POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 9

SM model intensywności użytkowania

Intensywność użytkowania jest jedną z wielkości charakteryzującą eksploatację obiektu. Eksploatacja wielu obiektów cechuje się tym, że ich intensywność użytkowania jest zmienna w czasie. Miary intensywności użytkowania mogą być różne. Chwilowe obciążenie silnika samochodowego czy okrętowego można traktować jako intensywność użytkowania. W książce [45] S. Piasecki pisze: „ ... *Na przykład dla środków transportowych intensywnością użytkowania jest liczba przebytych kilometrów na dobę, dla silników liczba przepracowanych godzin pracy na godzinę astronomiczną, dla przekaźników liczba zadziałań na dobę ...* ".

W pracach [45], [44] matematycznym modelem intensywność użytkowania jest funkcja rzeczywista. Często bywa tak, że intensywność użytkowania zmienia się losowo w czasie, a więc naturalnym jej modelem jest proces stochastyczny. Semimarkowski model intensywności użytkowania został przedstawiony w pracach [21], [22].

9.1. Opis i założenia

W wielu przypadkach intensywność użytkowania można opisać za pomocą procesu stochastycznego $\{u^*(t) : t \geqslant 0\}$ o ciągłych, nieujemnych i ograniczonych realizacjach $u^*(\cdot)$ i zbiorze wartości A. Dyskretyzacja tego procesu jest jednym ze sposobów ułatwiającym jego analizę.

Niech

$$A = \bigcup_{k}^{N} A_k\,, \quad \text{gdzie} \quad A_k = [y_{k-1}, y_k).$$

Niech $\{\hat{\boldsymbol{u}}(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem stochastycznym o realizacjach określonych w następujący sposób

$$\hat{u}(t) = u_k \quad \text{dla} \quad t \in {u^*}^{-1}(A_k), \tag{9.1}$$

gdzie $\boldsymbol{u}^{*-1}(A_k)$ oznacza przeciwobraz zbioru A_k.

Symbolem $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ oznaczmy proces stochastyczny o przedziałami stałych, prawostronnie ciągłych realizacjach, który jest stochastycznie równoważny procesowi $\{\hat{\boldsymbol{u}}(t) : t \geqslant 0\}$.

Korzystając z własności Darboux funkcji ciągłych można wykazać, że $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ jest procesem o następującym grafie zmian stanów

Rys. 9.21. Graf zmian stanów procesu $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$

Długości przedziałów $[\tau_0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \ldots, [\tau_n, \tau_{n+1}) \ldots$, w których proces $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ przyjmuje stałe wartości są zmiennymi losowymi o dodatnio skoncentrowanych rozkładach. Wiele wyjściowych procesów użytkowania rozpatrywanych w chwilach τ_n przekraczania stałych poziomów ma własność Markowa. Proces $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ jest więc w tych przypadkach procesem SM o zbiorze stanów $S = \{u_1, \ldots, u_N\}$. Niech $J = \{1, \ldots N\}$ oznacza zbiór numerów stanów.

9.2. Konstrukcja modelu

Z postaci grafu zmian stanów wynika postać jądra procesu $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ Q_{21}(t) & 0 & Q_{23}(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & Q_{N-1N-2}(t) & 0 & Q_{N-1N}(t) \\ 0 & \ldots & 0 & Q_{NN-1}(t) & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa $\{u(\tau_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ ma postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & p_{N-1N-2} & 0 & p_{N-1N} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9.3}$$

gdzie

$$p_{ij} = P\{\boldsymbol{u}(\tau_{n+1} = u_j \mid \boldsymbol{u}(\tau_n = u_i\} = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t). \tag{9.4}$$

Niech

$$p_{k\,k-1} = a_k \quad \text{oraz} \quad p_{k\,k+1} = b_k\,, \quad k = 2, \ldots, N-1. \tag{9.5}$$

Z własności macierzy $\boldsymbol{P}$ wynika, że

$$a_k + b_k = 1.$$

Jak wiemy

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t)\,, \quad t \in [0, \infty)\,, \tag{9.6}$$

gdzie $F_{ij}(\cdot)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej T_{ij} oznaczającej czas trwania stanu u_i, gdy następnym stanem jest u_j.

$$F_{ij}(t) = P\{T_{ij} \leqslant t\} = P\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid \boldsymbol{u}(\tau_{n+1}) = u_j, \boldsymbol{u}(\tau_n) = u_i\}. \tag{9.7}$$

Dla tych i, j, dla których $p_{ij} = 0$ przyjmujemy

$$F_{ij}(t) = C(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad t \geqslant 1 \end{cases}. \tag{9.8}$$

Macierz dystrybuant $\boldsymbol{F}(t) = [F_{ij}(t),\ i,j \in S]$ ma postać

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{bmatrix} C(t) & F_{12}(t) & C(t) & \dots & C(t) \\ F_{21}(t) & C(t) & F_{23}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(t) & \dots & F_{N-1N-2}(t) & C(t) & F_{N-1N}(t) \\ C(t) & \dots & C(t) & F_{NN-1} & C(t) \end{bmatrix}. \qquad (9.9)$$

9.3. Uwagi o estymacji parametrów modelu

Realizacje procesu $\{\boldsymbol{u}^*(t) : t \geqslant 0\}$ pozwalają skonstruować realizacje $u(\cdot)$ procesu $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$. Na podstawie funkcji $u(\cdot)$ można otrzymać liczby n_{ij} oznaczające ilość przejść procesu ze stanu i do stanu j oraz długości $t_{ij}^{(m)}$ odcinków czasowych, które są realizacjami niezależnych zmiennych losowych T_{ij}.

Estymatorem największej wiarygodności prawdopodobieństw przejścia p_{ij} jest statystyka

$$\hat{P}_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} N_{ij}}, \qquad (9.10)$$

a wartość tej statystyki

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} n_{ij}} \qquad (9.11)$$

stanowi oszacowanie prawdopodobieństwa p_{ij}.

Własności estymatora $\hat{P}_{ij}$ oraz sposób jego otrzymania można znaleźć w pracach [39], [40].

Zwróćmy uwagę ,że w omawianym modelu wystarczy oszacować prawdopodobieństwa $a_2, \dots, a_{N-1}$.

Empiryczne dystrybuanty niezależnych zmiennych losowych T_{ij} otrzymujemy na podstawie realizacji $t_{ij}^{(m)}$ znanymi metodami statystyki matematycznej.

9.4. Analiza intensywności użytkowania

Analiza losowej intensywności użytkowania na podstawie zbudowanego modelu matematycznego polega na wyznaczaniu istotnych dla eksploatacji wielkości charakteryzujących proces $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ i ich analizie.

Jedną z charakterystyk procesu użytkowania stanowią graniczne prawdopodobieństwa stanów

$$P_j = \lim_{t \to \infty} P\{\boldsymbol{u}(t) = u_j \,|\, u(0) = u_i\}. \qquad (9.12)$$

Z twierdzenia 34 wynika, że

$$P_j = \frac{\pi_j E(T_j)}{\sum\limits_{k \in S} \pi_k E(T_k)}, \qquad (9.13)$$

przy czym rozkład stacjonarny $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots \pi_N]$ włożonego łańcucha Markowa spełnia równania

$$\pi \dot{P} = \pi, \tag{9.14}$$
$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1,$$

natomiast

$$E(T_i) = \sum_{j \in E} p_{ij} E(T_{ij}). \tag{9.15}$$

Układ równań (9.14) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
a_2\pi_2 &= \pi_1 \\
\pi_1 + a_3\pi_3 &= \pi_2 \\
b_2\pi_2 + a_4\pi_4 &= \pi_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \\
b_{N-1}\pi_{N-1} &= \pi_N \\
\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_N &= 1
\end{aligned}.$$

Wyrażając prawdopodobieństwa $\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_N$ przez π_1 mamy

$$\pi_j = \frac{b_1 b_2 \dots b_{j-1}}{a_2 a_3 \dots a_j} \pi_1 \quad \text{dla} \quad j = 2, 3, \dots, N, \tag{9.16}$$

gdzie

$$b_1 = 1, \quad a_N = 1.$$

Z warunku $\sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$ otrzymujemy

$$\pi_1 = \left(1 + \sum_{j=2}^{N} \prod_{k=2}^{j} \frac{b_{k-1}}{a_k}\right)^{-1}. \tag{9.17}$$

Wartości oczekiwane zmiennych losowych T_i oznaczających czasy trwania stanów w omawianym modelu wyrażają się wzorami

$$E(T_1) = E(T_{12}) = \int_0^\infty [1 - F_{12}(t)]\, dt \tag{9.18}$$

$$E(T_i) = p_{ii-1} E(T_{ii-1}) + p_{ii+1} E(T_{ii+1}) =$$

$$= a_i \int_0^\infty [1 - F_{ii-1}(t)]\, dt + b_i \int_0^\infty [1 - F_{ii+1}]\, dt, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$E(T_N) = E(T_{N\,N-1}) = \int_0^\infty [1 - F_{N\,N-1}(t)]\, dt.$$

Niech

$$m_j = E(T_j)\,, \quad j = 1, \dots N\,.$$

Korzystając ze wzoru (9.13) otrzymujemy rozkład graniczny procesu użytkowania $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$

$$P_1 = \frac{m_1}{m_1 + \sum\limits_{j=2}^{N} \left[\prod\limits_{k=2}^{j} \frac{b_{k-1}}{a_k}\right] m_j}\,, \tag{9.19}$$

$$P_j = \frac{\prod\limits_{k=2}^{j} \frac{b_{k-1}}{a_k} m_j}{m_1 + \sum\limits_{j=2}^{N} \left[\prod\limits_{k=2}^{j} \frac{b_{k-1}}{a_k}\right] m_j}\,, \quad j = 2, \dots, N\,.$$

Znajomość rozkładu granicznego ma istotne znaczenie dla praktyki eksploatacyjnej. Zauważmy, że

$$P_j = \lim_{t \to \infty} P\{\boldsymbol{u}^*(t) \in A_j\}\,.$$

Jeżeli miarą intensywności użytkowania silnika okrętowego w chwili t jest jego obciążenie, to P_j jest prawdopodobieństwem, że w dowolnej chwili, odległej od chwili początkowej obciążenie mieścić się będzie w przedziale $A_j = [y_{j-1}, y_j)$. Znajomość rozkładu obciążeń $[P_1, P_2, \dots P_N]$ pozwala między innymi prognozować zużycie paliwa i emisję spalin.

Zużycie paliwa $\{\boldsymbol{Z}(t) : t \geqslant 0\}$ w przedziale $[0,\ t]$ jest pewnym procesem kumulacji procesu obciążeń

$$Z(t) = \int_0^t h[\boldsymbol{u}(x)]dx\,. \tag{9.20}$$

Jeżeli z_j jest średnim zużyciem paliwa w jednostce czasu przy obciążeniu należącym do przedziału A_j to przybliżona wartość oczekiwana zużycia paliwa w przedziale czasu $[0,\ t]$ wynosi

$$E\,[Z(t)] \approx \sum_{j=1}^{n} P_j\, z_j\, t\,.$$

Kolejną charakterystykę procesu $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ stanowią odstępy czasowe Θ_{ij} między stanami procesu. Zmienna losowa Θ_{ij} oznacza czas, który upływa od chwili, w której obiekt zaczął być użytkowany z intensywnością u_i do chwili, w której intensywność użytkowania obiektu po raz pierwszy osiągnęła stan u_j. Jak wiemy (rozdz. 3), zmienna losowa Θ_{ij} nazywana jest czasem pierwszego przejścia (the first passage time) ze stanu i do stanu j.

Jak wynika z twierdzenia 26 transformaty Laplace'a-Stieltjesa dystrybuant $\Phi_{ij}(t) = P\{\Theta_{ij} \leqslant t\}$ są elementami rozwiązania równania macierzowego

$$(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{q}}_{A'}(s))\, \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{A'}(s) = \tilde{\boldsymbol{b}}(s)\,, \tag{9.21}$$

gdzie

$$A' = J - \{j\},$$

$$\boldsymbol{I} = [\delta_{ik} : i, k \in A'] \tag{9.22}$$

jest macierzą jednostkową, natomiast

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{A'}(s) = [\tilde{q}_{ik}(s) : i, k \in A'] \tag{9.23}$$

jest podmacierzą kwadratową macierzy transformat

$$\tilde{q}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{q}_{12}(t) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{q}_{21}(s) & 0 & \tilde{q}_{23}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \tilde{q}_{N-1N-2}(s) & 0 & \tilde{q}_{N-1N}(s) \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{q}_{NN-1}(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

powstałą przez skreślenie j-tego wiersza oraz j-tej kolumny, natomiast macierze

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{A'}(s) = [\tilde{\phi}_{ij}(s) : i \in A']^T = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{1j}(s) \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{j-1j}(s) \\ \tilde{\phi}_{j+1j}(s) \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{Nj}(s) \end{bmatrix}, \tag{9.25}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}(s) = [\tilde{q}_{ij}(s) : i \in A']^T = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{1j}(s) \\ \vdots \\ \tilde{q}_{j-1j}(s) \\ \tilde{q}_{j+1j}(s) \\ \vdots \\ \tilde{q}_{Nj}(s) \end{bmatrix}. \tag{9.26}$$

są jednokolumnowymi macierzami odpowiednich transformat Laplace'a-Stieltjesa.

Znacznie łatwiej można obliczyć parametry zmiennych losowych $\Theta_{ij}, i, j \in J$. Z twierdzenia 27 wynika, że wartości oczekiwane i drugie momenty tych zmiennych losowych dla $i \neq j$ są jedynymi rozwiązaniami układów równań liniowych

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{A'})\overline{\boldsymbol{\Theta}}_{A'} = \overline{\boldsymbol{T}}_{A'}, \tag{9.27}$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{A'})\overline{\boldsymbol{\Theta}}^2_{A'} = \boldsymbol{B}_{A'}, \tag{9.28}$$

gdzie $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową o $N-1$ wierszach i $N-1$ kolumnach, $\boldsymbol{P}_{A'}$ jest podmacierzą macierzy $\boldsymbol{P}$ powstałą przez skreślenie j-tego wiersza oraz j-tej kolumny oraz

$$\overline{\Theta}_{A'} = \begin{bmatrix} E(\Theta_{1j}) \\ \vdots \\ E(\Theta_{j-1j}) \\ E(\Theta_{j+1j}) \\ \vdots \\ E(\Theta_{Nj}) \end{bmatrix}, \quad \overline{T}_{A'} = \begin{bmatrix} E(T_1) \\ \vdots \\ E(T_{j-1}) \\ E(T_{j+1}) \\ \vdots \\ E(T_N) \end{bmatrix},$$

$$\overline{\Theta}^2_{A'} = \begin{bmatrix} E(\Theta^2_{1j}) \\ \vdots \\ E(\Theta^2_{j-1j}) \\ E(\Theta^2_{j+1j}) \\ \vdots \\ E(\Theta^2_{Nj}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{A'} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{j-1j} \\ b_{j+1j} \\ \vdots \\ b_{Nj} \end{bmatrix} ,$$

$$b_{ij} = E(T_i^2) + 2 \sum_{r \in E, r \neq j} E(T_{ir})(\Theta_{rj}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, N, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Dla $i = j$ mamy

$$E(\Theta_{jj}) = E(T_j) + \sum_{r \in E, r \neq j} p_{jr} E(\Theta_{rj}), \tag{9.29}$$

$$E(\Theta^2_{jj}) = E(T_j^2) + 2 \sum_{r \in E, r \neq j} p_{jr}[2E(T_{jr})E(\Theta_{rj}) + E(\Theta^2_{rj})]. \tag{9.30}$$

Z twierdzenia tego wynika algorytm obliczania parametrów $E(\Theta_{ij}), E(\Theta^2_{ij})$, $V(\Theta_{ij}), \sigma(\Theta_{ij})$.

Zmienność intensywności użytkowania scharakteryzowana jest przez proces stochastyczny $\{V_{ij}(t) : t \geqslant 0\}$, którego wartość w chwili t mówi ile razy w przedziale $[0, t]$ proces $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ osiągnął stan j przy założeniu, że w chwili początkowej był w stanie i. Jak wiemy, proces stochastyczny $\{V_{ij}(t) : t \geqslant 0\}$ jest ogólnym procesem odnowy zdefiniowanym jest poprzez ciąg

$$\Theta^{(1)}_{ij}, \Theta^{(2)}_{jj}, \ldots, \Theta^{(n)}_{jj}, \ldots$$

niezależnych zmiennych losowych.

$$V_{ij}(t) = \sup\{n : \Theta^{(1)}_{ij} + \Theta^{(2)}_{jj} + \ldots + \Theta^{(n)}_{jj} \leqslant t\}. \tag{9.31}$$

Z twierdzenia 38 wynika, że proces $\{V_{ij}(t) : t \geqslant 0\}$ ma rozkład asymptotycznie normalny z wartością oczekiwaną

$$E[V_{ij}(t)] \approx \frac{t - E(\Theta_{ij}) + E(\Theta_{jj})}{E(\Theta_{jj})} \tag{9.32}$$

i odchyleniem standardowym

$$\sigma[V_{ij}(t)] \approx \sqrt{\frac{tV(\Theta_{jj})}{E(\Theta_{jj}]^3)}}. \tag{9.33}$$

Wzór (3.113) pozwala obliczyć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa liczby wejść procesu do stanu j w przedziale $[0, t]$.

Teoria procesów semi-Markowa pozwala wyznaczyć jeszcze inne wielkości związane z intensywnością użytkowania obiektu.

9.5. Przykład liczbowy

Niech $u^*(t)$ oznacza prędkość pojazdu w chwili t. Niech A będzie zbiorem możliwych prędkości. Dokonajmy podziału zbioru A na przedziały

$$A_1 = [y_0, y_1), \quad A_2 = [y_1, y_2), \quad A_3 = [y_2, y_3), \quad A_4 = [y_3, y_4],$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{4} A_k.$$

Proces stochastyczny $\{u^*(t) : t \geqslant 0\}$ zastępujemy procesem semi-Markowa $\{u(t) : t \geqslant 0\}$ o stanach $S = \{1, 2, 3, 4\}$, które odpowiadają przedziałom prędkości A_1, A_2, A_3, A_4.

Macierz prawdopodobieństw przejść włożonego łańcucha Markowa ma postać

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy $p_2 = 0.2$ oraz $p_3 = 0.6$. Zakładamy, że rozkłady zmiennych losowych T_{ij} oznaczających warunkowe czasy trwania stanów procesu intensywności użytkowania $\{u(t) : t \geqslant 0\}$ nie są znane, a jedynie znane są wartości oczekiwane $E(T_{ij})$ oraz drugie momenty $E(T_{ij}^2), i, j \in S$.

Niech

$$\overline{\boldsymbol{T}} = [\,E(T_{ij}) : i, j \in S\,], \quad \overline{\boldsymbol{T}^2} = [\,E(T_{ij}^2) : i, j \in S\,].$$

Przyjmujemy

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{sek}],$$

$$\overline{\boldsymbol{T}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 0 & 0 \\ 37.5 & 0 & 37.5 & 0 \\ 0 & 12 \cdot 10^4 & 0 & 12 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 10^4 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{sek}^2].$$

Prawdopodobieństwa stacjonarne włożonego łańcucha Markowa wyrażają się teraz wzorami

$$\pi_1 = \left(1 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{p_2 a_3} + \frac{b_1 b_2 b_3}{a_2 a_3 a_4}\right)^{-1},$$
$$\pi_j = \frac{b_1 b_2 \ldots b_{j-1}}{a_2 a_3 \ldots a_j}\pi_1 \quad \text{dla} \quad j = 2,3,4.$$

Ponieważ $a_2 = 0.2, a_3 = 0.6, a_4 = 1,\ b_1 = 1, b_2 = 0.8, b_3 = 0.4$, więc

$$\pi_1 = 0.0652, \quad \pi_2 = 0.3260, \quad \pi_3 = 0.4348, \quad \pi_4 = 0.1740.$$

Wartości oczekiwane zmiennych losowych $T_i, i \in S$ oznaczających bezwarunkowe czasy trwania stanów wyrażają się w tym przypadku wzorami

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E(T_{12}), \\ E(T_2) &= p_2 E(T_{21}) + b_2 E(T_{23}), \\ E(T_3) &= p_3 E(T_{32}) + b_3 E(T_{34}), \\ E(T_4) &= E(T_{43}). \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$E(T_1) = 10, \quad E(T_2) = 5, \quad E(T_3) = 300, \quad E(T_4)) = 100 \quad [\text{sek}].$$

Graniczne prawdopodobieństwa stanów procesu $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$ obliczamy na podstawie wzorów (9.13). Po podstawieniu obliczonych wcześniej wartości liczbowych otrzymujemy graniczny rozkład stanów procesu $\{\boldsymbol{u}(t) : t \geqslant 0\}$

j	1	2	3	4
P_j	0.0043	0.0109	0.8689	0.1159

Dalsze wnioski dotyczące intensywności użytkowania wynikają z analizy parametrów zmiennych losowych $\Theta_{ij},\ i,j \in S$ oznaczających odstępy czasowe między stanami procesu intensywności użytkowania. Z równań (9.27), (9.28) oraz w oparciu o wzory (9.29), (9.30) zostały obliczone przy pomocy komputera parametry $E(\Theta_{ij},\ E(\Theta_{ij}^2)$, a także $\sigma(\Theta_{ij})$. Macierz wartości oczekiwanych zmiennych losowych Θ_{ij} ma postać

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 2301.7 & 100 & 18.7 & 781.9 \\ 2291.7 & 460.3 & 8.7 & 771.9 \\ 2858.7 & 566.7 & 345.2 & 763.1 \\ 2958.3 & 666.7 & 100 & 863.1 \end{bmatrix} \quad [\text{sek}].$$

Macierz odchyleń standardowych zmiennych losowych Θ_{ij} ma postać

$$\Xi = \begin{bmatrix} 2733.9 & 100 & 14.5 & 657.9 \\ 2733.8 & 487 & 10.5 & 657.8 \\ 2776.4 & 484.2 & 189.9 & 12657.7 \\ 2778.2 & 494.4 & 100 & 665.3 \end{bmatrix} \quad [\text{sek}].$$

Elementy macierzy $E(\Theta)$ są średnimi czasami upływającymi od chwili, w której pojazd zaczął się poruszać z prędkością A_i do chwili, w której osiągnął prędkość A_j, natomiast elementy macierzy $\sigma(\Theta)$ stanowią odchylenia standardowe. Największe średnie czasy znajdują się w pierwszej kolumnie macierzy $\bar{\Theta}$. Oznacza to, że średnio najwięcej czasu upływa od momentu, w którym pojazd osiągnął prędkość z przedziału A_i do chwili, w której nastąpił spadek prędkości do A_1. Zmienne losowe Θ_{i1} charakteryzują się największymi odchyleniami standardowymi, co oznacza, że możliwe są zarówno bardzo długie, jak i bardzo krótkie czasy przejścia z prędkości A_i do prędkości A_1. Najkrótszy średnio czas (8.7 sek) upływa od chwili, w której pojazd osiągnął prędkość A_2 do chwili osiągnięcia prędkości A_3. Zauważmy, że redukowanie prędkości z A_3 do A_2 następuje w wielokrotnie dłuższym czasie (566.7 sek).
Znajomość wartości oczekiwanych i odchyleń standardowych zmiennych losowych Θ_{ij} pozwala znaleźć parametry procesów $\{V_{ij}(t) : t \geqslant 0\}$, których wartość w chwili t mówi ile razy w przedziale czasu $[0, t]$ pojazd osiągnął prędkość A_j, przy założeniu, że w chwili początkowej był w stanie A_i.

Przyjmijmy, że stanem początkowym jest A_1. Jak wiemy procesy $\{V_{ij}(t) : t \geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4\}$ dla dużego t mają w przybliżeniu rozkłady normalne o wartościach oczekiwanych i odchyleniach standardowych określonych wzorami (9.32), (9.33).

Podstawiając odpowiednie elementy macierzy $\bar{\Theta}$ oraz elementy macierzy Ξ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &E[V_{11}(t)] \approx 0.0004345\,t\,, && \sigma[V_{11}(t)] \approx 0.02474\sqrt{t},\\ &E[V_{12}(t)] \approx 0.0021723\,t + 0.78275\,, && \sigma[V_{12}(t)] \approx 0.04931\sqrt{t},\\ &E[V_{13}(t)] \approx 0.0028969\,t + 0.9458285\,, && \sigma[V_{13}(t)] \approx 0.02960\sqrt{t},\\ &E[V_{14}(t)] \approx 0.0011586\,t + 0.0940799\,, && \sigma[V_{14}(t)] \approx 0.02623\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Przykładowo dla $t_0 = 100\,[\text{godz}] = 100 \cdot 60^2\,[\text{sek}]$ otrzymujemy (tab. 1.):

Tabela 1.

j	1	2	3	4
$E[V_{1j}(t_0)]$	156.4	782.8	1043.8	417.2
$\sigma[V_{1j}(t_0)]$	14.8	29.6	17.8	15.7

Liczba $E(V_{11}(t_0)]$ oznacza, że podczas 100 godzin użytkowania pojazd osiągnie prędkość A_1 średnio 156.4 razy. Prędkość A_3 jest osiągana średnio 1042.7 razy z odchyleniem standardowym 15.7.

Chcąc na przykład obliczyć prawdopodobieństwo, że prędkość A_3 zostanie osiągnięta w ciągu 100 godzin użytkowania od 1020 do 1080 razy korzystamy z faktu, że zmienna losowa $V_{13}(t_0)$ ma rozkład normalny N(1042.7;17.8). Dokonując standaryzacji otrzymujemy

$$P(1020 \leqslant V_{13}(t_0) \leqslant 1080) = \hat{F}(2.06) - \hat{F}(-1.28) = 0.8965.$$

Stochastyczny model intensywności użytkowania oparty o procesy semi-Markowa stwarza możliwość gruntownej analizy losowej intensywności użytkowania, co wyrywkowo zostało pokazane w powyższym przykładzie.

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] HOWARD R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] JAŹWIŃSKI J., BORGOŃ J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-72-3