BADANIA SYSTEMOWE

XXV-lecie INSTYTUTU BADAŃ SYSTEMOWYCH

Książka jubileuszowa
pod redakcją
Kazimierza Mańczaka

Polska Akademia Nauk
Instytut Badań Systemowych

BADANIA SYSTEMOWE

XXV-lecie Instytutu Badań Systemowych PAN

Książka jubileuszowa
pod redakcją
Kazimierza Mańczaka

Warszawa 2001

PRACE z DZIEDZINY OPTYMALIZACJI w IBS PAN

K.C. KIWIEL, K. MALANOWSKI, A. ŻOCHOWSKI

Wprowadzenie

Metody i algorytmy optymalizacyjne należą do podstawowych narzędzi używanych w analizie systemowej. Jest więc rzeczą naturalną, że problemy związane z optymalizacją stanowią jeden z podstawowych obszarów prac prowadzonych w Instytucie Badań Systemowych PAN. Tradycja takich badań jest bardzo długa. Korzenie jej są znacznie głębsze niż ćwierćwiecze istnienia Instytutu w jego obecnej postaci i sięgają do jego poprzednich wcieleń: Instytutu Automatyki, Instytutu Cybernetyki Stosowanej i Instytutu Organizacji i Kierowania. Wyczerpujące omówienie tej tradycji znajduje się w pracy *Modelowanie Matematyczne i Optymalizacja w IBS PAN* ([Gut96a]) opracowanej przez prof. Jakuba Gutenbauma z okazji XX-lecia Instytutu.

W przeciwieństwie do tamtej pracy, niniejsze opracowanie nie jest przeglądem wszystkich kierunków badań i rezultatów z dziedziny optymalizacji uzyskanych przez pracowników Instytutu. Autorzy zdecydowali się na omówienie trzech kierunków badań, w których uzyskane wyniki są, ich zdaniem, najwartościowsze i najbardziej perspektywiczne. Za takie kierunki badawcze uznaliśmy:

1. **Stabilność i wrażliwość zadań optymalizacji i sterowania optymalnego,**
2. **Optymalizację kształtu układów mechanicznych,**
3. **Metody obliczeniowe optymalizacji nieróżniczkowalnej i programowania wielkiej skali.**

Zdajemy sobie sprawę, że wybór ten jest w znacznym stopniu arbitralny i ma charakter subiektywny. Poza wymienionymi wyżej trzema kierunkami, powstało w Instytucie szereg wartościowych prac z dziedziny optymalizacji, niektóre z nich na najwyższym poziomie światowym. Ograniczymy się tutaj jedynie do krótkiego wzmiankowania o niektórych innych ważnych kierunkach badań:

- **Sterowanie optymalne dla nierówności wariacyjnych z zastosowaniem do wielofazowych zadań typu Stefana**

W latach 80-tych w szeregu prac I. Pawłow i M. Niezgódka badali zadania sterowania optymalnego dla wielofazowych zagadnień typu Stefana, wykorzystując oryginalne modele takich zagadnień w postaci nierówności wariacyjnych. W ich pracach rozważano zarówno aspekty teoretyczne, takie jak istnienie sterowania optymalnego i warunki konieczne optymalności, jak i problemy aproksymacji.

Przeprowadzono także eksperymenty numeryczne. Znaczną część uzyskanych wyników zawarto w monografii [Paw87].

- **Sterowanie optymalne układami dyskretnymi**

Badano warunki konieczne optymalności dla układów opisywanych nieliniowymi równaniami różnicowymi. Uzyskano uogólnioną zasadę maksimum, w której osłabiono założenie kierunkowej wypukłości, wymagane w klasycznej zasadzie maksimum dla takich równań. Wykorzystano tę zasadę do konstrukcji nowego algorytmu sterowania optymalnego [NRV83].

- **Sterowanie optymalne procesami wieloetapowymi**

J. Gutenbaum sformułował zagadnienie sterowania optymalnego procesami, składającymi się z wielu etapów, z których każdy może charakteryzować się innym modelem matematycznym z innym wskaźnikiem jakości. Pokazał jak można rozwiązać to zadanie w strukturze dwupoziomowej [Gut96b].

- **Konstrukcja i analiza algorytmów dla zadań optymalizacji dyskretnej**

Osiągnięto znaczące wyniki w konstrukcji algorytmów różnych zadań załadunku [DW84, DW87, Wal91] oraz probabilistycznej analizy własności rozwiązań dla tej klasy zadań [Szk94, Szk99].

- **Optymalizacja wektorowa dla wspomagania podejmowania decyzji**

Opracowano proste metody wyznaczania rozwiązań efektywnych zadań optymalizacji wektorowej, a także metody uzyskiwania oszacowań tzw. *współczynników wymiany* oraz *wektorowych ocen rozwiązań efektywnych,* bez konieczności jawnego wyznaczania tych rozwiązań [Kal94].

* * *

Bibliografia podana na końcu opracowania daleka jest od kompletnej, zawiera jedynie ważniejsze i bardziej reprezentatywne pozycje.

1. Stabilność i wrażliwość zadań optymalizacji i sterowania optymalnego

W rzeczywistych zadaniach optymalizacji i sterowania optymalnego informacja o danych układu obarczona jest zwykle błędami. Poza tym dane te mogą podlegać zmianom i zakłóceniom w procesie sterowania. Takie niedokładne dane procesu używane są w modelu matematycznym, na podstawie którego wyznacza się rozwiązanie, wykorzystywane w układzie rzeczywistym. Wobec tego bardzo istotna jest informacja o zależności zachowania się układu od zmian danych. Zmiany zachowania mogą być mierzone zmianami bądź to rozwiązań optymalnych, bądź wskaźnika jakości. Badaniem tej zależności zajmuje się *analiza stabilności i wrażliwości.* Zakłada się, że dane układu zależą od pewnego parametru (może to być parametr skalarny, wektorowy lub funkcyjny) i bada się własności rozwiązań (lub wskaźnika jakości) traktowanych jako funkcje parametru. Badania te mają charakter lokalny, dotyczą własności funkcji w otoczeniu nominalnej wartości parametru (punktu odniesienia). Przy tym *analiza stabilności* dotyczy ciągłości odpowiedniej funkcji, natomiast jej różniczkowalnością zajmuje się *analiza wrażliwości.*

Analiza stabilności i wrażliwości jest trudna z dwóch względów:

- *w ogólnym przypadku rozwiązanie optymalne nie jest jednoznaczne, a więc odpowiednie odwzorowanie jest wielowartościowe,*
- *występowanie ograniczeń typu nierównościowego powoduje, że problem jest niegładki, nawet w przypadku dowolnie gładkich danych.*

Powyższe przyczyny nie pozwalają na użycie klasycznej analizy, w szczególności klasycznego twierdzenia o funkcji uwikłanej, lecz wymagają aparatu analizy wielowartościowej i niegładkiej.

Analiza stabilności i wrażliwości dla zadań optymalizacji zaczęła się rozwijać na świecie poczynając od połowy lat 70-tych. Pierwsze rezultaty dotyczyły skończenie wymiarowych zadań programowania matematycznego. Stopniowo, głównie w latach 90-tych, wyniki te uogólniano na przypadek zadań nieskończenie wymiarowych. Główne zastosowania dotyczyły parametrycznych zadań programowania półnieskończonego i sterowania optymalnego.

Wkład pracowników Instytutu do rozwoju tych badań był znaczny. Dotyczył on:

- **analizy wrażliwości i stabilności dla nieliniowych zadań sterowania optymalnego układów o parametrach skupionych,**
- **analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji w przestrzeniach funkcyjnych oraz zadań sterowania optymalnego układów o parametrach rozłożonych,**
- **stabilności parametrycznych problemów optymalizacji wektorowej,**
- **analizy wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej.**

Poniżej zostaną pokrótce omówione najważniejsze prace badawcze oraz uzyskane wyniki.

1.1. Analiza stabilności i wrażliwości dla nieliniowych zadań sterowania optymalnego układów o parametrach skupionych

Prace prowadzone w latach 80-tych dotyczyły wypukłych zadań sterowania optymalnego dla układów opisywanych liniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Podano warunki dostateczne stabilności lipschitzowskiej oraz różniczkowalności kierunkowej względem parametru, dla rozwiązań takich zadań. Uzyskane wyniki zostały przedstawione syntetycznie w małej monografii [Mal87].

W latach 90-tych, powyższe wyniki rozszerzono na ogólny przypadek zadań optymalizacji w przestrzeniach Banacha, przy ograniczeniach stożkowych [Mal93]. Rezultaty te zastosowano w zadaniach sterowania optymalnego układów opisywanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Zbadano zarówno zadania z ograniczeniami sterowania (lub mieszanymi: sterowanie-stan) [Mal92], jak i z czystymi ograniczeniami stanu [Mal95]. Głównym oryginalnym wkładem do teorii było zbadanie roli zjawiska tzw. *niezgodności norm* ("two-norm discrepancy"), typowego dla nieliniowych zadań sterowania. Dla przezwyciężenia trudności związanych z niezgodnością norm, zaproponowano wykorzystanie dodatkowej informacji o regularności rozwiązań, traktowanych jako funkcje czasu. Umożliwiło to rozpatrywanie zadań sterowania optymalnego na zbiorach zwartych [Mal93, Mal95].

Uzyskane warunki dostateczne lokalnej lipschitzowskiej stabilności i różniczkowalności kierunkowej obejmują regularność *alfa*-aktywnych ograniczeń oraz dodatnią określoność hessianu lagranżianu, w punkcie odniesienia. W ostatnich latach badano konieczność tych warunków [DM99], a także różniczkowalność rozwiązań w sensie Bouliganda (silniejszą niż kierunkowa) [Mal01b]. Uzyskano pełną charakteryzację tych własności dla zadań z ograniczeniami mieszanymi sterowanie-stan. Rezultaty te podsumowano w małej monografii [Mal01a].

Uzyskane wyniki teoretyczne znalazły zastosowanie do badania zbieżności aproksymacji ciągłych zadań optymalizacji, a także zbieżności pewnych algorytmów optymalizacyjnych. W pracach [MBM98] oraz [DHM00] podano optymalne oszacowanie prędkości zbieżności aproksymacji Eulera dla nieliniowych zadań sterowania optymalnego, odpowiednio przy ograniczeniach sterowania i stanu. Oszacowano również optymalnie prędkość zbieżności metody Newtona-Lagrange'a iteracyjnego rozwiązywania tych samych klas zadań sterowania optymalnego [AM93, AM95].

1.2. Analiza wrażliwości dla zadań optymalizacji w przestrzeniach funkcyjnych oraz zadań sterowania optymalnego układów o parametrach rozłożonych

W latach 70-tych ukazały się ważne prace A. Haraux i F. Mignot, w których autorzy wprowadzili własność *wielościenności* ("polyhedricity") zbiorów wypukłych w przestrzeniach Hilberta i pokazali, że projekcja metryczna na zbiór wielościenny jest kierunkowo różniczkowalna. Scharakteryzowali również postać różniczki kierunkowej.

Te wyniki stanowiły punkt wyjścia dla szeregu pionierskich prac dotyczących różniczkowalności rozwiązań kwadratowych zadań sterowania optymalnego, z liniowymi ograniczeniami sterowania, dla układów o parametrach rozłożonych [Sok85, BnOS85, Sok87]. W pracach tych po raz pierwszy pokazano, że pochodna kierunkowa rozwiązania optymalnego może być wyznaczona jako rozwiązanie pomocniczego, liniowo-kwadratowego zadania sterowania optymalnego. Własność ta ma charakter ogólny i odnosi się do bardzo szerokiej klasy zadań sterowania optymalnego. W szczególności, wynik ten pozwolił na przeprowadzenie analizy wrażliwości dla szeregu zadań sterowania optymalnego układów opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi różnych typów [BnOS85, LaS91, RS91].

Kontynuując tę tematykę, w latach 90-tych prowadzono badania nad zbiorami posiadającymi własność wielościenności oraz postaciami stożków stycznych do tych zbiorów [RS93a, RS93b, RS00]. Prace te dotyczyły zbiorów wypukłych w przestrzeniach Sobolewa, Lizorkina-Triebela i Besova. Korzystając z zaawansowanego aparatu teorii potencjału, w tym także potencjału nieliniowego, uzyskano pełną charakteryzację stożków stycznych. Wyniki te są nowatorskie w skali światowej i mogą znaleźć ważne zastosowania w analizie wrażliwości dla zadań optymalizacji z różnymi ograniczeniami typu nierównościowego.

Prekursorski charakter mają wyniki dotyczące wrażliwości dla zagadnień kontaktowych i sprężysto-plastycznych w obszarach ze szczelinami. Wykorzystując oryginalne modele matematyczne takich zagadnień, zawarte w monografii [KhS97], w pracach [KhS99, KS00, HKS01, KhOS02] badano problemy wrażliwości w przypadku kontaktu bez tarcia na szczelinie. Uzyskano rozszerzenie tzw. *kryterium Griffitha* dla szczelin z warunkami nieliniowego kontaktu, co prowadzi do nowych interpretacji mechanicznych. Wyniki, znane dotychczas w mechanice, zakładały liniowe warunki brzegowe na szczelinie, które nie opisują adekwatnie kontaktu pomiędzy brzegami szczeliny.

Z punktu widzenia matematycznego, badanie wrażliwości dla szczelin polega na wyznaczeniu pierwszej pochodnej energii sprężystej, związanej z rozważanym zadaniem, względem zaburzeń kształtu brzegu szczeliny. Jest to więc problem bardzo podobny do badania wrażliwości optymalnej wartości funkcjonału jakości w zadaniach optymalizacji. Zasadnicza różnica polega na tym, że ze szczeliną związana jest osobliwość rozwiązań równań cząstkowych i wynik analizy wrażliwości wymaga albo precyzyjnej znajomości takiej osobliwości albo stosowania opisu w postaci całek niezależnych od drogi całkowania.

Uzyskane wyniki mogą być wykorzystywane do dalszych, ważnych z punktu widzenia praktycznego, badań nad identyfikacją szczelin, modelowaniem ich rozwoju, a także optymalizacją kształtu w obszarze ze szczelinami. Problemy te wiążą się ściśle z analizą wrażliwości pierwszego i drugiego rzędu dla energii sprężystej. Wymaga to w szczególności rozszerzenia klasycznej teorii optymalizacji kształtu na obszary ze szczelinami. Uzyskano oryginalne wyniki dotyczące pochodnych kierunkowych funkcjonałów jakości w takich obszarach [FS00]. Stanowią one podstawę do dalszych prac nad wyznaczeniem drugiej pochodnej energii ze względu na kształt szczeliny, przy założeniu kontaktu pomiędzy brzegami szczeliny.

Podjęto również tematykę *dobrego postawienia* (well-posedness) abstrakcyjnych zadań optymalizacji warunkowej. Tematyka ta ma istotne znaczenie przy badaniu zbieżności metod obliczeniowych optymalizacji. W pracach [Bed82, BP92a, BP92b] zbadano związki pomiędzy różnymi uogólnieniami pojęcia dobrego postawienia zadania. Udowodniono równoważność dobrego postawienia w sensie Tichonowa (zbieżność ciągów minimalizujących) i w sensie Hadamarda (ciągłość rozwiązań ze względu na zaburzenia danych).

1.3. Stabilność parametrycznych problemów optymalizacji wektorowej

W dziedzinie optymalizacji wektorowej, gdzie optymalizacji podlega nie funkcjonał lecz operator przyjmujący wartości w pewnej przestrzeni częściowo uporządkowanej, zwanej przestrzenią ocen, badania stabilności i/lub wrażliwości są znacznie trudniejsze i mniej zaawansowane niż w przypadku optymalizacji skalarnej. Zostały one rozpoczęte stosunkowo niedawno i wiele problemów pozostaje otwartych. Tematyka badań prowadzonych w Instytucie koncentrowała się wokół następujących zagadnień:

- **Pojęcie dobrego postawienia zadania dla problemów optymalizacji wektorowej**

Wprowadzono nowe podejście do badania dobrego postawienia zadania wykorzystujące własności *epsilon*-rozwiązań problemów wektorowych. Dla problemów dobrze postawionych uzyskano oryginalne wyniki dotyczące stabilności rozwiązań w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych [Bed86, Bed94, Bed96].

- **Stabilność punktów minimalnych**

Podano warunki dostateczne ciągłości punktów minimalnych (w sensie odwzorowań wielowartościowych) w przestrzeniach liniowo topologicznych bez założenia zwartości zbioru dopuszczalnego. W ten sposób uogólniono istniejące wyniki oraz poszerzono klasę zastosowań, szczególnie jeśli chodzi o przestrzenie nieskończenie wymiarowe. Badania te wymagały zdefiniowania nowych pojęć właściwej minimalności oraz wzmocnionej własności dominacji. Wprowadzono pojęcie punktu ściśle minimalnego [Bed01], które scharakteryzowane zostało za pomocą ciągłości przekrojów zbioru względem stożka i znalazło dalsze zastosowania przy badaniu spójności zbioru punktów minimalnych. Ponadto wprowadzono własność zawierania [Bed86], która dla szerokiej klasy problemów, stanowi wzmocnienie klasycznej własności dominacji. Podane charakteryzacje pokazują, że własność zawierania może być uważana za wektorowy odpowiednik pojęcia silnego minimum występującego w optymalizacji skalarnej [Bed95, Bed96, Bed01].

- **Ogólne aspekty teorii optymalizacji wektorowej**

Rozważano jeden z podstawowych problemów optymalizacji wektorowej, jakim jest gęstość punktów właściwie minimalnych w zbiorze punktów minimalnych. Podano warunki gęstości punktów będących wynikiem skalaryzacji oraz punktów właściwie efektywnych w sensie Heniga w zbiorze punktów minimalnych, dla szerokiej klasy stożków, których wierzchołki są punktami ciągłości (PC points). Wynik ten stanowi uogólnienie wielu znanych twierdzeń [BS98a, BS99]. W celu badania wrażliwości w optymalizacji wektorowej zajmowano się problemami różniczkowania odwzorowań wielowartościowych. Wprowadzone pojęcie *epi*-pochodnej odwzorowania wielowartościowego, które pozwoliło uzyskać nowe warunki optymalności i kryteria wrażliwości w optymalizacji wektorowej [BS98b].

- **Lipschitzowska i hölderowska ciągłość punktów minimalnych**

Uzyskane w tej dziedzinie wyniki są całkowicie oryginalne zarówno w odniesieniu do zadań programowania wielokryterialnego jak i ogólnych problemów optymalizacji wektorowej. Dla ich sformułowania zdefiniowany został rząd zawierania [Bed02]. Rząd zawierania jest funkcją rzeczywistą jednej zmiennej rzeczywistej i jest miarą dominacji oraz odstępu od minimalności jako funkcji odległości od zbioru punktów minimalnych. Własności tej funkcji wykazują wiele analogii z własnościami takich funkcji, znanych w analizie funkcjonalnej i optymalizacji skalarnej, jako moduł jednostajnej wypukłości czy funkcja radialnej regularyzacji. Podstawowym wymaganiem, jakie musi spełniać rząd zawierania dla zapewnienia hölderowskiej ciągłości punktów minimalnych jest dostatecznie szybki wzrost dla argumentów bliskich zera. W przypadku, gdy wzrost ten jest szybszy niż, np. liniowy, a zaburzenia problemu są lipschitzowskie, otrzymujemy lipschitzowość górną punktów minimalnych. Uzyskane wyniki nie wymagają niepustości wnętrza stożka definiującego porządek [Bed00, Bed02].

1.4. Analiza wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej

Ze względu na specyfikę zadań optymalizacji dyskretnej, metodologia stosowana przy badaniu zależności rozwiązań tych zadań od parametru znacznie odbiega od metodologii wykorzystywanej w podobnej analizie dla układów ciągłych. W miejsce analizy ciągłości lub różniczkowalności odpowiednich funkcji, szczególną rolę odgrywają tu badania obszaru danych, w których ustalone rozwiązanie pozostaje optymalne. W literaturze dotyczącej optymalizacji dyskretnej, badania takie noszą nazwę *analizy wrażliwości.*

Najwcześniejsze prace tej dziedziny pojawiły się zw literaturze światowej w połowie lat 70-tych. Do tych prekursorskich prac należał artykuł [Lib77a], gdzie po raz pierwszy sformułowano problem wyznaczania obszaru niewrażliwości rozwiązania optymalnego dla linowego zadania programowania całkowitoliczbowego. Obszar taki jest rozumiany jako maksymalny podzbiór danych, dla których rozwiązanie nie ulega zmianie.

W pracach [Lib77a] i [Lib77b] podano opis obszaru niewrażliwości dla zadania maksymalnego skojarzenia w grafie oraz dla całkowitoliczbowego zadania załadunku, a w pracy [Lib91b] przeprowadzono pełną analizę wrażliwości dla rozwiązania zadania wyznaczania bazy o minimalnej wadze. W pracach [Lib91a, Lib93, LPSV98] zbadano różne aspekty analizy wrażliwości dla symetrycznego zagadnienia komiwojażera. Uzyskano m.in. przybliżone opisy podzbiorów obszarów niewrażliwości, wyznaczono tzw. *promienie stabilności rozwiązań optymalnych* oraz oszacowano tolerancję wag krawędzi grafu, ze względu na dane rozwiązanie. Zadanie komiwojażera pozostaje jednym z nielicznych problemów silnie NP-trudnych, dla których istnieją w literaturze tego typu rezultaty. Rozprawa [Lib93] stanowi jedyną polskojęzyczną monografię poświeconą analizie wrażliwości dla zadań optymalizacji dyskretnej.

Bliskie analizie wrażliwości są badania strategii postępowania w przypadku zadań z niedokładnie określonymi danymi. Prace [Lib80] i [Lib81] należą do najwcześniejszych w literaturze, w których podano metody wyznaczania tzw. *rozwiązań odpornych* dla zadań optymalizacji dyskretnej. W pracach [Lib99, Lib00a, Lib00b] zaproponowano metody badania jakości rozwiązań dopuszczalnych optymalizacji dyskretnej, w zależności od zaburzeń danych. Podano sposoby wyznaczania błędów optymalności ustalonego rozwiązania dopuszczalnego jako funkcji normy zaburzeń.

2. Optymalizacja kształtu układów mechanicznych

Zachowanie się obiektów fizycznych oraz przebieg wielu zjawisk opisywane są równaniami różniczkowymi cząstkowymi (RRC). Dotyczy to na przykład wszystkich sytuacji, gdy mamy do czynienia z przepływami cieczy, rozchodzeniem się fal lub ciepła oraz odpowiedzią układu sprężystego na zadane wymuszenia. Na rozwiązanie RRC można wpływać poprzez zmianę prawej strony równania lub układu równań, warunków brzegowych oraz modyfikację obszaru, w którym te równania są określone. Tym ostatnim przypadkiem zajmuje się dziedzina *optymalizacji kształtu.*

Optymalizacja kształtu stanowi ważny etap w projektowaniu i konstrukcji obiektów technicznych. Dla przykładu część samolotowa lub samochodowa musi spełniać ścisłe wymagania dotyczące wytrzymałości i zachowania się pod obciążeniem, a jednocześnie możliwie mało ważyć. W języku sformalizowanym zadanie optymalizacji kształtu polega w tym przypadku na znalezieniu geometrii struktury, która minimalizuje zadany funkcjonał jakości (tutaj objętość), spełniając jednocześnie pewien zbiór warunków, dotyczących np. minimalnej grubości (ograniczenia geometryczne), naprężeń i przemieszczeń (reprezentowanych ograniczeniami funkcjonalnymi).

Przez *geometrię struktury* rozumie się tu zajmowany przez nią obszar w przestrzeni. W trakcie optymalizacji obszar ten jest modyfikowany, przy czym rozróżniamy dwa możliwe przypadki:

- *Topologia obszaru jest ustalona*, np. jest to być zbiór jednospójny, co oznacza, że istnieje ciągłe odwzorowanie pomiędzy wszystkimi obszarami dopuszczalnymi. Taką optymalizacją zajmuje się *klasyczna optymalizacja kształtu.*
- *Topologia obszaru może ulec zmianie*, np. w trakcie procesu optymalizacji pojawia się otwór lub zlanie się fragmentów brzegu. Nie ma w takim przypadku ciągłych przejść pomiędzy wszystkimi obszarami dopuszczalnymi i należy stosować odmienne metody, które stanowią domenę *optymalizacji topologicznej.*

Bardzo szczególne zadania optymalizacji kształtu rozwiązywano od dawna, jednak swój rozwój dziedzina ta zawdzięcza pojawieniu się możliwości efektywnego przybliżania rozwiązań RRC przy użyciu metod numerycznych i komputerów. Dotyczy to ostatnich 30 lat i przez większą część tego okresu biorą w nim udział pracownicy IBS PAN, a w szczególności A. Myśliński, J. Sokołowski i A. Żochowski.

2.1. Klasyczna optymalizacja kształtu

W obszarze tym należy wyróżnić kilka nurtów. Typowej analizy wrażliwości względem wariacji obszaru dotyczą publikacje J. Sokołowskiego ze współpracownikami poświęcone równaniom eliptycznym, dla przykładu [SoZol85, BnS95, Sok97]. Ostatnim wynikiem jest tutaj praca [BuHSZ01], formułująca bardzo ogólne warunki ciągłej zależności rozwiązań układu równań teorii sprężystości od zaburzeń brzegu dziedziny określoności. Podobne problemy, ale dla równań typu parabolicznego, rozpatrywane są w [Sok88a, GaS92, HS94]. Duża część cytowanych wyników podsumowana została w monografii [SoZol92], w której podano ogólną metodę badania wrażliwości ze względu na kształt obszaru całkowania dla wszystkich typów równań, w oparciu o podejście wykorzystujące pole prędkości oraz pochodną kształtu i pochodną materialną rozwiązania. Oryginalnym wkładem tej książki jest zastosowanie powyższej metodologii do nierówności wariacyjnych. Monografia ta jest dotąd jedynym na świecie źródłem, zawierającym wyczerpujący opis wyników dotyczących podstaw klasycznej optymalizacji kształtu.

Tego samego nurtu dotyczą prace A. Żochowskiego [ŻochM83, ZM84, Żoch88, Żoch92a] wprowadzające podejście oparte na tzw. *transformacji harmonicznej*. Zostały one podsumowane w części monografii [Żoch92b] oraz pracy [Żoch98a]. Podejście to umożliwia traktowanie w jednolity sposób zarówno problemów posiadających rozwiązania regularne, jak i zadań z osobliwościami. Ponadto jest ono dogodne w implementacji numerycznej ze względu na dużą stabilność i fakt, że definiuje jednocześnie wariację brzegu oraz wynikającą z niej zmianę dyskretyzacji (triangulacji) obszaru.

Przy okazji realizacji algorytmów tworzących metodę transformacji harmonicznej powstało szereg prac dotyczących metod numerycznych związanych z generowaniem triangulacji [ŻochH89] oraz podwyższaniem dokładności rozwiązań dla zadań z osobliwościami [Żoch96a, Żoch96b, Żoch97].

Następnym nurtem w obszarze klasycznej optymalizacji kształtu są prace A. Myślińskiego związane z problemami nieróżniczkowalnymi i kontaktowymi. Zadania nieróżniczkowalne dotyczą problemów z punktowymi ograniczeniami na stan (np. na maksymalne ugięcie płyty) oraz problemów wrażliwości wartości własnych operatorów eliptycznych na zmianę parametrów (drgania płyty). Do tematyki tej należą prace [MysS85, Mys85, Mys90]. A. Myśliński zajmował się również analizą wrażliwości dla problemów kontaktowych oraz problemów opisywanych nieliniowymi równaniami teorii termosprężystości [Mys94, Mys96b, Mys97, MysPR98, Mys00]. Podstawowym stosowanym tu podejściem była metoda obszarów fikcyjnych. Również tu, przy okazji konstrukcji algorytmów numerycznych, opracowano we współpracy z A. Żochowskim pewne nowe podejścia [ŻochMy91, MysZ00].

Ostatnim nurtem wartym wymienienia są prace J. Sokołowskiego i jego współpracowników zawierające oryginalne wyniki modelowania szczelin występujących w ciele stałym, które zostały podsumowane w monografii [KhS97]. Są one kontynuowane w pracach [KhS99, KS01, HKS01, KhOS02). Badania te dotyczą wpływu wzrostu długości szczelin na energię sprężystą. Oryginalność wyników polega na tym, że uwzględniono po raz pierwszy nieliniowe warunki kontaktu pomiędzy brzegami szczeliny, co umożliwia fizycznie adekwatny opis zjawiska. Rozszerzono klasyczną optymalizację kształtu na obszar ze szczelinami [FS00], co wymagało zastosowania specjalnych metod ze względu na osobliwości rozwiązań.

2.2. Optymalizacja topologiczna

Na szczególną uwagę zasługują prace J. Sokołowskiego i A. Żochowskiego dotyczące optymalizacji topologicznej [SZ99a, SZ99b, SZ99c, SZ01a, SZ01b]. Oparte są one na oryginalnym, wprowadzonym przez autorów, pojęciu *pochodnej topologicznej*. Stosuje się w nich analizę asymptotyczną rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych ze względu na mały parametr, opisujący zaburzenie geometrii obszaru całkowania, zmieniające jego topologię (np. promień pojawiającego się otworu). Pierwszy składnik asymptotyki można utożsamiać z pochodną topologiczną. Istotną częścią uzyskanego wyniku jest podanie analitycznych wzorów wyrażających pochodną topologiczną ogólnych całkowych funkcjonałów jakości, dla równań i układów eliptycznych, za pośrednictwem stanu i stanu sprzężonego. Pozwala to na łatwe obliczanie pochodnej i jej efektywne wykorzystanie w obliczeniach numerycznych. Z punktu widzenia teorii optymalizacji kształtu, znajomość pochodnej topologicznej umożliwia sformułowanie nowych warunków koniecznych optymalności. W klasycznej teorii warunki takie uwzględniają tylko wariację brzegu obszaru. Nowe warunki dotyczące także jego wnętrza są istotnie silniejsze.

Pochodna topologiczna pozwala w efektywny sposób oceniać wpływ istnienia małych pustych obszarów ciała sprężystego lub przewodzącego. Z tego względu podejście to może znajdować zastosowanie w zadaniach odwrotnych (identyfikacji), np. służąc do szybkiego generowania danych treningowych dla sieci neuronowych lub oceny rozwiązań w algorytmach genetycznych.

Opisane powyżej metody są już wykorzystywane w zagadnieniach numerycznego rozwiązywania zadań optymalizacji kształtu i identyfikacji.

3. Metody obliczeniowe optymalizacji nieróżniczkowalnej i programowania wielkiej skali

Wiele problemów sterowania i podejmowania decyzji prowadzi do zadań optymalizacji nieróżniczkowalnej, w których występują funkcje nie posiadające ciągłych pochodnych cząstkowych. Na przykład, zastosowanie teorii dualności i technik dekompozycji do sterowania złożonych systemów generuje podproblemy koordynacji w postaci zadań optymalizacji niegładkiej. Zadania tego typu pojawiają się też przy rozwiązywaniu trudnych problemów programowania dyskretnego i stochastycznego. Innymi przykładami zastosowań są: optymalizacja kształtu konstrukcji mechanicznych, sterowanie układami o parametrach rozłożonych ze swobodną granicą, poszukiwanie punktów równowagi, rozwiązywanie nierówności wariacyjnych itp.

Ogólne metody minimalizacji funkcji lokalnie lipschitzowskich wymagają jedynie wyznaczania wartości funkcji celu i ograniczeń oraz ich subgradientów (uogólnionych gradientów) w zadanych punktach próbnych. Metody te są rozwijane na świecie od połowy lat sześćdziesiątych. Początkowe badania koncentrowały się na prostych algorytmach subgradientowych. W połowie lat 70-tych wprowadzono metody spadku dla zadań niegładkich. Ostatnie dwie dekady były okresem intensywnego rozwoju metod optymalizacji nieróżniczkowalnej.

Wkład pracowników Instytutu do rozwoju tych badań był znaczący w skali światowej. Można tu wyróżnić następujące kierunki:

3.1. Ogólne metody spadku dla zadań optymalizacji nieróżniczkowalnej

Od początku lat 80-tych badano metody spadku dla zadań optymalizacji z funkcjami lokalnie lipschitzowskimi. Wprowadzono algorytmy spadku z selekcją i agregacją subgradientów [Kiw83, Kiw85c] oraz opracowano ogólną teorię zbieżności takich metod [Kiw85d]. Prace te odkryły podstawowe mechanizmy, na których oprzeć można konstrukcję skutecznych algorytmów rozwiązywania zadań niegładkich; były one wykorzystywane przez licznych uczonych rozwijających te idee i ich zastosowania. W latach 90-tych przedstawiono ulepszone metody dla zadań niewypukłych [Kiw96d], rozszerzając na przypadek nieróżniczkowalny techniki ograniczonego kroku oraz Levenberga-Marquardta. Podano pierwsze oszacowanie efektywności metod spadku dla zadań wypukłych [Kiw00].

3.2. Metody spadku dla zadań optymalizacji nieróżniczkowalnej o szczególnej strukturze

Wprowadzono i przeanalizowano algorytmy dla zadań o specyficznych strukturach występujących w wielu zastosowaniach. Obejmują one m.in. optymalizację wartości osobliwych układów sterowania [Kiw86a], uwzględnienie ograniczeń metodą dokładnej funkcji kary [Kiw85b, Kiw91a], zadania wielokryterialne [Kiw85a], dekompozycję zadań wielkiej skali [Kiw87a], zadania optymalizacji quasi-różniczkowalnej [Kiw84, Kiw86b, Kiw88b], oraz zadania ciągłego minimaksu [Kiw87b]. Część tych badań podsumowano w monografii [Kiw88a]. Wprowadzono także metodę z przybliżonymi rozwiązaniami problemów pomocniczych dla zadań wypukłych wielkiej skali [Kiw95a], specjalne metody dla relaksacji Lagrange'a zadań optymalizacji dyskretnej [GrKKN+01, FK00], oraz metodę dla wieloetapowych zadań programowania stochastycznego z prawdopodobieństwami zależnymi od decyzji poprzedniego etapu [KRR99].

3.3. Przyspieszenie zbieżności metod spadku w optymalizacji nieróżniczkowalnej

Wprowadzono techniki przyspieszania zbieżności metod spadku dla optymalizacji nieróżniczkowalnej, wykorzystujące idee metod elipsoidalnych [Kiw89b], informacji różniczkowej drugiego rzędu [Kiw90], oraz metody Newtona dla płaszczyzn odcinających [Kiw91b].

3.4. Algorytmy programowania kwadratowego dla metod optymalizacji nieróżniczkowalnej

Zaproponowano szereg wyspecjalizowanych algorytmów programowania kwadratowego, mających kluczowe znaczenie dla efektywnej implementacji metod spadku optymalizacji nieróżniczkowalnej. Obejmują one algorytmy z faktoryzacją Choleskiego [Kiw86c] i faktoryzacją ortogonalną [Kiw89a]. Wprowadzony później algorytm z oszczędną faktoryzacją Choleskiego [Kiw94] umożliwia stabilne numerycznie implementacje dla zadań wielkiej skali. Wykorzystanie analizy wrażliwości regularyzowanych zadań programowania kawałkami liniowego stworzyło jednolite podejście [Kiw95c] do rozwiązywania zadań generacji kierunku w metodach proksymalnych i poziomicowych optymalizacji nieróżniczkowalnej.

3.5. Metody poziomicowe optymalizacji nieróżniczkowalnej

Wprowadzono implementowalne (czyli wymagające ograniczonej pamięci i nakładu obliczeń w pojedynczej iteracji) metody poziomicowe dla zadań optymalizacji wypukłej, rozwiązywania nierówności wariacyjnych i poszukiwania punktów siodłowych [Kiw95d].

Zaproponowano jednolite podejście do analizy efektywności i implementacji subgradientowych metod z rzutami na przybliżenia zbiorów poziomicowych funkcji celu [Kiw96b, Kiw96c] obejmujące wykorzystanie obliczeń równoległych w przypadku zadań wielkiej skali. Podejście to wykorzystuje idee metod blokowych z ograniczeniami zastępczymi (zagregowanymi) dla wypukłych problemów dopuszczalności [Kiw95b, KLo97].

Wprowadzono globalnie zbieżne poziomicowe metody spadku dla zadań minimalizacji wypukłej z ograniczeniami liniowymi [BrKL95].

3.6. Metody płaszczyzn tnących w środkach analitycznych

Prowadzono prace nad wykorzystaniem metod punktu wewnętrznego Karmarkara w optymalizacji nieróżniczkowalnej. Opracowano wariant metody środków analitycznych dla wypukłych zadań nieróżniczkowalnych [AnK96]. Wykazano zbieżność globalną i podano oszacowanie efektywności takich metod [Kiw96a, Kiw97a].

3.7. Metody z regularyzacją i rzutami Bregmana

Wprowadzono szereg efektywnych algorytmów z regularyzacją i rzutami Bregmana do rozwiązywania wypukłych zadań niegładkich. Algorytmy te opierają się na tzw. *uogólnionych funkcjach Bregmana* [Kiw97b], generujących uogólnione odległości i odpowiadające im rzuty Bregmana, które uwzględniają w naturalny sposób typowe ograniczenia zadania. Zbadano metody proksymalne z regularyzacją Bregmana [Kiw97d, Kiw99], otrzymując w szczególności niekwadratowe metody mnożników dla zadań programowania nieliniowego, oraz metody subgradientowe z nieortogonalnymi rzutami na przybliżenia zbiorów poziomicowych funkcji celu [Kiw98b]. Do rozwiązywania pojawiających się przy tym podproblemów ściśle wypukłych z ograniczeniami liniowymi zaproponowano specjalne metody relaksacyjne [Kiw97b, Kiw98a], przydatne dla zadań wielkiej skali.

3.8. Skuteczne algorytmy subgradientowe

Wprowadzono subgradientowe algorytmy rzutowe typu *ballstep* [GoK99, KLL99] do rozwiązywania wypukłych zadań niegładkich. Są to pierwsze warianty metod subgradientowych zarówno zbieżne teoretycznie przy minimalnych założeniach, jak i skuteczne w praktyce. Podano oszacowania efektywności dla wielu wersji metod, w tym dla wariantów uzyskujących przyspieszenie zbieżności dzięki technikom takich rzutów [Kiw97c]. Zbadano zbieżność i efektywność ogólnej metody subgradientowej [Kiw01] dla minimalizacji funkcji quasi-wypukłej na zbiorze wypukłym w przestrzeni Hilberta. Uogólniono i rozszerzono przy tym szereg wyników o zbieżności słabej lub silnej generowanego ciągu przybliżeń do uogólnionego zbioru rozwiązań nawet wtedy, gdy rozwiązania klasyczne nie istnieją.

* * *

Opracowane w Instytucie programy optymalizacji są używane w kilkudziesięciu krajowych i zagranicznych ośrodkach naukowych.

Literatura

[AM93] W. Alt, K. Malanowski, *The Lagrange-Newton method for nonlinear optimal control problems,* Comput. Optim. Appl., **2** (1993), ss. 77-100.

[AM95] W. Alt, K. Malanowski, *The Lagrange-Newton method for state constrained optimal control problems,* Comput. Optim. Appl., **4** (1995), ss. 217-239.

[AnK96] A. Altman, K. C. Kiwiel, *A note on some analytic center cutting plane methods for convex feasibility and minimization problems,* Comput. Optim. Appl., **5** (1996), ss. 175-180.

[Bed82] E. Bednarczuk, *On upper semicontinuity of global minima in constrained optimization problems,* J. Math. Anal. Appl., **86** (1982), ss. 309-318.

[Bed87] E. Bednarczuk, *Well-posedness in vector optimization problems,* W: Recent Advances and Historical Development of Vector Optimization, W. Krabs, J. Jahn, eds., Springer-Verlag, Berlin 1987, ss.51-62.

[Bed94] E. Bednarczuk, *An approach to well-posedness in vector optimization: consequences to stability,* Control and Cybernetics, **23** (1994), ss. 107-122.

[Bed95] E. Bednarczuk, *Berge maximum theorems for vector optimization problems*, Optimization, **32** (1995), ss. 375-384.

[Bed96] E. Bednarczuk, *Some stability results for vector optimization problems in topological vector spaces,* W: Proceedings of The First World Congress of Nonlinear Analysts, Tampa Florida, August 1992, Walter de Gruyter, Berlin 1996, ss. 2371-2382.

[Bed00] E. Bednarczuk, *On lower Lipschitz continuity of minimal points,* Discussiones Mathem., **20** (2000), ss. 245-255.

[Bed01] E. Bednarczuk, *A note on lower semicontinuity of minimal points,* Nonlinear Analysis, Theory and Applications (w druku).

[Bed02] E. Bednarczuk, *Hölder continuity of minimal points,* J. Convex Analysis (w druku).

[BP92a] E. Bednarczuk, J.-P. Penot, *On the positions of the notions of well-posed minimization problems,* Bolletino della Unione Matematica Italiana, **7** (1992), ss. 665-683.

[BP92b] E. Bednarczuk, J.-P. Penot, *Metrically well-posed minimization problems*, Appl. Math. Optim., **26** (1992), ss. 273-285.

[BS98a] E. Bednarczuk, W. Song, *PC points and their application to vector optimization*, Pliska Stud. Math. Bulg., **12** (1998), ss. 21-30

[BS98b] E. Bednarczuk, W. Song, *Contingent epiderivative and its applications to set-valued optimization,* Control and Cybernetics, **27** (1998), ss. 375-386.

[BS99] E. Bednarczuk, W. Song, *Some more density results for proper efficiencies*, J. Math. Anal. Appl., **231** (1999), ss. 345-354.

[BnOS85] M. P. Bendsoe, N. Olhoff, J. Sokołowski, *Sensitivity analysis of problems of elasticity with unilateral constraints*, J. Struct. Mech., **2** (1985), ss. 201-222.

[BnS95] M.P. Bendsoe, J. Sokołowski, *Shape sensitivity analysis of optimal compliance functionals*, Mechanics of Structures and Machines, **31** (1995), ss. 35-58.

[BrKL95] U. Brännlund, K. C. Kiwiel, P. O. Lindberg, *A descent proximal level bundle method for convex nondifferentiable optimization*, Oper. Res. Lett., **17** (1995), ss. 121-126.

[BuHSZ01] D. Bucur, A. Henrot, J. Sokołowski, A. Żochowski, *Continuity of the elasticity system solutions with respect to the geometrical domain variations*, Adv. Math. Sci. and Appl., **11** (2001), ss. 57-73.

[DHM00] A.L. Dontchev, W.W. Hager, K. Malanowski, *Convergence rate of Euler approximation for a state and control constrained optimal control problem*, Numer. Funct. Anal. Optim., **21** (2000), ss. 653-682.

[DM99] A.L. Dontchev, K. Malanowski, *A characterization of Lipschitzian stability in optimal control*, W: Calculus of Variations and Optimal Control, A. Ioffe, S. Reich, I. Shafrir, eds., CRC Research Notes in Mathematics 411, Chapmann & Hall, Boca Raton 1999, ss. 62-76.

[DW84] K. Dudziński, S. Walukiewicz, *A fast algorithm for solving linear multiple-choice knapsack problem*, Operations Research Letters, **3** (1984), ss. 205-209.

[DW87] K. Dudziński, S. Walukiewicz, *Exact methods for the knapsack problem and its generalizations*, European J. Oper. Research, **28** (1987), ss. 3-21.

[FK00] S. Feltenmark, K. C. Kiwiel, *Dual applications of proximal bundle methods, including Lagrangian relaxation of nonconvex problems*, SIAM J. Optim., **10** (2000), ss. 697-721.

[FS00] G. Fremiot, J. Sokołowski, *Structure de la dérivée eulérienne d'une fonctionnelle de forme différentiable dans le cas d'un ouvert fissuré*, Siberian Mathematical J., **41** (2000), ss. 1181-1202.

[GaS92] D. Gątarek, J. Sokołowski, *Differential stability of solutions to optimal control problems for systems described by parabolic stochastic PDE's*, Arch. of Control Sciences, (1992), ss. 43-54.

[GoK99] J.-L. Goffin, K. C. Kiwiel, *Convergence of a simple subgradient level method*, Math. Programming, **85** (1999), ss. 207-211.

[GrKKN+01] N. Gröwe-Kuska, K. C. Kiwiel, M. P. Nowak, W. Römisch, I. Wegner, *Power management in a hydro-thermal system under uncertainty by Lagrangian relaxation*, W: Decision Making Under Uncertainty: Energy and Environmental Models, F. Auzerais, R. Burridge, C. Greengard, A. Ruszczyński, eds., IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag, New York 2001 (w druku).

[Gut96a] J. Gutenbaum, *Modelowanie matematyczne i optymalizacja w IBS PAN*, Biuletyn IBS PAN, **4** (1996), ss. 39-61.

[Gut96b] J. Gutenbaum, *Methods for optimal control of multistage processes*, Arch. of Control Sciences, **5** (1996), ss. 173-183.

[HKS01] D. Hoemberg, A. M. Khludnev, J. Sokołowski, *On an equilibrium problem for a cracked body with electrothermoconductivity*, Interfaces and Free Boundaries, **3** (2001), ss.129-142

[HS94] K.-H. Hoffmann, J. Sokołowski, *Interface optimization problems for parabolic equations*, Control and Cybernetics, (1994), ss. 445-452.

[Kal94] I. Kaliszewski, Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique, Kluver Academic Publ., Dordrecht 1994.

[KhOS02] A. M. Khludnev, K. Ohtsuka, J. Sokołowski, *On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions*, Quarterly of Appl. Math. (w druku).

[KhS97] A. M. Khludnev, J. Sokołowski, Modelling and Control in Solid Mechanics, International Series of Numerical Mathematics Vol.122, Birkhäuser-Verlag, Basel 1997.

[KhS99] A. M. Khludnev, J. Sokołowski, *Griffith formula and Rice integral for elliptic equations with unilateral conditions in nonsmooth domains*, European J. Appl. Math., **10** (1999), ss. 379-394.

[KhS00] A. M. Khludnev, J. Sokołowski, *Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks*, European J. of Mechanics, A. Solids, **19** (2000), ss. 105-120.

[Kiw83] K. C. Kiwiel, *An aggregate subgradient method for nonsmooth convex minimization*, Math. Programming, **27** (1983), ss. 320-341.

[Kiw84] K. C. Kiwiel, *A quadratic approximation method for minimizing a class of quasidifferentiable functions*, Numer. Math., **45** (1984), ss. 411-430.

[Kiw85a] K. C. Kiwiel, *A descent method for nonsmooth convex multiobjective minimization problems*, Large Scale Systems, **8** (1985), ss. 119-129.

[Kiw85b] K. C. Kiwiel, *An exact penalty function method for nonsmooth constrained convex minimization problems*, IMA J. Numer. Anal., **5** (1985), ss. 111-119.

[Kiw85c] K. C. Kiwiel, *A linearization algorithm for nonsmooth minimization*, Math. Oper. Res., **10** (1985), ss. 185-194.

[Kiw85d] K. C. Kiwiel, Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization, Lecture Notes in Mathematics 1133, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[Kiw86a] K. C. Kiwiel, *A linearization algorithm for optimizing control systems subject to singular value inequalities*, IEEE Trans. Automat. Control, **AC-31** (1986), ss. 595-602.

[Kiw86b] K. C. Kiwiel, *A linearization method for minimizing certain quasidifferentiable functions*, Math. Programming Stud., **29** (1986), ss. 85-94.

[Kiw86c] K. C. Kiwiel, *A method for solving certain quadratic programming problems arising in nonsmooth optimization*, IMA J. Numer. Anal., **6** (1986), ss. 137-152.

[Kiw87a] K. C. Kiwiel, *A decomposition method of descent for minimizing a sum of convex functions*, J. Optim. Theory Appl., **52** (1987), ss. 255-271.

[Kiw87b] K. C. Kiwiel, *A direct method of linearizations for continuous minimax problems*, J. Optim. Theory Appl., **55** (1987), ss. 271-287.

[Kiw88a] K. C. Kiwiel, Niektóre metody obliczeniowe optymalizacji nieróżniczkowalnej, Ossolineum, Wrocław 1988, 136 s.

[Kiw88b] K. C. Kiwiel, *Descent methods for quasidifferentiable minimization*, Appl. Math. Optim., **18** (1988), ss. 163-180.

[Kiw89a] K. C. Kiwiel, *A dual method for certain positive semidefinite quadratic programming problems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **10** (1989), ss. 175-186.

[Kiw89b] K. C. Kiwiel, *An ellipsoid trust region bundle method for nonsmooth convex minimization*, SIAM J. Control Optim., **27** (1989), ss. 737-757.

[Kiw90] K. C. Kiwiel, *Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization*, Math. Programming, **46** (1990), ss. 105-122.

[Kiw91a] K. C. Kiwiel, *Exact penalty functions in proximal bundle methods for constrained convex nondifferentiable minimization*, Math. Programming, **52** (1991), ss. 285-302.

[Kiw91b] K. C. Kiwiel, *A tilted cutting plane proximal bundle method for convex nondifferentiable optimization*, Oper. Res. Lett., **10** (1991), ss. 75-81.

[Kiw94] K. C. Kiwiel, *A Cholesky dual method for proximal piecewise linear programming*, Numer. Math., **68** (1994), ss. 325-340.

[Kiw95a] K. C. Kiwiel, *Approximations in proximal bundle methods and decomposition of convex programs*, J. Optim. Theory Appl., **84** (1995), ss. 529-548.

[Kiw95b] K. C. Kiwiel, *Block-iterative surrogate projection methods for convex feasibility problems*, Linear Algebra Appl., **215** (1995), ss. 225-260.

[Kiw95c] K. C. Kiwiel, *Finding normal solutions in piecewise linear programming*, Appl. Math. Optim., **32** (1995), ss. 235-254.

[Kiw95d] K. C. Kiwiel, *Proximal level bundle methods for convex nondifferentiable optimization, saddle-point problems and variational inequalities*, Math. Programming, **69** (1995), ss. 89-109.

[Kiw96a] K. C. Kiwiel, *Complexity of some cutting plane methods that use analytic centers*, Math. Programming, **74** (1996), ss. 47-54.

[Kiw96b] K. C. Kiwiel, *The efficiency of subgradient projection methods for convex optimization, part I: General level methods*, SIAM J. Control Optim., **34** (1996), ss. 660-676.

[Kiw96c] K. C. Kiwiel, *The efficiency of subgradient projection methods for convex optimization, part II: Implementations and extensions*, SIAM J. Control Optim., **34** (1996), ss. 677-697.

[Kiw96d] K. C. Kiwiel, *Restricted step and Levenberg-Marquardt techniques in proximal bundle methods for nonconvex nondifferentiable optimization*, SIAM J. Optim., **6** (1996), ss. 227-249.

[Kiw97a] K. C. Kiwiel, *Efficiency of the analytic center cutting plane method for convex minimization*, SIAM J. Optim., **7** (1997), ss. 336-346.

[Kiw97b] K. C. Kiwiel, *Free-steering relaxation methods for problems with strictly convex costs and linear constraints*, Math. Oper. Res., **22** (1997), ss. 326-349.

[Kiw97c] K. C. Kiwiel, *Monotone Gram matrices and deepest surrogate inequalities in accelerated relaxation methods for convex feasibility problems*, Linear Algebra Appl., **252** (1997), ss. 27-33.

[Kiw97d] K. C. Kiwiel, *Proximal minimization methods with generalized Bregman functions*, SIAM J. Control Optim., **35** (1997), ss. 1142-1168.

[Kiw98a] K. C. Kiwiel, *Relaxation methods for strictly convex regularizations of piecewise linear programs*, Appl. Math. Optim., **38** (1998), ss. 239-259.

[Kiw98b] K. C. Kiwiel, *Subgradient method with entropic projections for convex nondifferentiable minimization*, J. Optim. Theory Appl., **96** (1998), ss.159-173.

[Kiw99] K. C. Kiwiel, *A bundle Bregman proximal method for convex nondifferentiable minimization*, Math. Programming, **85** (1999), ss. 241-258.

[Kiw00] K. C. Kiwiel, *Efficiency of proximal bundle methods*, J. Optim. Theory Appl., **104** (2000), ss. 589-603.

[Kiw01] K. C. Kiwiel, *Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization*, Math. Programming, **90** (2001), ss. 1-25.

[KLL99] K. C. Kiwiel, T. Larsson, P. O. Lindberg, *The efficiency of ballstep subgradient level methods for convex optimization*, Math. Oper. Res., **24** (1999), ss. 237-254.

[KLo97] K. C. Kiwiel, B. Łopuch, *Surrogate projection methods for finding fixed points of firmly nonexpansive mappings*, SIAM J. Optim., **7** (1997), ss. 1084-1102.

Prace z dziedziny optymalizacji

[KRR99] K. C. Kiwiel, C. H. Rosa, A. Ruszczyński, *Proximal decomposition via alternating linearization*, SIAM J. Optim., **9** (1999), ss. 668-689.

[LaS91] I. Lasiecka, J. Sokołowski, *Sensitivity analysis of constrained optimal control problem for wave equation*, SIAM J. Control Optim., **29** (1991), ss. 1128-1149.

[Lib77a] M. Libura, *Zagadnienia wrażliwości rozwiązań w programowaniu całkowitoliczbowym*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, **XXII** (1977), ss. 299-311.

[Lib77b] M. Libura, *Analiza wrażliwości rozwiązań całkowitoliczbowego zadania załadunku*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, **XXII** (1977), ss. 313-322.

[Lib80] M. Libura, *Integer programming problems with inexact objective function*, Control and Cybernetics, **9** (1980), ss. 189-202.

[Lib81] M. Libura, *Integer programming problems with inexact objective function*, Methods of Operations Research, **40** (1981), ss. 371-374.

[Lib91a] M. Libura, *Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems*, Discrete Applied Mathematics, **30** (1991), ss. 197-211.

[Lib91b] M. Libura, *Sensitivity analysis for minimum weight base of matroid*, Control and Cybernetics, **20** (1991), ss. 7-24.

[Lib93] M. Libura, Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej, Synpress, Warszawa 1993 (rozprawa habilitacyjna).

[Lib99] M. Libura, *On accuracy of solutions for combinatorial optimization problems with perturbed coefficients of the objective function*, Annals of Operations Research, **86** (1999), ss. 53-62.

[Lib00a] M. Libura, *On the accuracy function and the accuracy radius for combinatorial optimization problems*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences; Technical Sciences, **48** (2000), ss. 231-245.

[Lib00b] M. Libura, *Quality of solutions for perturbed combinatorial optimization problems*, Control and Cybernetics, **29** (2000), ss. 199-219.

[LPSV98] M. Libura, E. S. van der Poort, G. Sierksma, J. A. A. van der Veen, *Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions*, Discrete Applied Mathematics, **87** (1998), ss. 159-185.

[Mal87] K. Malanowski, Stability of Solutions to Convex Problems of Optimization, LNCIS, vol. 93, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[Mal92] K. Malanowski, *Second order conditions and constraint qualifications in stability and sensitivity analysis of solutions to optimization problems in Hilbert spaces*, Appl. Math. Optim., **25** (1992), ss. 51-79.

[Mal93] K. Malanowski, *Two-norm approach in stability and sensitivity analysis of optimization and optimal control problems*, Adv. Math. Sci. Appl., **2** (1993), ss. 397-443.

[Mal95] K. Malanowski, *Stability and sensitivity of solutions to nonlinear optimal control problems*, Appl. Math. Optim., **32** (1995), ss. 111-141.

[Mal01a] K. Malanowski, *Stability and Sensitivity analysis for optimal control problems with control-state constraints*, Dissertationes Mathematicae, **CCCXCIV** (2001), ss. 1-51.

[Mal01b] K. Malanowski, *Bouligand differentiability of solutions to parametric optimal control problems*, Numer. Funct. Anal. Optim., **22** (2001), ss. 973-990.

[MBM98] K. Malanowski, Ch. Büskens, H. Maurer, *Convergence of approximations to nonlinear optimal control problems*, W: Mathematical Programming with Data Perturbations, A. V. Fiacco, ed., Marcel-Dekker, New York 1998, ss. 253-284.

[Mys85] A. Myśliński, *Bimodal optimal design of vibrating plates using theory and methods of nondifferentiable optimization*, J. Optim. Theory Appl., **46** (1985), ss. 187-203.

[Mys90] A. Myśliński, *Minimax shape optimization problem for von Karman system*, Analysis and Optimation of Systems, A. Benssoussan, J. L. Lions, eds., Lecture Notes in Control and Information Sciences, **144**, Springer, 1990, ss. 164-173.

[Mys94] A. Myśliński, *Shape optimization of nonlinear contact problems with prescribed friction*, W: Lecture Notes in Control and Information Sciences, **197**, Springer , Berlin 1994, ss. 727-736.

[Mys96b] A. Myśliński, *Finite element computation: for optimal shape design of nonlinear contact problems*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, **87** (1996), ss. 345-346.

[Mys97] A. Myśliński, *Mixed finite element approach for shape optimal design of large displacement contact problems*, Computers and Structures, **64** (1997), ss. 595-602.

[Mys00] A. Myśliński, *Shape optimization for dynamic contact problems*, Discussiones Mathem., **20** (2000), ss. 79-91.

[MysPR98] A. Myśliński, J. Piekarski, B. Rousselet, *Design sensitivity for hyperelastic rod in large displacement with respect to its midcurve shape*, J. Optim. Theory Appl., **98** (1998), ss. 683-708.

[MysS85] A. Myśliński, J. Sokołowski, *Nondifferentiable optimization problems for elliptic systems*, SIAM J. Control Optim., **23** (1985), ss. 632-648.

[MysZ00] A. Myśliński, A. Żochowski, *Fictitions domain approach for numerical solution of elliptic systems*, Control and Cybernetics, **29** (2000), ss. 305-323.

[NRV83] Z. Nahorski, H. F. Ravn, R. V. V. Vidal, Optimization of Discrete Time Systems; The Upper Boundary Approach, LNCIS, vol.51 Springer-Verlag, Berlin 1983.

[Paw87] I. Pawłow, Analysis and Control of Evolution Multy-Phase Problems with Free Boundaries, Ossolineum, Wrocław 1987.

[RS91] M. Rao, J. Sokołowski, *Differential stability of solutions to parametric optimization problems*, Math. Methods in Appl. Sciences, **14** (1991), ss. 281-294.

[RS93a] M. Rao, J. Sokołowski, *Polyhedricity of convex sets in Sobolev space* $H_0^2(\Omega)$, Nagoya Math. J., **130** (1993), ss. 101-110.

[RS93b] M. Rao, J. Sokołowski, *Sensitivity analysis of unilateral problems in* $H_0^2(\Omega)$ *and applications*, Numer. Funct. Anal. Optim., **14** (1993), ss. 125-143.

[RS00] M. Rao, J. Sokołowski, *Non-linear balayage and applications*, Illinois J. Math, **44** (2000), ss. 310-328.

[Sok85] J. Sokołowski, *Differential stability of solutions to constrained optimization problems*, Appl. Math. Optim., **13** (1985), ss. 97-115.

[Sok87] J. Sokołowski, *Sensitivity analysis of control constrained optimal control problems for distributed parameter systems*, SIAM J. Control Optim., **25** (1987), ss. 1542-1556.

[Sok88a] J. Sokołowski, *Shape sensitivity analysis of boundary optimal control problems for parabolic systems*, SIAM J. Control Optim., **26** (1988), ss. 763-787.

[Sok97] J. Sokołowski, *Shape sensitivity analysis of thin shells*, W: Optimization Methods in Partial Differential Equations, S. Cox, I. Lasiecka, eds., Contemporary Mathematics, 209, AMS 1997, ss. 247-266.

[SoZol85] J. Sokołowski, J.P. Zolésio, *Derivée par rapport au domaine de la solution d´un probléme unilatéral*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, **301** (1985), ss. 103-106.

Prace z dziedziny optymalizacji

[SoZol92] J. Sokołowski, J.-P. Zolésio, Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis, Springer Series in Computational Mathematics Vol. 16, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[SZ99a] J. Sokołowski, A. Żochowski, *On topological derivative in shape optimization*, SIAM J. Control Optim., **37** (1999), ss. 1251-1272.

[SZ99b] J. Sokołowski, A. Żochowski, *Topological derivative for elliptic problems*, Inverse Problems, **15** (1999), ss. 123-134.

[SZ99c] J. Sokołowski, A. Żochowski, *Topological derivative for optimal control problems*, Control and Cybernetics, **28** (1999), ss. 611-626.

[SZ01a] J. Sokołowski, A. Żochowski, *Topological derivative of shape functionals for elasticity systems*, Mechanics of Structures and Machines, **29** (2001), ss. 333-351.

[SZ01b] J. Sokołowski, A. Żochowski, *On topological derivative in shape optimization*, W: Mathematical Aspects of Modelling Structure Formation Phenomena, Gakuto International Series Mathematical Sciences and Applications, 17, Tokyo, Japan (2001) (w druku).

[Szk94] K. Szkatuła, *On the growth of multi-constraint random knapsacks with various right-hand sides of the constraints*, European J. Oper. Research, **73** (1994), ss. 199-204.

[Szk99] K. Szkatuła, Analiza przypadku średniego w optymalizacji dyskretnej. Wielowymiarowe zadania załadunku oraz szeregowanie prac, IBS PAN, Warszawa 1999 (rozprawa habilitacyjna).

[Wal91] S. Walukiewicz, Integer Programming, PWN, Warszawa, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1991.

[Żoch88] A. Żochowski, *Optimal perforation design in 2-dimensional elasticity*, Mechanics of Structures and Machines, **16** (1988), ss. 17-33.

[Żoch92a] A. Żochowski, *Domain sensitivity for singular elliptic problems: harmonic transformation approach*, J. Optim. Theory Appl., **73** (1992), ss. 387-407.

[Żoch92b] A. Żochowski, Mathematical Problems in Shape Optimization and Shape Memory, Methoden und Verfahren der matematischen Physik, Band 38, Peter Lang Verlag, Frankfurt 1992.

[Żoch96a] A. Żochowski, *Special methods for shape optimization problems*, Control and Cybernetics, **25** (1996), ss. 1155-1163.

[Żoch96b] A. Żochowski, *A simple method for improving the accuracy and convergence of FEM computations*, Applied Math. and Computer Sci., **6** (1996), ss. 321-330.

[Żoch97] A. Żochowski, *Representation of infinite domains in FEM computations*, Computers and Structures, **63** (1997), ss. 889-897.

[Żoch98a] A. Żochowski, *Implementation of the harmonic transformation method in shape optimization*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **5** (1998), ss. 285-298.

[ŻochH89] A. Żochowski, P. Holnicki: *Interactive method of variational grid generation*, J. of Computational and Applied Math., **26** (1989), ss. 281-287.

[ŻochM83] A. Żochowski, K. Mizukami, *Minimum weight design with displacement constraints in 2-dimensional elasticity*, Computers and Structures, **17** (1983), ss. 365-369.

[ŻochM84] A. Żochowski, K. Mizukami, *A stress versus compliance constraint in a minimum weight design*, Computers and Structures, **18** (1984), ss. 9-13.

[ŻochMy91] A. Żochowski, A. Myśliński, *A numerical analysis of rolling contact problems using quasistatic variational formulation*, Computers and Structures, **40** (1991), ss. 1261-1266.

Straszak A., Nahorski A., Sikorski J. (red.) (1990): I Krajowa konferencja badań operacyjnych i systemowych, BOS`88, Książ 13-17 czerwca 1998, t. 1,2. PTBOiS-IBS PAN, Warszawa, 600 s.

Straszak A., Owsiński J. (1978): *Control theoretic approach to socio-economic systems. role and applicability.* IFAC Congress Helsinki 12-16 June 1978. PERGAMON PRESS, Oxford.

Straszak A., Stefański J., Ziółkowski A., Cichocki W. (1985): *Computer aided learning in a two-level economy with nonlinear economic regulators.* W: Artificial Intelligence in Economic and Management. IFAC Workshop, Zurich, March 1985.

Straubel R,. Studziński J. (2000): *Computer aided planning and operating of the water networks in Koenings-Wusterhausen and Rzeszów.* W: M. M. Sozański (red.): Water supply and water quality. Conference Proceedinds of IVth International conference, Kraków, 11-13.09.2000. PZIiTS, Kraków-Poznań, ss. 43-54, 7 poz. bibl.

Studziński J., Hryniewicz O., Kacprzyk J., Drelichowski L. (red.) (2000): Technologie informatyczne w zarządzaniu. Systemy wspomaganie decyzji. IBS PAN, Warszawa, Seria: Badania Systemowe, t. 26, 312 s.

Studziński J., Straubel R. (2000): *Problemy projektowania i wdrażania systemów informatycznych do modelowania, optymalizacji i sterowania komunalnymi sieciami wodociągowymi.* W: J. F. Lemański, J. Łomotowski, S. Zabawa (red.): Wspomaganie komputerowe w projektowaniu i eksploatacji systemów wodociągowych i kanalizacyjnych. Materiały IV Ogólnopolskiego Seminarium Naukowo-Szkoleniowego, Świnoujście-Kopenhaga, październik 2000, PZIiTS, Poznań, ss. 42-57, 7 poz. bibl.

Żochowski A., Ostrowski R. (1979): *Koncepcja zastosowania modelu w planowaniu rozwoju miasta.* W: Zastosowania analizy systemowej w modelowaniu rozwoju regionalnego, t. 1. Konferencja szkoleniowa. Jabłonna 11-16 września 1979. PWN, Warszawa-Łódź.

Skorowidz nazwisk

H

I

J

K

R

S

Ś

T

U

K. MAŃCZAK, red. – BADANIA SYSTEMOWE – XXV-lecie IBS PAN

ISBN 83-85847-63-4