



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA
METOD ILOŚCIOWYCH
I TECHNIK INFORMATYCZNYCH
WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY
DECYZYJNE**

Redakcja:

Jan Studziński
Ludostław Drelichowski
Olgierd Hryniewicz

**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA
METOD ILOŚCIOWYCH
I TECHNIK INFORMATYCZNYCH
WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY
DECYZYJNE**

Redakcja:

Jan Studziński

Ludosław Drelichowski

Olgierd Hryniewicz

Wydanie tej publikacji było możliwe dzięki pomocy finansowej
MINISTERSTWA NAUKI I SZKOLNICTWA WYŻSZEGO.

Książka zawiera wybór artykułów poświęconych omówieniu aktualnego stanu badań w kraju w zakresie rozwoju i zastosowań metod, modeli, technik i systemów informatycznych w procesach podejmowania decyzji. Kilka artykułów przedstawia rezultaty projektów badawczych finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego i realizowanych przez polskie instytucje badawcze.

Recenzenci:

Prof. Olgierd Hryniewicz

Prof. Andrzej Straszak

Dr hab. Jan Studziński

Komputerowa edycja tekstu: Anna Gostyńska

© Instytut Badań Systemowych, Warszawa 2006

Wydawca: Instytut Badań Systemowych PAN
Newelska 6, PL 01-447 Warszawa

Sekcja Informacji Naukowej i Wydawnictw
e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl

ISBN 83-894-7506-5

9788389475060

ISSN 0208-8029



**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA
METOD ILOŚCIOWYCH I TECHNIK
INFORMATYCZNYCH
WSPOMAGAJĄCYCH PROCESY
DECYZYJNE**

Instytut Badań Systemowych • Polska Akademia Nauk
Seria: Badania Systemowe
Tom 49

Redaktor Naukowy:
Prof. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2006



ZASTOSOWANIE STRATEGII MODEL PREDICTIVE CONTROL DO ZARZĄDZANIA DŁUGIEM PUBLICZNYM*

Cezary NOWACKI

Zaoczne Studia Doktoranckie
Instytut Badań Systemowych, Polska Akademia Nauk
<czarek.nowacki@gazeta.pl>

***Streszczenie:** Zarządzanie długiem publicznym można określić jako proces ustanawiania i realizacji strategii zarządzania długiem skarbu państwa w celu osiągnięcia zamierzonego poziomu ryzyka oraz kosztów obsługi długu. Głównym wskaźnikiem kosztu obsługi długu jest całkowity koszt (odsetki plus różnica między ceną nominalną a ceną sprzedaży) papierów wyemitowanych w przedziale czasu. Wskaźnik ryzyka może uwzględniać problem stabilności rynku lub określać odporność strategii emisji na zmiany stóp procentowych. W artykule przedstawiono liniowy obiekt długu publicznego. Zaprezentowano metodę optymalizacji, opartą o strategię regulacji predykcyjnej MPC, która może zostać wykorzystana do wyznaczenia optymalnej strategii emisji. Zdefiniowano również istotne dla zadania ograniczenia. Ryzyko zostało uwzględnione w ograniczeniach.*

Słowa kluczowe: Zarządzanie długiem publicznym, sterowanie predykcyjne, programowanie liniowe.

1. Wstęp

Zgodnie z obowiązującym w Polsce prawem (Ustawa z dnia 26 listopada 1998 r. o finansach publicznych) przez państwowy dług publiczny rozumie się „nominalne zadłużenie podmiotów sektora finansów publicznych ustalone po wyeliminowaniu przepływów finansowych pomiędzy podmiotami należącymi do tego sektora.” Państwowy dług publiczny obejmuje zobowiązania sektora finansów publicznych z następujących tytułów: wyemitowanych papierów wartościowych opiewających na wierzytelności pieniężne, zaciągniętych kredytów i pożyczek, przyjętych depozytów, wymagalnych zobowiązań jednostek budżetowych, wymagalnych zobowiązań wynikających z ustaw i orzeczeń sądu, udzielonych poręczeń i gwarancji oraz innych tytułów. Skarb państwa, reprezentowany przez Ministerstwo Finansów, emituje na rynku krajowym dwa rodzaje papierów dłużnych: bony oraz obligacje skarbowe. Środki uzyskane z emisji są przeznaczane na spłatę (obsługę) wcześniej

* Praca wykonana częściowo w ramach projektu badawczego Nr 1H02B 03828 pt.: „Zastosowanie metod sztucznej inteligencji do zarządzania długiem publicznym”.

zaciągniętego długu oraz na finansowanie wydatków państwa przewidzianych w budżecie. Na wzrost długu publicznego wpływa także deficyt budżetowy państwa.

W Polsce dług publiczny rośnie w dość szybkim tempie. Państwo wydając za dużo w stosunku do dochodów budżetu zwiększa deficyt budżetowy, który jest kompensowany poprzez zaciąganie większego długu publicznego. Od tego zaciągniętego długu będzie musiało płacić odsetki. Wraz ze wzrostem długu publicznego rosną zwykle koszty jego obsługi, co dodatkowo powiększa dług. Według opinii Rady Polityki Pieniężnej do projektu Ustawy budżetowej na rok 2006, dług publiczny będzie w dalszym ciągu narastał i osiągnie w 2006 roku 54.6% produktu krajowego brutto (PKB). Zgodnie z podpisanym przez Polskę traktatem w Maastricht, dług publiczny nie może przekroczyć 60% PKB.

Aby ograniczyć wzrost długu publicznego, konieczne jest przyjęcie strategii emisji papierów dłużnych, która minimalizowałaby koszty obsługi długu w zadanym przedziale czasu. W artykule przedstawiono liniowy model długu publicznego. Zaprezentowano także metodę optymalizacji, opartą o strategię regulacji predykcyjnej (Model Predictive Control) która może być wykorzystana do znalezienia optymalnej strategii emisji papierów dłużnych. Celem zadania optymalizacji jest minimalizacja funkcji kosztu przy spełnieniu zadanych ograniczeń.

2. Opis obiektu

Mamy dany liniowy dyskretny obiekt opisany równaniem stanu (Massimiliano et al. 2004):

$$X_{t+1} = AX_t + BU_t, \quad X_{t_0} = X_0, \text{ gdzie} \quad (1)$$

X_t liczba wszystkich nie wykupionych papierów w czasie t .

Macierz X_t ma postać:

$$X_t = \begin{bmatrix} x_{t-1}^1 & x_{t-1}^2 & \cdots & x_{t-1}^k \\ x_{t-2}^1 & x_{t-2}^2 & \cdots & x_{t-2}^k \\ \vdots & x_{t-3}^2 & \cdots & x_{t-3}^k \\ x_{t-m_1}^1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & x_{t-m_2}^2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{t-m_k}^k \\ 0 & \vdots & \cdots & x_{t-m_k}^k \end{bmatrix}, \text{ gdzie}$$

- k rodzaj papieru (mogą to być bony o różnym okresie życia, obligacje stałe lub zmienne o różnych terminach wykupu)
- m_k czas życia papieru typu k ,
- x_t^k liczba papierów k -tego typu sprzedanych w czasie t .

Rolą macierzy A jest przesuwanie wierszy macierzy X_t o jeden w dół. Macierz A o wymiarze $\max_k(m_k) \times \max_k(m_k)$ ma postać jak poniżej (miejsce wielokropków zajmują zera):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektor B ma długość $\max_k(m_k)$ i jest równy:

$$B = [1 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0]^T$$

Sterowanie U_t w obiekcie opisanym równaniem (1) jest to wektor wielkości emisji papierów typu k w chwili czasu t .

$$U_t = \begin{bmatrix} u_t^1 & u_t^2 & u_t^3 & \dots & u_t^{k-1} & u_t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_t^1}{p_t^1} & \frac{e_t^2}{p_t^2} & \frac{e_t^3}{p_t^3} & \dots & \frac{e_t^{k-1}}{p_t^{k-1}} & \frac{e_t^k}{p_t^k} \end{bmatrix},$$

gdzie

p_t^k cena sprzedaży papieru typu k w czasie t ,

e_t^k wpływy uzyskane z emisji papierów typu k w chwili t .

3. Wskaźnik jakości i ograniczenia

Wskaźnik jakości $J|_{t_1, t_2}$ określa koszt obsługi długu w przedziale czasu $[t_1, t_2]$. Wskaźnik ten nie uwzględnia kosztu obsługi długu dla papierów sprzedanych przed chwilą czasu t_1 , ponieważ jest to koszt niezależny od procesu optymalizacji, na który nie mamy wpływu. Koszt obsługi długu dla papierów wyemitowanych przed chwilą czasu t_1 jest uwzględniony w ograniczeniach zadania optymalizacji.

Wskaźnik jakości J opisuje zależność (Massimiliano et al., 2004):

$$J(t_1, t_2) = \sum_{k \in K} \sum_{t=t_1}^{t_2} x_t^k \left((100 - p_t^k) \frac{[t_1, t_2] \cap [t, t + m_k]}{[t, t + m_k]} \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{m_k/6} c_{t|6l}^k \frac{[t_1, t_2] \cap [t + 6(l-1), t + 6l]}{[t + 6(l-1), t + 6l]} \right), \text{ gdzie} \quad (2)$$

$c_{t|6l}^k$ wysokość odsetek dla papieru typu k sprzedanego w czasie t wypłacanych po $6l$ miesiącach.

Dla obligacji zmiennoprocentowych wysokość wypłacanych odsetek zależy od stóp procentowych. Do rozwiązania zadania optymalizacji można wykorzystać na przykład publikowane prognozy rządowe stóp procentowych.

Dla łatwiejszego zdefiniowania ograniczeń wprowadzmy następujące oznaczenia:

Niech przepływ finansowy $I_{t|s}^k$ w chwili s dla pojedynczego papieru typu k sprzedanego w czasie t opisuje równanie:

$$I_{t|s}^k = \delta_t^s p_t^k - N_t^k \left[\delta_{t+m_k}^s + \sum_{l=1}^{m_k/6} \delta_{t+6l}^s c_{t|6l}^k \right], \text{ gdzie}$$

N_t^k cena nominalna papieru typu k sprzedanego w czasie t , parametr δ_t^s przyjmuje wartości:

$$\delta_t^s = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

Mając zdefiniowany przepływ finansowy dla pojedynczego papieru możemy zdefiniować przepływ finansowy F_s dla całego portfela jak poniżej:

$$F_s = \sum_{k \in K} \sum_{t=s-m_k}^s \frac{e_t^k}{p_t^k} I_{t|s}^k$$

Podstawowym ograniczeniem omawianego w dalszej części artykułu zadania optymalizacji jest gwarancja wykupu papierów i wypłaty odsetek w dowolnej chwili czasu s . Ograniczenie to opisuje nierówność:

$$F_s + NDP_s \geq \beta_s, \text{ gdzie}$$

NDP_s wydatki państwa w chwili czasu s poniesione na finansowanie celów, ze środków długu publicznego, zawartych w budżecie,

β_s wartość ustalana na podstawie rządowych prognoz wydatków państwa.

Bardzo ważne jest ograniczenie zawarte w podpisanym przez Polskę traktacie z Maastricht. Oznaczając przez D_s państwowy dług publiczny,

$$D_s = \sum_{k \in K} \sum_{t=s-m_k+1}^s x_t^k \cdot N_t^k,$$

ograniczenie to można zapisać jak poniżej:

$$\frac{D_s}{PKB_s} \leq M, \text{ gdzie}$$

$$M = 0.6,$$

PKB_s to wartość produktu krajowego brutto.

Dla spełnienia wymogów emisji papierów dłużnych istotne są następujące ograniczenia (Klukowski, 2003):

- ograniczenie na liczbę sprzedawanych papierów k -tego rodzaju w chwili czasu t

$$a_t^k \leq x_t^k \leq b_t^k,$$

- ograniczenie na okres zapadalności sprzedawanych papierów

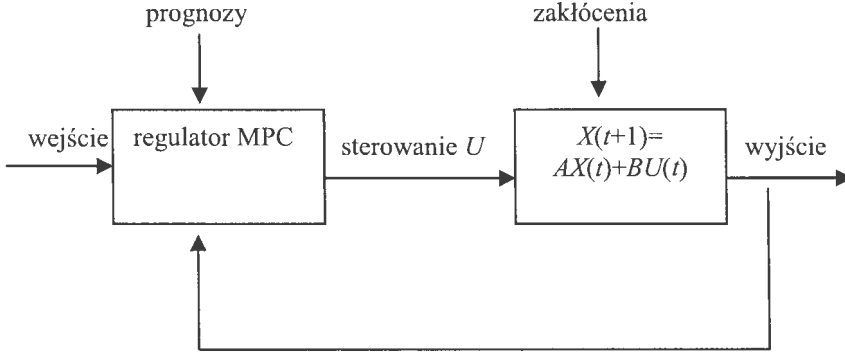
$$f_t \leq (x_t^1 + 2x_t^2 + \dots + 52x_t^{52}) / \sum_k x_t^k \leq g_t$$

- ograniczenie na udział poszczególnych rodzajów papierów w łącznej puli sprzedanych papierów

$$h_t^k \leq x_t^k / \sum_k x_t^k \leq i_t^k$$

4. Układ sterowania

Poniższy rysunek pokazuje układ sterowania obiektem opisanym równaniem (1). Jest to układ liniowy, z pętlą sprzężenia zwrotnego od stanu.



Rysunek 1. Schemat układu sterowania liniowym obiektem długu publicznego.

Dla pełnego przedstawienia układu sterowania określimy wejścia i wyjścia systemu.

Dane wejściowe:

- historia sterowań – musimy wiedzieć jakie papiery, ile i kiedy zostały do wykupu oraz musimy znać terminy płatności odsetek dla papierów sprzedanych przed rozpoczęciem procesu optymalizacji,
- daty emisji papierów.

W procesie regulacji predykcyjnej MPC wymagane będą prognozy stóp procentowych, prognozy produktu krajowego brutto oraz prognozy wydatków państwa *NDP*. Musimy także założyć ceny sprzedawanych w przyszłości papierów na przetargach.

Dane wyjściowe:

- roczna emisja papierów,
- roczny dług publiczny obliczony na przykład zgodnie z metodologią *ESA 95*,
- wskaźniki ryzyka, na przykład duracja,
- dług nominalny D_s , przepływ F .

Rolę zakłóceń mogą pełnić:

- różnice między rzeczywistymi wartościami stóp procentowych i stóp prognozowanych (prognozy stóp będą prawdopodobnie różne od rzeczywistych),
- różnice między rzeczywistymi cenami sprzedaży papierów na przetargach a cenami prognozowanymi,
- dodatkowe wydatki lub nadwyżki w budżecie państwa mogące wpłynąć na zwiększenie lub zmniejszenie wysokości długu.

Do wyznaczenia optymalnej polityki sterowania można zastosować strategię opartą na regulacji predykcyjnej MPC.

Idea regulacji predykcyjnej (MPC).

Ogólna zasada regulacji predykcyjnej (z przesuwającym horyzontem) jest następująca. W każdej z kolejnych dyskretnych chwil czasu t ($t=jT_p$, gdzie T_p oznacza czas próbkowania), dysponując:

- dynamicznym modelem obiektu, w tym zakładając określony model zakłóceń (poprzez zakłócenia rozumiemy błędy prognoz),
- pomiarami wyjść obiektu w chwilach bieżącej i poprzednich oraz poprzednimi wartościami sterowań,
- znaną lub założoną trajektorią wartości zadanych regulowanych wyjść obiektu w bieżącej i przyszłych chwilach czasu,

wyznaczamy wartości sterowań $u_k = u_{|t}, u_{t+1|t}, \dots, u_{t+N_u-1|t}$, tj. na horyzoncie optymalizacji N_u , przyjmując dalej $u_{t+p|k} = u_{t+N_u-1|k}$ dla $p \geq N_u$. Zastosowana w indeksach notacja „ $t+p|t$ ” oznacza wyznaczenie w chwili t wartości przewidywanej na chwilę $t+p$. Sterowania wyznaczane są tak, aby zminimalizować różnice między wartościami regulowanych wyjść obiektu a wartościami zadanymi, na horyzoncie predykcji N , $p=1,2,\dots,N$. Minimalizacja różnic rozumiana jest w sensie minimalizacji określonej funkcji kryterialnej (funkcji kosztu). Następnie wyznaczone sterowanie $u_{t|t}$ jest podawane na obiekt. Ponieważ na obiekt działają zakłócenia, stan obiektu X_{t+1} jest na ogół różny od oczekiwanego. Procedura wyznaczania sterowań jest powtarzana w chwili $t+1$.

Zasadę regulacji predykcyjnej MPC dla układu sterowania z rys. 1 można zapisać jak poniżej:

Ustalamy horyzont sterowania $[t_0, t_N]$.

Krok 1. W chwili t_j , z przedziału $[t_0, t_N]$, zakładamy że znamy wartości p_{t_j} . Następnie dokonujemy predykcji $p_{t_j}^1$ do końca horyzontu optymalizacji $t_j + N_u$.

Krok 2. Przeprowadzamy optymalizację dla wskaźnika jakości J w oparciu o, na przykład, najbardziej prawdopodobny scenariusz prognozy $p_{t_j}^1$. Wyznaczamy ciąg optymalnych sterowań $u_{s|t_j}^k$ dla wszystkich $s \geq t_j$, dla przedziału czasu $[t_j, t_j + N_u]$.

Krok 3. podajemy sterowanie $u_{t_j|t_j}^k$ na wejście obiektu, $j = j + 1$, wracamy do

kroku 1.

Należy podkreślić, że na obiekt podawana jest tylko prognoza sterowania wyznaczona dla chwili t . ($u_{t|t}$).

Przyjmując określoną prognozę stóp procentowych unikamy nieliniowości (p oraz c są znane)

5. Zadanie optymalizacji

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu optymalnego ciągu sterowań u dla obiektu $X_{t+l} = AX_t + BU_t$ przy spełnieniu ograniczeń (zdefiniowanych w pkt. 3) dla funkcji kosztu J .

Zapiszmy wskaźnik jakości J w następujący sposób:

$$J([t_1, t_2]) = \sum_{k \in K} \sum_{t=t_1}^{t_2} x_t^k \left(\frac{(N_t^k - p_t^k) [t_1, t_2] \cap [t, t + m_k]}{[t, t + m_k]} \right) + \sum_{l=1}^{m_k/6} c_{t|6l}^k \frac{[t_1, t_2] \cap [t + 6(l-1), t + 6l]}{[t + 6(l-1), t + 6l]} = \sum_{k \in K} \sum_{t=t_1}^{t_2} x_t^k \left((N_t^k - p_t^k) n_t^k + c_{t|6l}^k o_t^k \right)$$

Jeżeli p_t^k nie zależy od x to prawdziwe jest stwierdzenie:

Dla przyjętej prognozy struktury terminowej stóp procentowych i dla przyjętej prognozy wydatków budżetowych zadanie optymalizacji jest zadaniem programowania liniowego z liniowymi ograniczeniami.

Jeżeli p_t^k nie zależy od x to do rozwiązywania zadania optymalizacja można zastosować metodę Simplex.

6. Zakończenie

W artykule przedstawiono układ sterowania liniowym obiektem długu publicznego. Sformułowano wskaźnik jakości i ograniczenia dla zadania optymalizacji. W procesie optymalizacji konieczna jest prognoza dyskonta sprzedawanych papierów. Liczba papierów sprzedanych na przetargu może mieć wpływ na przyszłą cenę sprzedawanych papierów. Inaczej mówiąc, emisja papierów przez państwo wpływa na przyszłe zachowania inwestorów. Przedstawione zadanie optymalizacji nie uwzględnia tego problemu.

Zastosowana metoda regulacji predykcyjnej MPC może powodować częste zmiany strategii emisji papierów dłużnych w krótkim przedziale czasu. Takie działanie skarbu państwa jest niewskazane. Dalszy kierunek badań może dotyczyć optymalizacji dwuwarstwowej, która wyeliminuje powyższy problem. Warstwa nadrzędna przeprowadzałaby optymalizację dla długiego horyzontu optymalizacji z okresem próbkowania nie k , a wk , gdzie $w > 1$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Warstwa nadrzędna mogła by wyznaczać na przykład strategię emisji rocznych papierów ($w = 12$). Warstwa optymalizacji bezpośredniej działałaby na horyzoncie sterowania

równym okresowi próbkowania warstwy nadrzędnej, czyli na przykład rocznym i wyznaczałaby strategię emisji miesięcznych papierów na horyzoncie roku. Warstwa optymalizacji nadrzędnej określałaby wartości ograniczeń dla optymalizacji bezpośredniej.

Literatura

Ustawa z dnia 26 listopada 1998 r. o finansach publicznych.

(Dz. U. z dnia 19 grudnia 1998 r.).

Klukowski L. (2003) *Optymalizacja decyzji w zarządzaniu instrumentami dłużnymi skarbu państwa*. Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Warszawa.

Massimiliano A. et al. (2004) *Optimal Strategies for the Issuances of Public Debt Securities*. Italian Ministry of Economy and Finance, Roma.

Szacka K. (1999) *Teoria układów dynamicznych*. Oficyna Wydawnicza PW.

Tatjewski P. (2002) *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT.

APPLYING MODEL PREDICTIVE CONTROL STRATEGY TO PUBLIC DEBT MANAGEMENT

Abstract: *Public debt management is the process of establishing and executing an issuance strategy for managing the government's debt in order to achieve the government's cost and risk objectives. The main cost objective is a total cost (coupons plus the difference between nominal value and issuance price) of bonds distributed over a period of time. The risk objective may relate to a problem of market stability, or an issuance strategy robust to interest rates shocks. In this paper we introduce a formal presentation of a linear model of public debt. We also present the optimization method, based on model predictive control strategy that can be used to find optimal issuance strategy. The goal is to minimize a cost function on optimization time horizon. We define institutional and market practise constraints that are essential for this problem. Risk objective is included in risk constraints.*

Keywords: Public debt management, model predictive control, linear programming.

Jan Studziński, Ludosław Drelichowski, Olgierd Hryniewicz
(Redakcja)

**ROZWÓJ I ZASTOSOWANIA METOD ILOŚCIOWYCH
I TECHNIK INFORMATYCZNYCH WSPOMAGAJĄCYCH
PROCESY DECYZYJNE**

Monografia zawiera wybór artykułów dotyczących informatyzacji procesów zarządzania, prezentując aktualny stan rozwoju informatyki stosowanej w Polsce i na świecie. Zamieszczone artykuły opisują metody, modele, techniki i systemy informatyczne stosowane do wspomaganie procesów podejmowania decyzji, a także omawiają zastosowania narzędzi informatycznych w różnych sektorach gospodarki. Kilka prac przedstawia wyniki projektów badawczych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, dotyczących rozwoju metod informatycznych i ich zastosowań.

ISBN 83-894-7506-5
9788389475060
ISSN 0208-8029

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy
prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: biblioteka@ibspan.waw.pl