XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFCZYK
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK Stanisław KACZANOWSKI Tadeusz KACZOREK Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI Tadeusz PUCHAŁKA Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

TEORIA STEROWANIA
– TEORIA SYSTEMÓW

O ZERACH, PODPRZESTRZENIACH ZERUJĄCYCH WYJŚCIE I ZEROWYCH DYNAMIKACH W UKŁADACH LINIOWYCH WŁAŚCIWYCH

Jerzy TOKARZEWSKI

Przemysłowy Instytut Motoryzacji, 03-301 Warszawa, ul. Jagiellońska 55
e-mail: jetokarz@wme.wat.edu.pl

Streszczenie: Rozpatrzono stacjonarny układ liniowy ciągły S(A,B,C,D) o wielu wejściach i wyjściach. Przedstawiono prosty algebraiczny warunek konieczny i dostateczny degeneracji (niedegeneracji) układu. Warunek ten dzieli klasę wszystkich układów S(A,B,C,D) takich, że $D \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ na dwie rozłączne podklasy: układów zdegenerowanych i niezdegenerowanych. W układzie niezdegenerowanym zera Smitha i zera inwariantne są dokładnie tymi samymi obiektami, które określamy jako pierwiastki tzw. wielomianu zerowego. Stopień tego wielomianu jest w tym przypadku równy wymiarowi maksymalnej podprzestrzeni zerującej wyjście układu, a zerowe dynamiki są niezależne od wektora sterowań. W układzie zdegenerowanym wielomian zerowy określa wyłącznie zera Smitha, a zbiór zer inwariantnych jest równy całej płaszczyźnie zespolonej. Ponadto, wymiar maksymalnej podprzestrzeni zerującej wyjście jest większy niż stopień wielomianu zerowego, a zerowe dynamiki są istotnie zależne od wektora sterowań.

Słowa kluczowe: Układy liniowe, metody przestrzeni stanów, zera Smitha, zera inwariantne, zerowe dynamiki, podprzestrzenie zerujące wyjście.

1. WPROWADZENIE

Zerom stacjonarnych układów liniowych o wielu wejściach i wielu wyjściach poświęcono dużo miejsca w literaturze dotyczącej teorii sterowania. Rozróżnia się następujące zasadnicze rodzaje zer: zera odsprzęgające, wśród których wyróżniamy zera odsprzęgające od wejścia, od wyjścia oraz od wejścia i wyjścia, zera Smitha układu definiowane jako zera Smitha jego macierzy systemowej (zwane też tradycyjnie zerami inwariantnymi) oraz zera transmisyjne (które są zerami Smitha podukładu sterowalnego i obserwowalnego). Wszystkie w/w rodzaje zer wprowadził Rosenbrock w początkach lat siedemdziesiątych [8]. Pewien problem stanowił tu jednak brak wyraźnej interpretacji geometrycznej wprowadzonych pojęć w kontekście opisu układu w przestrzeni stanów i zagadnienia zerowania wyjścia. Wprowadzona w [3] interpretacja dynamiczna zer macierzy transmitancji operatorowych zawierała w wektorze sterowań impulsy Diraca i ich pochodne dystrybucyjne, a więc sygnały raczej trudne do realizacji fizycznej. Dzięki wprowadzeniu w [7] pojęcia wektora kierunków zerowych podano prostszą interpretację zer Smitha układu. Ta interpretacja wią-zała już rzeczywisty sygnał zerujący wyjście układu z warunkiem początkowym w przestrzeni stanów (chociaż w sposób niejawny, bowiem została sformułowana w postaci zespolonej).

Przegląd definicji różnych rodzajów zer, ich interpretacji i metod obliczeniowych podano w [9]. Zasygnalizowano tam m.in. algebraiczne podejście do analizy zer oparte o teorię modułów. Podejście to rozwinięto w [2] uznając, że w dalszym ciągu, z teoretycznego punktu widzenia, istnieją w zakresie analizy zer zagadnienia nie do końca jasne. Do takich zagadnień zaliczono m.in. kwestię definicji i algebraicznej krot-ności zer odsprzęgających od wejścia i wyjścia, a także relacje pomiędzy zbiorami (listami) poszczególnych rodzajów zer. Wskutek istnienia wielu różnych definicji, a także wskutek używania tych samych nazw dla różnych definicyjnie zer, w literaturze dotyczącej tych zagadnień panowały przez wiele lat pewne rozbieżności. Sytuacja uległa znacznej poprawie dopiero po ujednoliceniu terminologii w pracach [7], [9], a także w książkach [5], [6].

Inne podejście do zagadnienia zaproponowano w [10]. Dla charakteryzacji zer odsprzęgających użyto tu czteropolowej postaci kanonicznej Kalmana układu uzyskując w ten sposób opis dla poszczególnych rodzajów tych zer jako wartości własnych odpo-wiednich podmacierzy na głównej przekątnej macierzy stanu układu. Wielomiany charakterystyczne tych pod-macierzy określają krotności algebraiczne rozważanych zer odsprzęgających. W ten sposób określono również zera odsprzęgające od wejścia i wyjścia (jako mody nie-sterowalne i nieobserwowalne układu) oraz ich krotności. Dla rozszerzenia pojęcia zer Smitha układu użyto definicji wykorzystującej kierunki zerowe (Definicja 1). Zero inwariantne definiujemy jako liczbę zespoloną, której odpowiada kierunek zerowy o różnym od wektora zerowego kierunku zerowym stanu. Tak zdefiniowane obiekty mają następujące charakte-rystyczne własności. Po pierwsze, każdemu zeru inwar-iantnemu odpowiada pewien rzeczywisty warunek początkowy i pewien rzeczywisty wektor sterowań (ze zbioru sterowań dopuszczalnych przedziałami ciągłych), które generują zerową odpowiedź układu. Ponadto rozwiązanie równania stanu odpowiadające temu warunkowi początkowemu i wspomnianemu sterowaniu jest nietrywialne, a jego trajektoria leży w maksymalnej podprzestrzeni zerującej wyjście. Po drugie, zbiór zer Smitha układu jest zawarty (lub równy) w zbiorze zer inwariantnych. Pojęcie zbiór jest tu używane w klasycznym sensie teoriomnogościowym (element w zbiorze występuje dokładnie jeden raz). Ponadto, zbiór zer inwariantnych może być zbiorem nieskończonym, ale wówczas jest on równy zbiorowi punktów całej płaszczyzny zespolonej.

W takim przypadku układ nazywamy zdegenerowanym. Jeśli jednak zbiór zer inwariantnych jest skończony (lub pusty), to jest on równy zbiorowi zer Smitha układu (układ nazywamy wówczas niezdegenerowanym). Proste przykłady liczbowe wskazują, że istnieją układy, w których zbiór zer Smitha jest pusty, podczas gdy układ jest zdegenerowany. Prowadzi to do wniosku, że zera Smitha układu nie charakteryzują w pełni zaga-dnienia zerowania wyjścia układu, a w szczególności jego zerowych dynamik. Należy zwócić uwagę na fakt, że istnienie nieskończonej ilości zer inwariantnych (zbiór mocy continuum) nie wymaga żadnych specjalnych zabiegów interpretacyjnych w kontekście zagadnienia zerowania wyjścia układu. W najprostszym przypadku (patrz [10, Przykład 2.4, str. 24], a także [13, Przykład 2]), jeśli układ jest zdegenerowany i nie posiada zer Smitha, a jego maksymalna podprzestrzeń zerująca wyjście jest jednowymiarowa, wówczas różnym zerom inwariantnym odpowiadają w ogólności różne punkty startowe na trajektorii rozwiązań (która jest w tym przypadku linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych) oraz różne sposoby i różne prędkości poruszania się punktu po tej trajektorii. Prostym fizycznym przykładem układu zdege-nerowanego jest układ regulacji prędkości silnika obcowzbudnego prądu stałego (w modelu silnika pomijamy tarcie), w którym sygnałami sterującymi są napięcie podawane na zaciski silnika oraz moment obciążenia na wale, a sygnałem wyjściowym jest prędkość obrotowa wału silnika.

Najprawdopodobniej źródłem wieloletnich rozbieżności i nieporozumień w kwestii definicji i interpretacji zer odpowiadających za zerowanie wyjścia było niekompletne potraktowanie zagadnienia zerowania wyjścia układu. Innymi słowy, zadanie poszukiwania wszystkich takich liczb zespolonych, którym można przypisać odpowiedni rzeczywisty warunek początkowy i odpowiednie rzeczywiste sterowanie zerujące wyjście układu nie zostało rozwiązane do końca (ograniczenie się jedynie do zer Smitha nie pozwoliło na wydzielenie przypadku układów zdegenerowanych). Należy też zauważyć, że wspomniane zadanie jest problemem nieliniowym.

W niniejszej pracy rozszerzamy wyniki pracy [13] na układy liniowe właściwe.

2. DEFINICJE I WSTĘPNE REZULTATY

Rozpatrujemy układ S(A,B,C,D) postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}, \tag{1}$$

gdzie $t \geq 0$, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^r$, a macierze $A, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ sa odpowiednich wymiarów. Nie zakładamy nic o liczbie wejść i wyjść układu ani o rzędzie normalnym macierzy systemowej. Zakładamy, że zbiór sterowań dopuszczalnych U składa się ze wszystkich przedziałami ciągłych odwzorowań $u(.) : [0, +\infty) \to R^m$.

Definicja 1 [10].

1) Liczbę $\lambda \in C$ nazywamy zerem inwariantnym układu, (1) jeśli istnieją wektory $0 \neq x^o \in C^n$ (kierunek zerowy stanu) i $g \in C^m$ (kierunek zerowy sterowania) takie, że dla trójki λ, x^o, g zachodzi równość

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^o \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdzie

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3}$$

jest macierzą systemową. Zbiór zer inwariantnych jest oznaczany przez

$$Z^I = \{\lambda \in C : \exists 0 \neq x^o \in C^n \wedge \exists g \in C^m (P(\lambda) \begin{bmatrix} x^o \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})\}$$

Układ (1) jest zdegenerowany, jeśli Z^I jest nieskończony (w przeciwnym razie (1) jest niezdegenerowany).

2) Dla macierzy transmitancji G(s) (takiej, że $\lim_{s \to \infty} G(s) \neq 0$ i granica ta jest skończona) liczba $\lambda \in C$ jest zerem transmisyjnym G(s), jeśli λ jest zerem in-war-iantnym dowolnej realizacji minimalnej (tzn. sterowalnej i obserwowalnej) G(s). G(s) jest zdegenerowana jeśli posiada nieskończoną liczbę zer inwariantnych; w przeciwnym razie G(s) jest niezdegenerowana. ◊

Przez $Z^S := \{\lambda \in C : rank\, P(\lambda) < normal\, rank\, P(s)\}$ oznaczamy zbiór zer Smitha układu (1); składa się on ze wszystkich różnych pierwiastków wielomianu zerowego macierzy systemowej układu. Przypomnijmy, że dla macierzy P(s) o rzędzie normalnym p istnieją macierze unimodularne U(s) i V(s) oraz macierz wielomianowa $\Psi(s)$ (4) taka, że $P(s) = U(s)\Psi(s)V(s)$ oraz wielomiany $\psi_i(s)$ (o współczynnikach przy najwyższej potędze równych 1) mają własność $\psi_i(s) | \psi_{i+1}(s)$ dla

$i = 1,2,..,p-1$ (tzn. $\psi_i(s)$ dzieli bez reszty $\psi_{i+1}(s)$). Macierz $\Psi(s)$ nazywamy postacią kanoniczną Smitha

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} \psi_1(s) & 0 & 0 & . & 0. \\ 0 & . & 0 & . & 0 \\ 0 & 0. & . & 0 & 0 \\ . & . & 0 & \psi_p(s) & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

macierzy P(s), a wielomian $\psi(s) = \psi_1(s)...\psi_p(s)$ nazywamy wielomianem zerowym układu (1). Pierwiastki wielomianu zerowego są (z definicji) zerami Smitha układu (1).

Twierdzenie 1 [11]

W układzie (1) zbiory Z^S i Z^I są powiązane następująco:

(i) $Z^S \subseteq Z^I$

(ii) Układ (1) jest niezdegenerowany $\Leftrightarrow$ $Z^I = Z^S$

(iii) Układ (1) jest zdegenerowany $\Leftrightarrow$ $Z^I = C$.

Twierdzenie 2 [12]

Układ (1) jest zdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy

rząd normalny P(s) $< n +$ rząd$\begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 3 [12]

Układ (1) jest niezdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy

rząd normalny P(s) $= n +$ rząd$\begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix}$.

Niech G(s) będzie *rxm*-wymiarową macierzą transmitancji i niech S(A,B,C,D) (1) będzie *n*-wymiarową realizacją minimalną dla G(s).

Twierdzenie 4

G(s) jest zdegenerowana $\Leftrightarrow$ rząd normalny G(s) $<$ rząd$\begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix}$.

G(s) jest niezdegenerowana $\Leftrightarrow$ rząd normalny G(s) $=$ rząd$\begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix}$.

3. ZERA SMITHA, ZERA INWARIANTNE I ZEROWE DYNAMIKI

Przypomnijmy za [4], że zerowe dynamiki układu (1) to wewnętrzne dynamiki tego układu odpowiadające ograniczeniu $y(t) = 0$ dla każdego $t \geq 0$. Zgodnie z [1] podprzestrzeń $X \subseteq R^n$ jest podprzestrzenią inwariantną zerującą wyjście układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje *mxn*-wymiarowa macierz F taka, że $(A+BF)(X) \subseteq X \subseteq \mathrm{Ker}(C+DF)$. Zbiór wszystkich takich podprzestrzeni dla (1) jest niepusty i posiada dokładnie jeden element maksymalny oznaczany przez $v^*(A,B,C,D)$ i nazywany maksymalną podprzestrzenią zerującą wyjście.

Twierdzenie 5

Jeśli układ S(A,B,C,D) (1) jest niezdegenerowany, wówczas jego zera Smitha i zera inwariantne są tymi samymi obiektami (włączając krotności). Ponadto stopień wielomianu zerowego dla S(A,B,C,D) jest równy wymiarowi podprzestrzeni $v^*(A,B,C,D)$, tzn. $\deg \psi_{S(A,B,C,D)}(s) = \dim v^*(A,B,C,D)$. Zerowe dynamiki układu mają postać $\dot{\xi}(t) = N\xi(t)$, gdzie wielomian charakterystyczny macierzy N jest równy wielomianowi zerowemu dla S(A,B,C,D), a ξ należy do $v^*(A,B,C,D)$ (kiedy ta podprzestrzeń jest wyrażona w odpowiednich współrzędnych).

Twierdzenie 6

Jeśli układ S(A,B,C,D) (1) jest zdegenerowany, wówczas wymiar podprzestrzeni $v^*(A,B,C,D)$ jest większy od stopnia wielomianu zerowego, tzn. $\deg \psi_{S(A,B,C,D)}(s) < \dim v^*(A,B,C,D)$, a zerowe dynamiki zależą w sposób istotny od wektora sterowań.

Twierdzenia 1 oraz 5 i 6 zilustrowano na rys.1.

4. PRZYKŁAD

Dla ilustracji Twierdzenia 6 rozważmy układ (1) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

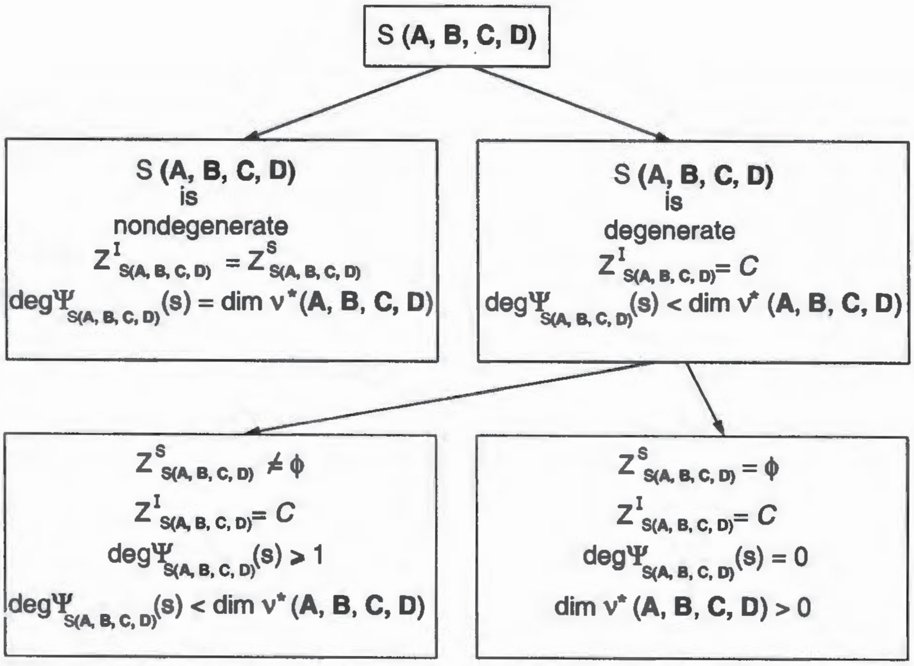
$$C = [0 \ \ 1 \ \ 2], \quad D = [1 \ \ 0],$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2 układ jest zdegenerowany. Wielomian zerowy jest równy $(s+2)(s+3)$. Zgodnie z [10, str. 184, Proposition 6.13(ii)] maksymalna podprzestrzeń zerująca wyjście jest równa $v^*(A,B,C,D) = R^3$. Na mocy [10, str. 49, Proposition 3.6] zerowe dynamiki układu mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) - 8x_3(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -3x_3(t) \end{aligned} ,$$

gdzie $u_2(.) : [0,+\infty) \to R$ jest dowolna przedziałami ciągła.



Rys.1.

5. WNIOSKI

Wyniki prac [10]-[13] oraz niniejszej pracy (Twierdzenia 5 i 6) wskazują, że dla pełnej analizy zjawisk dynamicznych w układach liniowych stacjonarnych (ściśle właściwych lub właściwych) o wielu wejściach i wielu wyjściach konieczne jest wydzielenie podklasy układów zdegenerowanych (Twierdzenia 7, 9 w [13] i Twierdzenia 2 i 4 w niniejszej pracy). Analiza taka wymaga znalezienia wszystkich liczb zespolonych odpowiedzialnych za zerowanie wyjścia układu. Zadanie to jest jednak zagadnieniem nieliniowym. Stąd, zdaniem autora, nawet zaawansowane teorie algebry liniowej (jak np. teoria modułów podana w [2]) nie poradzą sobie z tym zagadnieniem, bowiem opisują one wyłącznie zera Smitha układu. Innym argumentem przemawiającym za koniecznością wydzielenia pod-klasy układów zdegenerowanych jest fakt, że relacje pomiędzy zbiorami poszczególnych rodzajów zer są istotnie różne dla podklasy układów zdegenerowanych i dla podklasy układów niezdegenerowanych.

ON ZEROS, OUTPUT-NULLING SUBSPACES AND ZERO DYNAMICS IN MIMO LTI PROPER SYSTEMS

Abstract: Main differences concerning zeros and the zero dynamics between degenerate and nondegenerate MIMO LTI continuous-time proper systems are discussed.

Literatura

[1] Aling H., Schumacher J.M. (1984) A nine-fold canonical decomposition for linear systems. *Int. J. Contr.*, **39**, 779-805.

[2] Bourles H., Fliess M. (1997) Finite poles and zeros of linear systems: an intrinsic approach. *Int. J. Contr.*, **68**, 897-922.

[3] Desoer C.A., Schulman J.D. (1974) Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **21**, 13-8.

[4] Isidori A. (1995) *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag.

[5] Kaczorek T. (1992) *Linear Control Systems*, I. Taunton, UK, Research Studies Press,

[6] Kailath T. (1980) *Linear Systems*. Prentice Hall.

[7] MacFarlane A.G.J., Karcanias N. (1976) Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory. *Int. J. Contr.*, **24**, 33-74.

[8] Rosenbrock H.H. (1970) *State-Space and Multivariable Theory*. Nelson-Wiley.

[9] Schrader C.B., Sain M.K. (1989) Research on system zeros: a survey. *Int. J. Contr.*, **50**, 1407-1433.

[10] Tokarzewski J. (2002) *Zeros in Linear Systems: a Geometric Approach*. Publishing House of the Warsaw University of Technology.

[11] Tokarzewski J. (2004) Relationship between Smith zeros and invariant zeros in linear systems. *Archives of Control Sciences*, 14(L), 15-26.

[12] Tokarzewski J. (2004) A note on some characterization of invariant zeros in singular systems and algebraic criteria of nondegeneracy. *Int. J. of Appl. Math. and Comput. Sci.*, **14**, 149-159.

[13] Tokarzewski J. (2004) A note on zeros, output-nulling subspaces and zero dynamics in MIMO LTI systems. *Archives of Control Sciences*, **14**(L), 179-199.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2