XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

ODPORNA STABILNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIEM O LINIOWEJ STRUKTURZE NIEPEWNOŚCI*

Mikołaj BUSŁOWICZ

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail:busmiko@pb.bialystok.pl

Streszczenie: W pracy podano proste warunki odpornej stabilności dodatniego układu dyskretnego z opóźnieniem o liniowej strukturze niepewności w dwóch przypadkach: w przypadku układu o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego oraz w przypadku liniowej struktury niepewności o nieujemnych macierzach zaburzeń. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

Słowa kluczowe: Układ dyskretny, dodatni, opóźnienia, stabilność, odporna stabilność.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Problematyce stabilności takich układów są poświęcone między innymi prace [1, 5, 6, 7] (układy bez opóźnień) oraz [2, 3, 4, 8] (układy z opóźnieniami). Odporną stabilność przedziałowych dyskretnych układów dodatnich z opóźnieniami rozpatrzono w pracach [2, 3, 4]. W niniejszej pracy rozpatrzymy problem odpornej stabilności ogólniejszej klasy (niż przedziałowe) dyskretnych układów dodatnich z opóźnieniem, a mianowicie układów o liniowej strukturze niepewności. Warunki stabilności takich układów, ale bez opóźnień, podano w pracy [1].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Weźmy pod uwagę dyskretny dodatni układ liniowy stacjonarny z opóźnieniem o niepewnych parametrach, opisany jednorodnym równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0(q_0)x_i + A_1(q_1)x_{i-1},\ i \in Z_+, \tag{1a}$$

gdzie Z_+ jest zbiorem liczb całkowitych nieujemnych,

$$A_0(q_0) = A_0 + q_0E_0,\ A_1(q_1) = A_1 + q_1E_1, \tag{1b}$$

przy czym $A_0 \in \Re_+^{n\times n}$ i $A_1 \in \Re_+^{n\times n}$ ($\Re_+^{n\times n}$ jest zbiorem macierzy o rzeczywistych nieujemnych elementach) są to nominalne macierze, E_0 i E_1 są to znane stałe macierze zaburzeń zaś niepewne parametry mogą przyjmować dowolne wartości z zadanych przedziałów liczbowych, tj.

$$q_0 \in Q_0 = [q_0^-, q_0^+],\ \ q_1 \in Q_1 = [q_1^-, q_1^+], \tag{2}$$

przy czym $q_k^- \le 0$, $q_k^+ \ge 0$ dla $k = 0$ i $k = 1$.
Niepewne parametry układu (1) mogą przyjmować dowolne wartości ze zbioru

$$Q = \{q = [q_0, q_1]: q_0 \in Q_0, q_1 \in Q_1\}. \tag{3}$$

Dodatni układ (1) nazywamy układem o liniowej strukturze niepewności. Jeżeli ponadto jest spełniony warunek

$$\text{rząd}\, E_k = 1 \text{ dla } k = 0 \text{ i } k = 1 \tag{4}$$

to układ (1) będziemy nazywać układem o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego. Jeżeli natomiast macierze zaburzeń E_0 i E_1 mają nieujemne elementy, to układ (1) będziemy nazywać układem o nieujemnych macierzach zaburzeń.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że
1. macierze $A_0(q_0)$ i $A_1(q_1)$ są macierzami nieujemnymi dla dowolnych wartości niepewnych parametrów z zadanych przedziałów liczbowych, tj. $A_0(q_0) \in \Re_+^{n\times n}$, $\forall q_0 \in Q_0$ oraz $A_1(q_1) \in \Re_+^{n\times n}$, $\forall q_1 \in Q_1$,
2. nominalny układ dodatni z opóźnieniem, opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0x_i + A_1x_{i-1},\ i \in Z_+, \tag{5}$$

jest asymptotycznie stabilny, tj. wszystkie miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego

$$\det[z^2I_n - A_0z - A_1] \tag{6}$$

leżą w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

*Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

Dodatni układ (1) o niepewnych parametrach nazywamy układem odpornie stabilnym, jeżeli dla każdego $q \in Q$ wszystkie miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego

$$\det[z^2 I_n - A_0(q_0)z - A_1(q_1)] \tag{7}$$

leżą w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków koniecznych i wystarczających odpornej stabilności dodatniego układu (1) o niepewnych parametrach w przypadku liniowej struktury niepewności rzędu pierwszego oraz przy nieujemnych macierzach zaburzeń.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Definiując

$$\tilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n}, \tag{8}$$

równanie stanu dodatniego układu (1) z opóźnieniem napiszemy w postaci równania stanu równoważnego dyskretnego układu bez opóźnienia

$$\tilde{x}_{i+1} = A(q)\tilde{x}_i, \; i \in Z_+, \tag{9}$$

przy czym

$$A(q) = \begin{bmatrix} A_0(q_0) & A_1(q_1) \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \; q \in Q. \tag{10}$$

Zatem problem odpornej stabilności dodatniego układu dyskretnego (1) z opóźnieniem jest równoważny z problemem odpornej stabilności równoważnego dodatniego układu dyskretnego (9) bez opóźnienia.
Przyjmując $q = 0$ w (9) otrzymamy

$$\tilde{x}_{i+1} = A\tilde{x}_i, \; i \in Z_+, \tag{11}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Równanie (11) opisuje nominalny układ bez opóźnienia, równoważny z nominalnym dodatnim układem (5) z opóźnieniem.

Twierdzenie 1 [8, 2]. Nominalny układ dodatni z opóźnieniem, opisany równaniem stanu (5) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa równoważne sobie warunki:

- są dodatnie wszystkie współczynniki wielomianu

$$\det((z+1)I_{2n} - A) = \det[(z+1)^2 I_n - A_0(z+1) - A_1],$$

- wszystkie główne minory macierzy $I_{2n} - A$ są dodatnie.

Uogólniając twierdzenie 1 na klasę dodatnich układów z opóźnieniem o niepewnych parametrach, opisanych równaniem stanu (1), otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Dodatni układ (1) z opóźnieniem jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $q \in Q$ wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy $A(q) - I_{2n}$ są dodatnie, lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego $q \in Q$ wszystkie główne minory macierzy $S(q)$ są dodatnie, gdzie

$$S(q) = I_{2n} - A(q) = \begin{bmatrix} I_n - A_0(q_0) & -A_1(q_1) \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Zatem problem badania odpornej stabilności dodatniego układu (1) o dowolnej strukturze niepewności (nie tylko liniowej) sprowadza się do badania (dla każdego $q \in Q$) znaków wszystkich minorów głównych macierzy (13).

Zauważmy, że główne minory macierzy (13) stopnia od 1 do n są dodatnie dla każdego $q \in Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $q_0 \in Q_0$ są dodatnie główne minory macierzy $I_n - A_0(q_0)$. Zatem odporna stabilność układu bez opóźnienia, opisanego równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0(q_0)x_i, \; q_0 \in Q_0, \; i \in Z_+, \tag{14}$$

jest warunkiem koniecznym odpornej stabilności układu (1). Powyższy fakt w przypadku dodatniego układu z opóźnieniami o dokładnie znanych parametrach został wykazany w pracy [8].

Macierz (10) można napisać w postaci

$$A(q) = A + q_0\tilde{E}_0 + q_1\tilde{E}_1, \tag{15}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & E_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Z uogólnienia rezultatów pracy [8] na dodatnie układy o niepewnych parametrach wynika, że jeżeli dla pewnego $q \in Q$ macierz $A(q)$ ma na głównej przekątnej przynajmniej jeden element większy od 1, to dodatni układ (9) nie jest odpornie stabilny. Z powyższego, struktury macierzy $A(q)$ oraz z założenia, że A jest asymptotycznie stabilną macierzą nieujemną wynika następujący lemat.

Lemat 1. Układ (1) nie jest odpornie stabilny, jeżeli

$$a_{ii}^0 + \beta_{ii}^0 \geq 1, \; i = 1,2,\ldots,n, \tag{17}$$

gdzie a_{ii}^0 $(i = 1,2,\ldots,n)$ są to elementy głównej przekątnej macierzy A_0 zaś

$$\beta_{ii}^0 = \begin{cases} q_0^+ e_{ii}^0, & \text{jeżeli } e_{ii}^0 \ge 0, \\ q_0^- e_{ii}^0, & \text{jeżeli } e_{ii}^0 < 0, \end{cases} \tag{18}$$

przy czym e_{ii}^0 $(i = 1,2,\ldots,n)$ są to elementy głównej przekątnej macierzy E_0.
W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że nierówności (17) są spełnione.

Badanie odpornej stabilności dodatniego układu (1) w przypadku ogólnym liniowej struktury niepewności na podstawie twierdzenia 2 nie należy do prostych, bowiem główne minory macierzy $S(q)$ o postaci (13) są wielomianowymi funkcjami niepewnych parametrów. Poniżej wykażemy, że w pewnych przypadkach szczególnych problem badania odpornej stabilności można znacznie uprościć.

3.1. Odporna stabilność układu o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego

Weźmy pod uwagę dodatni układ (1) o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego, tzn. są spełnione warunki (4). Postępując podobnie jak w pracy [1] możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Dodatni układ (1) o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on asymptotycznie stabilny dla następujących czterech par macierzy o ustalonych elementach

$$(A_0^-, A_1^-),\ (A_0^-, A_1^+),\ (A_0^+, A_1^-),\ (A_0^+, A_1^+), \tag{19}$$

gdzie

$$A_0^- = A_0 + q_0^- E_0,\quad A_1^- = A_1 + q_1^- E_1, \tag{20a}$$

$$A_0^+ = A_0 + q_0^+ E_0,\quad A_1^+ = A_1 + q_1^+ E_1. \tag{20b}$$

Do badania asymptotycznej stabilności czterech dodatnich układów o macierzach (19) można stosować twierdzenie 1 przyjmując za macierz A kolejno następujące macierze

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_0^- & A_1^- \\ I_n & 0 \end{bmatrix},\quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} A_0^- & A_1^+ \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \tag{21a}$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} A_0^+ & A_1^- \\ I_n & 0 \end{bmatrix},\quad \tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} A_0^+ & A_1^+ \\ I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{21b}$$

Warunek podany w twierdzeniu 3 jest tylko warunkiem koniecznym odpornej stabilności dodatniego układu (1) o liniowej strukturze niepewności rzędu pierwszego w przypadku ogólnym, tzn. bez założenia (4).

3.2. Odporna stabilność układu o nieujemnych macierzach zaburzeń

Rozpatrzmy dodatni układ (1) przy założeniu, że macierze zaburzeń E_k $(k = 0,1)$ są macierzami nieujemnymi. W takim przypadku wszystkie niezerowe elementy macierzy $q_k E_k$ jednocześnie maleją lub jednocześnie rosną w zależności od zmian wartości parametru q_k.
Łatwo zauważyć, że $A_0(q_0) \in A_{I0} = [A_0^-, A_0^+]$ dla dowolnego $q_0 \in Q_0$ oraz $A_1(q_1) \in A_{I1} = [A_1^-, A_1^+]$ dla dowolnego $q_1 \in Q_1$, gdzie $A_{I0} = [A_0^-, A_0^+]$ oraz $A_{I1} = [A_1^-, A_1^+]$ są macierzami przedziałowymi zaś odpowiednie macierze krańcowe są zdefiniowane wzorami (20), przy czym $A_0^- = A_0(q_0^-)$, $A_0^+ = A_0(q_0^+)$, $A_1^- = A_1(q_1^-)$, $A_1^+ = A_1(q_1^+)$. Zgodnie z przyjętym założeniem, macierze $A_0^- = A_0(q_0^-)$ i $A_1^- = A_1(q_1^-)$ muszą być macierzami nieujemnymi.

Z powyższego wynika, że odporna stabilność dodatniego układu (1) o nieujemnych macierzach zaburzeń jest równoważna z odporną stabilnością dodatniego układu przedziałowego, opisanego równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1}, \tag{22}$$

gdzie $A_0 \in [A_0^-, A_0^+]$, $A_1 \in [A_1^-, A_1^+]$.

Uwzględniając pracę [2] otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Dodatni układ (1) o liniowej strukturze niepewności przy nieujemnych macierzach zaburzeń jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa równoważne warunki

- są dodatnie wszystkie współczynniki wielomianu

$$\det((z+1)I_{2n} - A^+) = \det[(z+1)^2 I_n - A_0^+(z+1) + A_1^+]$$

- są dodatnie wszystkie główne minory macierzy

$$S^+ = I_{2n} - A^+ = \begin{bmatrix} I_n - A_0^+ & -A_1^+ \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Z twierdzenia 4 wynika zatem, że dodatni układ (1) o liniowej strukturze niepewności przy nieujemnych macierzach zaburzeń jest odpornie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest asymptotycznie stabilny dodatni układ

$$x_{i+1} = A_0^+ x_i + A_1^+ x_{i-1},\quad i \in Z_+, \tag{24}$$

przy czym $A_0^+ = A_0(q_0^+)$, $A_1^+ = A_1(q_1^+)$.
Zauważmy, że twierdzenie 4 jest słuszne w przypadku dodatniego układu (1) o nieujemnych elementach macierzy zaburzeń E_k $(k = 0, 1)$. Spełnienie założenia (4) nie jest konieczne.

4. PRZYKŁAD

Należy zbadać odporną stabilność dodatniego układu dyskretnego z opóźnieniem, opisanego równaniem stanu (1), o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{25a}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{25b}$$

Rozpatrywany układ jest układem dodatnim wtedy i tylko wtedy, gdy macierze (20) są macierzami nieujemnymi, czyli gdy

$$-0.4 \le q_0 \le 0.4, \quad -0.2 \le q_1 \le 0.2. \tag{26}$$

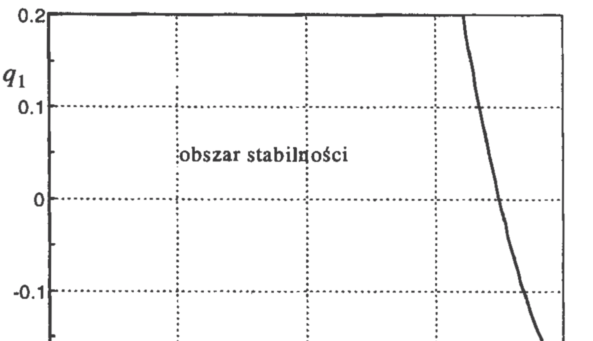
Ponieważ analizowany układ ma liniową strukturę niepewności o nieujemnych macierzach zaburzeń, do badania odpornej stabilności zastosujemy twierdzenie 4. Wyznaczając macierz (23) otrzymamy

$$S^+ = \begin{bmatrix} 0.6 - q_0 & -0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 - q_0 & -0.2 - q_1 & -0.1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Łatwo sprawdzić, że główne minory macierzy (27) są dodatnie dla

$$q_0 < 0.5 \text{ i } q_1 < 10(0.5 - q_0)^2 + q_0 - 0.7. \tag{28}$$

Rozpatrywany układ jest więc odpornie stabilnym układem dodatnim dla wartości q_0 i q_1 spełniających nierówności (26) i (28). Wyznaczają one na płaszczyźnie niepewnych parametrów obszar odpornej stabilności pokazany na rys. 1.



Rys. 1. Obszar odpornej stabilności

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano proste warunki odpornej stabilności dodatniego układu (1) o liniowej strukturze niepewności w dwóch przypadkach: przy strukturze niepewności rzędu pierwszego oraz przy nieujemnych macierzach zaburzeń. Rozważania mogą być uogólnione na dodatnie układy dyskretne z wieloma opóźnieniami.

ROBUST STABILITY OF POSITIVE DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAY WITH LINEAR UNCERTAINTY STRUCTURE

Abstract: Simple necessary and sufficient conditions for robust stability of linear positive discrete-time systems with delay with linear uncertainty structure are given in two cases: 1) unity rank uncertainty structure, 2) non-negative perturbation matrices. In particular it is shown that robust stability of the system with non-negative perturbation matrices is equivalent to the asymptotic stability of system (24). The methods proposed can be generalised to the positive systems with multiple delays.

Literatura

[1] Busłowicz M. (2002) Odporna stabilność rodziny macierzy nieujemnych o liniowej strukturze niepewności. *Mat. XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Zielona Góra*, I, 81-84.

[2] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, **52**, 2, 99-102.

[3] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Stability and robust stability of positive linear discrete-time systems with pure delay. *Proc. of the 10th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Poland*, **1**, 105-108.

[4] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays - stability and robust stability, *Pomiary Automatyka Kontrola*, 10, 9-12.

[5] Farina L., Rinaldi S. (2000) *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. Wiley, New York.

[6] Kaczorek T. (2000) *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

[7] Kaczorek T. (2002) *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag, London.

[8] Kaczorek T. (2004) Stability of positive discrete-time systems with time-delay, *Proc. 8th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, Florida USA*, 321-324.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2