rightarrow z_t = 0$, $(y_t < 0) \Rightarrow z_t = 1$. Warunki te zagwarantować można za pomocą nierówności: $\mathrm{I}z_t + y_t > 0$, $y_t\, z_t \leq 0$, dla wszystkich indeksów t. Dzięki tym transformacjom funkcja *RYZYKO* przyjmie postać liniową: $\min(\Sigma_t y_t / T)$, a nieliniowość $y_t z_t$ linearyzujemy za pomocą typowych wzorów (5).

Podobny charakter nieliniowości do reprezentowanej przez funkcję *RYZYKO* występuje w kontraktach opcyjnych na pożyczkę o zmiennym oprocentowaniu, z obcięciem górnego poziomu zmiany stopy procentowej (tzw. caps). Opcja na stopę procentową z obcięciem od góry jest instrumentem finansowym oferowanym na rynku pozagiełdowym, i służy zmniejszeniu ryzyka inwestora w związku z wahaniami oprocentowania tego typu pożyczek. Wahania te są odnoszone zwykle do wartości *LIBOR* dla odpowiedniego horyzontu czasu [3]. Instytucja finansowa obsługująca tego typu pożyczki gwarantuje inwestorowi rekompensatę, w zamian za opłatę opcyjną, gdy aktualna stopa procentowa przekroczy stosowny *LIBOR*. Jeżeli różnica ta ma wartość niedodatnią to inwestor traci opłatę opcyjną, w przeciwnym przypadku stopa procentowa wypłaty dla inwestora (odniesiona do wysokości pożyczki) wyniesie: $\max\{0, R_b - R_o\}$, gdzie R_b - bieżąca stopa procentowa, R_o - poziom obcięcia. Technika modelowania tego wyrażenia za pomocą zmiennej binarnej i ograniczenia dodatkowego jest oczywista, w świetle wcześniejszych rozważań.

5. UWAGI KOŃCOWE.

Przedstawiliśmy szereg technik modelowania uwarunkowań decyzji inwestorów finansowych, które prowadzą do dwóch grup modeli programowania matematycznego różniących się istotnie złożonością obliczeniową. Przez złożoność obliczeniową rozumiemy liczbę podstawowych operacji maszynowych, dla najgorszego przypadku w danej klasie zadań, które musi wykonać algorytm aby uzyskać rozwiązanie. W tym sensie zadania sieciowe, bez zmiennych dyskretnych, należą do zadań o wielomianowym stopniu trudności, a wszystkie zadania ze zmiennymi dyskretnymi mają wykładniczy stopień trudności. Niemniej, struktura konkretnego zadania ma istotne znaczenie dla praktyki obliczeniowej. Za najłatwiejsze należy uznać zadania na sieci prostej, dla których istnieją wysoko wyspecjalizowane, szybkie algorytmy. Cechą tych algorytmów jest to, że otrzymane rozwiązanie będzie całkowitoliczbowe, jeżeli parametry sieci są całkowitoliczbowe (unimodularność sieci, [2]). Ograniczenia uboczne (bez zmiennych dyskretnych), oraz uogólnienie przepływu tylko w nieznacznym stopniu komplikują zadanie. Dodanie wymagań, których ujęcie w modelu nie jest możliwe bez wprowadzenia zmiennych dyskretnych zmienia zasadniczo skalę trudności zadania. Zadanie sieciowe staje się zadaniem sieciowym ze zmiennymi mieszanymi, ogólne zadanie programowania liniowego (ze zmiennymi rzeczywistymi) staje się ogólnym zadaniem programowania liniowego mieszanego (dochodzą zmienne całkowitoliczbowe).

Zadania ze zmiennymi mieszanymi należą, w ogólnym przypadku, do zadań o wykładniczym nakładzie obliczeń. Tworzy się, zatem pewna hierarchia zadań o rosnącej, teoretrycznej i praktycznej, skali trudności - najłatwiejsze są zadania sieciowe (sieć prosta), a najtrudniejsze - ogólne zadania programowania mieszanego. Niemniej, nawet dla zadań najtrudniejszych istnieją wystarczająco efektywne i podatne na wprowadzenie obliczeń równoległych metody, algorytmy i odpowiadające im kody maszynowe.

LITERATURA

1. Dell›Olmo P. and Speranza M. G.: "*A mixed integer linear programming model for portfolio optimization*". Rapporti di Ricerca del Dipartimento Metodi Quantitativi, Universita degli Studi di Brescia, Quad. No. 43 1992.
2. Garnfinkel R. S. i Nemhauser G. L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN Warszawa 1978.
3. Hull J. C.: Options, futures and other derivative securities. Prentice Hall 1993.
4. Jones C. K. : Portfolio Management. McGraw-Hill Book Co. London 1992.
5. Kaliszewski I., Libura M. i Słomiński L.: "*Modele matematyczne działalności kredytowej banków*". Ekonomista .PWN Warszawa 1986, str. 871-890.
6. Zenios S. A., edr.: Financial optimization. Cambridge University Press 1993.

ISBN 83-85847-85-5

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt
z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 36-19-01 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl