

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

TEORIA STEROWANIA
– TEORIA SYSTEMÓW

MINIMALIZACJA PARY MACIERZY (A,B) UKŁADU 2D OPISANEGO MODELEM OGÓLNYM ZA POMOCĄ GRAFÓW ODDZIAŁYWAŃ

Konrad MARKOWSKI*

*Politechnika Warszawska, Wydział Elektryczny, ISEP
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa e-mail: markowski@iseppw.edu.pl

Streszczenie: W artykule zaproponowano prostą metodę minimalizacji pary macierzy (A, B) układu 2D opisanego modelem ogólnym używając w tym celu, dwuwymiarowych grafów oddziaływań. Podano procedurę minimalizacji, która zilustrowano przykładem numerycznym.

Słowa kluczowe: osiągalność, grafy dwuwymiarowe, układy 2D, procedura, realizacja.

1. WSTĘP

W ostatnim okresie obserwuje się spore zainteresowanie układami dwuwymiarowymi w odróżnieniu od układów jednowymiarowych, w których znane są metody wyznaczania minimalnej realizacji w układach dwuwymiarowych problem minimalnej realizacji nie jest taki prosty.

Celem tej pracy jest podanie minimalizacji pary macierzy (A, B) układu dwuwymiarowego za pomocą dwuwymiarowych grafów skierowanych. Zaproponowana procedura została zilustrowana przykładem numerycznym.

2. OPIS UKŁADU DWUWYMIAROWEGO

Weźmy pod uwagę ogólny dodatni model dwuwymiarowy opisany równaniami

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + \\ &+ B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1,j} + B_2 u_{i,j+1} \\ y_{ij} &= C x_{ij} + D u_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu w punkcie (i, j) , $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń (sterowań), $y_{ij} \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, natomiast $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $k = 0, 1, 2$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ i $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Definicja 1 Model (1) nazywamy (wewnętrznie) dodatnim modelem ogólnym, jeżeli dla wszystkich warunków brzegowych

$$x_{i0} \in \mathbb{R}_+^n, \quad x_{0j} \in \mathbb{R}_+^n, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (2)$$

oraz każdego ciągu wymuszeń $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m$ mamy $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$ oraz $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^p$.

Definicja 2 Macierz przejścia T_{ij} dodatniego modelu ogólnego (1) nazywamy macierz określoną następująco

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n & i, j = 0 \\ A_0 T_{i-1,j-1} + A_1 T_{i,j-1} + A_2 T_{i-1,j} & i+j > 0 \\ 0 & i < 0, j < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Lemat 1 Macierz przejścia T_{ij} dodatniego modelu ogólnego (1) jest macierzą dodatnią, tzn. $T_{ij} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ dla $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Twierdzenie 1 Model (1) jest modelem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k = 0, 1, 2, \\ C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m} \end{aligned} \quad (4)$$

W naszych rozważaniach będziemy zajmowali się przypadkiem szczególnym drugiego modelu Fornasini-Marchesiniego dla $A_0 = 0$, $B_0 = B_2 = 0$ o postaci

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B_1 u_{i+1,j} \\ y_{ij} &= C x_{ij} + D u_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

3. OSIĄGALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DWUWYMIAROWYCH

Definicja 3 Model (1) nazywamy osiągalnym w punkcie $(h, k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, jeżeli dla zerowych warunków brzegowych (2) oraz dla każdego wektora $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ istnieje ciąg sterowań $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m$ taki, że $x_{hk} = x_f$.

Jeżeli x_f jest osiągalny w punkcie (h, k) wówczas powiemy, że stan x_f jest osiągalny w $h+k$ krokach. Liczbę kroków $h+k$ nazywamy indeksem osiągalności i oznaczamy przez I_R , ($I_R = h+k$).

Definicja 4 Macierz monomialną nazywamy macierz rozmiaru $n \times n$ zawierającą n liniowo niezależnych kolumn takich, że w każdej z nich znajduje się dokładnie jeden element dodatni a pozostałe są równe zero.

Twierdzenie 2 Ogólny model dodatni dwuwymiarowy (1) jest osiągalny, jeżeli macierz osiągalności

$$R_{hk} = \begin{bmatrix} M_0 & M_1^1 & \dots & M_j^2 & \dots & M_{ij} & \dots \end{bmatrix}$$

$$R_{hk} \in \mathbb{R}^{n \times [(h+1)(k+1)-1]n} \quad (6)$$

gdzie

$$M_0 = T_{h-1, k-1} B_0$$

$$M_i^1 = T_{h-i, k-1} B_1 + T_{h-i-1, k-1} B_0 \quad \text{dla } 1 \leq i \leq h$$

$$M_j^2 = T_{h-1, k-j} B_2 + T_{h-1, k-j-1} B_0 \quad \text{dla } 1 \leq j \leq k$$

$$M_{ij} = T_{h-i-1, k-j-1} B_0 +$$

$$+ T_{h-i, k-j-1} B_1 + T_{h-i-1, k-j} B_2 \quad \begin{matrix} \text{dla } 1 \leq i \leq h, \\ 1 \leq j \leq k, \\ i + j \neq h + k \end{matrix}$$

zawiera macierz monomialną o rozmiarze $n \times n$.

Uwaga 1 Jeżeli z macierzy A_k i B_k , $k = 0, 1, 2$ możemy wybrać macierz monomialną rozmiaru $n \times n$ to układ opisany równaniem (1) jest osiągalny.

Wniosek 1 Na podstawie macierzy A_k i B_k , $k = 0, 1, 2$ możemy stwierdzić czy rozpatrywany układ jest osiągalny, natomiast nie jesteśmy w stanie stwierdzić jakie są wartości wskaźników h i k .

Twierdzenie 3 Jeżeli dodatni model dwuwymiarowy opisany równaniem (1) jest osiągalny, wówczas jest on osiągalny w $2(n+1)$ krokach, to znaczy

$$I_{R_{gr=1}} \leq 2(n+1) \quad (7)$$

Twierdzenie 4 Jeżeli drugi model Fornasinięgo-Marchesiniego opisany równaniem (5) jest osiągalny w punkcie $(h, k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ przy zerowych warunkach brzegowych (2) to jest on osiągalny co najmniej w n_w krokach

$$I_{R_{d=1}} \geq n_w \quad (8)$$

gdzie n_w jest liczbą wierzchołków w grafie skierowanym.

Z twierdzenia 3 i 4 wynika następujący wniosek.

Wniosek 2 Na podstawie twierdzenia 3 i twierdzenia 4 jesteśmy w stanie stwierdzić, jaka jest wartość górnego i dolnego indeksu osiągalności, natomiast nie jesteśmy w stanie powiedzieć ile wynoszą wskaźniki h i k .

4. GRAFY DWUWYMIAROWE

Po raz pierwszy pojęcie dwuwymiarowego grafu skierowanego zostało wprowadzone w pracy [2].

Definicja 5 Dwuwymiarowym grafem skierowanym oddziaływał $D^{(2)}$ (krótko grafem skierowanym) nazywamy szóstok $(s, V, A_1, A_2, B_1, B_2)$ gdzie s jest źródłem (wejściem), $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest zbiorem wierzchołków, A_1, A_2 są podzbiorem $V \times V$, których elementy nazywane są A_1 -łukami i A_2 -łukami oraz B_1, B_2 są podzbiorem $s \times V$, których elementy nazywane są B_1 -łukami i B_2 -łukami.

Dwuwymiarowy graf skierowany możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 1 .

Krok 1. Istnieje A_1 -łuk (A_2 -łuk) z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j wtedy i tylko wtedy gdy (i, j) element macierzy A_1 (A_2) jest niezerowy.

Krok 2. Istnieje B_1 -łuk (B_2 -łuk) ze źródła s do wierzchołka v_i wtedy i tylko wtedy, gdy i -ty element macierzy B_1 (B_2) jest niezerowy.

Uwaga 2 A_1 -łuki i B_1 -łuki rysujemy innym kolorem niż A_2 -łuki i B_2 -łuki. W naszych rozważaniach została przyjęta następująca konwencja: A_1 -łuki i B_1 -łuki rysujemy linią ciągłą kolorem czarnym, natomiast A_2 -łuki i B_2 -łuki rysujemy linią przerywaną i kolorem szarym.

Niżej zostaną wprowadzone podstawowe pojęcia z dziedziny teorii grafów, które będą wykorzystywane w dalszych rozważaniach [1], [2], [5].

Definicja 6 Trasa w danym grafie skierowanym $D^{(2)}$ nazywamy skończony ciąg łuków, w którym każde dwa kolejne wierzchołki v_i i v_j są albo sąsiednie albo identyczne.

Definicja 7 Trasa, w której wszystkie łuki są różne nazywamy ścieżką

Definicja 8 Ścieżka, która przechodzi przez wszystkie różne wierzchołki nazywamy drogą skończoną

5. PROCEDURA WYZNACZANIA OBSZARU OSIĄGALNOŚCI

Rozważmy następujący problem. Dane są macierze A_1 , A_2 oraz B_1 . Należy wyznaczyć na podstawie analizy grafów skierowanych $D^{(2)}$ obszar osiągalności.

Poniżej zostanie podana propozycja wyznaczenia wskaźników h i k polegająca na zliczaniu odpowiednich łuków (A_1 - i B_1 -łuków oraz A_2 - i B_2 -łuków) w grafie skierowanym [6].

Propozycja 1 Niech k_1 (h_2) będzie liczbą łuków łączących wierzchołki v_i z wierzchołkiem v_j ; macierzy A_1 i B_1 (A_2 i B_2) występujących w drodze skończonej a n_w liczbą wierzchołków występujących w grafie skierowanym. Wtedy wskaźnik h_1 (k_2) obliczamy z zależności

$$h_1 = n_w - k_1, \quad (k_2 = n_w - h_2) \quad (9)$$

Z propozycji 1 wynika następująca procedura wyznaczenia obszaru osiągalności dodatnich układów dwuwymiarowych.

Procedura 2 .

Krok 1. Mając dane macierze A_1 , A_2 i B_1 zgodnie z procedurą 1 rysujemy graf skierowany;

Krok 2. Na podstawie grafu skierowanego wyznaczamy wszystkie drogi skończone;

Krok 3. Dla każdej drogi skończonej stosując propozycję 1 wyznaczamy wskaźniki h_1 i k_1 ;

Krok 4 Wyznaczamy górny (7) i dolny (8) indeks osiągalności;

Krok 5 Dla każdej drogi skończonej wyznaczamy obszar osiągalności;

Krok 6 Łącząc skrajne wierzchołki wyznaczamy całkowity obszar osiągalności.

Rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 1 Mając dane macierze

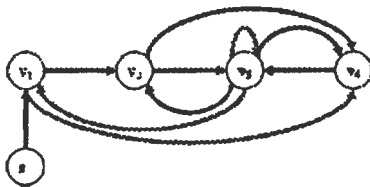
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć obszar osiągalności.

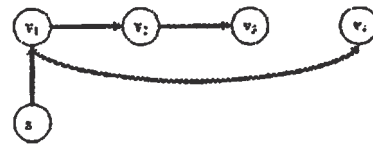
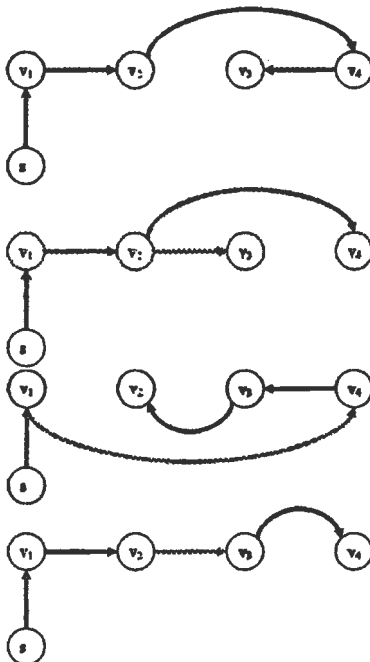
Korzystając z procedury 2 otrzymujemy kolejno

Krok 1. Rysujemy graf skierowany układu (11)



Rys. 1. Graf skierowany układu (11)

Krok 2. Na podstawie grafu skierowanego wyznaczamy wszystkie drogi skończone (rysunek 2)



Rys. 2. Drogi skończone grafu układu (11)

Krok 3. Dla każdej drogi skończonej stosując propozycję 1 wyznaczamy wskaźniki h_1 i k_1 .

Droga skończona 1 - rys 2a, $k_1 = 4$; $h_1 = n_w - k_1 = 1$

Droga skończona 2 - rys 2b, $k_1 = 3$; $h_1 = n_w - k_1 = 2$

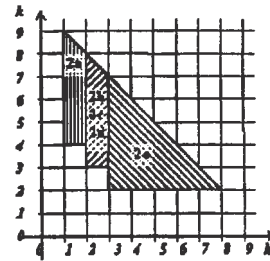
Droga skończona 3 - rys 2c, $k_1 = 3$; $h_1 = n_w - k_1 = 2$

Droga skończona 4 - rys 2d, $k_1 = 3$; $h_1 = n_w - k_1 = 2$

Droga skończona 5 - rys 2e, $k_1 = 2$; $h_1 = n_w - k_1 = 3$

Krok 4 Wyznaczamy dolny i górny indeks osiągalności $I_{R_{dolny}} = n_w = 5$, $I_{R_{gorny}} = 2(n+1) = 2(4+1) = 10$

Krok 5. Dla każdej drogi skończonej wyznaczamy obszar osiągalności.



Rys. 3. (11)

Krok 6. Łącząc skrajne wierzchołki wyznaczamy całkowity obszar osiągalności układu (11)

Całkowity obszar osiągalności pokrywa się z obszarem wszystkich dróg skończonych z rysunku.

6. MINIMALIZACJA PARY MACIERZY (A, B)

Mając dany układ wyjściowy niezredukowany opisany równaniami należy tak uprościć strukturę macierzy A_1 , A_2 i B_1 żeby mowy układ minimalny był osiągalny w tym samym obszarze.

Definicja 9 Układ nazywamy zredukowanym wtedy i tylko wtedy, gdy obszar osiągalności układu minimalnego pary macierzy (A, B) pokrywa się z obszarem osiągalności układu niezredukowanego.

Dowód. Jeżeli obszar osiągalności układu minimalnego nie pokrywa się z obszarem osiągalności układu niezredukowanego, wówczas istnieje taki zbiór stanów $x_{hk} \in X$, dla których ciąg sterowań u_{ij} nie przeprowadzi układu z punktu x_f do punktu x_{hk} (rys).

Twierdzenie 5 Obszar osiągalności układu minimalnego pokrywa się z obszarem osiągalności układu niezredukowanego wtedy i tylko wtedy, gdy oba układy będą posiadały te same drogi skończone.

Dowód. Zgodnie z definicją ścieżka skończona przechodząca przez wszystkie wierzchołki jest drogą skończoną. Oznacza to, że każdy stan układu może zostać osiągnięty w minimalnej liczbie kroków. Zatem istnieje jeden wektor sterowań u_{ij} taki sam dla układu minimalnego i niezredukowanego, dla którego $x_f = x_{hk}$.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura minimalizacji pary macierzy (A, B) układu dwuwymiarowego opisanego równaniami (1).

Procedura 3.

Krok 1. Mając dane macierze A_1, A_2 i B_1 zgodnie z Procedurą 1 rysujemy graf skierowany układu (5)

Krok 2. Na podstawie grafu skierowanego układu wyznaczamy wszystkie drogi skończone $d_s = 1, 2, \dots$;

Krok 3. Dla każdej drogi skończonej d_s stosując propozycję 1 wyznaczamy wskaźniki $h_1^{(d_s)}$ i $k_1^{(d_s)}$ ($h_2^{(d_s)}$ i $k_2^{(d_s)}$)

Krok 4. Dla każdej drogi skończonej d_s wyznaczamy dolny i górny indeks osiągalności;

Krok 5. Dla każdej drogi skończonej wyznaczamy obszar osiągalności;

Krok 6. Dokonujemy sumowanie obszarów osiągalności dróg skończonych o różnych wskaźnikach $h_1^{(d_s)}$ i $k_1^{(d_s)}$ ($h_2^{(d_s)}$ i $k_2^{(d_s)}$);

Krok 7. Wyznaczamy nowe macierze $A_1^{(min)}$, $A_2^{(min)}$ i $B_1^{(min)}$.

Przykład 2 Mając dane macierze (11) dokonać minimalizacji pary macierzy (A, B) .

Stosując procedurę 3 otrzymujemy kolejno.

Krok 1-5. Tak samo jak w Przykładzie 1.

Krok 6. Dokonujemy sumowanie obszarów osiągalności dróg skończonych o różnych wskaźnikach $h_1^{(d_s)}$ i $k_1^{(d_s)}$ ($h_2^{(d_s)}$ i $k_2^{(d_s)}$). Zgodnie z tym co przedstawiono na rysunku niektóre drogi skończone pokrywają ten sam obszar osiągalności. Zatem otrzymujemy następujące rozwiązanie.

Rozwiązanie 1 - droga skończona: 1, 2, 5

Dokonujemy sumowania grafów oddziaływań poszczególnych dróg skończonych wchodzących w skład rozwiązania, co przedstawiono na rysunku. Dla nowego zminimalizowanego układu ze względu na parę macierzy (A, B) piszemy nowe macierze

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W analogiczny sposób postępujemy z pozostałym rozwiązaniem 2 i 3.

Rozwiązanie 2 - droga skończona: 1, 3, 5

Rozwiązanie 3 - droga skończona: 1, 4, 5.

7. PODSUMOWANIE

W pracy prostą metodę minimalizacji pary macierzy A_k i B_k , $k = 1, 2$ układu dwuwymiarowego opisanego modelem ogólnym, którą następnie zilustrowano przykładem numerycznym. Do wyznaczania wszystkich dróg skończonych w dwuwymiarowym grafie skierowanym użyto prostego algorytmu przedstawionego w pracy.

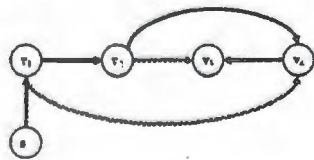
Celem dalszych badań będzie uogólnienie metody na układy opisane modelem ogólnym i układy opisane modelem Roeslera oraz rozszerzenie metody na minimalizację czwórki macierzy (A_k, B_k, C_i, D) .

MINIMALIZATION OF MATRIX PAIR (A, B) OF 2D SYSTEMS DESCRIBED BY GENERAL MODEL USING TWO DIMENSION DIGRAPH

Abstract: A method for minimal realization of pair matrix (A, B) of the positive 2D systems using the two dimension digraph theory is proposed. A procedure for minimal realization is also proposed. The procedure is illustrated by the numerical example.

References

- [1] Fornasini E., Valcher M. E. (1998) Primitivity of positive matrix pairs: algebraic characterization, graph theoretic description and 2D system interpretation. SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 19, No. 1, pp 71-88.
- [2] Fornasini E., Valcher M. E. (2003) On the positive reachability of 2D positive systems. Positive Systems, LNCIS 294, 297-304.
- [3] Kaczorek T. (2003) 1D and 2D Positive Systems Springer Verlag, London
- [4] Kaczorek T. (2004) Reachability index of the positive 2D general models. Bull. Pol. Acad. Tech., vol. 52, No. 1.
- [5] Markowski K. (2004) Użycie grafów oddziaływań do wyznaczania obszaru osiągalności dodatnich układów 2D opisanych modelem ogólnym. Międzynarodowe Warsztaty Doktoranckie, Archiwum Konferencji PTE-TiS, vol. 19, 85-91
- [6] Markowski K., Szlenk M., Twardy M. (2004) A simple algorithm for determining finite paths in a two dimensional digraph, Workshop, Warszawa



Rys. 4. (11)



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2