POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semimarkowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 1

Łańcuchy Markowa o dyskretnej przestrzeni stanów

Łańcuchy Markowa są matematycznymi modelami procesów losowych, które ewoluując w czasie pamiętają najbliższą przeszłość. Jednorodne łańcuchy Markowa charakteryzują się ponadto tym, że ich rozkłady warunkowe są niezmiennicze względem czasu. Łańcuchy Markowa w teorii procesów semi-Markowa odgrywają ważną rolę. Ograniczymy nasze rozważania jedynie do jednorodnych łańcuchów Markowa o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów.

1.1. Definicja i podstawowe własności

Niech S będzie zbiorem dyskretnym, tzn. zbiorem skończonym lub przeliczalnym i niech $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych oraz $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych.

Przyjmijmy, że

$$\boldsymbol{p} = [p_i : i \in S] \tag{1.1}$$

jest macierzą liczbową jednowierszową taką, że

$$p_i \geqslant 0 \text{ dla } i \in S \text{ oraz } \sum_{i \in S} p_i = 1 . \tag{1.2}$$

Załóżmy również, że

$$\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S] \tag{1.3}$$

jest liczbową macierzą kwadratową taką, że

$$p_{ij} \geqslant 0 \text{ dla } i, j \in S \text{ oraz } \sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \quad \text{dla wszystkich } i \in S. \tag{1.4}$$

Oznacza to, że nieujemne elementy każdego wiersza tej macierzy sumują się do jedności. Taką macierz nazywamy *macierzą stochastyczną*.

DEFINICJA 1. *Ciąg zmiennych losowych $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, którego wyrazy przyjmują wartości z dyskretnego zbioru stanów S, nazywamy łańcuchem Markowa określonym przez rozkład początkowy $\boldsymbol{p}$ oraz macierz $\boldsymbol{P}$, jeżeli*

$$P\{\xi_0 = i\} = p_i \, , \; i \in S \tag{1.5}$$

oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych stanów $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in S$ zachodzi równość:

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\} \tag{1.6}$$

$$= P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\} = p_{ij}$$

o ile

$$P\{\xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\} > 0 .$$

Liczby $n \in \mathbb{N}_0$ będziemy umownie nazywać chwilami lub momentami. Wzór (1.6) oznacza, że łańcuch Markowa charakteryzuje się tym, że stan procesu w chwili $n+1$, zależy (w sensie rozkładu) wyłącznie od stanu w chwili n, a nie zależy od stanów w chwilach wcześniejszych $n-1, \ldots, 1, 0$. Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\} = p_{ij} \tag{1.7}$$

nazywamy prawdopodobieństwem przejścia ze stanu $i \in S$ w chwili n do stanu $j \in S$ w chwili $n+1$. Zauważmy, że to prawdopodobieństwo nie zależy od n.

Korzystając z definicji jednorodnego łańcucha Markowa, możemy znaleźć wzór na łączny rozkład zmiennych losowych $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

WNIOSEK 1. *Jeżeli* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *jest łańcuchem Markowa o rozkładzie początkowym* $\boldsymbol{p} = [p_i : i \in S]$ *i macierzy prawdopodobieństw przejścia* $\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S]$ *to dla* $n = 1, 2, \ldots$

$$P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} = p_i p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n} . \tag{1.8}$$

Pojawia się naturalne pytanie czy macierz $\boldsymbol{p} = [p_i : i \in S]$, która jest rozkładem prawdopodobieństwa na S oraz macierz stochastyczna $\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S]$ określają łańcuch Markowa. Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie o istnieniu łańcucha Markowa.

TWIERDZENIE 1. *Niech* $\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S]$ *będzie macierzą stochastyczną, a* $\boldsymbol{p} = [p_i : i \in S]$ *macierzą jednowierszową, której elementami są liczby nieujemne takie, że* $\sum_{i \in S} p_i = 1$. *Istnieje wówczas na pewnej przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *jednorodny łańcuch Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *o rozkładzie początkowym* $\boldsymbol{p} = [p_i : i \in S]$ *i macierzy prawdopodobieństw przejścia* $\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S]$.

D o w ó d: [6], [29].

Przedstawimy niektóre własności jednorodnego łańcucha Markowa.

DEFINICJA 2. *Zdarzenie A poprzedza chwilę (moment) $n \geqslant 0$ jednorodnego łańcucha Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, *gdy można je przedstawić w postaci* $A = \{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in A^{(n+1)}\}$, *gdzie* $A_0, \ldots, A_n \subset S$ i $A^{(n+1)} = A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n$.

DEFINICJA 3. *Zdarzenie B jest poprzedzane przez moment $n \geqslant 0$ jednorodnego łańcucha Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, *gdy można je przedstawić w postaci* $B = \{(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots) \in B^{(\infty)}\}$, *gdzie* $B_n, B_{n+1}, \ldots \subset S$ *oraz* $B^{(\infty)} = B_n \times B_{n+1} \times \ldots$.

WŁASNOŚĆ 1. *Dla dowolnego zdarzenia A poprzedzającego chwilę n jednorodnego łańcucha Markowa zachodzi równość:*

$$P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n, A\} = P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n\} \tag{1.9}$$

D o w ó d : [29].

WŁASNOŚĆ 2. *Zdarzenie A poprzedzające chwilę n (przeszłość) i zdarzenie B poprzedzane przez tę chwilę (przyszłość) są warunkowo niezależne pod warunkiem* $\{\xi_n = i_n\}$:

$$P\{A \cap B \,|\, \xi_n = i_n\} = P\{A \,|\, \xi_n = i_n\} P\{B \,|\, \xi_n = i_n\} \tag{1.10}$$

WŁASNOŚĆ 3. *Dla dowolnego zdarzenia B poprzedzanego przez chwilę n zachodzi równość:*

$$P\{\xi_{n-1} = i_{n-1} \,|\, \xi_n = i_n, B\} = P\{\xi_{n-1} = i_{n-1} \,|\, \xi_n = i_n\} \tag{1.11}$$

D o w ó d : [29].

Niech

$$p_{ij}(k) = P\{\xi_{n+k} = j \,|\, \xi_n = i\}\ , \quad i, j \in S\ .$$

WŁASNOŚĆ 4. (Równość Smoluchowskiego-Chapmana-Kołmogorowa) *Dla jednorodnego łańcucha Markowa* $\{\xi_n \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ *o prawdopodobieństwach przejścia* $p_{ij} = P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}\ , \ i, j \in S$ *zachodzi równość:*

$$p_{ij}(r+m) \ = \ \sum_{k \in S} p_{ik}(r) p_{kj}(m)\ , \ r, m \in \mathbb{N}_0\ , \tag{1.12}$$

D o w ó d : [29].

Równość ta w notacji macierzowej przyjmuje postać

$$\boldsymbol{P}(r+m) = \boldsymbol{P}(r)\boldsymbol{P}(m)\ , \ \text{gdzie} \ \ \boldsymbol{P}(n) = [p_{ij}(n) : i, j \in S] \tag{1.13}$$

Z równości Smoluchowskiego-Chapmana-Kołmogorowa wynika równość:

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}^n. \tag{1.14}$$

Przyjmujemy dodatkowo

$$\boldsymbol{P}(0) = I = [\delta_{ij} : i, j \in S], \ \ \text{gdzie} \ \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}. \tag{1.15}$$

Istotną rolę odgrywa jednowymiarowy rozkład łańcucha Markowa w chwili n.

DEFINICJA 4. *Rozkład*

$$\boldsymbol{p}(n) = [\ p_j(n) : j \in S\ ]\ , \ \ \textit{gdzie} \ p_j(n) = P\{\xi_n = j\} \tag{1.16}$$

nazywamy rozkładem jednowymiarowym łańcucha Markowa w chwili n.

Zauważmy, że

$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in S} P\{\xi_n = j, \xi_0 = i\}$$

$$= \sum_{i \in S} P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\} P\{\xi_0 = i\} = \sum_{i \in S} p_{ij}(n) p_i = \sum_{i \in S} p_i p_{ij}(n).$$

Oznacza to równość

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{P}^n . \tag{1.17}$$

Rozkład $\boldsymbol{p}(n)$ można znaleźć także w inny sposób:

$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in S} P\{\xi_{n-1} = i\} P\{\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i\} \ , \ j \in S,$$

czyli

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(n-1)\boldsymbol{P}. \tag{1.18}$$

Ważnym pojęciem w teorii procesów losowych Markowa jest tak zwany moment (chwila) zatrzymania lub moment Markowa.

DEFINICJA 5. *Zmienną losową* τ *przyjmującą wartości* $0, 1, 2, \ldots$ *oraz* ∞ *nazywamy momentem zatrzymania (lub momentem Markowa) łańcucha Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *, gdy dla dowolnego* $k = 0, 1, 2 \ldots$ *zdarzenie* $\{\tau = k\}$ *poprzedza moment* k *, to znaczy gdy ma ono postać* $\{(\xi_o, \ldots, \xi_k) \in A^{(k+1)}\}$ *, gdzie* $A^{(k+1)} = A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_k$ *oraz* $A_0, A_1, \ldots, A_k \subset S$.

DEFINICJA 6. *Mówimy, że zdarzenie A poprzedza moment zatrzymania, gdy dla dowolnego* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *zdarzenie losowe* $A \cap \{\tau = k\}$ *poprzedza moment* k *dla rozważanego łańcucha Markowa.*

DEFINICJA 7. *Zdarzenie* B *jest poprzedzane przez moment zatrzymania* τ *, gdy ma ono postać* $B = \{(\xi_\tau, \xi_{\tau+1}, \ldots\} \in B^{(\infty)}\}$ *, gdzie* $B_\tau, B_{\tau+1}, \ldots \subset S$ *oraz* $B^{(\infty)} = B_n \times B_{n+1} \times \ldots$.

TWIERDZENIE 2. *Niech* τ *będzie momentem zatrzymania jednorodnego łańcucha Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *. Jeżeli* A *jest zdarzeniem poprzedzającym* τ *, to*

$$P\{\xi_{\tau+1} = j \mid \xi_\tau = i, A\} = P\{\xi_{\tau+1} = j \mid \xi_\tau = i\} = p_{ij} \tag{1.19}$$

dla dowolnych $i, j \in S$, *dla których lewa strona jest poprawnie określona.*

D o w ó d: [29].

WNIOSEK 2. *Jeżeli* τ *jest momentem zatrzymania łańcucha Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *oraz* A *jest zdarzeniem poprzedzającym* τ *, to*

$$P\{\xi_{\tau+m} = i_m, \ldots, \xi_{\tau+1} = i_1 \mid \xi_\tau = i_0, A\} = P\{\xi_{\tau+m} = i_m, \ldots, \xi_{\tau+1} = i_1 \mid \xi_\tau = i_0\} = \tag{1.20}$$

$$= P\{\xi_m = i_m, \ldots, \xi_1 = i_1 \mid \xi_0 = i_0\} = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

dla dowolnych $m > 1$ *oraz* $i_0, \ldots, i_n \in S$, *jeżeli lewa strona równości jest poprawnie określona.*

W szczególności

$$P\{\xi_{\tau+m} = i_m \,|\, \xi_\tau = i_0, A\} = P\{\xi_{\tau+m} = i_m \,|\, \xi_\tau = i_0\} = P\{\xi_m = i_m \,|\, \xi_0 = i_0\}. \quad (1.21)$$

1.2. Klasyfikacja stanów jednorodnego łańcucha Markowa

Własności łańcucha Markowa zależy od postaci jego macierzy prawdopodobieństw przejęcia. Kształt tej macierzy pozwala określić rodzaje stanów i dokonać ich klasyfikacji. Obiektem matematycznym ułatwiającym interpretację omawianych tu pojęć jest graf skierowany $G = \{(i,(i,j)) : i,j \in S\}$ odpowiadający macierzy prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P} = [\, p_{ij} : i,j \in S \,]$. Wierzchołki grafu $i \in S$ odpowiadają stanom łańcucha Markowa, natomiast łuki skierowane $(i,j) \in S \times S$ odpowiadają niezerowym prawdopodobieństwom przejścia p_{ij}. Na rysunkach stany oznaczone są kółkami, a łuki strzałkami.

DEFINICJA 8. *Stan $i \in S$ nazywamy stanem istotnym, jeżeli*

$$\bigwedge_{j\in S} \{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_{ij}(n) > 0 \Longrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_{ji}(m) > 0\}.$$

DEFINICJA 9. *Stan, który nie jest istotny nazywamy nieistotnym.*

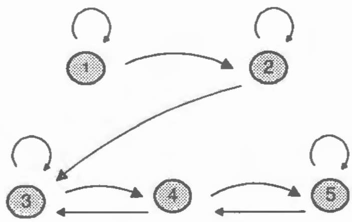
Zatem, stan $i \in S$ jest stanem nieistotnym, jeżeli

$$\bigvee_{j\in S} \{\bigvee_{n\in\mathbb{N}} p_{ij}(n) > 0 \wedge \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} p_{ji}(m) = 0\}.$$

PRZYKŁAD 1. Niech

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Graf tej macierzy przedstawiony jest na rysunku 1.1.
Stany 1, 2 są nieistotne, natomiast stany 3, 4, 5 są istotne. △



Rys. 1.1. Graf macierzy $\boldsymbol{P}$

DEFINICJA 10. *Stan $j \in S$ nazywamy osiągalnym ze stanu $i \in S$, $(i \to j)$ jeżeli:*

$$\bigvee_{k \in \mathbb{N}_0} p_{ij}(k) > 0.$$

Przypomnijmy, że zgodnie z umową wyrażoną za pomocą wzoru (1.15) mamy $p_{ij}(0) = 1$ dla $i = j$ oraz $p_{ij}(0) = 0$ dla $i \neq j$.

W łańcuchu Markowa z przykładu 1 stan 1 jest osiągalny tylko ze stanu 1, stan 2 jest osiągalny ze stanu 1 i 2, stany 3, 4, 5 są osiągalne ze wszystkich stanów.

Z równości Smoluchowskiego-Chapmana-Kołmogorowa otrzymujemy nierówność

$$p_{ij}(n+m) \geqslant p_{ik}(n)p_{kj}(m) .$$

Z nierówności tej wynika, że relacja $\to$ jest przechodnia, a więc zachodzi implikacja

$$(i \to k) \wedge (k \to j) \implies (i \to j).$$

DEFINICJA 11. *Stany istotne $i, j \in S$ nazywamy stanami komunikującymi się $(i \leftrightarrow j)$, jeżeli stan j jest osiągalny ze stanu i oraz stan i jest osiągalny ze stanu j.*

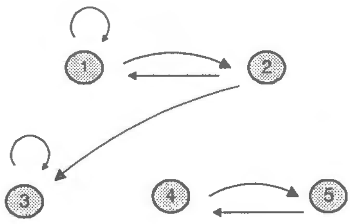
W przykładzie 1 stany 3, 4, 5 komunikują się ze sobą.

Z definicji bezpośrednio wynika, że relacja $\leftrightarrow$ jest zwrotna i symetryczna. Wykazaliśmy, że jest ona również przechodnia. Relacja ta jest więc relacją równoważności. Relacja ta dzieli zbiór stanów istotnych na klasy abstrakcji. Podzbiór stanów istotnych $B \subset S$ składający się ze stanów komunikujących się ze sobą tworzy jedną *klasę stanów*. Każde dwa stany należące do tego podzbioru komunikują się, natomiast żaden stan spoza podzbioru nie komunikuje się z żadnym stanem z tego podzbioru. Zbiór jednoelementowy $\{i\}$ jest klasą, jeżeli $p_{ii} = 1$.

PRZYKŁAD 2. W łańcuchu Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

stany 1 i 2 komunikują się między sobą lecz nie są istotne. Podzbiór $U_1 = \{3\}$ jest jednoelementową klasą stanów, podzbiór $U_2 = \{4, 5\}$ jest klasę stanów. Graf zmian stanów tego łańcucha Markowa przedstawiony jest na rysunku 1.2. △



Rys. 1.2. Graf macierzy $\boldsymbol{P}$

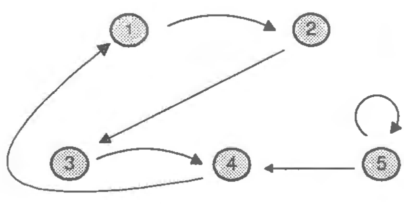
DEFINICJA 12. *Stan $j \in S$ nazywamy okresowym o okresie d_j, jeżeli $d_j > 1$ oraz d_j jest największym wspólnym dzielnikiem* (NWD) *zbioru takich liczb naturalnych $n > 1$, że $p_{jj}(n) > 0$.*

DEFINICJA 13. *Stan $i \in S$ nazywamy nieokresowym, jeżeli największym wspólnym dzielnikiem zbioru liczb naturalnych n takich, że $p_{ii}(n) > 0$ jest liczba* 1.

PRZYKŁAD 3. Przeanalizujmy łańcuch Markowa o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, którego macierz prawdopodobieństw przejścia ma postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Graf zmian stanów tego łańcucha Markowa przedstawiony jest na rysunku 1.3.



Rys. 1.3. Graf macierzy $\boldsymbol{P}$

Zauważmy, że

$$d_1 = \text{NWD}\{n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 : p_{11}(n) > 0\} = \text{NWD}\{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\} = 4.$$

Podobnie $d_2 = 4$, $d_3 = 4$, $d_4 = 4$. Stany 1, 2, 3, 4 są więc stanami okresowymi o okresie 4. Zauważmy, że $d_5 = 1$, a zatem stan 5 jest stanem nieokresowym. $\triangle$

Stany dzielą się zatem na stany okresowe i nieokresowe.

DEFINICJA 14. *Niech*

$$\Delta_A = \min\{n \in \mathbb{N} : \xi_n \in A\}. \tag{1.22}$$

Zmienna losowa Δ_A oznacza „chwilę”, w której łańcuch Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ po raz pierwszy osiągnął podzbiór stanów $A \subset S$.

Dodajmy, że w szczególności, gdy $A = \{j\}$ to zmienna losowa $\Delta_{\{j\}} = \Delta_j$ oznacza chwilę pierwszego osiągnięcia stanu $j \in S$.

Zauważmy równość następujących zdarzeń

$$\{\Delta_A = m\} = \{\xi_m \in A, \xi_{m-1} \in A', \ldots, \xi_1 \in A'\} \quad \text{dla}\, m = 2, 3, \ldots,$$

$$\{\Delta_A = 1\} = \{\xi_1 \in A\}, \tag{1.23}$$

$$\{\Delta_A = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\xi_k \in A'\},$$

$$\{\Delta_A < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\xi_k \in A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\Delta_A = m\}.$$

Przyjmując

$$f_{iA}(m) = P\{\Delta_A = m \,|\, \xi_0 = i\} \tag{1.24}$$

mamy

$$f_{iA}(m) = \begin{cases} P\{\xi_m \in A, \xi_{m-1} \in A', \ldots, \xi_1 \in A' \,|\, \xi_0 = i\} & \text{dla } m = 2, 3, \ldots \\ P\{\xi_1 \in A \,|\, \xi_0 = i\} & \text{dla } m = 1 \end{cases}. \tag{1.25}$$

Liczba $f_{iA}(m)$ oznacza prawdopodobieństwo pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów A ze stanu i w chwili m (w m-tym kroku) przez łańcuch Markowa $\{ \xi_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$.

Dla $A = \{j\}$ prawdopodobieństwo pierwszego osiągnięcia stanu $j \in S$ ze stanu i w chwili m określone jest wzorem

$$f_{ij}(m) = \begin{cases} P\{\xi_m = j, \xi_{m-1} \neq j, \ldots, \xi_1 \neq j \,|\, \xi_0 = i\} & \text{dla } m = 2, 3 \ldots \\ P\{\xi_1 = j \,|\, \xi_0 = i\} & \text{dla } m = 1\,. \end{cases} \tag{1.26}$$

Niech

$$f_{iA} = P\{\Delta_A < \infty \,|\, \xi_0 = i\}. \tag{1.27}$$

Można łatwo zauważyć, że

$$f_{iA} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{iA}(m). \tag{1.28}$$

Dla $A = \{j\}$ mamy

$$f_{ij} = P\{\{\Delta_j < \infty \,|\, \xi_0 = i\} = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}(m). \tag{1.29}$$

Z ostatniego wzoru i definicji osiągalności stanu wynika wniosek

WNIOSEK 3. *Stan $j \in S$ jest osiągalny ze stanu $i \neq j \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_{ij} > 0$.*

Możemy teraz zdefiniować kolejne pojęcia dotyczące własności stanów łańcucha Markowa.

DEFINICJA 15. *Podzbiór stanów $A \subset S$ nazywamy silnie osiągalnym ze stanu $i \in S$ ($i \xrightarrow{1} A$), jeżeli $f_{iA} = 1$.*

DEFINICJA 16. *Stan $j \in S$ nazywamy silnie osiągalnym ze stanu $i \in S$ ($i \xrightarrow{1} j$), jeżeli $f_{ij} = 1$.*

DEFINICJA 17. *Stan $i \in S$ nazywamy powracającym, jeżeli $f_{ii} = 1$.*

DEFINICJA 18. *Jeżeli $f_{ii} < 1$, to stan nazywamy chwilowym.*

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli łańcuch Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ startuje ze stanu i, to prawdopodobieństwo powrotu do tego stanu co najmniej r razy jest równe $(f_{ii})^r$.*

D o w ó d: [29].

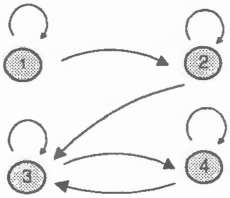
TWIERDZENIE 4. *Jeżeli i jest stanem powracającym ($f_{ii} = 1$), to prawdopodobieństwo powrotu łańcucha Markowa do tego stanu nieskończenie wiele razy jest równe 1. Jeżeli i jest stanem chwilowym ($f_{ii} < 1$), to prawdopodobieństwo powrotu do tego stanu nieskończenie wiele razy jest równe 0.*

D o w ó d: [29], [49].

PRZYKŁAD 4. Niech dany będzie łańcuch Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

której odpowiada graf przedstawiony na rysunku 1.4.



Rys. 1.4. Graf macierzy $\boldsymbol{P}$

Zauważmy, że $f_{11}(1) = \frac{1}{2}$ oraz $f_{11}(n) = 0$ dla $n \geqslant 2$. Zatem $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}(n) = \frac{1}{2} + 0 + \ldots = \frac{1}{2} < 1$, co oznacza, że stan 1 jest chwilowy. Podobnie można uzasadnić, że stan 2 jest stanem chwilowym.

Ponieważ $f_{33}(n) = (\frac{1}{2})^n$ oraz $f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}(n) = \sum^{\infty}(\frac{1}{2})^n = 1$, więc stan 3 jest stanem powracającym. Analogicznie można wykazać, że stan 4 jest również stanem powracającym. $\triangle$

TWIERDZENIE 5. *Niech* $\{ \xi_n : n \in \mathbb{N}_0 \}$ *będzie łańcuchem Markowa o dyskretnym zbiorze stanów* S. *Dla dowolnych stanów* $i, j \in S$ *mamy*

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}(r) \cdot p_{jj}(n-r) \tag{1.30}$$

D o w ó d: [16].

TWIERDZENIE 6. (wzór Doeblina) *Dla dowolnych stanów* $i, j \in S$ *mamy*

$$f_{ij} = \lim_{s \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{s} p_{ij}(n)}{1 + \sum_{n=1}^{s} p_{jj}(n)}. \tag{1.31}$$

D o w ó d: [29].

TWIERDZENIE 7. (a) *Stan* $i \in S$ *jest stanem powracającym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty .$$

(b) *Stan* $i \in S$ *jest stanem chwilowym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty .$$

D o w ó d: [49].

DEFINICJA 19. *Średnim czasem powrotu do stanu* j *nazywamy liczbę*

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{jj}(n).$$

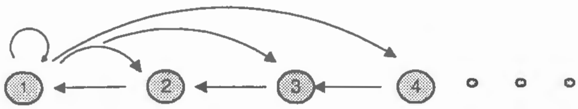
DEFINICJA 20. *Stan* j *powracający nazywamy zerowym, jeśli* $\mu_j = \infty$, *natomiast dodatnim (niezerowym), jeżeli* $\mu_j < \infty$.

Stan powracający może być albo zerowy, albo dodatni.

PRZYKŁAD 5. Rozważmy łańcuch Markowa o macierzy

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

której graf przedstawiony jest na rysunku 1.5.



Rys. 1.5. Graf macierzy P

Łańcuch ten składa się z jednej klasy stanów. Zauważmy, że

$$f_{11}(n) = p_{1n} \cdot p_{nn-1} \cdot \ldots \cdot p_{21} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ oraz } f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Oznacza to, że 1 jest stanem powracającym. Natomiast średni czas powrotu jest równy

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{11}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty .$$

Stąd wynika, że stan 1 jest zerowy. △

PRZYKŁAD 6. Niech

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Łańcuch Markowa o tej macierzy prawdopodobieństw przejścia składa się z jednej klasy stanów. Podobnie jak poprzednio znajdujemy

$$f_{11}(n) = \frac{1}{2^n} \text{ oraz } f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 .$$

Stan 1 jest więc powracający. Oczekiwany czas powrotu wyraża się wzorem

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n} .$$

Korzystając z kryterium Cauchy'ego, badamy zbieżność tego szeregu. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2},$$

więc szereg ten jest zbieżny. Oznacza to, że 1 jest stanem niezerowym. △

DEFINICJA 21. *Stan* $i \in S$ *, który jest niezerowy i nieokresowy nazywamy stanem ergodycznym.*

WNIOSEK 4. *Jeżeli zbiór stanów łańcucha Markowa jest skończony to w zbiorze tym istnieje przynajmniej jeden stan powracający.*

D o w ó d: [29].

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli stan i jest powracający oraz stan i komunikuje się ze stanem* j*, to stan* j *jest również powracający.*

D o w ó d: [29].

WNIOSEK 5. *Jeżeli jeden ze stanów należących do klasy stanów jest powracający, to wszystkie stany, które należą do tej klasy stanów są również powracające, to znaczy powracalność jest własnością całej klasy.*

WNIOSEK 6. *Chwilowość jest własnością klasy stanów.*

TWIERDZENIE 9. *Niech i będzie stanem powracającym. Jeżeli stan j jest osiągalny ze stanu* i *, to stan* j *jest również stanem powracającym oraz* $f_{ij} = f_{ji} = 1$ *, to znaczy stan chwilowy nie jest osiągalny ze stanu powracającego.*

D o w ó d: [29].

TWIERDZENIE 10. *Zerowość stanu jest własnością całej klasy, do której należy stan.*

D o w ó d: [29].

WNIOSEK 7. *Niezerowość stanu jest własnością całej klasy, do której należy stan.*

TWIERDZENIE 11. *Dwa różne stany należące do tej samej klasy mają taki sam okres, to znaczy okresowość jest własnością klasy.*

D o w ó d: [29].

WNIOSEK 8. *Nieokresowość jest własnością klasy.*

TWIERDZENIE 12. *W jednorodnym łańcuchu Markowa o skończonej liczbie stanów nie ma stanów zerowych.*

DEFINICJA 22. *Podzbiór* $M \subset S$ *nazywamy zamkniętym, jeżeli*

$$\bigwedge_{i\in M} \sum_{j\in M} p_{ij} = 1.$$

TWIERDZENIE 13. *Skończona klasa stanów* $C \subset S$ *jest zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy klasa* C *jest powracająca.*

D o w ó d: [29].

WNIOSEK 9. *W każdym łańcuchu stany powracające można w dokładnie jeden sposób podzielić na zamknięte klasy stanów $C_1, C_2, \ldots$ takich, że z dowolnego stanu danej klasy można przejść do wszystkich stanów tej klasy i nie można przejść do żadnej innej klasy.*

Oprócz zamkniętych klas stanów C_r łańcuch może zazwyczaj zawierać jeszcze stany chwilowe, z których można przejść do stanów należących do klas powracających, ale nie na odwrót.

Z definicji zamkniętości podzbioru stanów i powyższego wniosku wynika, że prawdopodobieństwa przejścia w zamkniętych klasach stanów $C_1, C_2, \ldots$ określone są przez macierze stochastyczne. Oznacza to, że tego rodzaju łańcuch Markowa można badać jako odrębne łańcuchy Markowa.

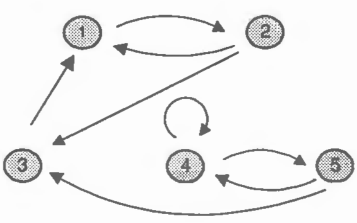
DEFINICJA 23. *Jednorodny łańcuch Markowa nazywamy pochłaniającym, jeżeli zawiera on zarówno stany powracające jak i chwilowe.*

DEFINICJA 24. *Pochłaniający łańcuch Markowa o jednej nieokresowej klasie stanów powracających nazywamy nierozkładalnym.*

PRZYKŁAD 7. Niech dany będzie łańcuch Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \end{bmatrix},$$

której odpowiada graf przedstawiony na rysunku 1.6.



Rys. 1.6. Graf macierzy P

Zauważmy, że stany 1, 2, 3 tworzą zamkniętą klasę stanów. Na mocy twierdzenia 13 jest to klasa powracająca. Stany 4, 5 są stanami chwilowymi, bowiem $f_{44} = \frac{1}{2}$ oraz $f_{55} = 0$. Zatem łańcuch ten jest łańcuchem pochłaniającym, co więcej jest on łańcuchem nierozkładalnym. $\triangle$

DEFINICJA 25. *Jednorodny łańcuch Markowa nazywamy nieprzywiedlnym, jeżeli zbiór wszystkich stanów tego łańcucha tworzy klasę stanów.*

WNIOSEK 10. *W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa możliwy jest tylko jeden z trzech przypadków*

– *wszystkie stany są chwilowe,*

– *wszystkie stany są powracające zerowe,*

– *wszystkie stany są powracające niezerowe.*

DEFINICJA 26. *Nieprzywiedlny jednorodny łańcuch Markowa nazywamy chwilowym, jeżeli nie zawiera on stanów powracających, a powracającym, jeżeli nie zawiera stanów chwilowych.*

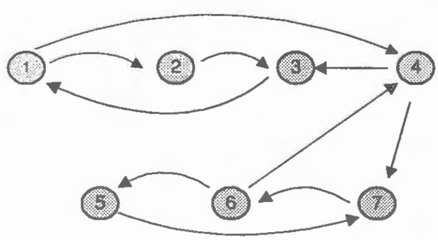
WNIOSEK 11. *Łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów nie może być chwilowym, ani powracającym zerowym.*

DEFINICJA 27. *Nieprzywiedlny łańcuch Markowa, którego stany są okresowe nazywamy cyklicznym.*

PRZYKŁAD 8. Prostym przykładem łańcucha cyklicznego jest łańcuch o macierzy prawdopodobieństw przejścia

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{2}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

której odpowiada graf przedstawiony na rysunku 1.7.



Rys. 1.7. Graf macierzy $\boldsymbol{P}$

Jak widać, wszystkie stany komunikują się ze sobą. Tworzą więc jedną klasę stanów. Wystarczy zatem wykazać, że jeden ze stanów jest okresowy. Weźmy pod uwagę stan 1 . Zauważmy, że jest to stan okresowy o okresie 3, gdyż $\mathrm{NWD}\{n : p_{11}(n) > 0\} = \mathrm{NWD}\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\} = 3$. Wykazaliśmy zatem, że ten łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny i wszystkie jego stany są okresowe, a więc zgodnie z definicją jest to łańcuch cykliczny. $\triangle$

DEFINICJA 28. *Łańcuchem regularnym nazywamy nieprzywiedlny łańcuch Markowa, którego stany są nieokresowe.*

DEFINICJA 29. *Łańcuchem ergodycznym nazywamy łańcuch regularny, którego stany są niezerowe.*

1.3. Rozkład stacjonarny i rozkład graniczny

Ważną rolę w badaniu procesów opisywanych za pomocą łańcuchów Markowa odgrywają charakterystyki graniczne a zwłaszcza granice prawdopodobieństw $p_i(n)$ oraz $p_{ij}(n)$ przy $n \to \infty$. Opisują one probabilistyczne zachowanie się procesu po długim czasie. Przedstawimy niezbędne pojęcia i najważniejsze twierdzenia dotyczące prawdopodobieństw granicznych.

DEFINICJA 30. *Macierz jednowierszową*

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_i : i \in S] \tag{1.32}$$

taką, że

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j , \quad j \in S \text{ oraz } \sum_{i \in S} \pi_i = 1 \tag{1.33}$$

nazywamy rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S]$.

Rozkład stacjonarny $\boldsymbol{\pi}$ jest więc rozkładem prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów S , który spełnia układ równań liniowych o współczynnikach będących odpowiednimi elementami macierzy prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P} = [p_{ij} : i, j \in S]$. Układ ten w notacji macierzowej ma postać

$$\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi 1} = [1] , \tag{1.34}$$

gdzie $\boldsymbol{1}$ jest macierzą jednokolumnową, której elementami są same jedynki. Liczba tych elementów jest równa liczbie elementów zbioru S.

TWIERDZENIE 14. *Jeżeli rozkład początkowy* $\boldsymbol{p} = [p_i;\ i \in S]$ *łańcucha Markowa jest równy rozkładowi stacjonarnemu* $\boldsymbol{\pi} = [\pi_i : i \in S]$, *to jednowymiarowy rozkład* $\boldsymbol{p}(n) = [p(n);\ i \in S]$ *łańcucha Markowa nie zależy od* n *i jest równy rozkładowi stacjonarnemu:*

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p}(n) \quad \text{dla każdego } n \in \mathrm{N}_0. \tag{1.35}$$

Dowód: Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Na mocy założenia $\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi 1} = [1]$ oraz $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\pi}$. Na mocy wzoru (1.17), $\boldsymbol{pP} = \boldsymbol{p}(1)$. Zatem dla $n = 1$ mamy

$$\boldsymbol{pP} = \boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{\pi}, \text{ oraz } \boldsymbol{p}(1)\boldsymbol{1} = [1] .$$

Korzystając z założenia indukcyjnego, dla $n + 1$ otrzymujemy

$$\boldsymbol{p}(n + 1) = \boldsymbol{p}(n)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \text{ oraz } \boldsymbol{p}(n + 1)\boldsymbol{1} = [1]. \quad \square$$

TWIERDZENIE 15. *Niech j będzie stanem powracającym i nieokresowym łańcucha Markowa o dyskretnym zbiorze stanów S.*

(a) *Jeżeli $i \leftrightarrow j$ oraz j jest stanem dodatnim, to*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j} > 0 . \tag{1.36}$$

(b) *Jeżeli $i \leftrightarrow j$ oraz j jest stanem zerowym, to*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0 . \tag{1.37}$$

(c) *Jeżeli $i, j \in S$ są stanami należącymi do różnych klas stanów komunikujących się, to*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{f_{ij}}{\mu_j} . \tag{1.38}$$

D o w ó d: [49].

TWIERDZENIE 16. *Niech dyskretny zbiór stanów S łańcucha Markowa stanowi jedną klasę stanów istotnych, komunikujących się i nieokresowych. Wówczas:*

(a) *jeżeli wszystkie stany są zerowe lub chwilowe, to dla wszystkich $i, j \in S$*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0 , \tag{1.39}$$

(b) *jeżeli wszystkie stany j są powracające i dodatnie, to dla wszystkich $i \in S$*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j} > 0 . \tag{1.40}$$

D o w ó d: [49].

TWIERDZENIE 17. *Łańcuch Markowa o dyskretnym zbiorze stanów S ma jedyny rozkład stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy S zawiera dokładnie jedną klasę stanów istotnych, powracających i dodatnich.*

D o w ó d: [49].

Rozkład ten można znaleźć rozwiązując układ równań

$$\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi 1} = [1] . \tag{1.41}$$

TWIERDZENIE 18. *Rozkład graniczny $\boldsymbol{q} = [q_j : j \in S]$, $q_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ łańcucha Markowa o dyskretnym zbiorze stanów S istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór S zawiera dokładnie jedną klasę C stanów powracających, dodatnich, nieokresowych takich, że $f_{ij} = 1$ dla wszystkich $j \in C$ oraz $i \in S$.*

D o w ó d: [49].

TWIERDZENIE 19. *Dla dowolnego łańcucha Markowa istnieje granica ciągu* $\{p_{ij}(n) : n \in \mathbb{N}\}$ *w sensie Cesaro*:

$$q_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k}^{n} p_{ij}(k) = \frac{f_{ij}}{\mu_j} \tag{1.42}$$

Dowód: [29].

Z przytoczonych tu twierdzeń wynika wniosek

WNIOSEK 12. *Jeżeli łańcuch Markowa zawiera jedną klasę stanów powracających dodatnich, to granice w sensie Cesaro* q_{ij} , $i, j \in S$ *nie zależą od* $i \in S$ *oraz*

$$q_{ij} = \pi_j \, , \quad j \in S \tag{1.43}$$

tworzą rozkład stacjonarny.

Przedstawimy pojęcia, które pozwolą zinterpretować i wyjaśnić sens tych prawdopodobieństw granicznych.

Zmienna losowa

$$\nu_j(n) = \delta_{j\xi_1} + \ldots + \delta_{j\xi_n} \tag{1.44}$$

oznacza liczbę zmian stanów łańcucha Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ do chwili n. Zauważmy, że

$$E(\delta_{j\xi_k} \mid \xi_0 = i) = 0 \cdot P\{\xi_k \neq j \mid \xi_0 = i\} + 1 \cdot P\{\xi_k = j \mid \xi_0 = i\} = p_{ij}(k) \, .$$

Zatem

$$E(\nu_j(n) \mid \xi_0 = i) = E(\delta_{j\xi_1} + \ldots + \delta_{j\xi_n} \mid \xi_0 = i) =$$
$$E(\delta_{j\xi_1} \mid \xi_0) + \ldots + E(\delta_{j\xi_n} \mid \xi_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) \, .$$

Tak więc

$$q_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{E(\nu_j(n) \mid \xi_0 = i)}{n}.$$

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] Domsta J., Grabski F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] Domsta J., Grabski F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] Feller W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] Feller W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] Герцбах И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] Gertsbakh I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] Gichman I.I., Skorochod A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa 1968.

[20] Gniedenko B.W., Bielajew J.K., Sołowiew A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] Grabski F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] Grabski F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] Grabski F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] Grabski F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] Grabski F, Kołowrocki K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] Grabski F., Załęska-Fornal A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] Grabski F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] HOWARD R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] JAŹWIŃSKI J., BORGOŃ J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-72-3