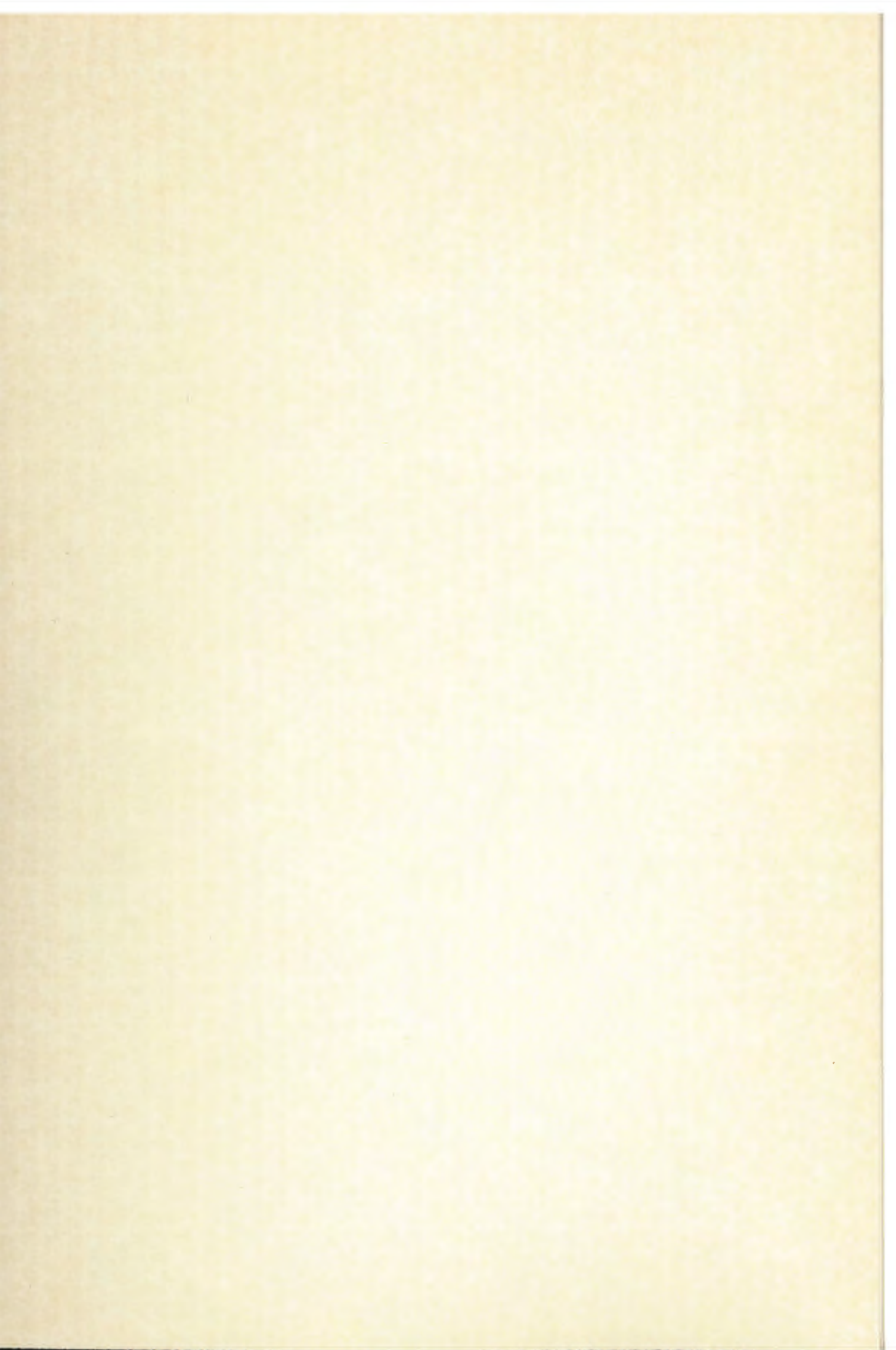




POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU
SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA**

Redakcja:
Jan Studziński
Ludostław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz





**WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU
SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA**

Polska Akademia Nauk Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE

tom 36

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2004

**WSPOMAGANIE INFORMATYCZNE
ROZWOJU
SPOŁECZNO-GOSPODARCZEGO
I OCHRONY ŚRODOWISKA**

Redakcja:

Jan Studziński
Ludosław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz

Książka wydana dzięki dotacji KOMITETU BADAŃ NAUKOWYCH

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju modeli, technik i systemów zarządzania oraz ich zastosowań w różnych dziedzinach gospodarki narodowej. Wyodrębnioną grupę stanowią artykuły omawiające aplikacyjne wyniki projektów badawczych i celowych KBN.

Recenzenci artykułów:

Dr Lucyna Bogdan
Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz
Dr Grażyna Petriczek
Prof. dr hab. inż. Andrzej Straszak
Dr inż. Jan Studziński



Senia 45187

Komputerowa edycja tekstu: Anna Gostyńska

© Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa 2004

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw IBS PAN
tel. 836-68-22

Druk: Zakład Poligraficzny Urzędu Statystycznego w Bydgoszczy
Nakład 110 egz.

ISBN 83-85847-92-8
ISSN 0208-8028

METODY KRIGINGU W OPRACOWANIU DANYCH POMIAROWYCH Z MONITORINGU OPADÓW ATMOSFERYCZNYCH*

Lucyna Bogdan, Wojciech Kozłowski
Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk
<Lucyna.Bogdan@ibspan.waw.pl>

The theme of report refers possibilities of use kriging in elaboration given of proceeding from monitoring of precipitations. There are represented the Błaszcyk method - intensity rain enumerating, used at projection of sewers in Poland. Exactly there are talked over geostatistic kriging method, manner of the enumeration of kriging estimator and formations semivariogram. There are introduced also the spherical model, used most often in kriging method.

Keywords: Kriging, geostatistic method, semivariogram, spherical model, Błaszcyk method

1. Wprowadzenie

Tak zwany *kriging* jest metodą geostatystyczną, która pozwala na szacowanie jakości i wielkości złóż minerałów oraz ilustrowanie rozmieszczenia wartości parametrów złożowych za pomocą map izarytm (np. warstwic). Pierwotnie metoda krigingu była wykorzystywana do oszacowania położenia i wielkości złóż złota. Mając kilka próbek minerału wydobytych w tak zwanych *punktach bazowych* można wygenerować mapę całego złoża.

Metodę krigingową coraz częściej stosuje się w USA i w Europie do uzupełniania przerw pomiarowych wartości temperatury mierzonej za pomocą satelitów. Równie dobrze można metodę krigingu zastosować do oszacowania wartości opadów deszczowych, tak zwanych *deszczy miarodajnych*, które są wykorzystywane przy projektowaniu sieci kanalizacyjnych. Mając kilkanaście stacji pomiarowych, które znajdują się w dzielnicach większych miast, można dokładnie wyliczyć wartość deszczy miarodajnych dla poszczególnych osiedli, których liczba jest zwykle dwu- lub trzykrotnie większa niż liczba dzielnic. W Niemczech w ostatnich latach wykonano taki projekt i nazwano go Atlasem Kostra. Zwiera on między innymi szczegółową mapę deszczy miarodajnych dla całych Niemiec. Jest on wykorzystywany, oczywiście odpłatnie, do projektowania sieci kanalizacji. Natomiast w Polsce do projektowania sieci kanalizacyjnych jest wykorzystywana przestarzała przybliżona metoda Błaszcyka z lat 1960-tych (Błaszcyk i in., 1983).

* Praca wykonana w ramach projektu badawczego KBN nr 3 P04G 084 25.

2. Istota metody Błaszyka

Metoda Błaszyka, jako najczęściej stosowana w Polsce również obecnie, jest wykorzystywana przy projektowaniu kanalizacji od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Jest to prosta przybliżony metoda obliczeniowa a jej cecha charakterystyczną jest zwykle przewymiarowanie projektowanych sieci kanalizacyjnych. Oznacza to, że projektuje się sieci większe, niż wynika to z rzeczywistych wymagań, oraz kanały sieciowe mają większe średnice, niż jest to potrzebne.

Podstawowy wzór metody jest związkiem między natężeniem, czasem trwania i częstotliwością występowaniu deszczu uśrednionego dla całego obszaru Polski, z wyjątkiem miejscowości podgórskich i górskich. Wzór został wyprowadzony przez Władysława Błaszyka na podstawie 67-letniego zbioru obserwacji deszczu w Warszawie z lat 1837–1959, przy zastosowaniu tak zwanej *metody średnich natężeń*. Wzór wyznacza natężenie spływu wody deszczowej do sieci kanalizacyjnej, przy założeniu zlewni całkowicie szczelnej, to znaczy bez uwzględnienia możliwej i występującej w praktyce redukcji ilości spływającej wody deszczowej (Błaszyk i in., 1983). Jest to wzór eksperymentalny i ma postać

$$q = \frac{470\sqrt[3]{c}}{t^{0,67}} \left[\frac{dm^3}{s} ha \right] \quad (1)$$

gdzie:

q – natężenie deszczu, dm^3/s ha,

c – okres jednorazowego przekroczenia danego natężenia, liczony w latach,

t – czas trwania deszczu, min.

Metoda średnich natężeń jest określona wzorem

$$J = \frac{h}{t} \left[\frac{mm}{min} \right] \quad (2)$$

gdzie:

J – natężenie opadu, mm/min,

h – wysokość opadu, mm,

t – czas trwania opadu, min.

3. Istota metody krigingowej

W ujęciu geostatystycznym parametr złożowy jest traktowany jako tak zwana *zmienna zregionalizowana*, zwana również *zmienną przestrzenną* lub *zmienną zlokalizowaną*, którą definiuje się jako funkcję ciągłą współrzędnych przestrzeni. Wartości zmiennej zregionalizowanej są znane tylko w odniesieniu

do pobranych próbek geologicznych lub zbadanych pól pomiarowych o znikomo małych rozmiarach w porównaniu z całą badaną przestrzenią złożową. Noszą one nazwę *bazy geometrycznej pomiarów* (Cressie, 1991; Isaaks i Srivastava, 1989).

Aby względem zmiennej zregionalizowanej można było przeprowadzić interpretację statystyczną, nakłada się na nią pewne ograniczenia. W szczególności przyjmuje się hipotezę o *słabej stacjonarności* zmiennej, co oznacza, że wartość oczekiwana zmiennej nie zależy od miejsca pomiaru, zaś jej kowariancja jest jedynie funkcją odległości pomiędzy znanymi punktami pomiarów.

W praktyce ze względu na to, że hipoteza słabej stacjonarności w odniesieniu do realnych parametrów złożowych jest zbyt rygorystyczna, stosuje się znacznie łagodniejsze ograniczenie, które zakłada słabą stacjonarność nie tyle samej zmiennej zregionalizowanej, lecz również jej przyrostów. Istotne znaczenie ma tu wariancja przyrostów, która definiuje podstawową funkcję charakterystyczną geostatystyki, zwaną *wariogramem*. Wzór wariogramu jest postaci

$$D^2 [Z(x+h) - Z(x)] = E[Z(x+h) - Z(x)]^2 = 2 \gamma(h) \quad (3)$$

gdzie:

D , E – operatory wariancji i wartości oczekiwanej,

$2\gamma(h)$ – wariogram,

$\gamma(h)$ – semiwariogram (półwariogram),

$Z(x+h)$, $Z(x)$ – wartości zmiennej zregionalizowanej w punkcie początkowym i w punkcie odległym o h .

W zastosowaniach metod geostatystycznych wykorzystuje się najczęściej połowę wartości wariogramu, tak zwany *semiwariogram*. Podstawę geostatystycznego opisu zmienności badanego parametru stanowi funkcja ujmująca zależność pomiędzy średnim zróżnicowaniem wartości parametrów złożowych a odległością pomiędzy miejscami ich pomiarów. W warunkach rutynowych pomiarów badanych wartości parametrów złożowych określa się postać semiwariogramu dla przyjętej dyskretnej i regularnej sieci pomiarów za pomocą klasycznej formuły Matherona postaci (Wackernagel, 1998; Kitanidis, 1997; Maidment, 1993)

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^{n_h} (z_{h+1} - z_i)^2 \quad (4)$$

gdzie z_i , z_{i+h} są wartościami parametru złożowego w punktach oddalonych o odległość h , natomiast n_h jest liczbą par punktów pomiarowych odległych o h .

Semiwariogram, którego postać została określona na podstawie wyników pomiarów w złożu, nosi nazwę *semiwariogramu empirycznego* lub *semiwariogramu eksperymentalnego* i przedstawia on w syntetycznej formie strukturę zróżnicowania parametrów złożowych.

Wyznaczanie semiwariogramu w istocie polega na obliczaniu średniego kwadratu różnic dla wszystkich par utworzonych z wartości parametru złożowego, określonych w punkcie wyróżnionym (bazowym) i w każdym z punktów, który znalazł się w obszarze grupowania danych, to znaczy odległych o h od punktu bazowego, a następnie na przypisaniu średniego kwadratu różnic średniej odległości pomiędzy punktem bazowym a punktami z rozpatrywanego sektora zliczania. Następnie całą procedurę powtarza się dla kolejnego przedziału odległości, czyli nowej wartości h , i dalej, dla kolejnych obliczanych punktów pomiarowych, które przejmują rolę punktów bazowych.

Semiwariogram empiryczny w formie wykresu punktowego nie może być wykorzystany do rozwiązywania zadań oceny parametrów geologicznych. By można było zrobić, przybliża się go różnymi funkcjami analitycznymi, które w dalszym postępowaniu są traktowane jako geostatystyczne modele zmienności. Do najczęściej używanych zalicza się *modele sferyczne Matherona* opisane równaniami (Furst, 1998; Deutsch, 1998; Pannatier, 1996)

$$\gamma(h) = C \left[\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] + C_0 \quad \text{dla } h \leq a \quad (5)$$

oraz

$$\gamma(h) = C_0 + C = \delta^2 \quad \text{dla } h \geq a \quad (6)$$

Z definicji semiwariogramu powinno wynikać, że jego wartość dla $h=0$ wynosi również zero. Jednak dla malejących do zera wartości h realne semiwariogramy empiryczne rzadko dążą do zera, na ogół dążą do pewnej wartości określonej w literaturze geostatystycznej jako stała *efektu samorodków* C_0 (*nugget effect*). Charakteryzuje ona zmienność lokalną badanego parametru złożowego i odpowiada składnikowi losowemu zmienności dla $h \rightarrow 0$.

Do aproksymacji semiwariogramów empirycznych modelami teoretycznymi, czyli odpowiednimi funkcjami, są stosowane najczęściej algorytmy aproksymacji oparte o metodę najmniejszych kwadratów. Jest ona szczególnie przydatna przy obliczeniach z wielką liczbą pomiarów. Wykonana poprawnie procedura obliczeniowa wymaga zastosowania aproksymacji ważonej ze względu na różną dokładność oceny poszczególnych wartości semiwariogramu empirycznego. Różna dokładność oceny wynika z różnej liczebności par danych, na podstawie których są wyznaczone wartości semiwariogramu.

Dlatego zazwyczaj pomija się wartości semiwariogramu określone dla zbyt ubogiej liczby danych, na przykład dla kilku par danych.

Reasumując, metoda krigingu jest geostatystyczną metodą szacowania średnich wartości parametrów złożowych i ich wartości w punktach złoża, opartą na zmienności wyrażonej semiwariogramem. Estymator wartości średniej parametru ma postać średniej ważonej i jest określony wzorem (Wackernagel, 1998; Kitanidis, 1997; Maidment, 1993; Pannatier, 1996)

$$z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i \quad (7)$$

gdzie λ_i jest współczynnikiem wagowym krigingu a z_i jest wartością parametru złożowego w i -tym punkcie pomiarowym.

Specyfika procedury krigingu polega na ustalaniu wartości współczynników wagowych. Winny być one tak dobrane, by spełniły dwa postulaty: nieobciążoności i maksymalnej efektywności estymatorów.

Pierwszy postulat jest spełniony, gdy

$$E(z_i - m) = 0 \quad (8)$$

skąd wynika wymóg, aby

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (9)$$

Drugi postulat oznacza, iż wariancja różnicy pomiędzy rzeczywistą średnią wartością parametru m i jej oceną z_i winna być możliwie najmniejsza, co można zapisać następująco

$$\sigma^2 = E[(z_i - m)^2] = \min \quad (10)$$

Warunkiem koniecznym do spełnienia postulatu minimalizacji błędu jest zerowanie się pierwszych pochodnych wariancji z uwagi na wszystkie współczynniki wagowe, to znaczy

$$\frac{\partial \left[\sigma^2 - 2v \sum_{i=1}^n \lambda_i \right]}{\partial z_i} = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (11)$$

gdzie v jest mnożnikiem Lagrange'a.

W wyniku różniczkowania otrzymuje się układ n równań algebraicznych z n niewiadomymi współczynnikami wagowymi w_{ik} , który w uproszczonej postaci można zapisać następująco

$$\gamma(x_i, x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + v \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (12)$$

lub w postaci macierzowej (Kitanidis, 1997; Maidment, 1993; Wackernagel, 1998)

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_i, x_j) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_i \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_i, x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie $\gamma(x_i, x_j)$ jest średnią wartością semiwariogramu dla odcinków łączących punkty pomiarów $z(x_i)$ oraz $z(x_j)$, (x_i, x_j) oznacza odległość między punktami x_i i x_j , natomiast x_i i x_j są określonymi punktami pomiaru przy wykorzystaniu przyjętego modelu zmienności badanego parametru.

Rozwiązanie przedstawionego układu równań prowadzi do ustalenia liczbowych wartości współczynników wagowych, które są niezbędne do szacowania średniej wartości parametru z minimalnym błędem. Są one również konieczne do wyznaczenia przeciętnej wielkości błędu, zwanego *błędem krigingu*, którego wariancję określa wzór

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \gamma(x_i, x_j) + v - \gamma(x_i, x_0) \quad (14)$$

Metoda krigingu, ze względu na powyższe wymienione własności, stanowi dogodną metodę interpolacyjną, wysoce przydatną przy sporządzaniu map izarytm (izolinii) parametrów złożowych. Z uwagi na minimalizację błędu oceny parametru procedura krigingu zapewnia większą dokładność niż inne procedury interpolacyjne, na przykład oparte na ważeniu odwrotności odległości lub kwadratu odległości węzła interpolacyjnego od punktów pomiaru. Zasady zastosowania tej metody polegają na nałożeniu na mapę rozmieszczenia punktów pomiarowych (otworów, próbek) na ogół kwadratowej sieci punktów interpolacyjnych, w których będzie wykonana interpolacja wartości badanego parametru. Przy ocenie wartości parametru złożowego w tych punktach bierze się pod uwagę wszystkie obserwacje w złożu, które znajdują się w obrębie koła o założonej z góry wielkości promienia, którego środek stanowi punkt interpolacyjny. Promień tego koła dobiera się uwzględniając zasięg semiwariogramu oraz charakter rozmieszczenia obserwacji w złożu. Wagi poszczególnych obserwacji określa się rozwiązując wspomniany wcześniej układ równań krigingu.

Ze względu na ogromną liczbę punktów interpolacji realizacja zadania aproksymacji jest możliwa wyłącznie przy zastosowaniu komputerów. Mając określone wagi obserwacji dla poszczególnych punktów interpolacji komputer określa dla każdego z nich - zgodnie z algorytmem krigingu - wartości badanego parametru jako średnią ważoną wartości zmierzonych oraz błąd krigingu.

Metoda krigingu pozwala zatem na oszacowanie wartości zmiennej dla określonych punktów interpolacyjnych na podstawie danych uzyskanych z otaczających punktów pomiarowych, przy czym z nieregularnej siatki pomiarowej uzyskuje się regularny rozkład przestrzenny badanej zmiennej w układzie geograficznym.

4. Podsumowanie

Metodę krigingową zaczyna się stosować w różnych dziedzinach życia w krajach na całym świecie. Według Matherona (Cressie, 1991; Isaaks i Srivastava 1989) jest ona obecnie najlepszą metodą geostatystyczną do szacowania zmiennych przestrzennych i tworzenia map, mając do dyspozycji tylko niewielką liczbę próbek. Wcześniej była metodą uciążliwą z powodu dużej liczby obliczeń. Obecny rozwój komputerów pozwala na wykorzystywanie jej w różnych dziedzinach życia, również do opracowywania danych pochodzących z monitoringu opadów atmosferycznych.

Dodatkowo można ją wykorzystać do stworzenia dokładnej mapy deszczy miarodajnych dla Polski, która posłużyłaby do projektowania sieci kanalizacji, oraz wykonać projekt podobny do Atlasu Kostra dla Polski, który zastąpiłby przeszacowaną metodę Błaszyka. Takie prace są obecnie prowadzone w Instytucie Badań Systemowych PAN w Warszawie w ramach projektu badawczego KBN.

Literatura

- Błaszyk W., Stamatello P., Błaszyk P. (1983) *Kanalizacja. Sieci i pompownie*. Arkady Warszawa.
- Cressie N.A.C. (1991) *Statistics for Spatial Data*. John Wiley and Sons, Inc., New York
- Deutsch C.V., Journel A.G. (1998) *GSLIB – Geostatistical Software Library and User's Guide*. Oxford University Press, New York.
- Furst J. (1998) *Anwendung von Geographischen Informationssystemen in Hydrologie und Wasserwirtschaft – Studienblätter und Materialien zur Vorlesung im SS 1998*. VITA – Universitätsverlag der Hochschulerschaft an der Universität Wien GmbH.
- Isaaks E. H., Srivastava R. M. (1989) *Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York.
- Kitanidis P.K. (1997) *Introduction to Geostatistics*. Cambridge University Press Melbourne Australia.
- Maidment D.R. (1993) *Handbook of Hydrology*. McGraw – Hill, Inc. U.S.A

- Pannatier Y. (1996) *VARIOWIN Software for Spatial Data Analysis in 2D*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Surfre 7 – *User's Guide*. Golden Software, Inc. 1999 Colorado U.S.A.
- Wackernagel H. (1998) *Multivariate geostatistics – An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

IBS PAN *Seria*

45187

Bibl. podręczna

ISSN 0208-8028

ISBN 83-85847-92-8

**W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl**