POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 2

Pojęcie procesu semi-markowskiego o dyskretnym zbiorze stanów

Proces semi-markowski (SM) jest zazwyczaj konstruowany za pomocą tak zwanego markowskiego procesu odnowy. Markowski proces odnowy jest szczególnym dwuwymiarowym łańcuchem Markowa.

2.1. Markowski proces odnowy

Zdefiniowanie markowskiego procesu odnowy wymaga najpierw określenia pewnej macierzy funkcyjnej zwanej jądrem odnowy.

Niech $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0$ oznaczają, tak jak poprzednio, zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Ponadto, niech S oznacza zbiór skończony lub przeliczalny, natomiast $\mathbb{R}_+$ zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

DEFINICJA 31. *Jądrem odnowy nazywamy macierz*

$$\boldsymbol{Q}(t) := [Q_{ij}(t) \ : i, j \in S] \,, \tag{2.1}$$

której elementami są funkcje $Q_{ij}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ *spełniające warunki:*

1. *dla wszystkich par* $(i,j) \in S \times S$, $Q_{ij}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ *są funkcjami niemalejącymi i prawostronnie ciągłymi,*
2. *dla wszystkich par* $(i,j) \in S \times S, Q_{ij}(0) = 0$ *oraz dla każdego* $t \in \mathbb{R}_+, Q_{ij}(t) \leqslant 1$,
3. *dla każdego* $i \in S$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{j \in S} Q_{ij}(t) \ = \ 1.$

Z definicji jądra odnowy wynika, że macierz liczbowa

$$\boldsymbol{P} := [p_{ij} : \ i, j \in S] \,, \tag{2.2}$$

$$p_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t)$$

jest macierzą stochastyczną, co oznacza, że dla wszystkich par $(i,j) \in S \times S$, $p_{ij} \geqslant 0$ oraz dla każdego $i \in S$, $\sum\limits_{j \in S} p_{ij} = 1$.

Z definicji tej również wynika, że dla każdego $i \in S$ funkcja

$$G_i(t) := \sum_{j \in S} Q_{ij}(t) \tag{2.3}$$

jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa skoncentrowanego w zbiorze $\mathbb{R}_+$.

PRZYKŁAD 9. Macierz

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.4\,(1-e^{-\lambda t^\gamma}) & 0.6(1-e^{-\lambda t^\gamma}) \\ 1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t} & 0 & 0 \\ 1-(1+\beta t)e^{-\beta t} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

dla $t \geqslant 0$, α, β, γ, $\lambda \in (0, \infty)$, spełnia warunki definicji jądra odnowy. Dystrybuanty $G_i(t)$, $t \geqslant 0$ mają postać

$$G_1(t) = 1 - e^{-\lambda t^\gamma}\,, \quad G_2(t) = 1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\,, \quad G_3(t) = 1-(1+\beta t)e^{-\beta t}$$

dla $t \geqslant 0$. Liczbowa macierz stochastyczna $\boldsymbol{P}$ ma w tym przypadku postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \triangle \tag{2.5}$$

Przyjmujemy, że wektor $\boldsymbol{p} = [p_i\,;\ , i \in S\,]$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na S, tzn. $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i \in S} p_i = 1$.

Niech $(\Omega\,,\ \mathcal{F}\,, P)$ oznacza przestrzeń probabilistyczną na której określony jest dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ taki, że $\xi_n : \Omega \to S$ oraz $\vartheta_n : \Omega \to \mathbb{N}_0$.

DEFINICJA 32. *Dwuwymiarowy ciąg zmiennych losowych* $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *nazywamy markowskim procesem odnowy określonym przez rozkład początkowy* $\boldsymbol{p}$ *i jądro odnowy* $\boldsymbol{Q}(t)$ *,* $t \in \mathbb{R}_+$ *, jeżeli:*

1. *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}_0$ *,* $j \in S$ *,* $t \in \mathbb{R}_+$ *,*
   $P\{\xi_{n+1} = j, \vartheta_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n, \vartheta_n, \ldots \xi_0, \vartheta_0\} = P\{\xi_{n+1} = j, \vartheta_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n\}$
   z prawdopodobieństwem P *równym 1,*

2. *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}_0$ *,* $i, j \in S$ *,* $t \geqslant 0$ *,*
   $P\{\xi_{n+1} = j, \vartheta_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n = i\} = Q_{ij}(t)$*,*

3. *dla wszystkich* $i, j \in S$ *,* $P\{\xi_0 = i, \vartheta_0 = 0\} = P\{\xi_0 = i\} = p_i$ *.*

Z definicji tej wynika, że markowski proces odnowy jest szczególnym przypadkiem dwuwymiarowego łańcucha Markowa, którego prawdopodobieństwa przejścia zależą wyłącznie od dyskretnej współrzędnej. Definicja ta pozwala nam wyciągnąć kilka ważnych wniosków.

WNIOSEK 13.

$$P\{\vartheta = 0\} = 1. \tag{2.6}$$

Wniosek ten wynika z warunku 3 definicji 32.

WNIOSEK 14. *Dla markowskiego procesu odnowy o rozkładzie początkowym* $\boldsymbol{p}$ *i jądrze* $\boldsymbol{Q}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi równość*

$$P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \vartheta_1 \leqslant t_1, \ldots, \xi_n = i_n, \vartheta_n \leqslant t_n\} = \\ = p_{i_0} Q_{i_0 i_1}(t_1) Q_{i_1 i_2}(t_2) \ldots Q_{i_{n-1} i_n}(t_n). \tag{2.7}$$

Przechodząc do granicy przy $t_1 \to \infty, \ldots, t_n \to \infty$, otrzymujemy równość

$$P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} = \\ = p_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n} .$$

Stąd

WNIOSEK 15. *Ciąg* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *jest jednorodnym łańcuchem Markowa o zbiorze stanów* S , *określonym przez rozkład początkowy* $\boldsymbol{p} = [p_{i_0} : i_0 \in S]$ *i macierz prawdopodobieństw przejścia* $\boldsymbol{P} := [p_{ij} : i, j \in S]$, *gdzie* $p_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{i,j}(t)$.

WNIOSEK 16. *Zmienne losowe* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ *są warunkowo niezależne przy ustalonej realizacji łańcucha Markowa* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$:

$$P\{\vartheta_1 \leqslant t_1, \vartheta_2 \leqslant t_2 \ldots, \vartheta_n \leqslant t_n \,|\, \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} = \\ = \prod_{k=1}^{n} P\{\vartheta_k \leqslant t_k \,|\, \xi_k = i_k, \xi_{k-1} = i_{k-1}\}. \tag{2.8}$$

Niech

$$\tau_0 = \vartheta_0, \\ \tau_n = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots \vartheta_n \,, n \in \mathbb{N}, \\ \tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n = \sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{2.9}$$

TWIERDZENIE 20. *Ciąg* $\{(\xi_n, \tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *jest dwuwymiarowym, jednorodnym łańcuchem Markowa o prawdopodobieństwach przejścia*

$$P\{\xi_{n+1} = j, \tau_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n = i, \tau_n = h\} = Q_{ij}(t-h) \,, \quad i, j \in S. \tag{2.10}$$

D o w ó d: [38].

W oparciu o jądro odnowy można wyznaczyć rozkład dwuwymiarowego łańcucha $\{(\xi_n, \tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Znajdziemy najpierw rozkład warunkowy

$$R_{ij}^{(n)}(t) = P\{\xi_n = j, \tau_n \leqslant t \mid \xi_0 = i, \tau_0 = 0\} \,. \tag{2.11}$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy

$$R_{ij}^{(1)}(t) = P\{\xi_1 = j, \tau_1 \leqslant t \mid \xi_0 = i, \tau_0 = 0\} = \\ = P\{\xi_1 = j, \tau_1 \leqslant t \mid \xi_0 = i\} = Q_{ij}(t). \tag{2.12}$$

Korzystając z równości Smoluchowskiego-Chapmana-Kołmogorowa mamy dla $n = 2, 3, \ldots$

$$R_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{k\in S} \int_0^t P\{\xi_1 = k, \tau_1 \in dx \mid \xi_0 = i, \tau_0 = 0\}$$

$$P\{\xi_n = j, \tau_n \in [x,t] \mid \xi_1 = k, \tau_1 = x\} = \sum_{k\in S} \int_0^t dQ_{ik}(x) R_{kj}^{(n-1)}(t-x).$$

Otrzymaliśmy związek rekurencyjny

$$R_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{k\in S} \int_0^t dQ_{ik}(x) R_{kj}^{(n-1)}(t-x)\ ,\ n = 2,3,\ldots\ . \tag{2.13}$$

Stosując symbol splotu, dla $n = 2$ mamy

$$R_{ij}^{(2)}(t) = \sum_{k\in S} \int_0^t dQ_{ik}(x) Q_{kj}(t-x) = \sum_{k\in S} Q_{ik} * Q_{kj}(t)\ ,\ \ n = 2,3,\ldots\ . \tag{2.14}$$

Indukcyjne rozumowanie prowadzi do wzoru

$$R_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{k_1\in S}\sum_{k_2\in S}\cdots\sum_{k_{n-1}\in S} Q_{ik_1} * Q_{k_1k_2}(t) \ldots * Q_{k_{n-1}j}(t)\ ,\ \ n = 2,3,\ldots\ . \tag{2.15}$$

Postać otrzymanych wzorów skłania nas do wprowadzenia notacji macierzowej. Niech

$$\boldsymbol{R}^{(n)}(t) = [R_{ij}^{(n)}(t) :\ i,j \in S]. \tag{2.16}$$

Zdefiniujemy splotową potęgę jądra odnowy. Przyjmujemy oznaczenia:

$$\boldsymbol{Q}^{(0)}(t) = [Q_{ij}^{(0)}(t) :\ i,j \in S]\ ,\ \ Q_{ij}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } & i = j \\ 0 \text{ dla } & i \neq j \end{cases} ,t \geqslant 0, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(1)}(t) = \boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) :\ i,j \in S]\ ,t \geqslant 0, \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{Q}^{(n)}(t) = [Q_{ij}^{(n)}(t) :\ i,j \in S]\ , \tag{2.19}$$

gdzie

$$Q_{ij}^{(n)}(t) := \sum_{k\in S} \int_0^t dQ_{ik}(x) Q_{kj}^{(n-1)}(t-x) = \sum_{k\in S} Q_{ik} * Q_{kj}^{(n-1)}(t)\ ,t \geqslant 0\ ,\ \ n = 2,3,\ldots\ .$$

Łatwo można zauważyć, że

$$\boldsymbol{R}^{(n)}(t) = \boldsymbol{Q}^{(n)}(t)\ . \tag{2.20}$$

Z definicji funkcji $R_{ij}^{n}(t)$ oraz własności rozkładu dwuwymiarowej zmiennej losowej otrzymujemy związki

$$\lim_{t\to\infty} R_{ij}^{(n)}(t) = P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\}\ ,\ \ i,j \in S\ ,t \geqslant 0, \tag{2.21}$$

$$\sum_{j\in S} R_{ij}^{n}(t) = \sum_{j\in S} Q_{ij}^{(n)}(t) = P\{\tau_n \leqslant t \mid \xi_0 = i\}\ ,i,j \in S\ ,t \geqslant 0. \tag{2.22}$$

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite mamy

$$P\{\tau_n \leqslant t\} = \sum_{i \in S} P\{\tau_n \leqslant t \,|\, \xi_0 = i\} P\{\xi_0 = i\} = \tag{2.23}$$
$$= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} p_i R_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} p_i Q_{ij}^{(n)}(t).$$

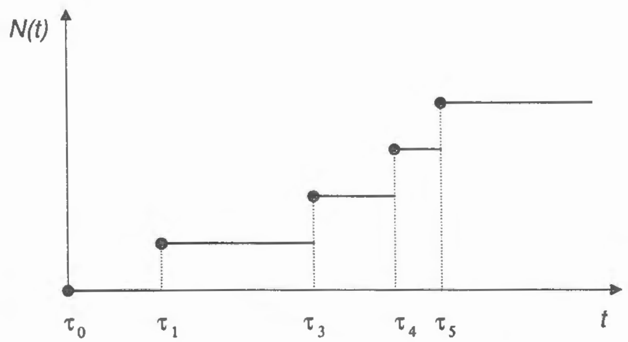
2.2. Definicja procesu semi-markowskiego

DEFINICJA 33. *Proces* $\{N(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *określony wzorem*

$$N(t) = n \quad \text{dla} \quad \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.24}$$

nazywamy procesem liczącym

Fragment jednej z możliwych realizacji tego procesu przedstawiony jest na rysunku 2.8.



Rys. 2.8. Realizacja procesu liczącego

DEFINICJA 34. *Proces losowy*

$$\{X(t) : \; t \in \mathbb{R}_+\}, \tag{2.25}$$

określony za pomocą wzoru

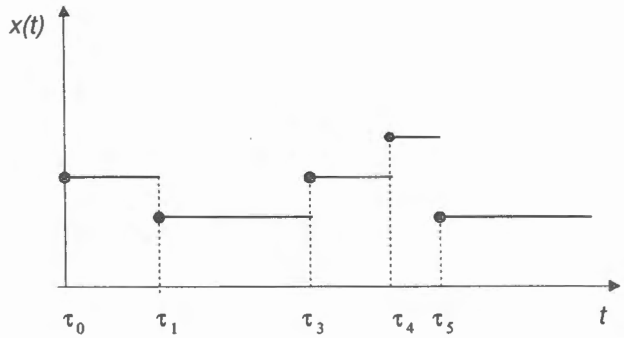
$$X(t) := \xi_{N(t)}$$

nazywamy procesem semi-markowskim o przestrzeni stanów S *i zbiorze parametru* $\mathbb{R}_+$ *generowanym przez markowski proces odnowy* $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *o rozkładzie początkowym* p i jądrze $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Proces semi-markowski jest zdefiniowany wtedy, gdy określone jest jego jądro oraz rozkład początkowy.
Z definicji tej wynika, że

$$X(t) = \xi_n \quad \text{dla} \quad \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Oznacza to, że realizacje procesu SM są funkcjami przyjmującymi stałe wartości w przedziałach $[\tau_n, \tau_{n+1})$. Przykład fragmentu realizacji procesu SM przedstawiony jest na rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Realizacja procesu semi-markowskiego

Z definicji procesu semi-markowskiego wynika również związek

$$X(\tau_n) = \xi_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Oznacza to, że ciąg $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa o zbiorze stanów S, określonym przez rozkład początkowy $p = [p_i : i \in S]$ i macierz prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P} := [p_{ij} : i, j \in S]$, gdzie $p_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{i,j}(t)$.

Ciąg losowy $\{X(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0 \}$ nazywany jest *włożonym łańcuchem Markowa w proces semi-markowski* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$.

DEFINICJA 35. *Proces SM* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *nazywamy procesem regularnym, jeżeli*

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}_+} P\{N(t) < \infty\} = 1. \tag{2.26}$$

Regularność procesu SM oznacza, że w każdym przedziale $[0, t]$ liczba zmian jego stanów jest skończona z prawdopodobieństwem 1.

Równość (2.26) można zastąpić równoważnym związkiem

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}_+} P\{N(t) = \infty\} = 0. \tag{2.27}$$

TWIERDZENIE 21. *Proces SM* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}_+} \lim_{n\to\infty} P\{N(t) \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} P\{\tau_n \leqslant t\} = 0. \tag{2.28}$$

D o w ó d: Z definicji procesu $\{N(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ wynikają równoważności

$$N(t) = \infty \Longleftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} \tau_n \leqslant t \Longleftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} N(t) \geqslant n.$$

Wynika stąd równość zdarzeń

$$\{N(t) = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{\tau_n \leqslant t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{N(t) \geqslant n\}.$$

Zauważmy, że

$$\{N(t) \geqslant 0\} \supset \{N(t) \geqslant 1\} \supset \{N(t) \geqslant 2\} \supset \ldots$$

oraz

$$\{\tau_0 \leqslant t\} \supset \{\tau_1 \leqslant t\} \supset \{\tau_2 \leqslant 2\} \supset \ldots .$$

Korzystamy z własności ciągłości prawdopodobieństwa (miary probabilistycznej) P. Jeżeli $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ oraz $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$, to $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Przyjmując $A_n = \{N(t) \geqslant n\} = \{\tau_n \leqslant t\}$ mamy

$$P\{N(t) = \infty\} = P\{\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{N(t) \geqslant n\}\} =$$

$$= P\{\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{\tau_n \leqslant t\}\} = \lim_{n\to\infty} P\{N(t) \geqslant n\} = \lim_{n\to\infty} P\{\tau_n \leqslant t\}.$$

Z równości tych otrzymujemy równoważności

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_+} P\{N(t) = \infty\} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\{N(t) \geqslant n\} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\tau_n \leqslant t\} = 0.$$

Twierdzenie zostało więc udowodnione. □

TWIERDZENIE 22. *Jeżeli* $E[N(t)] < \infty$, *to proces SM* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *jest regularny.*

D o w ó d: Zauważmy, że

$$E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{N(t) = k\} =$$

$$\begin{aligned} &= P\{N(t) = 1\} + \\ &+ P\{N(t) = 2\} + \quad P\{N(t) = 2\} + \\ &+ P\{N(t) = 3\} + \quad P\{N(t) = 3\} + \quad P\{N(t) = 3\} + \quad \ldots . \end{aligned}$$

Sumując po przekątnych otrzymujemy

$$E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) = k\} + \sum_{k=2}^{\infty} P\{N(t) = k\} + \sum_{k=3}^{\infty} P\{N(t) = k\} + \ldots =$$

$$P\{N(t) \geqslant 1\} + P\{N(t) \geqslant 2\} + P\{N(t) \geqslant 3\} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\} .$$

Na mocy założenia szereg $\sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\}$ jest zbieżny, a zatem $\lim\limits_{m\to\infty} P\{N(t) \geqslant n\} = 0$, co oznacza, że proces jest regularny. $\square$

W pracy Koroluka i Turbina [38] podane jest ważne twierdzenie dotyczące regularności procesów semi-markowskich o *skończonych* zbiorach stanów:

TWIERDZENIE 23. *Każdy proces SM o skończonym zbiorze stanów S jest regularny.*

2.3. Inne sposoby określania procesu semi-markowskiego

Proces semi-markowski został określony za pomocą rozkładu początkowego $\boldsymbol{p}$ oraz jądra odnowy $\boldsymbol{Q}(t)$ definiujących markowski proces odnowy. Istnieją inne sposoby określania procesu semi-markowskiego. Przedstawimy za Korolukiem i Turbinem [38] niektóre definicje procesu semi-markowskiego umożliwiające jego konstrukcję. Wprowadzimy najpierw pojęcia i oznaczenia, które będą niezbędne w dalszych rozważaniach. Niech $P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i\} > 0$. Określamy funkcję

$$F_{ij}(t) = P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t \,|\, \xi_n = i, \xi_{n+1} = j\}\,, \quad i,j \in S,\ t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{2.29}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) = P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t \,|\, \xi_{n+1} = j, \xi_n = i\} &= \frac{P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t, \xi_{n+1} = j, \xi_n = i\}}{P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i\}} = \qquad (2.30)\\ = \frac{P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t,\ \xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}}{P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}} &= \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}} \quad \text{dla} \quad i,j \in S\,,\ \ t \in \mathbb{R}_+\,. \end{aligned}$$

Tak określone funkcje są dystrybuantami rozkładów prawdopodobieństwa. Zmienną losową o rozkładzie danym przez dystrybuantę $F_{ij}(t)$, która stanowi czas trwania stanu $i \in S$ procesu, gdy następnym stanem będzie $j \in S$, oznaczamy symbolem T_{ij}.

Jeżeli $P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i\} = 0$, to jako $F_{ij}(t)$ przyjmujemy dystrybuantę dowolnego rozkładu skoncentrowanego na $\mathbb{R}_+$. W tej sytuacji $p_{ij} = 0$, a więc $Q_{ij}(t) = 0$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Z faktów powyżej przytoczonych wynika równość

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t)\,, \quad i,j \in S, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.31}$$

Z równości tej i wcześniej omawianych pojęć wynika, że markowski proces odnowy $\{(\xi_n, \vartheta_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ a więc i odpowiadający mu proces semi-markowski jest określony wtedy, gdy znany jest jego rozkład początkowy $\boldsymbol{p} = [p_i : \text{ß} \in S]$ macierz prawdopodobieństw przejścia $\boldsymbol{P} = [\, p_{ij} : \ i,j \in S \,]$ łańcucha Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ oraz macierz $\boldsymbol{F}(t) = [F_{ij}(t) : i,j \in S]$ dystrybuant rozkładów zmiennych losowych T_{ij}, $i,j \in S$.

Tak więc trójka $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}(t))$ definiuje proces semi-markowski $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ o dyskretnym zbiorze stanów S.

Ten sposób określania procesu semi-markowskiego jest wygodny dla komputerowego generowania realizacji (trajektorii) tego procesu.

Wiemy, że

$$\sum_{j\in S} Q_{ij}(t) = G_i(t) \quad \text{dla} \quad i \in S\,,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.32}$$

Stąd

$$G_i(t) = P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n = i\}\ i \in S,\ t \in \mathbb{R}_+ . \qquad (2.33)$$

Funkcja ta jest dystrybuantą rozkładu czasu trwania stanu $i \in S$. Zmienną losową oznaczającą czas trwania stanu $i \in S$, o rozkładzie określonym przez dystrybuantę $G_i(t)$ oznaczymy symbolem T_i. Tak więc

$$G_i(t) = P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n = i\} = P\{T_i \leqslant t\}\ ,\ i \in S,\ t \in \mathbb{R}_+ . \qquad (2.34)$$

Korzystając z twierdzenia Radona-Nikodyma można wykazać, że istnieją funkcje $e_{ij}(x), x \in \mathbb{R}_+, i, j \in S$ takie, że

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t e_{ij}(x) dG_i(x)\ . \qquad (2.35)$$

Ponieważ

$$Q_{ij}(t) = P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t, \xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\} = \int_0^t P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i, \vartheta_{n+1} = x\} dG_i(x)\ ,$$

więc

$$e_{ij}(x) = P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i, \vartheta_{n+1} = x\}. \qquad (2.36)$$

Wielkość $e_{ij}(x)$ oznacza zatem prawdopodobieństwo warunkowe przejścia procesu ze stanu i do stanu j, gdy w stanie i proces przebywa przez czas x.

Określamy macierz kwadratową, której elementami są te funkcje:

$$\mathbf{e}(x) = [e_{ij}(x) :\ i, j \in S]\ . \qquad (2.37)$$

Określamy również macierz, której elementami są dystrybuanty rozkładów czasów trwania stanów:

$$\boldsymbol{G}(x) = [G_i(x) :\ i \in S]\ . \qquad (2.38)$$

Ponieważ te dwie macierze definiują jądro odnowy $\boldsymbol{Q}(t)$, więc trójka $(\boldsymbol{p}, \mathbf{e}(t), \boldsymbol{G}(t))$ określa proces semi-markowski o dyskretnym zbiorze stanów.
Przedstawiliśmy trzy równoważne sposoby określania procesu semi-markowskiego:

1. za pomocą pary $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q}(t))$,

2. za pomocą trójki $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}(t))$,

3. za pomocą trójki $(\boldsymbol{p}, \mathbf{e}(t), \boldsymbol{G}(t))$.

Skonstruowanie semi-markowskiego modelu niezawodności polega na określeniu jednym z tych sposobów procesu SM opisującego niezawodnościowe funkcjonowanie obiektu.

Należy dodać, że istnieją jeszcze inne konstrukcyjne definicje procesu SM [38]. Tu podane sposoby określania procesu SM wydają się jednak najbardziej przydatne w zastosowaniach.

2.4. Przykłady procesów semi-markowskich

Przedstawimy kilka prostych lecz ważnych przykładów procesów semi-markowskich.

2.4.1. Proces alternujący

Niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o zbiorze stanów $S = \{0, 1\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & G_0(t) \\ G_1(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.39}$$

gdzie funkcje $G_0(t)$, $G_1(t)$, $t \geqslant 0$ są dystrybuantami rozkładów prawdopodobieństwa skoncentrowanych w $\mathbb{R}_+$. Przyjmujemy, że co najmniej jeden z tych rozkładów ma gęstość. Oznacza to, że jądro jest typu ciągłego. Niech wektor $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2]$ będzie rozkładem początkowym tego procesu. Tak określony proces semi-markowski nazywamy *procesem alternującym*. Jeżeli wartości procesu $0, 1$ będziemy interpretować jako stany niezdatności i zdatności odpowiednio, to proces ten w teorii niezawodności nazywany jest *procesem awarii*.

Jeżeli rozkład początkowy ma postać $\boldsymbol{p} = [0, 1]$, to proces nazywamy *prostym procesem alternującym* lub *prostym procesem awarii*.

Proces semi-markowski określony za pomocą rozkładu początkowego $\boldsymbol{p} = [0, 1]$ i jądra

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t} \\ 1 - e^{-\alpha t} & 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha,\ \beta,\ t \geqslant 0$$

jest przykładem prostego procesu alternującego.
W tym przypadku $G_0(t) = 1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t}$, $G_1(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $t \geqslant 0$.

2.4.2. Proces wzrostu

Proces semi-markowski $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ o zbiorze stanów $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ i jądrze

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & G_0(t) & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & G_1(t) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & G_2(t) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_3(t) & 0 \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

gdzie $G_i(t)$, $i \in \mathbb{N}_0$ są dystrybuantami rozkładów absolutnie ciągłych skoncentrowanych na $\mathbb{R}_+$, nazywamy *procesem wzrostu* albo *procesem urodzeń*. Z definicji tej wynika, że czas trwania stanu $j \in S$ jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie $G_j(t) = P\{T_j \leqslant t\}$, a kolejnym stanem jest $j + 1$.

Jeżeli

$$G_j(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \lambda > 0, \tag{2.41}$$

to proces ten jest *procesem Poissona.*

Jeżeli

$$G_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}\,, \quad G_j(t) = 1 - e^{-j\lambda t}\,, \quad t \geqslant 0\,, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.42}$$

to proces ten jest procesem *Furry'ego-Yule'a.*

Jeżeli

$$G_j(t) = 1 - e^{-2^j t}\,, \quad t \geqslant 0\,, j \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.43}$$

to proces ten jest przykładem procesu semi-markowskiego, który nie jest regularny. Fakt ten uzasadnimy. Jak wiemy chwile zmian stanów procesu τ_n, $n \in \mathbb{N}$ wyrażają się wzorem $\tau_n = \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $P\{\vartheta_{j+1} \leqslant t\} = P\{\vartheta_{j+1} \leqslant t \mid \xi_j = j\} = G_j(t)$, więc

$$\begin{aligned} E(\tau_n) &= E(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2[1 - \frac{1}{2^n}]. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności Czebyszewa dla nieujemnych zmiennych losowych otrzymujemy

$$P\{\tau_n \leqslant t\} \geqslant 1 - \frac{E(\tau_n)}{t} = 1 - \frac{2(1 - \frac{1}{2^n})}{t}, \quad t > 0.$$

Stąd

$$\lim_{n \to \infty} P\{\tau_n \leqslant t\} \geqslant 1 - \frac{2}{t}.$$

Zatem istnieje liczba $t > 0$ (np. $t = 5$), taka że

$$\lim_{n \to \infty} P\{\tau_n \leqslant t\} > 0,$$

co oznacza, że proces ten nie jest regularny.

2.5. Związek procesu Markowa z procesem semi-Markowa

Między rozważanymi tu procesami semi-Markowa a procesami Markowa o dyskretnym zbiorze stanów i parametrze przebiegającym zbiór $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ istnieje ścisły związek. Wyjaśnienie tego związku wymaga podania definicji i niektórych własności procesu Markowa „z ciągłym" parametrem i dyskretnym zbiorem stanów.

DEFINICJA 36. *Proces stochastyczny* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *o dyskretnym (skończonym lub przeliczalnym) zbiorze stanów* S *nazywamy procesem Markowa, jeżeli dla dowolnych* $i, j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$ *oraz* $t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots t_n < t_{n+1}$ *zachodzi*

$$\begin{aligned} P\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0\} = \\ = P\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i\} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Jeżeli chwile $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ będziemy interpretować jako chwile minione (przeszłość), t_n jako chwilę obecną (teraźniejszość), natomiast t_{n+1} jako chwilę nadchodzącą (przyszłość), to z definicji tej wynika, że proces Markowa charakteryzuje się tym, iż jego rozkład warunkowy „przyszłych" stanów nie zależy od „przeszłości", gdy znany jest stan „teraźniejszy" procesu.

DEFINICJA 37. *Proces Markowa nazywamy jednorodnym, jeżeli dla dowolnych* $i, j \in S$ *oraz* $t_n, t_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ *takich, że* $0 \leqslant t_n < t_{n+1}$

$$P\{X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i\} = P\{X(t_{n+1} - t_n) = j \mid X(0) = i\} = p_{ij}(t_{n+1} - t_n). \tag{2.45}$$

Przyjmując $t = t_{n+1} - t_n$ mamy

$$p_{ij}(t) = P\{X(t) = j / X(0) = i\}, \quad i, j \in S, \quad t \geqslant 0.$$

Liczba ta nazywana jest *prawdopodobieństwem przejścia ze stanu i do stanu j po czasie t.*

Z definicji jednorodnego procesu Markowa o dyskretnej przestrzeni stanów wynikają własności prawdopodobieństw przejścia:

(a) $p_{ij}(t) \geqslant 0\ , \quad t \geqslant 0,$

(b) $\sum\limits_{i \in S} p_{ij}(t) = 1,$

(c) $p_{ij}(t+s) = \sum\limits_{i \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s) = 1\ , \quad t \geqslant 0\ , \quad s \geqslant 0$
(równość Smoluchowskiego-Chapmana-Kołmogorowa).

Przyjmujemy ponadto

(d) $\lim\limits_{t \to 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$

TWIERDZENIE 24. *Dla dowolnego jednorodnego procesu Markowa o prawdopodobieństwach przejścia* $p_{ij}(t)$, $i, j \in S$ *zawsze istnieją granice*

$$\lambda_i = \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \leqslant \infty\ , i \in S \tag{2.46}$$

oraz zawsze istnieją skończone granice

$$\lambda_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = p'_{ij}(0) < \infty\ , i, j \in S\ , i \neq j. \tag{2.47}$$

D o w ó d : [19].

Przyjmijmy $\lambda_{ii} = -\lambda_i$. Liczby $\lambda_{ij} \in R \cup \{-\infty\}$, $i, j \in S$ nazywamy *intensywnościami przejścia* lub *intensywnościami zmian stanów* jednorodnego łańcucha Markowa.

Liczby te tworzą macierz

$$\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij}\ :\ i, j \in S]$$

zwaną *macierzą intensywności zmian stanów.*

TWIERDZENIE 25. *Proces Markowa* $\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *o dyskretnym zbiorze stanów* S, *przedziałami stałych i prawostronnie ciągłych realizacjach oraz macierzy intensywności zmian stanów* $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij} : i,j \in S]$ *takiej, że* $0 < -\lambda_{ii} = \lambda_i < \infty$ *jest procesem semi-markowskim o jądrze* $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i,j \in S]$, *gdzie*

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}[1 - \exp(-\lambda_i t)]\,, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

przy czym

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i} \quad \text{dla} \quad i \neq j \quad \text{oraz} \quad p_{ii} = 0\,.$$

D o w ó d: [17], [22].

Tak więc procesy semi-markowskie są ogólniejszą klasą procesów losowych, zawierającą w sobie procesy Markowa o dyskretnym zbiorze stanów i zbiorze parametrów $\mathbb{R}_+$.

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] Howard R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] Iosifescu M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] Jaźwiński J., Borgoń J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] Keilson, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] Kołowrocki K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] Kopociński B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] Kopocińka I., Kopociński B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] Kopocińska I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] Kopociński B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] Korczak E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] Королюк В.С., Турбин А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] Koźniewska I., Włodarczyk M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] Lee T.C., Judge G.G., Zellner A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] Limnios N., Oprisan G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] Limnios N., Oprisan G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-72-3