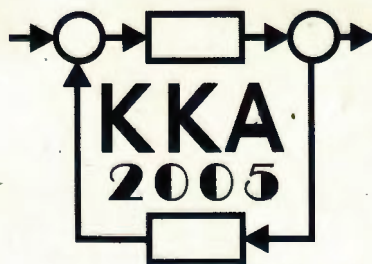


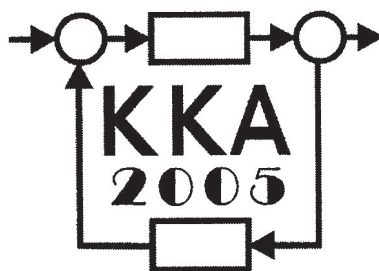
XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ,
OBSERWOWALNOŚĆ

METODY STABILIZACJI

Wojciech MITKOWSKI

Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: wmi@ia.agh.edu.pl

Streszczenie: W niniejszej pracy zamieszczono podstawowe informacje dotyczące problemów stabilizacji systemów dynamicznych. Przedstawiono filozofię stosowania stabilizującego sprzężenia zwrotnego oraz algorytmy syntezy różnych typów sprzężeń zwrotnych. Rozważa się modele matematyczne systemu i systemu zamkniętego w postaci odpowiednich równań różniczkowych. W przypadku liniowych sprzężeń zwrotnych stosuje się również model w postaci transmitancji. Omówiono również podstawy matematyczne projektowania stabilizującego sprzężenia zwrotnego.

Słowa kluczowe: Stabilizacja, stabilizacja skończenie wymiarowa, sprzężenie zwrotne, problem LQ.

1. WPROWADZENIE

Istnieje wiele sformułowań różnych typów zadań sterowania dla układu dynamicznego opisanego równościami

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), u(t), t), \\ t \in T &= [t_0, \infty), \quad x(t) \in X, \quad u(t) \in U \end{aligned} \quad (1)$$

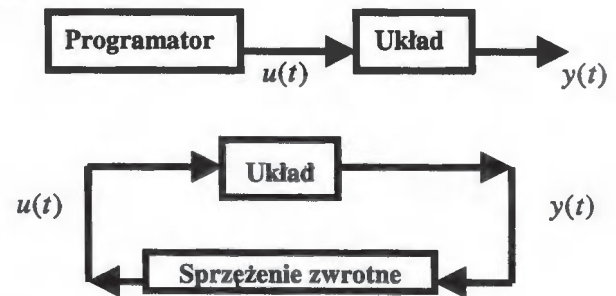
$$y(t) = f_2(x(t), u(t), t), \quad y(t) \in Y, \quad (2)$$

gdzie X, Y, U są odpowiednimi przestrzeniami Hilberta. W praktyce często spotykamy się z tak zwanym problemem nadążania, w którym szukamy sterowania takiego, by trajektoria stanu x lub trajektoria wyjścia y z układu możliwie dokładnie odtwarzała przebieg zadanej z góry funkcji czasu. Jeżeli funkcja czasu, za którą odpowiednia trajektoria układu ma nadążać, jest równa zero, a czas sterowania jest nieskończony, to wtedy mówimy o problemie stabilizacji. W tym miejscu warto zauważyć, że problem nadążania za dowolną funkcją czasu przy nieskończonym czasie sterowania można przeformułować na odpowiedni problem stabilizacji do zera. Zob. np. [19, s. 20].

Problem stabilizacji może mieć wiele rozwiązań. Realizację poszczególnych rozwiązań można otrzymać stosując otwartą lub zamkniętą strukturę sterowania (zob. rys. 1).

Ze względów praktycznych ważne jest poszukiwanie zależności określających sprzężenie zwrotne. Zastosowanie

sprzężenia zwrotnego w rzeczywistym systemie sterowania jest w zasadzie jedynym sposobem likwidacji na bieżąco różnego rodzaju zakłóceń oraz odchyłek, wynikających z niedokładnej oceny parametrów, z błędnej oceny warunków początkowych lub ze zbyt upraszczających założeń poczynionych przy tworzeniu modelu.



Rys. 1. Otwarty i zamknięty układ sterowania.

Zwykle rozważa się następujące sprzężenia zwrotne: statyczne sprzężenie zwrotne

$$u(t) = f(y(t), t), \quad (3)$$

oraz dynamiczne sprzężenie zwrotne

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= f_3(w(t), y(t), t), \quad w(t) \in W \\ u(t) &= f_4(w(t), y(t), t) \end{aligned} \quad (4)$$

W przypadku statycznego sprzężenia zwrotnego (3) zadanie stabilizacji można sformułować następująco: szukamy funkcji f takiej, by układ zamknięty (1), (2), (3) miał własność globalnej asymptotycznej stabilności. Funkcja f , która jest rozwiązaniem zadania stabilizacji, określa regulator stabilizujący układ (1), (2).

W przypadku dynamicznego sprzężenia zwrotnego (4) zadanie stabilizacji można sformułować następująco: szukamy funkcji f_3 i f_4 takich, by układ zamknięty (1), (2), (4) miał własność globalnej asymptotycznej stabilności.

W zadaniach stabilizacji można żądać innych rodzajów stabilności. Dla przykładu można żądać asymptotycznej stabilności lub wykładniczej stabilności z odpowiednim

obszarem przyciągania asymptotycznego. Często również stawia się dodatkowe wymagania od układu zamkniętego. Można żądać na przykład zadanego z góry współczynnika tłumienia lub zadanych z góry częstości drgań własnych układu.

Zauważmy, że przy analizie układu (1), (2) ze statycznym lub dynamicznym sprzężeniem zwrotnym występują trudności w określeniu modelu sytemu zamkniętego. Dla przykładu wstawiając (3) do (2) otrzymamy

$$y(t) = f_2(x(t), f(y(t), t), t), \quad (5)$$

czyli równanie uwikłane względem $y(t)$. Równanie tego typu można rozwickłać np. w przypadku układów liniowych, ale też przy pewnych dodatkowych założeniach. Tego rodzaju problem nie występuje, gdy wyjście $y(t)$ nie zależy bezpośrednio od wartości chwilowych sterowania $u(t)$.

Rozważmy zatem w miejsce (2) wyjście z systemu (1) określone w następujący sposób:

$$y(t) = f_2(x(t), t), \quad y(t) \in Y, \quad (6)$$

przy czym dodatkowo zakładamy, że

$$f_1(0, 0, t) = 0, \quad f_2(0, t) = 0, \quad t \in T. \quad (7)$$

Teraz system zamknięty (1), (6), (3) można opisać następującymi równościami:

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), f(f_2(x(t), t), t), t), \quad (8)$$

$$y(t) = f_2(x(t), t). \quad (9)$$

W tym przypadku zadanie stabilizacji można sformułować następująco: szukamy funkcji f określającej regulator (3) takiej, że $f(0, t) = 0, t \in T$ oraz $x = 0$ jest asymptotycznie stabilnym rozwiązaniem równania różniczkowego (8).

W przypadku dynamicznego sprzężenia zwrotnego (4) otrzymujemy następujący system zamknięty (1), (6), (4):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), f_4(w(t), f_2(x(t), t), t), t) \\ \dot{w}(t) &= f_3(w(t), f_2(x(t), t), t) \end{aligned} \quad (10)$$

z równaniem wyjścia (6).

Zadanie stabilizacji można sformułować następująco: szukamy funkcji f_3 i f_4 takich, że $f_3(0, 0, t) = 0$ i $f_4(0, 0, t) = 0$ dla $t \in T$ oraz $x = 0$ i $w = 0$ stanowią asymptotycznie stabilne rozwiązanie układu równań różniczkowych (10).

Badanie stabilności zerowego punktu równowagi układu (10) nie zmniejsza ogólności rozważań. Badanie stabilności wybranego rozwiązania układu (10) można

bowiem zawsze sprowadzić do badania stabilności zerowego punktu równowagi pewnego innego układu równań różniczkowych.

Warto również zauważyć, że z faktu istnienia rozwiązań układu otwartego (1) nie wynika istnienie rozwiązań układu zamkniętego. W przypadku nieliniowych sprzężeń zwrotnych można napotkać tu na znaczne trudności przy wykazywaniu istnienia trajektorii systemu zamkniętego.

Zatem powstaje naturalny problem jak badać własności stabilności systemu zamkniętego (8) lub (10)? Praktycznie wykorzystuje się tu dwie metody, stosunkowo proste w przypadku stacjonarnym. Metodę linearyzacji oraz metodę funkcjonałów Lapunowa.

Zauważmy, że w przypadku stacjonarnym systemu (8) i (10) można przedstawić w formie układu o następującej postaci:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad F(0) = 0, \quad (11)$$

gdzie $x(t)$ należy do odpowiedniej przestrzeni stanów X . W metodzie linearyzacji prawą stronę równania (11) przedstawia się w postaci

$$\begin{aligned} F(z) &= Az + \varphi(z), \quad \varphi(0) = 0, \\ |z| \rightarrow 0 &\Rightarrow |\varphi(z)| / |z| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (12)$$

System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (13)$$

nazywamy liniowym przybliżeniem układu nieliniowego (11). Zwykle $A = F'(0)$. Fundamentalnym twierdzeniem o linearyzacji jest twierdzenie Grobmana-Hartmana (np. [8, s. 13, 18]). Nie wnikając w szczegóły twierdzenie można sformułować następująco: zachowanie trajektorii systemów (11) i (13) w pewnym otoczeniu zera są „podobne” wtedy, gdy

$$\det[j\omega I - A] \neq 0, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1. \quad (14)$$

Dokładniej, pomiędzy trajektoriami układów (11) i (13) istnieje w pewnym otoczeniu zera homeomorfizm h , czyli odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne i takie, że

h i h^{-1} są ciągłe. Innymi słowy mówimy wtedy, że układy (11) i (13) są równoważne topologicznie. Rozważa się również inne rodzaje równoważności: równoważność liniową, gdy istnieje odpowiedni izomorfizm liniowy oraz równoważność różniczkowalną, gdy istnieje

odpowiedni dyfeomorfizm (h i h^{-1} są różniczkowalne). Praktycznie ważnym problemem jest poszukiwanie efektywnych metod wyznaczania przekształcenia h . Poincare w pracy doktorskiej rozważał zamianę zmiennych (wielomianową), która prowadziła do przekształcenia równania nieliniowego w równanie liniowe.

Równości (11) i (13) przedstawiają układ nieliniowy i jego liniowe przybliżenie. Warunek (12) jest spełniony,

gdy macierz A nie posiada wartości własnych na osi urojonej. Systemy liniowe generowane przez macierze spełniające warunek (12) są nazywane układami hiperbolicznymi. Własność hiperboliczności jest tak zwaną własnością typową układu dynamicznego. Pewna własność jest własnością typową, gdy zbiór układów posiadających tę własność jest otwarty i gęsty w zbiorze wszystkich rozważanych układów dynamicznych. Dla przykładu liniowymi układami typowymi są układy generowane przez macierze posiadające wyłącznie pojedyncze wartości własne, wymienione wyżej układy hiperboliczne oraz układy sterowalne. Układ nieliniowy jest strukturalnie stabilny, gdy w jego otoczeniu istnieją układy o podobnej dynamice. Układy strukturalnie stabilne nadają się do „bezpiecznego” modelowania rzeczywistości. Taki model jest mało wrażliwy na zmiany parametrów i jego własności mogą być traktowane jako własności realnego procesu. Smale (1965) pokazał, że istnieją układy przy $n > 2$, w których otoczeniu nie istnieją układy stabilne strukturalnie (praca doktorska). Układy stabilne strukturalnie nie są gęste.

Konsekwencją twierdzenia Grobmana-Hartmana jest tak zwana I Metoda Lapunowa (metoda linearyzacji) badania asymptotycznej stabilności. Rozważmy układy (11) i (13). Jeżeli liniowe przybliżenie (13) jest asymptotycznie stabilne ($\text{Re } \lambda(A) < 0$), to zero jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu nieliniowego (11). Przybliżony obszar przyciągania asymptotycznego do zera można wyznaczyć wykorzystując funkcjonal Lapunowa, np. dla przybliżenia liniowego.

Teraz krótko omówimy metodę funkcjonałów Lapunowa, dokładniej tak zwaną Zasadę LaSalle'a. Niech $v: X \supset \Omega_l \rightarrow R$ będzie funkcjonałem dodatnio określonym takim, że dla pewnej liczby dodatniej l mamy

$$l > v(z) > 0, \quad z \in \Omega_l, \quad z \neq 0 \quad (15)$$

Dalej niech

$$\dot{v}(z) = \frac{\partial v(z)}{\partial z} F(z) \leq 0, \quad z \in \Omega_l \quad (16)$$

oraz niech M będzie maksymalnym zbiorem inwariantnym układu (11) zawartym w zbiorze E ,

$$E = \{z \in \Omega_l : \dot{v}(z) = 0\}. \quad (17)$$

Każda trajektoria systemu (11) startująca ze zbioru Ω_l dąży do M przy czasie zmierzającym do nieskończoności (LaSalle i Lefschetz 1966 [14, s. 64]).

Niech zbiór Ω będzie zbiorem przyciągania asymptotycznego do zera układu (11). Zwykle zbiór przyciągania otrzymany z zasady LaSalle'a jest mniejszy od Ω , $\Omega_l = \{z : v(z) \leq l\}$, $\Omega_l \subset \Omega$.

Stosowany do danego układu funkcjonal Lapunowa można również wykorzystać do oceny szybkości zmierzania trajektorii stanu do zera. Niech

$$\gamma = \max_z [-v(z) / \dot{v}(z)], \quad z \in \Omega_l, \quad z \neq 0 \quad (18)$$

Zatem jest $-v(x(t)) / \dot{v}(x(t)) \leq \gamma, t \in T = [0, \infty)$, czyli ostatecznie mamy następujące oszacowanie prędkości zmierzania do zera

$$v(x(t)) \leq v(x(0)) e^{-t/\gamma}, \quad t \in T = [0, \infty). \quad (19)$$

W przypadku ogólnym synteza stabilizującego sprzężenia zwrotnego nie jest zadaniem łatwym. Zwykle proponuje się dokonanie linearyzacji układu (1), (2) lub (1), (6) wokół punktu pracy wyznaczonego przez parę szczególnych funkcji u i x . W przypadku wolnozmiennych parametrów w wyniku linearyzacji można otrzymać system liniowy stacjonarny, dla którego znane są algorytmy syntezy stabilizującego sprzężenia zwrotnego.

2. DLACZEGO SPRZĘŻENIE ZWROTNE ?

Rozważmy system (1), ale stacjonarny, i jego liniowe przybliżenie o następującej postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (20)$$

gdzie A i B są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach. Problem stabilizacji dla systemu (20) można sprowadzić do zadania poszukiwania klasy sterowań $u(t), t \in T = [0, \infty)$, które zapewnią utrzymanie rozwiązania równania (20) w pobliżu zera. Dobra teoria matematyczna podpowiada dwie metody poszukiwania takich sterowań. Jedna wykorzystuje metodę funkcjonałów Lapunowa oraz druga wykorzystuje tak zwany problem LQ.

Niech $v(z) = z^T Vz > 0, V = V^T$, będzie funkcjonałem

Lapunowa systemu (20) przy $u = 0$ takim, że $V = V^T$ spełnia równanie Lapunowa

$$A^T V + VA = -G, \quad (21)$$

gdzie $G^T = G$ jest ustaloną z góry macierzą dodatnio określoną. Rozwiązanie równania Lapunowa (21)

względem $V = V^T$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Re } \lambda(A) < 0$. Dalej mamy

$$\dot{v}(x(t)) = -x(t)^T Gx(t) + 2x(t)^T VBu(t), \quad (22)$$

gdzie \dot{v} jest pochodną po czasie t funkcjonału v liczoną na trajektoriach systemu (20). Jeżeli np.

$$u(t) = Kx(t), \quad K = -B^T V, \quad (23)$$

to z równości (22) widać, że $\dot{v}(x(t)) < 0$, czyli system (20) z $u(t)$ danym wzorem (23) jest asymptotycznie stabilny. Równość (23) określa sprzężenie zwrotne od stanu systemu (regulator określony na stanie systemu).

Drugim podejściem, które prowadzi nas w sposób naturalny do pojęcia sprzężenia zwrotnego jest odpowiednio sformułowany problem LQ. Rozważmy system (20) i następujący wskaźnik jakości (zob. np. [19, s. 79]):

$$J(u, x(0)) = \int_0^{\infty} [x(t)^T W x(t) + u(t)^T S u(t)] dt, \quad (24)$$

gdzie $W^T = W \geq 0$, $S^T = S > 0$ są macierzami odpowiednio dodatnio półokreśloną i dodatnio określoną. Zauważmy, że minimalizacja wskaźnika (24) prowadzi do utrzymywania trajektorii stanu systemu (20) w pobliżu zera przy stosunkowo niedużym koszcie sterowania. Jeżeli para $(A; B)$ jest stabilizowalna i para $(W; A)$ jest wykrywalna, to istnieje dokładnie jedno symetryczne i dodatnio półokreślone rozwiązanie D algebraicznego równania Riccati'ego [7, s. 180]

$$A^T D + DA - DBS^{-1}B^T D + W = 0 \quad (26)$$

oraz istnieje dokładnie jedno sterowanie u takie, że

$$J(u; x(0)) \leq J(\xi, x(0)), \quad \forall \xi, \quad (27)$$

przy czym

$$u(t) = K x(t), \quad K = -S^{-1}B^T D. \quad (28)$$

Równość (28) określa sprzężenie zwrotne od stanu systemu (regulator określony na stanie systemu). System zamknięty (20), (28) jest asymptotycznie stabilny, czyli $\text{Re } \lambda(A + BK) < 0$.

3. OSZACOWANIE ZBIORU PRZYCIĄGANIA

Niech $v(z) = z^T V z > 0$, $V = V^T$, będzie funkcjonałem Lapunowa (systemu zamkniętego (20), (28) lub (20), (23) generowanego przez macierz stanu $A + BK$) takim, że $V = V^T$ spełnia równanie Lapunowa

$$[A + BK]^T V + V[A + BK] = -I. \quad (29)$$

Równanie (20) jest liniowym przybliżeniem układu nieliniowego

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(x(t)) + \varphi(x(t), u(x(t))). \quad (30)$$

Wykorzystując twierdzenie LaSalle'a (LaSalle i Lefschetz 1966 [6, s. 64]), poszukujemy teraz największego l , przy którym $v(z) = z^T V z > 0$ będzie również funkcjonałem Lapunowa systemu nieliniowego (30), czyli takiego, dla którego zachodzi również poniższe oszacowanie [1, s. 136, 138]

$$2 \max_{v(z) \leq l} \{z^T V \varphi(z, Kz) / v(z)\} < 1 / \lambda_{\max}(V). \quad (31)$$

Niech zbiór Ω będzie zbiorem przyciągania asymptotycznego do zera układu (30). Zwykle zbiór przyciąga-

nia otrzymany z zasady LaSalle'a przy wyżej określonym sposobie wyznaczenia l jest mniejszy od Ω , $\Omega_l = \{z : v(z) \leq l\}$, $\Omega_l \subset \Omega$.

4. METODA TRANSMITANCJI

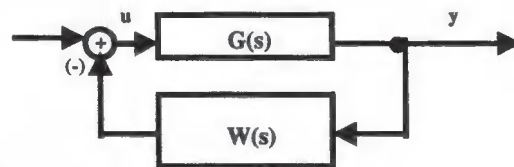
Wykorzystując odpowiednie aproksymacje modelu matematycznego układu dynamicznego w postaci transmitancji można stosunkowo prosto syntetyzować stabilizujące sprzężenie zwrotne (zob. np. [19, s. 243]). Dla przykładu transmitancja układu macierzowego (20) z wyjściem

$$y(t) = Cx(t), \quad (32)$$

gdzie C jest macierzą rzeczywista odpowiednich wymiarów, ma następującą postać:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B. \quad (33)$$

Istotę metody projektowania stabilizującego sprzężenia zwrotnego pokażemy na prostym przykładzie.



Rys. 2. Schemat układu regulacji.

Rozważmy układ regulacji pokazany na rys. 2. Zadaniem naszym jest znalezienie transmitancji $W(s)$ takiej, by układ zamknięty był asymptotycznie stabilny.

Załóżmy, że transmitancja dynamicznego sprzężenia zwrotnego $W(s)$ i transmitancja $G(s)$ mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$G(s) = M(s)^{-1}N(s), \quad W(s) = X_2(s)X_1(s)^{-1}, \quad (34)$$

przy czym $M(s)$, $N(s)$, $X_1(s)$, $X_2(s)$ są macierzami, których elementy należą do odpowiednich pierścieni funkcji wymiernych.

Transmitancja układu zamkniętego pokazanego na rys. 2 ma postać

$$L(s) = G(s)[I + W(s)G(s)]^{-1}. \quad (35)$$

Z równości (34) i (35) widać, że równanie charakterystyczne układu zamkniętego (zob. mianownik transmitancji układu zamkniętego) ma postać

$$\det \alpha(s) = 0, \quad (36)$$

gdzie

$$\alpha(s) = M(s)X_1(s) + N(s)X_2(s) \quad (37)$$

Układ zamknięty będzie układem asymptotycznie stabilnym wtedy, gdy równanie $\det \alpha(s) = 0$ będzie miało pierwiastki o częściach rzeczywistych ujemnych. Synteza stabilizującego sprzężenia zwrotnego sprowadza się zatem do znalezienia macierzy $X_1(s)$ i $X_2(s)$ przy zadanych macierzach $M(s)$ i $N(s)$ oraz przy zadanym wielomianie $\det \alpha(s)$ asymptotycznie stabilnym. Jest tu pewna swoboda wyboru, bo mamy jedno równanie (37), a poszukujemy dwóch macierzy $X_1(s)$ i $X_2(s)$.

Przedstawienie macierzy $G(s)$ i $W(s)$ w postaci (34) jest nazywane faktoryzacją (Kaczorek 1998, [9, s. 154]). Istnieją efektywne algorytmy wyznaczania macierzy $M(s), N(s), X_1(s), X_2(s)$ przy zadanych macierzach wielomianowych $G(s)$ i $W(s)$.

W celu zachowania dostatecznej precyzji rozważań należy wprowadzić pewne pojęcia, dotyczące odpowiednich pierścieni (zbiorów, w których są określone dwa działania wewnętrzne: dodawanie i mnożenie, z odpowiednimi własnościami) wielomianów (Opiał 1976, [27, s. 47, 140, 150, 209]). I tak, zbiór wszystkich wielomianów skończonego stopnia o postaci

$$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (38)$$

$$a_i \in R, \quad k < \infty$$

tworzy pierścień wielomianów zmiennej z nad pierścieniem R , który oznaczamy symbolem $R[z]$. Natomiast zbiór wielomianów skończonego stopnia $n < \infty$ o postaci

$$a_n(z) s^n + a_{n-1}(z) s^{n-1} + \dots + a_1(z) s + a_0(z), \quad (39)$$

$$a_i(z) \in R[z], \quad n < \infty$$

tworzy pierścień wielomianów zmiennej s nad pierścieniem wielomianów $R[z]$, który oznaczamy symbolem $R[z][s] = R[z, s]$.

Transmitancja $G(s)$ w przypadku ogólnym (np. w przypadku systemów nieskończenie wymiarowych; dla systemów z opóźnieniem $z = \exp(-sh)$) jest macierzą prostokątną, przy czym jej elementami są funkcje wymierne typu

$$g(s) = b(z, s) / a(z, s), \quad \text{stop } b \leq \text{stop } a \quad (40)$$

$$a(z, s) \in R[z, s], \quad b(z, s) \in R[z, s]$$

Elementy $g(s)$ należą do pierścienia funkcji wymiernych, który oznaczamy symbolem $R[z](s)$. Przez $R[z](s)_{as}$ oznaczamy podpierścień pierścienia $R[z](s)$ złożony z funkcji wymiernych, których mianowniki stanowią wielomiany asymptotycznie stabilne. Dla przykładu wielomian występujący w układach z

opóźnieniem $a(z, s) \in R[z, s]$, $z = \exp(-hs)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a(\exp(-hs), s) \neq 0$ dla $s: \operatorname{Re} s \geq 0$; np. [19, s. 244].

Dynamiczne sprzężenie zwrotne (zob. rys. 2) jest przedstawione w postaci transmitancji macierzowej $W(s)$, która jest określona przez macierze $X_1(s)$ i $X_2(s)$. Elementy macierzy $X_1(s)$ i $X_2(s)$ należą do pierścienia $R[z, s]$ lub $R[z](s)$. Stabilizator skończenie wymiarowy $W(s)$ otrzymujemy stosując odpowiednie aproksymacje macierzy $X_1(s)$ i $X_2(s)$ elementami pierścienia $R[s]$ lub $R(s)$. W tym celu wykorzystuje się zwykle aproksymacje Padego (funkcja rozwijalna w szereg jest przybliżana skończoną funkcją wymierną) lub odpowiednim skończonym szeregiem Fouriera; np. [19, s. 247].

5. WARUNKI STABILIZOWALNOŚCI

Rozważmy układ (20), przy czym zakładamy, że $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, X i U są odpowiednimi przestrzeniami Hilberta. Niech A będzie generatorem infinitezimalnym C_0 -półgrupy $T(t) \in L(X)$, $t \geq 0$ w przestrzeni X [28, s. 4] oraz niech $B \in L(U, X)$. Przez $L(U, X)$ oznaczamy przestrzeń operatorów liniowych ciągłych $S: U \rightarrow X$ z naturalną normą określoną następująco: $\|S\| = \sup\{\|Sv\|_X : \|v\|_U \leq 1\}$. Niech

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in L(X, U). \quad (41)$$

Układ (20) jest wykładniczo stabilizowalny przez sprzężenie (41) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operacja $K \in L(X, U)$ taka, że system zamknięty

$$\dot{x}(t) = [A + BK]x(t). \quad (42)$$

jest wykładniczo stabilny, czyli gdy istnieją stałe $c > 0$ i $\alpha < 0$ takie, że norma w X rozwiązania systemu zamkniętego $\|S(t)v\| \leq c \exp(\alpha t)$ dla $t \geq 0$ i $v \in X$. Zadanie stabilizacji polega na znalezieniu K takiego, by generator systemu zamkniętego $A + BK$ był generatorem wykładniczo stabilnym.

W przypadku, gdy A jest macierzą, to $T(t) = e^{At}$.

Ogólnie zachodzi oszacowanie $\|T(t)\| \leq M e^{\alpha t}$, $M \geq 1, \alpha \geq 0$. Jeżeli $M = 1, \alpha = 0$, to $T(t)$ jest nazywana półgrupą kontrakcji (półgrupą zwięzającą). W szczególnych przypadkach oszacowanie można poprawić tak, że zachodzi ono dla $\alpha > \alpha_0(A)$, przy czym

$$\alpha_0(A) = \inf\{\alpha : \|T(t)\| \leq M(\alpha) \exp(\alpha t), t \geq 0\}. \quad (43)$$

Dalej niech (np. [19, s. 180])

$$\alpha_1(A) = \sup\{\operatorname{Re} s : s \in \lambda(A)\}, \quad (44)$$

gdzie $\lambda(A)$ jest widmem A . W przypadku ogólnym zachodzi następująca nierówność

$$\alpha_1(A) \leq \alpha_0(A), \quad (45)$$

czyli wzrost normy $\|T(t)\|$ nie jest determinowany przez widmo $\lambda(A)$ generatora półgrupy A . Jeżeli generator jest wykładniczo stabilny, to $\alpha_0(A) < 0$. Jeżeli $\alpha_1(A) < 0$, to A nie musi być generatorem wykładniczo stabilnym.

Następujące sformułowania są sobie równoważne (np. [19, s. 187]):

1. Układ (20) jest wykładniczo stabilizowalny.
2. Para $(A; B)$ jest stabilizowalna wykładniczo.
3. $\forall x(0) \in X, \exists u: \int_0^{\infty} [|x(t)|^2 + |u(t)|^2] dt < +\infty$.
4. Istnieje operator samosprzężony $P \geq 0$ spełniający algebraiczne równanie Riccatiego o postaci $(PAv | v) + (v | PAv) + (v | v) - (Pv | Pv) = 0$, $v \in D(A)$.
5. Dla każdego $x(0) \in X$ istnieje u takie, że u i x zbiegają wykładniczo do zera, gdy $t \rightarrow \infty$, przy czym x jest rozwiązaniem łagodnym równania (20) przy sterowaniu u i warunku początkowym $x(0) \in X$.

Jeżeli A i B są macierzami, to para $(A; B)$ jest stabilizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rzad}[s_i I - A; B] = n, \forall s_i \in \lambda(A): \text{Re } s_i \geq 0$, (46) przy czym n jest wymiarem macierzy kwadratowej A .

Uwaga 1. Przy pewnych założeniach układ (20) można ustabilizować za pomocą regulatora $u(t) = -B^* x(t)$. Niech A będzie generatorem półgrupy kontrakcji oraz niech A ma zwartą rezolwentę $R(s, A) = [sI - A]^{-1}$, to gdy $(A; B)$ jest aproksymatywnie sterowalna [11, s. 130, 135], to $A - BB^*$ jest generatorem półgrupy $S(t)$ słabo asymptotycznie stabilnej, czyli $(S(t)v | h) \rightarrow 0$, przy $t \rightarrow \infty$ dla $v, h \in X$ [19, s. 188]. Przy dodatkowych założeniach o dekompozycji układu $A - BB^*$ jest generatorem wykładniczo stabilnym [30], [19, s. 189].

6. METODA OGRANICZONEJ PERTURBACJI

Rozważmy równanie (20) ogólnie w przestrzeni Banacha X . Niech $u(t) = Kx(t)$. Wtedy operator systemu zamkniętego ma postać $A + D, D = BK$. Niech A będzie generatorem infinitezimalnym C_0 -półgrupy $T(t) \in L(X), t \geq 0$ w przestrzeni $X, L(X)$ oznacza przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych $X \rightarrow X$. Niech $D \in L(X)$. Wtedy $A + D$ jest generatorem

infinitezimalnym C_0 -półgrupy $S(t) \in L(X), t \geq 0$, przy czym jeżeli (Kato 1980, [10, s. 497])

$$\|T(t)\| \leq M e^{\alpha t} \quad \text{to} \quad \|S(t)\| \leq M e^{(\alpha + M \|D\|)t}. \quad (47)$$

W tym miejscu warto pamiętać, że w szczególnych przypadkach własności generatora A są przenoszone na generator $A + D$, czyli na generator systemu zamkniętego. Dla przykładu, jeżeli A jest generatorem infinitezimalnym C_0 -półgrupy analitycznej dla $t > 0$ oraz $D \in L(X)$, to $A + D$ generuje C_0 -półgrupę analityczną (Pazy 1983, [28, s. 81]). Jeżeli A jest operatorem dyskretnym, to $A + D$ też jest operatorem dyskretnym (np. [19, s. 192]).

7. METODA DEKOMPOZYCJI

Istnieje klasa układów nieskończenie wymiarowych, którą można stabilizować w prosty sposób wykorzystując techniki skończenie wymiarowe. Rozważmy system $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$

$$x(t) \in X, \quad u(t) \in U, \quad y(t) \in Y \quad (48)$$

Niech układ (48) spełnia następujące założenia:

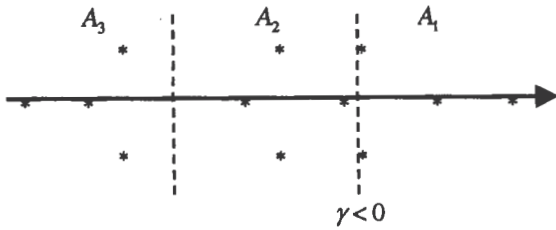
- **Z-1.** X, Y, U – przestrzenie Hilberta, $\dim U < +\infty, \dim Y < +\infty$.
- **Z-2.** A jest generatorem infinitezimalnym C_0 -półgrupy $T_A(t), t \geq 0$ w X .
- **Z-3.** $B \in L(U, X), C \in L(X, Y)$, operatory ograniczone.
- **Z-4.** A jest operatorem dyskretnym posiadającym w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > \beta, \beta < +\infty$, skończoną liczbę wartości własnych.

Przy powyższych założeniach Z-1, Z-2, Z-3, Z-4 układ (48) można zdekomponować w następujący sposób (Triggiani 1975 [32]):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u(t), \quad (49)$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t), \\ x_i(t) \in X_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad X = X_1 + X_2 + X_3, \\ \dim X_1 < +\infty, \quad \dim X_2 = p < +\infty. \quad (50)$$

Widmo układu (48) pokazano na rys. 3. Operator A_1 jest związany z tą częścią widma, która powoduje niestabilność układu (lub słabe tłumienie). Operatory A_2 i A_3 są wykładniczo stabilne.



Rys.3. Widmo dyskretne układu (48).

Dalej niech będą spełnione dodatkowo następujące założenia:

- Z-5. $\sup\{\text{Re } s : s \in \lambda(A_3)\} < \sup\{\text{Re } s : s \in \lambda(A_2)\} = \gamma < 0$
- Z-6. Para $(A_i; B_i)$ sterowalna i para $(C_i; A_i)$ obserwowalna
- Z-7. $\dim X_2 = p \rightarrow +\infty \Rightarrow \|B_3\| \rightarrow 0$ i $\|C_3\| \rightarrow 0$.

Założenie Z-7 jest spełnione wtedy, gdy np. generator samosprężony ma zwartą rezolwentę (wektory własne tworzą wtedy bazę przestrzeni).

Rozważmy następujące dynamiczne sprzężenie zwrotne [19, s. 233]:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - G_1 C_1 + B_1 K_1 & -G_1 C_2 \\ B_2 K_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} y(t), \quad (51)$$

$$u(t) = K_1 w_1(t), \quad w_i(t) \in X_i, \quad i = 1, 2.$$

Niech będą spełnione założenia Z-1 do Z-7. Istnieje skończenie wymiarowy stabilizator (51) taki, że układ zamknięty (48), (51) jest wykładniczo stabilny z zadany z góry współczynnikiem tłumienia $\alpha \in (\gamma, 0)$. Zob. (Sakawa 1983 [29]) oraz [16-18], [19, s. 230]).

Projektowanie sprzężenia zwrotnego (51) sprowadza się do wyznaczenia macierzy K_1 i G_1 , co można wykonać technikami stosowanymi przy projektowaniu układów skończenie wymiarowych, np. projektowanie LQ, np. [19, s. 71, 78], [20], [22]. Pożądany współczynnik tłumienia $\alpha \in (\gamma, 0)$ otrzymujemy zwiększając stopniowo parametr $p = \dim X_2$.

8. PRZYKŁADY

Teraz podamy kilka przykładów stabilizacji wykorzystujących powyższe metody oraz kilka uwag o innych metodach.

Przykład 1. Jeżeli $b(z)$ i $c(z)$ są odpowiednimi funkcjami, np. prostokątnymi, to układ (zob. np. [18], [19, s. 237], [22])

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \pi^{-2} \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + b(z)u(t), \quad z \in (0,1),$$

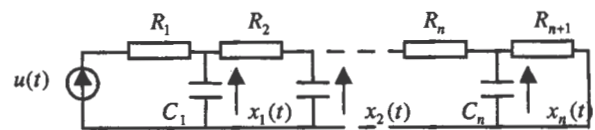
$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial x(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad t \geq 0, \quad (52)$$

$$x(z,0) = x^0(z), \quad z \in (0,1),$$

$$y(t) = \int_0^1 c(z)x(z,t) dz.$$

może być stabilizowany powyższą metodą, projektując dynamiczne sprzężenie zwrotne w postaci (51). Układ (52) jest przykładem systemu z samosprężonym operatorem A o zwartej rezolwencji, który posiada wyłącznie widmo dyskretne spełniające założenie Z-4. □

Przykład 2. Rozważmy elektryczny układ łańcuchowy pokazany na rys. 4, przy czym $R_i > 0$ i $C_i > 0$ są dane.



Rys. 4. Elektryczny układ łańcuchowy.

Układ ten można opisać równościami (48) z następującymi macierzami (wypisanych poniżej dla przykładu przy $n = 5$):

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$a_i = \frac{1}{R_i C_i}, \quad c_i = \frac{1}{R_{i+1} C_i}, \quad b_i = -(a_i + c_i), \quad (54)$$

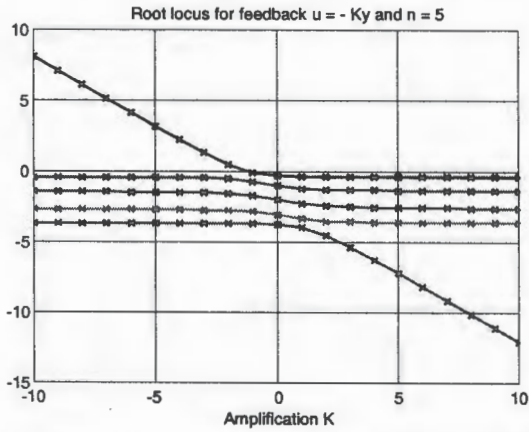
$i = 1, 2, \dots, n$. Dalej niech $y(t) = B^T x(t)$. Wtedy dodatkowo w (48) mamy $C = B^T$ (zob. uwaga 1 po (46)). Układ łańcuchowy pokazany na rys. 4 jest skończenie wymiarową aproksymacją układu typu (52) przy warunkach brzegowych Dirichleta.

Weźmy funkcjonal (Lapunowa) $V(x) = x^T x$. Dalej mamy $\dot{V}(x) = x^T [A^T + A]x + 2x^T B u$. W naszym przypadku (zob. (53) i (54)) $-[A^T + A] > 0$ jest macierzą [21, p. 301] dodatnio określoną. Zatem $\dot{V}(x) < 0$ i w konsekwencji regulator proporcjonalny

$$u(t) = -KB^T x(t), \quad K > 0, \quad K \in R, \quad (55)$$

stabilizuje system (48), (53), przy każdym $K > 0$. Innymi słowy przy każdym $K > 0$ dla $C = B^T$ mamy $\text{Re } \lambda(A - BKC) < 0$.

Praktycznie można uzyskać większy sektor dopuszczalności na K . Na przykład dla $n = 5$ oraz $R_i = R$, $C_i = C$, $RC = 1$ rozkład wartości własnych systemu zamkniętego (48), (53), (55) jest pokazany na rys. 5.



Rys. 5. Wartości własne systemu (48), (53), (55) od K .

Z analizy rys. 5 widać, że system zamknięty (48), (53) jest asymptotycznie stabilny dla $K > -1$. \square

Przykład 3. Niech w systemie (48), (53) będzie $C = B^T$. Rozważmy teraz sprzężenie zwrotne z opóźnieniem

$$u(t) = -Ky(t-\tau), \quad \tau > 0, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (56)$$

W tym przypadku system zamknięty (48), (53), (56) ma postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKB^T x(t-\tau). \quad (57)$$

Niech $n=1$ oraz $R_i = R$, $C_i = C$, $RC=1$. Jeżeli $|K| < 2$, wtedy system (57) jest asymptotycznie stabilny dla $\tau > 0$ [5, p. 74, 85]. Jeżeli $|K| > 2$, to system (57) jest asymptotycznie stabilny dla [5, p. 74, 85]

$$0 \leq \tau < \frac{\arccos(-2/K)}{\sqrt{K^2 - 4}} = \tau(K). \quad (58)$$

Na rys. 6 pokazano funkcję $\tau(K)$ w zależności od $|K|$ dla $|K| > 2$ (zob. (58)). Z kolei na rys. 7 pokazano trajektorie $y(t)$ systemu zamkniętego (48), (53), (56) przy różnych τ oraz $K = -3$. Użyto następujących oznaczeń: dla $\tau = 0.5$ symbol "o", dla $\tau = 1.0$ symbol ":" oraz dla $\tau = 1.5$ symbol $\tau = 1.5$ "-". Natomiast na rys. 8 pokazano $y(t)$ dla $K = \pm 1$ i $\tau = 1.0$.

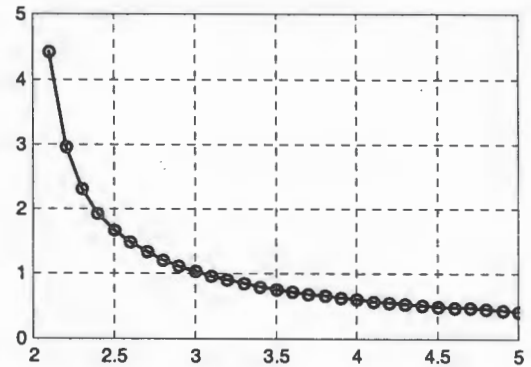
W przypadku $n > 1$ otrzymanie warunku w postaci nierówności (58) jest prawie niemożliwe. Można natomiast uzyskać pewne rezultaty metodą symulacji. \square

Przykład 4. Rozważmy teraz nasz układ (48), (53) z nieliniowym statycznym sprzężeniem zwrotnym (zob. np. [19, s. 104], [13, s. 138])

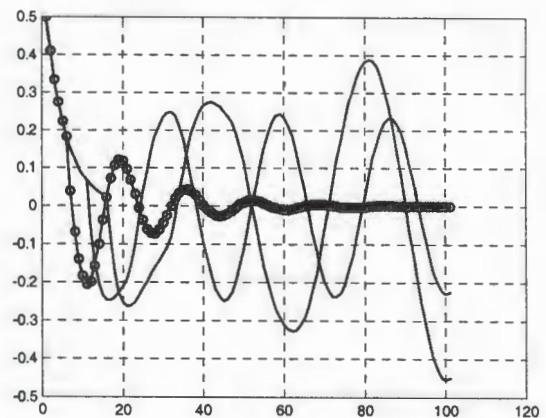
$$u(t) = f(t, y(t)), \quad (59)$$

przy czym $f \in \text{Sect}[k_1, k_2]$, czyli (zob. rys. 9)

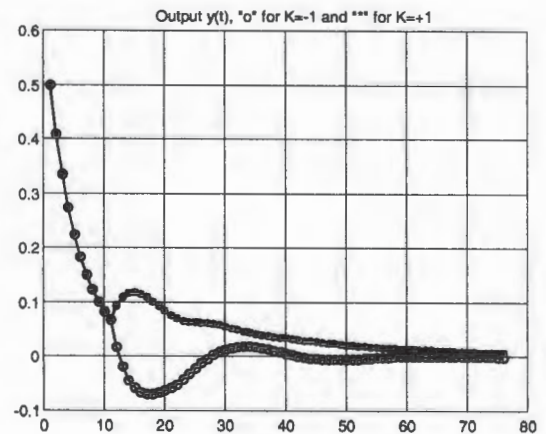
$$k_1 v^2 \leq v f(t, v) \leq k_2 v^2. \quad (60)$$



Rys. 6. Funkcja $\tau(|K|)$ występująca w (58).



Rys. 7. Wyjście $y(t)$ dla $K = -3$ i $\tau = 0.5, 1.0, 1.5$.

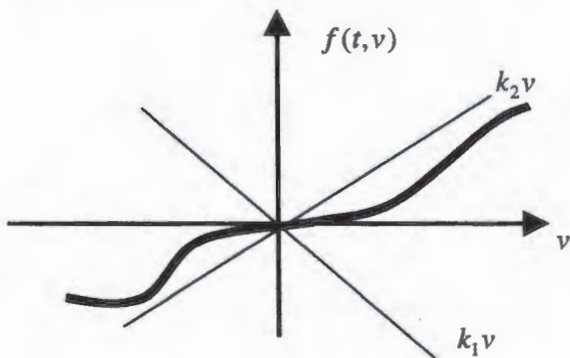


Rys. 8. Wyjście $y(t)$ dla $K = \pm 1$ oraz $\tau = 1.0$.

Niech $\dim U = \dim Y = 1$ (zob. system (48)). Transmiancja systemu skończenie wymiarowego (48), (53) ma postać $G(s) = C[sI - A]^{-1}B$. Jeżeli $k_1 < 0 < k_2$ i plot Nyquista $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ leży wewnątrz koła (zob. rys. 10)

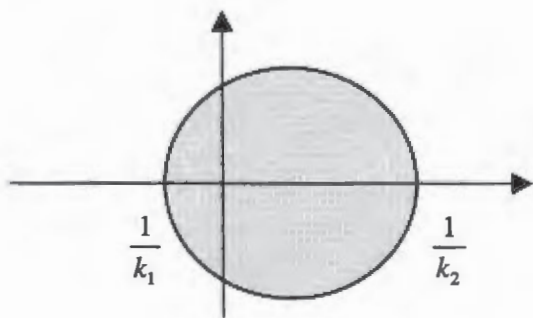
$$K \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right), \text{radius} \right), \quad \text{radius} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right), \quad (61)$$

to system zamknięty (48), (53), (59) jest globalnie asymptotycznie stabilny dla każdego $f \in \text{Sect}[k_1, k_2]$.

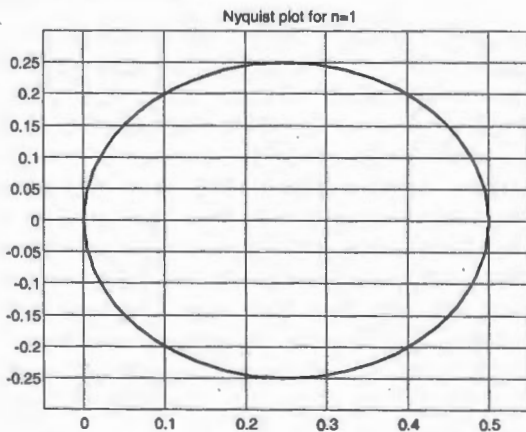


Rys. 9. Sektor $\text{Sect}[k_1, k_2]$.

Na rys. 11 pokazano plot Nyquista $G(j\omega)$ dla $n = 1$.



Rys. 10. Kryterium koła.



Rys. 11. Plot $G(j\omega)$ dla $n = 1$.

Analizując rys. 11 i podobne symulacje dla $n = 5$ i $n = 20$, stosując kryterium koła (zob. rys. 10) otrzymujemy następujące sektory dopuszczalne dla f : $k_1 < 0 < k_2 < 2$ dla $n = 1$, $k_1 < 0 < k_2 < 1.2$ dla $n = 5$, $k_1 < 0 < k_2 < 1.05$ dla $n = 20$. \square

Przykład 5. Rozważmy system (48), (53) z następującym sprzężeniem zwrotnym:

$$u(t) = f(t, y(t - \tau)), \quad \tau > 0. \quad (62)$$

Macierze $A, B, C = B^T$ dane są równościami (53) oraz $G(s) = C[sI - A]^{-1} B$. Niech

$$|G(j\omega)|^2 \leq \frac{1}{k}. \quad (63)$$

Wtedy [7, p. 111] dla każdego $\tau > 0$ system zamknięty (48), (53), (62) jest globalnie asymptotycznie stabilny dla każdego $f \in \text{Sect}[k_1, k_2]$, gdzie (zob. rys. 9)

$$k_1 = -\sqrt{k}, \quad k_2 = +\sqrt{k}. \quad (64)$$

9. ZAKOŃCZENIE

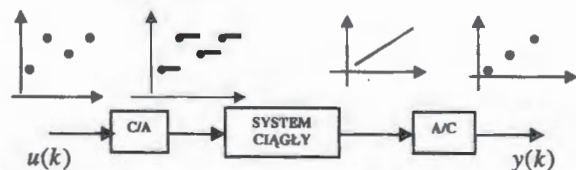
Na zakończenie poniżej kilka uwag.

Przy sterowaniu komputerowym stosuje się zazwyczaj zamianę systemu ciągłego w czasie na system dyskretny (zob. np. [19, s. 140], [22] oraz rys. 12)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) \in R^n \\ y(k) &= Cx(k), \quad u(k) \in R^r, \quad y(k) \in R^m, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (65)$$

$$A := e^{Ah}, \quad B := \int_0^h e^{At} B dt, \quad C := C$$

$$t \in [kh, (k+1)h), \quad t = kh, \quad h > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Rys. 12. Układ dyskretno – ciągły.

Do stabilizacji systemu dyskretnego (65) można stosować techniki proponowane dla systemów z czasem ciągłym.

W Laboratorium Katedry Automatyki AGH stworzono stanowiska badawcze pozwalające badać i weryfikować przedstawione algorytmy stabilizacji w czasie rzeczywistym. Powyższe algorytmy można również stosować na większą skalę przy sterowaniu obiektów rzeczywistych [12], [31]. Proponuje się wtedy zazwyczaj dwuetapowy algorytm działania: 1. Doprowadzenie do obszaru linearyzacji. 2. Stabilizacja liniowego przybliżenia. Obecna technika komputerowa umożliwia stosowanie nie tylko algorytmów sterowania z opóźnieniem, ale również z wyprzedzeniem [15, s. 491].

Obszerny przegląd literatury (do 1988) dotyczący stabilizacji można znaleźć w [19].

Praca wykonana w ramach działalności statutowej AGH nr 11 11 120 230.

Literatura

- [1] Bublik B.N., Kiriczenko H. F. (1975) *Osnovy teorii upravlenija*. Kijów.
- [2] Busłowicz M. (2004) Stabilizacja układu drabinkowego typu LC za pomocą dodatniego sprzężenia zwrotnego z opóźnieniem od wyjścia. *Prace IC-SPE TO 2004*, 2, 265-268.
- [3] Chu E.K. (2001) "Optimization and pole assignment in control system design", *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 11, 5, 1035-1053.
- [4] Długosz M., Mitkowski W., Pietrzyk W. (2003) Modelowanie i sterowanie tlenowym procesem konwertorowym. *Informatyka w Technologii Materiałów*, 3, 2. Wydawnictwo Naukowe AKAPIT (Kraków), 61-71.
- [5] Elsgolc Ł.E (1966) *Równania różniczkowe z odchylnym argumentem*. PWN, Warszawa.
- [6] Górecki H., Fuksa S., Korytowski A., Mitkowski W. (1983) *Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości*. PWN, Warszawa.
- [7] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski A. (1989): *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. PWN, Wiley, Warszawa.
- [8] Guckenheimer J., Holmes P. (1993) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 4-ed, Springer, New York.
- [9] Kaczorek T. (1998): *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT, Warszawa.
- [10] Kato T. (1966) *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, Berlin.
- [11] Klamka J. (1990) *Sterowalność układów dynamicznych*. PWN, Warszawa.
- [12] Kołek K., Mitkowski W. (2001) Praktyczna realizacja sterowania i analiza pracy węzła cieplnego z wykorzystaniem sieci neuronowych. *Informatyka w Technologii Materiałów*, 1, 3-4, Wydawnictwo Naukowe AKAPIT (Kraków), 181-188.
- [13] Kudrewicz J. (1970) *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- [14] LaSalle J., Lefschetz S. (1966) *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*. PWN, Warszawa.
- [15] Minorsky N. (1967) *Drgania nieliniowe*. PWN, Warszawa.
- [16] Mitkowski W. (1982) Stabilization of linear distributed systems. *3rd Symp. IFAC, Control of Distributed Parameter Systems*, Toulouse, France, p. IV.10-IV.13.
- [17] Mitkowski W. (1986) Feedback stabilization of second order evolution equations with damping by discrete-time input-output data. *IMACS-IFAC Symp. Model. Simul. Control Lumped and Distributed Parameter Systems*, Lille, France, 355-358.
- [18] Mitkowski W. (1988) Stabilizacja liniowych układów nieskończenie wymiarowych za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego. *Arch. Automatyki i Telemekhaniki*, 33, 4, 515-528.
- [19] Mitkowski W. (1991) *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- [20] Mitkowski W. (1999) Projektowanie systemów sterowania z wykorzystaniem równania Riccatiego. *Mat. Konferencyjne XIII Krajowej Konferencji Automatyki* (pod red. Z. Bubnickiego i J. Józefczyka), *Oficyna Wyd. Pol. Opolskiej*, tom 1, s. 171-176.
- [21] Mitkowski W. (2000) Remarks on stability of positive linear systems. *Control and Cybernetics.*, 29, 1, 295-304.
- [22] Mitkowski W. (2002) Metody projektowania układów regulacji optymalnej. *XIV Krajowa Konferencja Automatyki*, Zielona Góra, Uniwersytet Zielonogórski, Inst. Sterowania i Systemów Informatycznych, Red. Z. Bubnicki, J. Korbicz, 1, 195-204.
- [23] Mitkowski W., Skruch P. (2003) Control system of a rotating Timoshenko beam. *Archives of Control Sciences*, 13 (XLIX), 3, 281-288.
- [24] Mitkowski W., Oprędkiewicz K. (2004) A sample time assign for a discrete interval parabolic system with the two-dimensional uncertain parameter space. *Systems Science*, 30, 1, 43-50.
- [25] Mitkowski W. (2004) Stabilisation of LC ladder network. *Bull. Pol. Ac. Sci., Tech.*, 52, 2, 109-114.
- [26] Mitkowski W. (2004) Analysis of undamped second order systems with dynamic feedback. *Control and Cybernetics.*, 33, 4.
- [27] Opial Z. (1976): *Algebra wyższa*. PWN, Warszawa.
- [28] Pazy A. (1983): *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York.
- [29] Sakawa Y. (1983) Feedback stabilization of linear diffusion systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 21, 5, 667-676.
- [30] Slemrod M. (1974) A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space. *SIAM J. Control*, 12, 3.
- [31] Svetlichnyj D., Pietrzyk M., Mitkowski W. (2002) Optimization of hot working parameters assuring desired microstructure using control theory. *Proc. of the International Conference on Thermomechanical Processing: Mechanics, Microstructure & Control*, The University of Sheffield, England, Ed. E.J. Palmiere, M. Mahfouf and C. Pinna, 453-460.
- [32] Triggiani R. (1975). On the stabilization problem in Banach space. *J. Math. Anal. Appl.*, 52, 3, 383-403.

STABILISATION METHODS

Abstract: In this paper the stabilisation methods are considered. The stability conditions for closed-loop systems are given. Numerical calculations were made using the Matlab program.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2